Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Historický vývoj početních postupů a výpočetních technik

Vypracovala: Michaela Divíšková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

České Budějovice 2014

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za odbornou pomoc a cenné rady při zpracovávání mé diplomové práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Historický vývoj početních postupů a výpočetních technik jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 30. 4. 2014

……………………………

Michaela Divíšková

Anotace

Ve své bakalářské práci se zabývám historickým vývojem početních postupů a výpočetních technik.

V první kapitole popisuji zavedení pojmu čísla a jeho zápis. Ve druhé kapitole uvádím základní početní postupy a různé algoritmy pro matematické operace. Ve třetí kapitole se věnuji technikám počítání a pomůckám pro usnadnění výpočtů. V závěrečné kapitole se zaměřuji na počítání s periodickými racionálními a iracionálními čísly.

Annotation

In my bachelor thesis I deal with historical development of numerical methods and computational techniques.

In the first chapter, the introduction of the concept of number and the writing process. In the second chapter, I present the basic numerical methods and algorithms for a variety of mathematical operations. In the third chapter, I will devote counting techniques and aids to facilitate calculations. The final chapter, I focus on computation of periodic rational and irrational numbers.

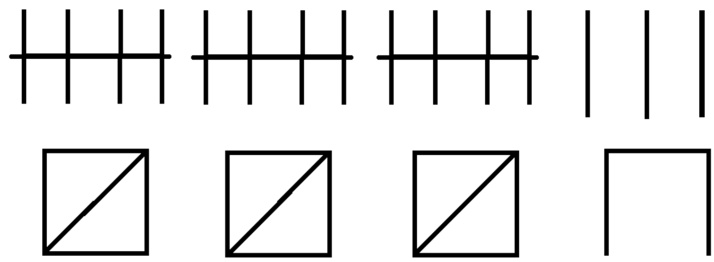
Obsah

1. Úvod – Vznik poziční desítkové soustavy

Numerační soustava obecně zahrnuje pravidla zápisu přirozených čísel. Původní zápisy obvykle vystačily jen s modelováním daného malého množství objektů (předmětů, zvířat, lidí apod.) pomocí kamenů, tvrdých plodů, zářezů na holi nebo kosti (vrubovky) nebo rýh na hliněné desce. V té době ještě lidé k vyjádření množství nepoužívali číslovek – názvů pro čísla. Nejstaršími číslovkami byly: jeden, dva, mnoho (pro tři a více objektů). Odtud zřejmě pocházejí i gramatická čísla: jednotné, dvojné a množné. [13, s. 9]

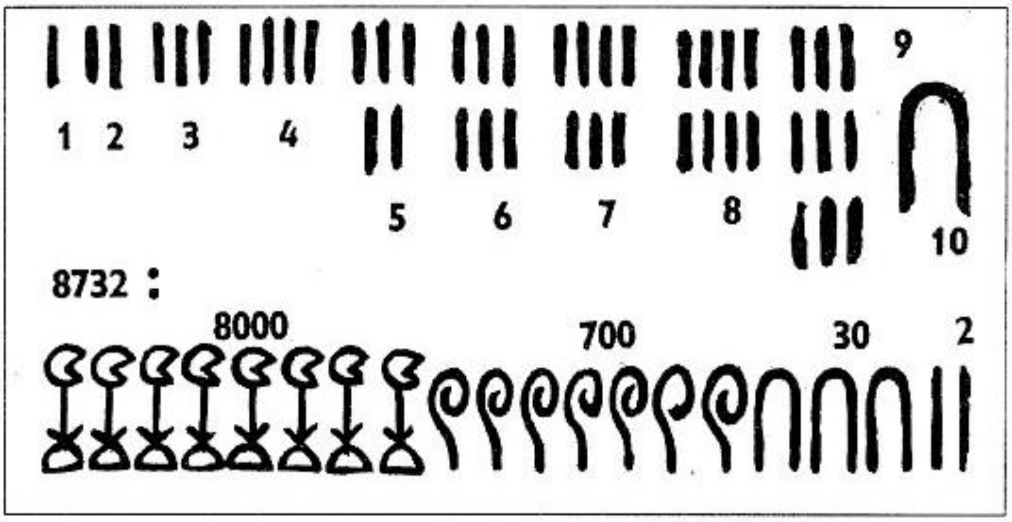
Dalším krokem k rozvoji numerace bylo prstové počítadlo, které postupně vedlo k číselné soustavě pětkové, desítkové i dvacítkové. Trvalo však ještě dlouho, než číslovky od 1 do 10 dostaly své názvy, nebo dokonce svou grafickou podobu. To bylo zatím vyjadřováno jen ukázáním vztyčených nebo jinak označených prstů.

Také **registrace přirozených čísel** vyjadřujících množství prošla velmi dlouhým vývojem. Zářezy na holi nebo kosti byly dost nepřehledné a tak se později slučovaly do menších skupin – obvykle po pěti. Tak se vytvořil základ pětkové numerační soustavy. Na obr. 1 je ukázka dvou druhů zápisu čísla 18 v pětkové soustavě. [9, s. 11, 13, 18, 19]



Obr. 1 – Dva druhy zápisu čísla 18 v pětkové soustavě – volně podle [9]

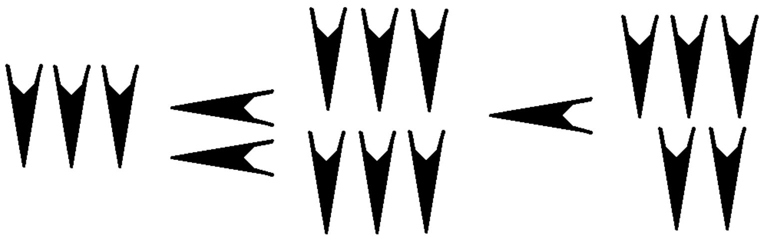
V **Egyptě** asi 3.000 let před n. l. již používali soustavu desítkovou pro zápis poměrně velkých čísel. Pro čísla od 1 do 9 neměli žádné číslice a zapisovali je pomocí svislých čárek. Využívali však poznatek, že člověk je schopen jediným pohledem určit počet předmětů, pokud nepřesahuje čtyři vedle sebe. Větší množství předmětů už musí být rozděleno na více maximálně čtyřčlenných skupin. Horní část následujícího obrázku (obr. 2) ukazuje zápis čísel 1 až 9.



Obr. 2 – Egyptský zápis čísel – volně podle [9]

Pro každou mocninu čísla 10 měli Egypťané zvláštní hieroglyfický znak, který se v potřebném množství od 1 do 9 opakoval, ale už nikoli v konfiguracích uvedených u jednotek. Zápis čísla 8 732 je uveden v dolní části předchozího obrázku. Tato numerační soustava, i když byla desítková, neumožňovala zápis libovolně velkého čísla, protože poslední hieroglyf – symbol boha Slunce Ra – vyjadřoval hodnotu 10^7.

Sumerové a později Babyloňané asi 2 000 let před n. l. používali desítko-šedesátkovou soustavu, ale pouze dvou „číslic“. Řád nultý (60^0) zahrnoval hodnoty od 1 do 59, řád první (60^1) hodnoty od 60 do 3 599, řád druhý (60^2) pak hodnoty od 3 600 do 215 999 atd. Protože neměli 60 číslic, ale pouze jen 2 a později 3 (1, 10 a 0), nemůže být jejich numerační soustava považována za důsledně poziční šedesátkovou. Uvnitř každého řádu se totiž jednotky sdružovaly do desítek. Protože Babyloňané používali klínového písma, i jejich číslice byly znázorňovány jako různé klíny. Číslo 1 se zapisovalo jako klín svislý orientovaný dolů, číslo 10 jako klín ležatý orientovaný doleva. Řády nebyly od sebe formálně oddělovány, jen se dodržovala zásada, že uvnitř řádu se píší napřed jednotky a pak desítky. Na obr. 3 vidíme, že čísla se zapisovala počínaje nejvyšším řádem odleva doprava podobně jako v Egyptě.



$$\mathbf{3 \cdot 60^2 \; + \; 26 \cdot 60^1 + \; 15 \cdot 60^0 \; = \; 12\,375}$$

Obr. 3 – Sumerský zápis čísel – volně podle [1]

Protože hranice mezi řády nebyla explicitně vyznačena, mohl být zápis chápán víceznačně a obvykle byl konfrontován kontextem. Například zápis na obr. 4 mohl být chápán jako $\mathbf{2 \cdot 60^2 \; + \; 22 \cdot 60^1 \; + 11 \cdot 60^0 \; = \; 8\,531}$

ale také $\mathbf{2 \cdot 60^3 \; + \; 12 \cdot 60^2 \; + \; 10 \cdot 60^1 \; + \; 11 \cdot 60^0 \; = \; 475\,811}$

Obr. 4 – Sumerský zápis čísel

V babylonské numerační soustavě byl poprvé v historii použit znak pro prázdný řád, v našem slova smyslu „nula“. Bohužel jen uprostřed zápisu. Měl tvar dvou malých ležatých klínů opačně orientovaných než klín pro 10.

Následující zápis (obr. 5)

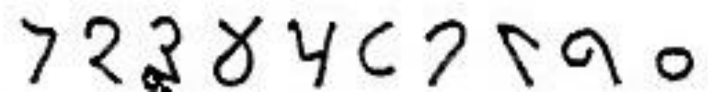
Obr. 5 – Sumerský zápis s nulou

mohl být přečten jako $13 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 21 \cdot 60^0 = 46\,821,$

ale také jako $13 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 2\,809\,260$

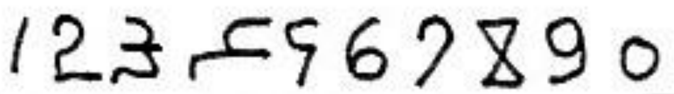
Přes všechny nedostatky babylonské početní soustavy musíme říci, že je základem poziční numerační soustavy, ve které každá „číslice“ vyjadřuje nejen počet jednotek, ale svým umístěním v zápisu i řád těchto jednotek.

O **indické** starověké matematické kultuře nelze obecně mluvit, protože na území indického subkontinentu existovalo mnoho různých numeračních soustav. Pro naši současnou desítkovou numerační soustavu má význam se zmínit o systému „gwalior“ (obr. 6) ze 7. stol. n. l., který již používal devíti číslic a poprvé okrouhlou nulu. [4, I/35]



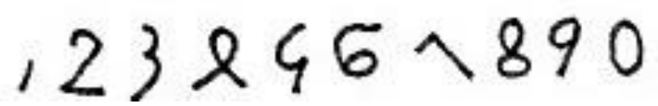
Obr. 6 – Systém gwalior – volně podle [4, I/35]

Dá se říci, že tam je asi základ naší numerace. Indické vzory a jejich západoafrická podoba „gobar“ (obr. 7) se přenesly prostřednictvím arabských obchodníků v 9. a 10. století do Evropy.



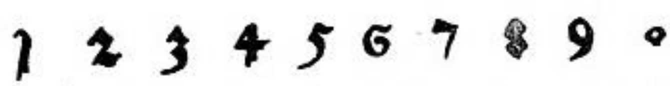
Obr. 7 – Systém gobar – volně podle [4, I/35]

Podoba číslic používaných v 15. stol. (obr. 8) u nás se ustálila na tvar.



Obr. 8 – Systém číslic používaných v 15. stol – volně podle [4, I/35]

Ten nabyl vlivem rozšíření knihtisku téměř současné podoby (obr. 9).



Obr. 9 – Systém zjednodušených čísel knihtiskem – volně podle [4, I/35]

Tato soustava deseti číslic je skutečně poziční a umožňuje zapsat libovolně velké přirozené číslo. S použitím řádové (desetinné) čárky, kterou už znali Babyloňané, tak můžeme zapsat i libovolné číslo racionální. Poziční desítková numerační soustava umožnila vytvoření řady důmyslných početních postupů – algoritmů, z nichž mnohé používáme dodnes, nebo se staly základem programů pro počítací stroje.

2. Základní početní postupy

2.1 Vznik a vlastnosti algoritmů pro počítání

Pojem **algoritmu** je možné jen obtížně definovat. Obvykle jím rozumíme přesně určený postup složený z jednoznačně definovaných kroků, kterým při dodržení jejich určeného pořadí dospějeme k požadovanému výsledku v konečném aktuálním čase. [6, s. 191]

Algoritmus je charakterizován stanovenými vlastnostmi a požadavky:

a) Elementárnost a determinovanost kroků

b) Determinovanost pořadí kroků

c) Konečnost postupu

d) Rezultativnost

e) Hromadnost použití

Slovo algoritmus vzniklo nepřesnou latinskou transkripcí jména tádžického učence Abu Abdaláha Mohameda ben Musa al-Chorezmí, který žil v 9. stol. a pocházel z Chorezemského chanátu. Užíval zkráceného jména al-Chorezmí (Ten z Chorezmu). Byl pozván kalifem Almasurem do Bagdádu, aby tam pracoval a bádal v „Domu Moudrosti“. V letech 800 až 825 vytvořil dva spisy, z nichž první „Aritmetika“ z roku 820 začíná v latinském překladu, který v roce 1140 pořídil Jan ze Sevilly, slovy: „Algoritmi dicit…“ (al-Chorezmí praví…). Tento spis obsahuje několik set početních postupů, a tak slovo algoritmus se obecně ujalo jako označení početního a později i obecnějšího přesně určeného postupu. [1, s. 83]

Algoritmy existovaly samozřejmě už mnohem dříve, např. už ve starém Egyptě. Ale teprve mnohem později byly formulovány jejich požadované vlastnosti – především konečnost postupu, rezultativnost a hromadnost použití.

2.2 Algoritmy pro sčítání a odčítání

Po vytvoření poziční desítkové numerační soustavy se výpočty součtů a rozdílů prováděly podle zásady, že sčítat a odčítat lze jen hodnoty stejných řádů (desítky s desítkami, stovky se stovkami atd.). Početní výkon **sčítání** se dříve označoval názvem slučování (lat. adice). Sčítaná čísla se psala pod sebe s dodržováním zásady, že pod sebou stojí číslice stejných řádů. Součet se zapisoval nad dané sčítance. Odtud asi pochází název „summa“ (z lat. summus = nejvyšší). Až asi do 16. stol. se začínalo sčítat zleva doprava – tzv. indický postup. Pochopitelně se musel vznikající součet postupně upravovat mazáním nebo škrtáním. [1, s. 50] Ukážeme si indický zápis sčítání na úloze 1 865 + 3 727:

$$\begin{array}{l} \\ \underline{4} \\ 1\,865 \\ 3\,727 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 \\ \underline{\cancel{4}\,5} \\ 1\,865 \\ 3\,727 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 \\ \underline{\cancel{4}\,58} \\ 1\,865 \\ 3\,727 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5\;\;9 \\ \underline{\cancel{4}\,5\cancel{8}2} \\ 1\,865 \\ 3\,727 \end{array}$$

Teprve v 17. stol. se začal používat současný algoritmus, tedy postup zprava doleva, ve kterém se už nemusely provádět korekce dílčích výsledků a součet se zapisoval pod sčítance.

Rozvinutý zápis sčítání 1 865 + 3 727 má následující podobu:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 \\ 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \\ \hline 4 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 12 \cdot 10^0 \\ 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \end{array}$$

Zkrácený zápis tohoto postupu je pak:

$$\begin{array}{r} 1\,865 \\ 3\,727 \\ \hline 5\,592 \end{array}$$

Odčítání, původně nazývané ubírání (z lat. subtrakce), se provádělo analogickým postupem jako sčítání, ale vznikaly tu trochu složitější situace. Podobně jako u sčítání se nejprve postupovalo zleva doprava. Při korekci se zmenšovalo číslo vyššího řádu, což nebylo vždy zcela pochopeno. Odčítání bylo podle situace interpretováno nejen jako **ubírání**, ale také jako **dočítání**. [1, s. 51]

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
 & \qquad & 1 & \qquad & 1 & \qquad & 1\ \ 6 \\
\underline{2} & & \underline{\cancel{2}\,8} & & \underline{\cancel{2}\,87} & & \underline{\cancel{2}\,8\cancel{7}5} \\
5\,592 & & 5\,592 & & 5\,592 & & 5\,592 \\
-\ 3\,727 & & -\ 3\,727 & & -\ 3\,727 & & -\ 3\,727
\end{array}
$$

I tento způsob odčítání byl upraven v 17. stol. na současný a postupovalo se zprava doleva. Rozvinutý zápis odčítání nabyl následující podobu:

$$
\begin{array}{rrrr}
5 \cdot 10^3 & +\ 5 \cdot 10^2 & +\ \ 9 \cdot 10^1 & +\ \ 2 \cdot 10^0 \\
-\ 3 \cdot 10^3 & -\ 7 \cdot 10^2 & -\ \ 2 \cdot 10^1 & -\ \ 7 \cdot 10^0 \\
\hline
4 \cdot 10^3 & +\ 15 \cdot 10^2 & +\ \ 8 \cdot 10^1 & +\ 12 \cdot 10^0 \\
-\ 3 \cdot 10^3 & -\ \ 7 \cdot 10^2 & -\ 2 \cdot 10^1 & -\ \ 7 \cdot 10^0 \\
\hline
1 \cdot 10^3 & +\ \ 8 \cdot 10^2 & +\ 6 \cdot 10^1 & +\ \ 5 \cdot 10^0
\end{array}
$$

Realizace zkráceného zápisu odčítání ale nekoresponduje úplně se zápisem rozvinutým:

$$
\begin{array}{r}
5\,592 \\
-\ 3\,727 \\
\hline
1\,865
\end{array}
$$

Hlavní potíž je v tom, že počtář si také nahradil číslo 2 v řádu jednotek menšence číslem 12, ale nezmenšil číslo 9 v řádu desítek na 8. Naopak zvětšil číslo 2 v řádu desítek menšitele na 3. Tato úprava byla dost těžko pochopitelná a odčítání se tak jevilo jako mnohem obtížnější než sčítání. Úprava se opírala o známou poučku, že rozdíl dvou čísel se nezmění, jestliže obě současně zvětšíme nebo zmenšíme o několik jednotek.

Pokusem o usnadnění odčítání byly metody aplikující tzv. **desítkový doplněk** [1, s. 52]. Ukážeme si to na jednodušším příkladu:

92	Číslo 7 v řádu jednotek od čísla 2 odečíst nelze.
- 27	Stanovíme desítkový doplněk k číslu 7, tj. číslo 3.
65	Číslo 3 přičteme k číslu 2 a pod čáru zapíšeme číslo 5.
	Číslo 2 v řádu desítek zvětšíme o 1 a vzniklé číslo 3 odečteme od 9.

Velmi problematickou oblastí algoritmů sčítání a odčítání je kontrola správnosti výpočtu. Nejběžnější **kontrolou sčítání** je buď opakování výpočtu, nebo výpočet provedený po záměně sčítanců. Ani jedna z těchto metod však není úplně spolehlivá. Pokud výsledek zkoušky souhlasí s původním výsledkem, může to být způsobeno i tím, že děláme opakovaně stejnou chybu. Jestliže se výsledek zkoušky liší od původního výpočtu, pak je těžké rozhodnout, který je správný. Obvykle pak následuje nové opakování výpočtu, jehož výsledek se pravděpodobně shoduje s jedním z předchozích výsledků, ale je to ten správný?

Kontrola odčítání se kromě opakování výpočtu také provádí sečtením rozdílu a menšitele. Součet by se měl shodovat s menšencem. I zde vznikají podobné problémy jako u sčítání, ale dá se říci, že zmíněná kontrola odčítání sčítáním je výrazně spolehlivější.

Zajímavou metodou kontroly výpočtů je tzv. **devítková zkouška** [5, s. 34]. Opírá se o práci se zbytkovými třídami modulu 9. Ukážeme si to na příkladu sčítání:

4 386	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 3
517	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 4
4 903	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 7

Zdá se, že výpočet je správný, protože 3 + 4 = 7.

Nevýhodou této zkoušky je, že sice odhalí chybný výpočet, jestliže výše uvedená rovnost neplatí, ale nepotvrdí správnost výpočtu, jestliže zmíněná rovnost platí. Viz následující příklad chybného výpočtu:

4 386	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 3
517	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 4
4 507	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 7

Zdá se, že výpočet je správný, protože 3 + 4 = 7, ale není.

Podobně lze aplikovat devítkovou zkoušku i na odčítání:

5 073	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 6
– 1 256	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 5
3 817	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 1

Zdá se, že výpočet je správný, protože 6 – 5 = 1.

Jestliže se při odčítání stane, že zbytek menšence je menší než zbytek menšitele, postupujeme takto:

5 070	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 3 + 9
– 1 256	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 5
3 814	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 7

Zdá se, že výpočet je správný, protože (3 + 9) – 5 = 7

Podobně jako pro aplikaci devítkové zkoušky pro sčítání platí i pro odčítání podobná omezení.

Zbývá zodpovědět otázku, proč při této zkoušce se používá právě modulu 9. Je tomu tak proto, že určit zbytek při dělení libovolného přirozeného čísla devíti lze pomocí úplného ciferného součtu, aniž bychom dělení prováděli.

Číslo 3 974 dává při dělení číslem 9 zbytek 5, protože úplný ciferný součet je 5.

$$3 + 9 + 7 + 4 = 23 \qquad 2 + 3 = 5$$

Číslo 3 978 je dělitelné devíti, a proto dává při dělení číslem 9 zbytek 0. Úplný ciferný součet však nemůže být 0.

$$3 + 9 + 7 + 8 = 27 \qquad\qquad 2 + 7 = 9$$

Při dělení devíti nemůže být zbytek 9. Znamená to, že dělení vyšlo beze zbytku.

2.3 Algoritmy pro násobení

I když násobení bylo původně vnímáno jako úspornější sčítání několika stejných sčítanců, byly všechny později objevené algoritmy mnohem složitější než početní postupy pro sčítání. Zatím co u sčítání se operovalo vždy jen s jednocifernými čísly stejných řádů, tady už je postup mnohem komplikovanější. Cesta k současnému formalizovanému algoritmu pro násobení byla však hodně dlouhá.

Násobení bylo zpočátku prováděno jen pomocí **duplace** (zdvojení) a sčítání. Princip tohoto postupu pochází již ze 17. stol. před n. l., kdy byl používán ve starém Egyptě. V ukázce nebudeme používat hieroglyfů, ale arabských číslic, abychom snáze pochopili jeho podstatu. [6, s. 234]

83 násobeno	53
1. činitel – pasívní vyjadřuje počet předmětů	2. činitel – aktivní vyjadřuje počet elementárních operací – „operátor“

Duplace:	**83**		**1** krát	Z operátorů 1 až 32
	166		2 krát	složíme operátor 53
	332		**4** krát	1 + 4 + 16 + 32 = 53
	664		8 krát	
	1 328		**16** krát	
	2 656	už stačí	**32** krát	
			53 < 64 krát	

Proto součet 83 + 332 +1 328 + 2 656 = **4 399 je součinem 83 · 53**

Z dnešního pohledu byl operátor 53 zapsán ve dvojkové numerační soustavě $110101_{(2)}$ a násobení $83 \cdot 53$ bylo provedeno výpočtem $83_{(10)} \cdot 110101_{(2)}$.

Indický způsob násobení v poziční desítkové soustavě podobně jako sčítání začínal zleva doprava a dílčí výsledky se opravovaly škrtáním. K zápisu výpočtu je však nutné mít dost místa i nad zapsanou úlohou. Nad zápis činitelů se totiž zapisují dílčí součiny a korekce předchozích výsledků se provádějí škrtáním. Pod zápisem činitelů se vyznačuje posun pasívního činitele. Ukážeme si příklad násobení **235 · 418.** [1, s. 54-55]

1. krok – zápis úlohy

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & & \end{array}$$

2. krok – násobení čtyřmi

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 4 & 0 & & \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & & \end{array}$$

3. krok – posun čísla **2 3 5** o jedno místo doprava

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 4 & 0 & & \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & 5 & \\ & 2 & 3 & & \end{array}$$

4. krok: násobení jednou

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & & \\ 9 & \cancel{4} & \cancel{0} & 5 & \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & 5 & \\ & 2 & 3 & & \end{array}$$

5. krok: posun čísla **2 3 5** o jedno místo doprava

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & & \\ 9 & \cancel{4} & \cancel{0} & 5 & \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & 5 & 5 \\ & 2 & 3 & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

6. krok: násobení osmi:

$$\begin{array}{ccccc} & & \boxed{\mathbf{2}} & & \\ & \boxed{\mathbf{8}} & \cancel{6} & \boxed{\mathbf{3}} & \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & 9 & \\ \boxed{\mathbf{9}} & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{5} & \boxed{\mathbf{0}} \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & 5 & 5 \\ & 2 & 3 & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

235 · 418 = 98 230

Protože škrtání při korekturách zvláště u větších činitelů činilo značné potíže a vznikaly často chyby, mnozí počtáři rozkládali některého činitele na menší čísla a dílčí součiny pak sečetli. Užívali tak vlastně distributivního zákona. [6, s. 236] Postup si ukážeme na úloze

$$\mathbf{356 \cdot 38 = 13\ 528}$$

násobení **356 · 30**

$$\begin{array}{ccccc} & & \boxed{\mathbf{6}} & & \\ \boxed{\mathbf{1}} & \boxed{\mathbf{0}} & \cancel{5} & \boxed{\mathbf{8}} & \\ & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{0} & \boxed{\mathbf{0}} \\ & & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & & 3 & 3 & \end{array}$$

násobení **356 · 8**

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{\mathbf{8}} & \boxed{\mathbf{4}} & \\ \boxed{\mathbf{2}} & \cancel{4} & \cancel{0} & \boxed{\mathbf{8}} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ & \mathbf{8} & 8 & 8 \end{array}$$

sčítání **10 680 + 2 848**

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{\mathbf{3}} & \boxed{\mathbf{5}} & & \\ \boxed{\mathbf{1}} & \cancel{2} & \cancel{4} & \boxed{\mathbf{2}} & \boxed{\mathbf{8}} \\ 1 & 0 & 6 & 8 & 0 \\ & 2 & 8 & 4 & 8 \end{array}$$

Ve 12. stol. vytvořil indický matematik **Bhaskari** algoritmus násobení později nazývaný jeho jménem. Tento postup zjednodušuje výše uvedený algoritmus plný škrtání číslic. Pro srovnání si ho ukážeme opět na úloze **235 · 418 = 98 230**. [1, s. 58-59]

Zapíšeme nejprve pasívního činitele **235** a pak druhého (aktivního) činitele na proužek papíru v opačném pořadí číslic. Proužek položíme pod napsaného činitele a budeme ho postupně posouvat zleva doprava:

1. pozice

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & & \end{array}$$

2. pozice

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \end{array}$$

3. pozice

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{array}$$

4. pozice

2 3 5
 $\boxed{\mathbf{8\ 1\ 4}}$

5. pozice

2 3 5
  $\boxed{\mathbf{8\ 1\ 4}}$

Zápis výpočtu:

4 · 2	**8**				
1 · 2 + 4 · 3	**1**	**4**			
8 · 2 + 1 · 3 + 4 · 5		**3**	**9**		
8 · 3 + 1 · 5			**2**	**9**	
8 · 5				**4**	**0**
součin	**9**	**8**	**2**	**3**	**0**

Tab. 1 - Zápis výpočtu metodou Bhaskari

Benátčané používali algoritmus násobení rovněž indického původu, který upravil Luca Pacioli a nazval ho „multiplicare gelosia“ (z lat. gelosia = žárlivost). Tento postup se pak stručně označoval jen slovem **gelosia.** Protože schéma tohoto postupu připomíná dlaždici, označoval se také jako „multiplicare per gratiola“ (násobení po způsobu dlaždice) nebo „multiplicare per quadrilatero (násobení ve čtvercích). [1, s. 56-57] Zmíněný postup si ukážeme na úloze.

2 783 · 324 = 901 692

		2	**7**	**8**	**3**	
		0 / **6**	**2** / **1**	**2** / **4**	**0** / **9**	**3**
		0 / **4**	**1** / **4**	**1** / **6**	**0** / **6**	**2**
		0 / **8**	**2** / **8**	**3** / **2**	**1** / **2**	**4**
9	**0**	**1**	**6**	**9**	**2**	

Tab. 2 - Ukázka metody gelosia

Obratní benátští počtáři používali zjednodušenou metodu bhaskari, jejíž zápis se označoval jako „multiplicare per crocetta“ (z lat. crocetta = křížek). Užívání této metody však vyžaduje více zkušeností a představivosti. Ukážeme si ji na úloze **3 035 · 4 128 = 12 528 480**. Zvolili jsme tentokrát čísla čtyřciferná, abychom metodu lépe objasnili.

3 0 3 5 4 1 2 8	$8 \cdot 5 = 4\,\boxed{0}$	jednotky
3 0 3 5 4 1 2 8	$4 + (8 \cdot 3 + 2 \cdot 5) = 3\,\boxed{8}$	desítky
3 0 3 5 4 1 2 8	$3 + (8 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 1\,\boxed{4}$	stovky
3 0 3 5 4 1 2 8	$1 + (8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = 4\,\boxed{8}$	tisíce
3 0 3 5 4 1 2 8	$4 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3) = 2\,\boxed{2}$	desetitisíce
3 0 3 5 4 1 2 8	$2 + (1 \cdot 3 + 4 \cdot 0) = \boxed{5}$	statisíce
3 0 3 5 4 1 2 8	$4 \cdot 3 = \boxed{12}$	milióny

Tab. 3 - Ukázka metody bhaskari

I současně používaný početní postup pro písemné násobení prodělal řadu dílčích úprav. Až do 50. let 20. stol. se děti ve školách učily násobit následujícím způsobem:

```
235 x 418          nebo        235 x 418
940                           1880
 235                          235
  1880                       940 . .
98230                        98230
```

Tento postup tzv. německý byl používán v tehdejším Rakousku-Uhersku a v německých státech. Současný na školách používaný postup byl zaveden u nás v roce 1953. Byl předtím již používán ve Francii a v tehdejším Sovětském svazu.

Kontrolu výsledků násobení můžeme provést podobně jako u sčítání prostým opakováním výpočtu nebo výpočtem se záměnou činitelů. Pro hrubou kontrolu můžeme použít odhad.

Ukážeme si ještě použití **devítkové zkoušky** pro výše uvedený výpočet:

235	$2 + 3 + 5 = 10$	$1 + 0 = 1$
418	$4 + 1 + 8 = 13$	$1 + 3 = 4$
98 230	$9 + 8 + 2 + 3 + 0 = 22$	$2 + 2 = 4$

Zdá se, že výpočet je správný, protože $1 \cdot 4 = 4$.

2.4 Algoritmy pro dělení

Dělení se původně provádělo buď půlením (mediací), nebo opakovaným ubíráním (subtrakcí).

Také manipulativní činnosti primitivních lidí provádějících rozdělování předmětů se realizovaly buď na principu tvoření stejně početných množství, aniž se předem vědělo, kolik „porcí“ vznikne, nebo podělováním po jednom kuse, až se celkové množství vyčerpalo.

Početní postupy pro dělení byly vždy považovány za nejobtížnější početní operaci a písemné dělení s víceciferným čísly se ve středověku učilo jen na některých univerzitách. [1, s. 60]

Ve 13. stol. pronikl do Evropy algoritmus dělení, který pocházel podobně jako všechny předchozí algoritmy ze spisu al-Chorezmí. Protože numerický zápis tohoto výpočtu připomínal loďku s kormidlem, stožárem a plachtou, dostal jméno **galea** (loďka) nebo batella (člun). [1, s. 60-62] Postup si ukážeme na úloze **545 394 : 815**.

Dělitel se napíše pod dělitele tak, aby prvá číslice dělitele byla pod první číslicí dělence. Pokud však je dělitel větší než příslušné *n*-číslí dělitele, posune se dělitel o jedno místo doprava (viz následující zápis):

5 4 5 3 9 4 | 6
8 1 5

odhad: 5 453 : 815 je asi 6

5 6
0 ~~6~~ ~~9~~
5 4 5 3 9 4 | 6
8 1 5

Počítáme a zapisujeme: 6·8 = 48 54 – 48 = 6
6·1 = 6 15 – 6 = 9
6·5 = 30 93 – 30 = 63

5 6
0 ~~6~~ ~~9~~
5 4 5 **3 9 4** | **66**
8 1 5 **5**
8 1

Posuneme dělitele o jedno místo doprava a provedeme odhad: 5 639 : 815 je asi 6

7
0 ~~8~~
~~5~~ ~~6~~ **4**
0 ~~6~~ ~~9~~ ~~7~~
5 4 5 **3 9 4** | **66**
8 1 5 **5**
8 1

Počítáme a zapisujeme: 6·8 = 48 56 – 48 = 8
6·1 = 6 83 – 6 = 77
6·5 = 30 79 – 30 = 49

7
0 $\cancel{8}$
$\cancel{5}$ $\cancel{6}$ **4**
0 $\cancel{6}$ $\cancel{9}$ $\cancel{7}$
5 4 5 3 **9 4** | **669**
8 1 5 5 **5**
8 1 **1**
8

Posuneme dělitele o jedno místo doprava a provedeme odhad: 7 494 : 815 je asi 9

0
$\cancel{7}$ $\boxed{1}$
0 $\cancel{8}$ $\cancel{2}$
$\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{4}$ $\boxed{5}$
0 $\cancel{6}$ $\cancel{9}$ $\cancel{7}$ $\cancel{0}$ $\boxed{9}$
5 4 5 3 9 4 | **669**
8 1 5 5 **5**
8 1 **1**
8

Počítáme a zapisujeme: 9·8 = 72 74 – 72 = 2
9·1 = 9 29 – 9 = 20
9·5 = 45 204 – 45 = 159

neúplný podíl je **699**
zbytek je **159**

Platí: **5 453 = 815 · 669 + 159**

Současná podoba algoritmu písemného dělení nedoznala od počátku obecného používání významných změn. Pouze v 50. letech 20. stol. někteří metodici matematiky kritizovali zápis dělení

3 5 6 : 2 5 = 14
1 0 6
6

proto, že zapisované rovnítko není oprávněné, neboť **3 5 6 : 2 5 ≠ 14**. Prosadili, aby v učebnicích se při dělení se zbytkem nepoužívalo rovnítko, ale tzv. „**zátrh**“. Výše uvedený zápis pak vypadal takto:

3 5 6 : 2 5 ⌊14
1 0 6
6

Naštěstí se tento všeobecně odsuzovaný způsob zápisu dlouho neudržel.

Zkouška výpočtu dělením se obvykle provádí kontrolou rovnosti: $\boldsymbol{a = b \cdot c + z}$, kde číslo $\boldsymbol{a}$ je dělenec, $\boldsymbol{b}$ je dělitel a $\boldsymbol{z}$ je zbytek.

I zde můžeme použít **devítkovou zkoušku**, pokud si uvědomujeme omezenost její validity.

5 4 5 3 9 4 = 8 1 5 · 6 6 9 + 1 5 9

5+4+5+3+9+4 = 30 3+0 = $\boxed{3}$
8+1+5 = 14 1+4 = 5 5 · 3 + 6 = 21 2+1 = $\boxed{3}$
6+6+9 = 21 2+1 = 3
1+5+9 = 15 1+5 = 6

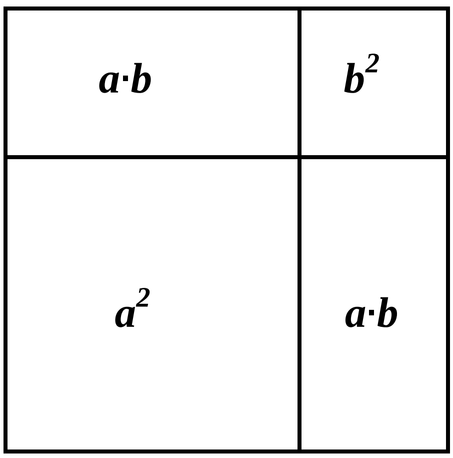
2.5 Algoritmy pro výpočet druhé mocniny a odmocniny

Navrhnout početní postup pro **výpočet druhé mocniny** se ve své době nejevilo jako akutní potřeba. Stačilo totiž vynásobit dané číslo samo sebou. Přesto takový algoritmus vznikl. Bylo však otázkou, zda objevený postup je efektivnější než násobení stejných činitelů.

Umocňování dvojciferného čísla vycházelo ze vztahu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

kde číslo a představovalo počet desítek a číslo b počet jednotek. Tento vztah byl interpretován také geometricky a je zobrazen na obr. 10. [7, s. 8-10]



Obr. 10 – Geometrické znázornění vztahu $(a+b)^2$ - volně podle [7, s. 8]

Výpočet si ukážeme na úloze **39^2**. $(30 + 9)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 9 + 9^2$

Odtud plyne výpočet druhé mocniny podle zmíněného algoritmu:

$$\begin{array}{rcr} \multicolumn{3}{l}{\underline{39^2 = (30+9)^2}} \\ 30^2 & = & 900 \\ 2 \cdot 30 \cdot 9 & = & 540 \\ 9^2 & = & 81 \\ \hline & & 1521 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rcr} \multicolumn{3}{l}{\underline{39^2}} \\ 3^2 & = & 9 \\ 2 \cdot 3 \cdot 9 & = & 54 \\ 9^2 & = & 81 \\ \hline & & 1521 \end{array} \qquad \text{násobení:} \quad \begin{array}{r} 39 \\ \underline{\cdot\, 39} \\ 351 \\ \underline{117} \\ 1521 \end{array}$$

Uvedené srovnání algoritmů umocňování a násobení dvojciferných čísel není pro určení efektivity průkazné. Proti algoritmu umocňování mluví jen fakt, že počtář se musí naučit ještě jeden nový postup navíc a pokud ho často nebude používat, tak ho zapomene.

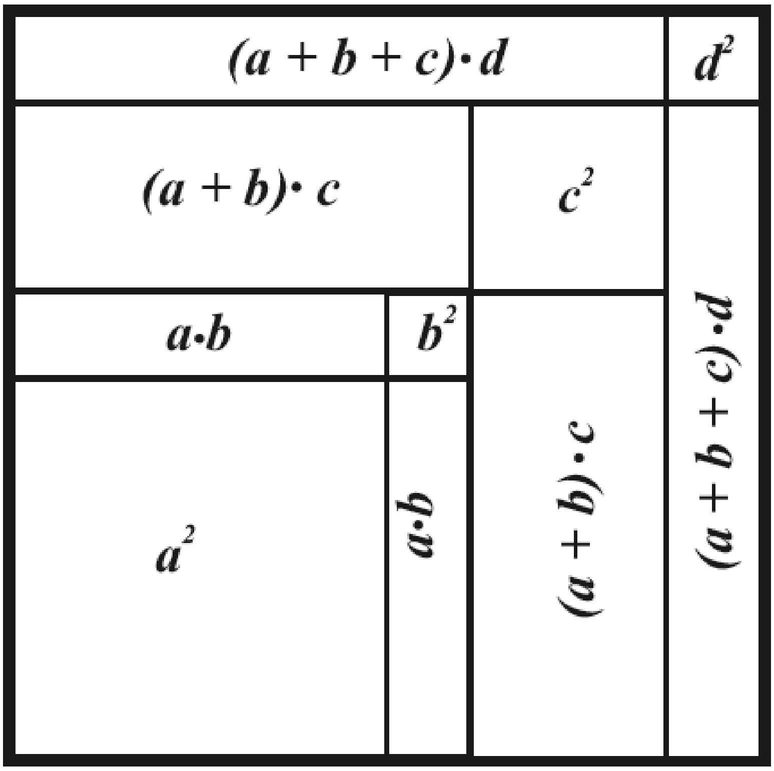
Ukážeme si nyní aplikaci algoritmu umocňování na čtyřciferném čísle. Pro vysvětlení postupu vyjdeme ze známých vztahů:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$$

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2 =$$
$$= a^2 + 2 \cdot ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2$$

kde číslo *a* představuje počet tisíců, *b* počet stovek, *c* počet desítek a *d* počet jednotek.

I tento vztah je možné interpretovat geometricky:



Obr. 11 - Geometrické znázornění vztahu $(a + b + c + d)^2$ – volně podle [7, s. 12]

Ukážeme si postup na úloze **$1\ 764^2$**:

$1\ 764^2 = (1000 + 700 + 60 + 4)^2$

$1\ 764^2$		zkráceně:	$1\ 764^2$	
1000^2	1 000 000		1^2.	1
2.1000·700	1 400 000		2·1·7.	14
700^2	490 000		7^2.	49
2·1700·60.	204 000		2·17·6.	204
60^2	3 600		6^2	36
2·1760·4	14 080		2·176·4.	1408
4^2	16		4^2	16
	3 111 696			3111696

Je zřejmé, že početní postup umocňování dvěma je u větších čísel velmi obtížný a proto byl po roce 1953 už ve školách nahrazen buď násobením, nebo tabulkami. V běžné praxi se vůbec neuplatnil.

Složitější byla situace s **odmocňováním dvěma**, protože neexistuje žádný početní postup, který by algoritmus pro druhou odmocninu nahradil.

Odmocňování dvěma podrobně vysvětlíme na úloze $\sqrt{\mathbf{132\,496}} = \mathbf{364.}$

Protože druhá odmocnina z libovolného dvojciferného čísla je menší než 10, rozdělíme odmocňované číslo na dvojciferné skupiny zprava doleva a z každé této skupiny vznikne jedno jednociferné číslo. [7, s. 13-15]

$$\sqrt{13|24|96}$$

Je zřejmé, že odmocněním vznikne trojciferné číslo.

$$\begin{array}{l} \sqrt{13|24|96} = 3 \\ \underline{-\ 9} \\ \quad 4 \end{array}$$

Odhadneme $\sqrt{13}$ $3^2 = 9$

$$\begin{array}{l} \sqrt{13|24|96} = 3 \\ \underline{-\ 9} \\ \quad 4\,2\lfloor\underline{4} \end{array}$$

Sepíšeme další dvojčíslí.
Zatrhneme poslední číslici.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{13|24|96} = 36 & \\ \underline{-\ 9} & \\ \quad 4\,2\lfloor\underline{4} & |\ 66\cdot 6 \\ \underline{-\ 3\,9\,6} & \\ \quad\ \ 2\,8 & \end{array}$$

Dílčí výsledek 3 násobíme dvěma a dostaneme 6.
Číslo 42 dělíme číslem 6 s výsledkem 7.
Odečíst součin 67·7 = 469 od 424, ale nejde.
Musíme výsledek dělení 7 zmenšit na 6 a odečteme od čísla 424 součin 66·6 = 396 a do výsledku připíšeme 6.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{13|24|96} = 36 & \\ \underline{-\ 9} & \\ \quad 4\,2\lfloor\underline{4} & |\ 66\cdot 6 \\ \underline{-\ 3\,9\,6} & \\ \quad\ \ 2\,8\,9\lfloor\underline{6} & \end{array}$$

Sepíšeme další dvojčíslí.
Zatrhneme poslední číslici.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{13|24|96} = 364 & \\ \underline{-\ 9} & \\ \quad 4\,2\lfloor\underline{4} & |\ 66\cdot 6 \\ \underline{-\ 3\,9\,6} & \\ \quad\ \ 2\,8\,9\lfloor\underline{6} & |\ 724\cdot 4 \\ \quad \underline{-\,2\,8\,9\,6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Dílčí výsledek 36 násobíme dvěma a dostaneme 72
číslo 289 dělíme číslem 72 s výsledkem 4.
Od čísla 2 896 odečteme součin 724·4 = 2 896 a do výsledku připíšeme 4.

Tím postup končí.

Kontrola výpočtu umocňování dvěma byla obvykle prováděna násobením, nebo odhadem. Odmocňování se kontrolovalo umocňováním (násobením). I zde lze použít **devítkovou zkoušku.**

$\sqrt{13|24|96} = 364$ $\qquad$ $132\,496 = 364 \cdot 364$

$1 + 3 + 2 + 4 + 9 + 6 = 25 \qquad 2 + 5 = \mathbf{7}$

$3 + 6 + 4 = 13 \qquad 1 + 3 = 4$

$3 + 6 + 4 = 13 \qquad 1 + 3 = 4 \qquad 4 \cdot 4 = 16 \qquad 1 + 6 = \mathbf{7}$

2.6 Algoritmy pro výpočet třetí mocniny a odmocniny

Početní postup pro výpočet třetí mocniny a odmocniny byl potřeba hlavně pro řešení úloh nejen v matematice, ale i ve fyzice. Třetí mocnina vždy hrála důležitou roli v technické praxi např. při měření objemu složeného materiálu. Dokonce se používala už v době, kdy nebyly všeobecně uznávány metrické jednotky. Proto také bylo toto učivo zařazeno i do osnov tehdejších měšťanských škol, protože se počítalo s tím, absolventi těchto škol budou s největší pravděpodobností technici nebo řemeslníci. Nebylo to rozhodně učivo lehké, jak dále ukážeme.

Na rozdíl od algoritmu pro umocňování dvěma nebylo možné výpočet třetí mocniny nahradit jiným vhodným a efektivnějším postupem, snad jen opakovaným násobením.

Algoritmus třetí mocniny vycházel ze vztahu

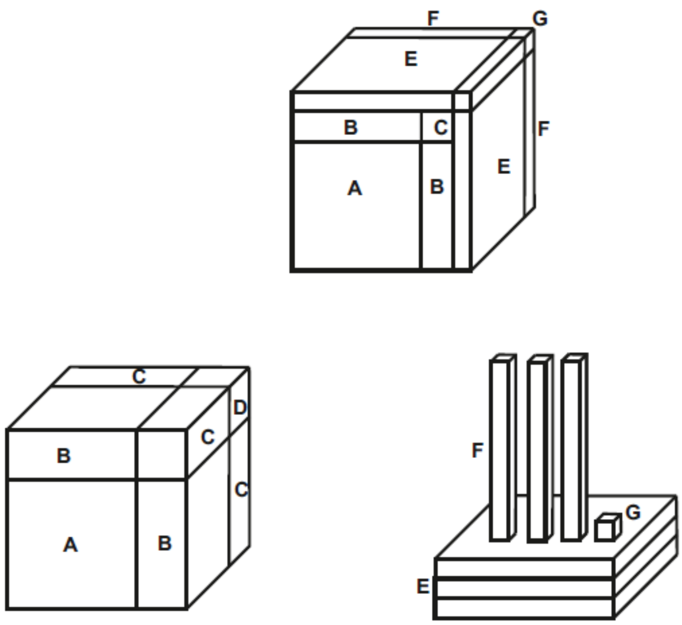
$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3,$$

kde číslo a představuje počet desítek a číslo b počet jednotek. Výpočet si ukážeme na úloze:

$$\mathbf{82^3 = 551\,368}$$

$$\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{82^3 = (80 + 2)^3} \\ \hline
80^3 \ldots\ldots\ldots & 5\,1\,2\,0\,0\,0 \\
3 \cdot 80^2 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots & 3\,8\,4\,0\,0 \\
3 \cdot 80 \cdot 2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 9\,6\,0 \\
2^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 8 \\ \hline
 & 5\,5\,1\,3\,6\,8
\end{array}
\qquad \text{zkráceně:} \qquad
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{82^3} \\ \hline
8^3 \ldots\ldots & 5\,1\,2 \\
3 \cdot 8^2 \cdot 2 \ldots & 3\,8\,4 \\
3 \cdot 8 \cdot 2^2 \ldots\ldots & 9\,6 \\
2^3 \ldots\ldots\ldots\ldots & 8 \\ \hline
 & 5\,5\,1\,3\,6\,8
\end{array}$$

Ukážeme si ještě umocňování třemi na trojciferném čísle. V „Početnici pro třetí třídu měšťanských škol“ Františka Kneidla z roku 1923 [8, s. 13] je pokus o geometrickou interpretaci tohoto umocňování na úloze **458^3** pomocí rozkladu krychle o hraně $|h| = 458$, která je rozdělena na tři části 400 + 50 + 8. Viz níže reprodukce obr. 12.



Obr. 12 – Geometrické zpracování umocňování třemi – volně podle [8, s. 13]

Obrázek ukazuje, jak původně krychle (horní část obrázku) byla rozložena na 3 krychle **A, D** a **G** a dále na 3 kvádry **B**, 3 kvádry **C**, 3 kvádry **E** a 3 kvádry **F** – tedy na 15 těles. Je třeba zvážit, jestli tento obrázek byl pro počtáře skutečnou oporou pro pochopení a zapamatování si odvozeného algoritmu. Na školách bývaly také dřevěné rozkládací modely krychle, ale v současné době se už tyto výpočty ve škole vůbec neprovádějí. Vypočítejme tedy **458^3**.

$$\mathbf{458^3 = (400 + 50 + 8)^3 = [(400 + 50) + 8]^3 = 96\,071\,912}$$

$$(400 + 50)^3 + 3{\cdot}450^2{\cdot}8 + 3{\cdot}450{\cdot}8^2 + 8^3$$

$$400^3 + 3{\cdot}400^2{\cdot}50 + 3{\cdot}400{\cdot}50^2 + 50^3 + 3{\cdot}450^2{\cdot}8 + 3{\cdot}450{\cdot}8^2 + 8^3$$

Tento poslední řádek ukazuje, jak budeme postupovat.

$\underline{458^3}$		
400^3	6 4 0 0 0 0 0 0	krychle **A**
$3{\cdot}400^2{\cdot}50$	2 4 0 0 0 0 0 0	3 kvádry **B**
$3{\cdot}400{\cdot}50^2$	3 0 0 0 0 0 0	3 kvádry **C**
50^3	1 2 5 0 0 0	krychle **D**
$3{\cdot}450^2{\cdot}8$	4 8 6 0 0 0 0	3 kvádry **E**
$3{\cdot}450{\cdot}8^2$	8 6 4 0 0	3 kvádry **F**
8^3	5 1 2	krychle **G**
	9 6 0 7 1 9 1 2	

Zkrácený zápis:

$\underline{458^3}$	
4^3	6 4
$3{\cdot}4^2{\cdot}5$ . . .	2 4 0
$3{\cdot}4{\cdot}5^2$	3 0 0
5^3	1 2 5
$3{\cdot}45^2{\cdot}8$	4 8 6 0 0
$3{\cdot}45{\cdot}8^2$	8 6 4 0
8^3	5 1 2
	9 6 0 7 1 9 1 2

Ještě bude vhodné ukázat příklad výpočtu třetí mocniny, když v umocňovaném čísle je na některém řádu nula.

$\underline{206^3}$	
2^3	8
$3{\cdot}2^2{\cdot}0$	0
$3{\cdot}2{\cdot}0^2$	0
0^3	0
$3{\cdot}20^2{\cdot}6$	7 2 0 0
$3{\cdot}20{\cdot}6^2$	2 1 6 0
6^3	2 1 6
	8 7 4 1 8 1 6

Je zřejmé, že druhý až čtvrtý dílčí výpočet lze vynechat, ale musíme si dát pozor na správné umístění výsledku pátého výpočtu.

Třetí odmocnina je nejsložitější algoritmus, který se kdy na školách objevil. Jeho potřebu si ve své době vynutila algebra, geometrie i fyzika. Postup výpočtu si podrobně vysvětlíme na čísle, které je třetí mocninou přirozeného čísla, aby výpočet vyšel beze zbytku.

$$\sqrt[3]{\mathbf{97\,336}} = \mathbf{46}$$

Protože třetí odmocnina z libovolného trojciferného čísla je menší než 10, rozdělíme dané odmocňované číslo na trojciferné skupiny zprava doleva. Tak z každé skupiny vznikne jedno jednociferné číslo výsledku.

$\sqrt[3]{97|336} = \bullet\ \bullet$ Vznikne dvojciferné číslo.

$\sqrt[3]{97|336} = 4\ \bullet$ Odhadneme $\sqrt[3]{97}$. $4^3 = 64$, $5^3 = 125$

$-\ 64$ Odečteme 64 od 97.

33 Číslo 4 zapíšeme do výsledku.

$\sqrt[3]{97|336} = 4\ \bullet$ Sepíšeme další trojčíslí.

$-\ 64$ Zatrhneme poslední dvojčíslí.

$33\ 3|36$

$\sqrt[3]{97|336} = 46$

$-\ 64 \ldots\ldots .4^3$

$\mathbf{33\ 3|36}\quad |\ 48 = 6$ Připravíme si dělitele čísla 333. Je jím $3 \cdot 4^2 = 48$.

$-\ 28\ 8 \ldots .3 \cdot 4^2 \cdot 6$ Výsledek dělení 6 zapíšeme do výsledku v 1. řádku.

$-\ 4\ 32 \ldots 3 \cdot 4 \cdot 6^2$

$-\ 216 \ldots 6^3$

$\mathbf{-\ 33\ 336}$

0 Tím postup končí.

Ukážeme si ještě odmocnění vedoucí k trojcifernému výsledku:

$\sqrt[3]{31|225|875} = 315$

$- 27$ . . . . 3^3

$4\ 2|55$ | $(3 \cdot 3^2) = 1$

$-\ 2\ 7$. . . . . $3 \cdot 3^2 \cdot 1$

$-\ 9$. . . . . $3 \cdot 3 \cdot 1^2$

$-\ 1$. . . . . .1^3

$-\ 2\ 791$

$1\ 464\ 8|75$ | $(3 \cdot 31^2) = 5$ $\qquad 3 \cdot 31^2 = 2\ 883$

$-\ 1\ 441\ 5$ . . . . . .$3 \cdot 31^2 \cdot 5$

$-\ 23\ 25$ . . . . .$3 \cdot 31 \cdot 5^2$

$-\ 125$ . . . . 5^3

$-\ 1\ 464\ 875$

0 Tím postup končí

Kontrola tak složitého výpočtu je jistě také složitá a tím i nespolehlivá. Ukážeme si jen **devítkovou zkoušku** na posledním výpočtu.

$315\ .\ 315\ .\ 315 = 31\ 255\ 875$

Ciferný součet	9	9	9	36	3+6 = 9
Upravený ciferný součet	0 ·	0 ·	0 =		0

2.7 Aplikace algoritmů pro desetinná čísla

Máme-li sečíst nebo odečíst dvě nebo více desetinných čísel, nevzniká žádný problém. Jen je nutné zapsat sečítaná nebo odečítaná čísla pod sebe tak, aby desetinná čárka byla u všech sčítanců na stejné řádové pozici.

$$\begin{array}{r} 236{,}27 \\ \underline{\;\;39{,}456} \\ 275{,}726 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 236{,}27 \\ \underline{-\;39{,}456} \\ 196{,}814 \end{array}$$

Ani při násobení nevznikají žádné problémy. Činitele zapíšeme pod sebe bez ohledu na polohu desetinné čárky podobně jako u čísel přirozených.

$$\begin{array}{r} 524{,}15 \\ \underline{27{,}4} \\ 209\ 660 \\ 3669\ 05 \\ \underline{10483\ 0} \\ 14361{,}710 \end{array}$$

Protože v prvním dílčím součinu 4.5 je číslo 4 řádu 10^{-1}a číslo 5 řádu 10^{-2}, bude číslo 0 v prvním dílčím výsledku řádu $10^{-1}. 10^{-2} = 10^{-3}$.

Proto oddělíme ve výsledku 3 desetinná místa.

Součin desetinných čísel má tolik desetinných míst jako všichni činitelé dohromady.

Při **dělení desetinného čísla číslem přirozeným** postupujeme stejně jako při dělení přirozených čísel, jen ve chvíli, kdy dojdeme k desetinné čárce, vyznačíme ji i v podílu.

Při **dělení desetinného čísla číslem desetinným** násobíme dělence i dělitele vhodnou mocninou deseti, abychom odstranili desetinnou čárku v děliteli. Podíl se tím nezmění a úlohu tak převedeme na předchozí případ.

$$972 : 5{,}4 = 180$$
$$9720 : 54 = 180$$

Dělení však u většiny úloh končí zbytkem. V tom případě počtář obvykle pokračuje a ke zbytku připíše nulu. Tímto postupem se tak snaží výsledek dělení zpřesnit. Je otázka, na kolik desetinných míst má smysl počítat. Hlavním kritériem je požadovaná přesnost, která by měla být předem známa, nebo která vyplývá z dané situace.

$$
\begin{array}{l}
62{,}4 \;:\; 7 \;=\; 8{,}91\ldots \\
\;\;6\,4 \\
\;\;\;\;10
\end{array}
$$

Rozhodující je přesnost dělence. O čísle 62,4 nevíme, jestli je přesné, nebo bylo zaokrouhlené na desetiny. Pokud bylo zaokrouhleno, tak mohlo nabývat hodnot v intervalu < 62,35 ; 62,45). Tedy jeho nepřesnost je menší než $0{,}5.10^{-1}$. Nemá proto smysl dělit na víc než dvě desetinná místa.

Vzniká ještě jedna otázka. Je vůbec možné určit výše uvedený podíl pomocí dekadického zápisu přesně? Teorie dělitelnosti nám dává odpověď. Dělení každých dvou čísel zapsaných dekadickým rozvojem v desítkové soustavě buď po konečném počtu kroků dá zbytek nula, nebo se objeví v zápisu podílu perioda. V našem případě:

$$62{,}4 \;:\; 7 \;=\; 8{,}9142857142857\ldots = 8{,}91\overline{42857}$$

Pro **umocňování dvěma** platí analogická pravidla jako pro násobení. Vzhledem k tomu, že zde jde o násobení stejných činitelů, tak oddělujeme u mocniny dvojnásobek počtu desetinných míst základu.

$$23{,}6^2 \;=\; 556{,}96$$

Skutečnost, že mocnina má dvojnásobný počet desetinných míst než základ, není umělým zpřesňováním a nemělo by proto docházet k zaokrouhlování výsledku na jedno desetinné místo. Pokud by např. strana čtverce měřila 23,6 cm (236 mm), pak obsah tohoto čtverce bude 556,96 cm^2 (55 696 mm^2 přesně).

Podobně je tomu u **umocňování třemi**, kdy každé desetinné místo základu generuje tři desetinná místa mocniny.

$$23{,}6^3 = 13\,144{,}256$$

Při **odmocňování** desetinného čísla musíme při vytváření skupin začít u desetinné čárky a postupovat oběma směry. Ukážeme si odmocňování na příkladech.

$$\sqrt[2]{16|85|51,30|25} = 410,55$$

$\underline{-16}$ . . . . 4^2

0 8|5. . . . . | 8

\- 80. . . . . $2 \cdot 4 \cdot 1$

$\underline{-\ \ 1}$. . . . . 1^2

4 5|1 . . . . | 82

4 51 3|0. 820

\- 4 10 00 . . . $2 \cdot 410 \cdot 5$

$\underline{-\quad 25}$ . . . . 5^2

41 05 2|5. | 8210

\- 41 05 0. . . $2 \cdot 4105 \cdot 5$

$\underline{-\qquad 25}$ . . . 5^2

0

$$\sqrt[3]{8|169,178|744} = 20,14$$

$\underline{-8}$ . . . . 2^3

0 1|69 . . . . | $3 \cdot 2^2$ 12

169 1|78 . . . . | $3 \cdot 20^2$ . . . 1 200

\- 120 0 . . . . $3.20^2.1$

\- 60. . . . . $3 \cdot 20 \cdot 1^2$

$\underline{-\qquad 1}$. . . . . 1^3

48 577 7|44 . . . . . | $3 \cdot 201^2$. . 121 203

\- 48 481 2 . . . . $3 \cdot 201^2 \cdot 4$

\- 96 48 . . . . $3 \cdot 201 \cdot 4^2$

$\underline{-\qquad 64}$ . . . . 4^3

0

Když druhá a třetí odmocnina v desetinném zápisu není přímo mocninou nějakého čísla v desetinném zápisu, je číslem iracionálním, které má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Pak téměř každé odmocňování lze vypočítat jen s předem danou přesností. Předchozí dva příklady byly zvoleny tak, aby vyšly beze zbytku.

$$410,55^2 = 168\ 551,302\ 5$$

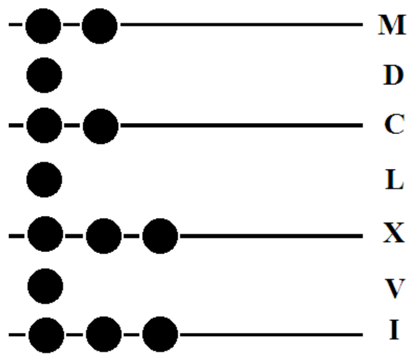
$$20,14^3 = 8\ 169,\ 178\ 744$$

3. Různé techniky výpočtů a pomůcky pro usnadnění počítání

3.1 Počítání na liniích.

Nepoziční numerační soustavy neumožňovaly používat dnes běžně známé algoritmy. Dokonce nebylo možné používat ani postupy písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení, které se dnes učí na základní škole. Všechny tyto postupy vznikly až po objevu poziční dekadické početní soustavy. Muselo se vystačit s adicí (slučováním), subtrakcí (ubíráním), duplací (zdvojením) a mediací (půlením).

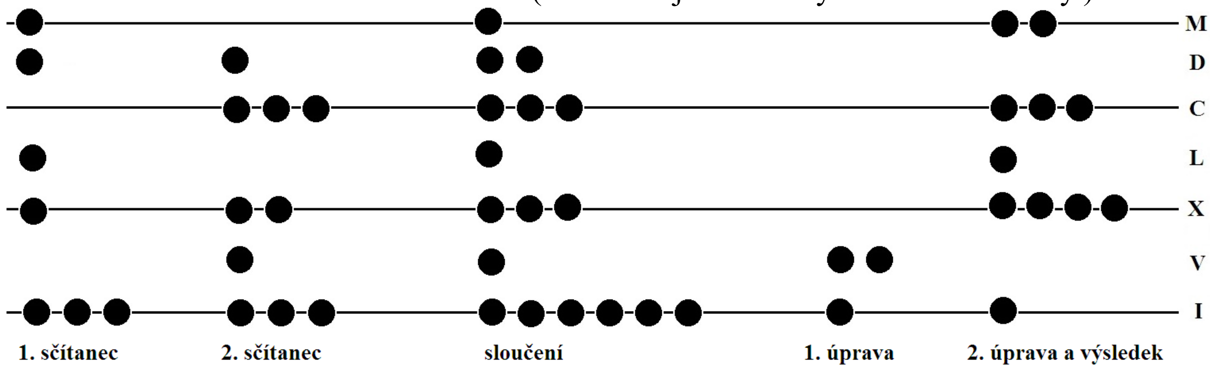
Ještě ve středověku se výpočty prováděly pokládáním, odebíráním a přesouvání „kamenů“ na desce nebo látce s vyznačenou jakousi „notovou osnovou“, která měla 4 linky a 3 mezery. V Evropě se v té době používaly římské číslice, a proto si ukážeme starý římský model zápisu čísel a známých početních operací. [6, s. 40] Na obr. 13 je znázorněno číslo 2 789 na liniích.



Obr. 13 - Zápis čísla **2 789** na liniích

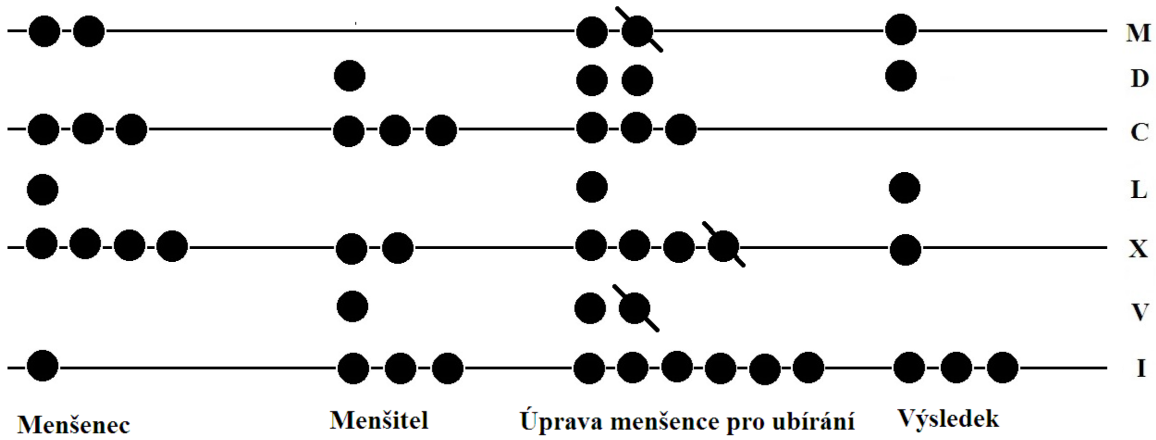
Nyní si ukážeme, jak se prováděly základní čtyři početní výkony v tehdejší době (obr. 14, 15, 16, 17)

Adice: **1 563** sloučeno s **828** dá **2 391** (V té době ještě značky + a = neexistovaly.)



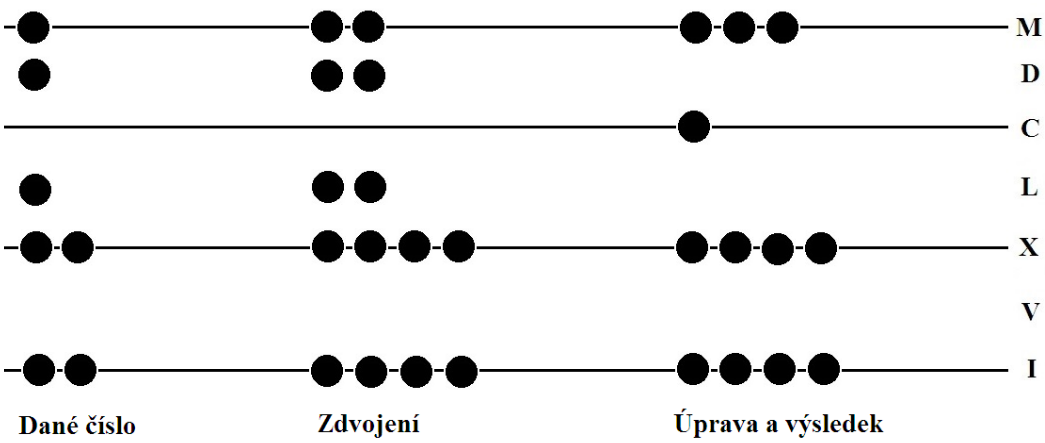
Obr. 14 – Adice čísel 1 563 a 828

Subtrakce: Od čísla **2 391** ubereme **828** a dostaneme **1 563**



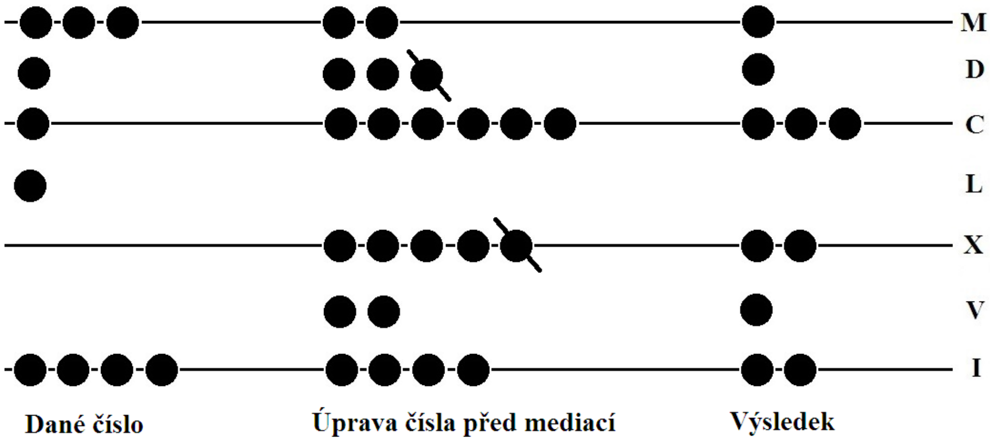
Obr. 15 – Subtrakce čísel 2 391 a 828

Duplace: Zdvojením čísla **1 572** dostaneme číslo **3 144**



Obr. 16 – Duplace čísla 1 572

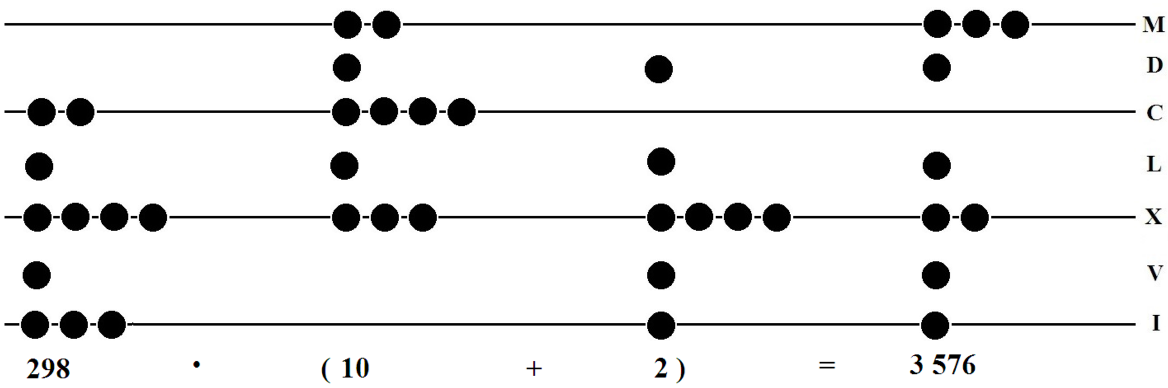
Mediace: Půlením čísla **3 654** dostaneme **1 827**



Obr. 17 – Mediace čísla 3 654

Na liniích bylo možné spočítat i **součin dvou čísel** pomocí opakované duplace a adice, jak je uvedeno v článku 2.3 této práce. Násobení bylo možné také provádět posouváním kamenů mezi linkami. Využívalo se toho, že při násobení deseti stačí jen konfiguraci kamenů posunout o jedno „patro“ výš. [4, VIII/33]

Ukážeme si to na výpočtu součinu **298 · 12 = 3 576** (obr. 18)



Obr. 18 – Násobení čísel 298 a 12 – volně podle [4, VIII/33]

Dělení bylo možné provádět opakováním subtrakce dělitele od dělence. Při mediaci a opakované subtrakci obvykle vznikl zbytek, se kterým se naložilo podle řešené situace.

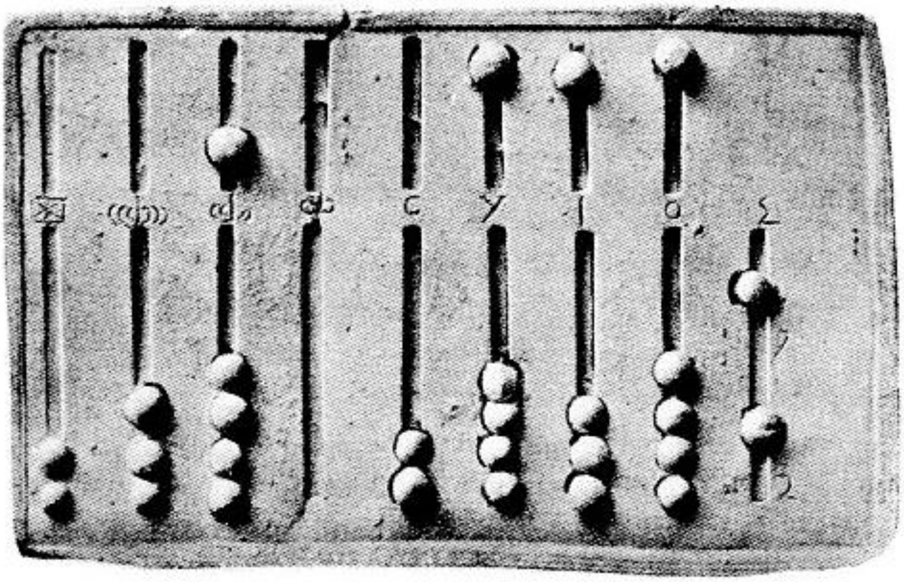
3.2 Abakus a jeho různé podoby

Počítání na liniích bylo zdlouhavé a nevyhovovalo lidem, kteří chtěli počítat rychle a využít svých počtářských dovedností. Jim posloužila početní pomůcka **abakus**. Zvlášť vycvičení počtáři pracující s touto pomůckou si říkali **abakisté.**

Abakus pravděpodobně vynalezli Babyloňané. Když se vraceli Židé ze zajetí, přinesli ho do Palestiny. Tam ho převzali Římané. Abakus byla původně hliněná nebo dřevěná destička, ve které bylo obvykle osm rýh. V nich se pohybovaly kuličky. Rýhy byly přerušeny na dvě nestejně dlouhé části příčkou, na které byly vyryty značky desítkových řádů. V dolní části rýhy byly čtyři kuličky a v horní části byla kulička jedna. Každá rýha představovala jeden řád desítkové soustavy a čísla se vyznačovala přisunutím potřebného počtu kuliček k příčce. Dolní kuličky vyznačovaly jednotky daného řádu a horní kulička pětku.

Pro vyznačení čísla 1 až 4 se posunul potřebný počet kuliček z dolní části rýhy k příčce. Číslo 5 se vyznačilo přisunutím kuličky z horní části rýhy k příčce a odsunutím všech kuliček v dolní části rýhy. Čísla 6 až 9 se vyznačovala přisunutím horní kuličky (pětky) a dalšího potřebného počtu kuliček z dolní části rýhy. [4, I/32]

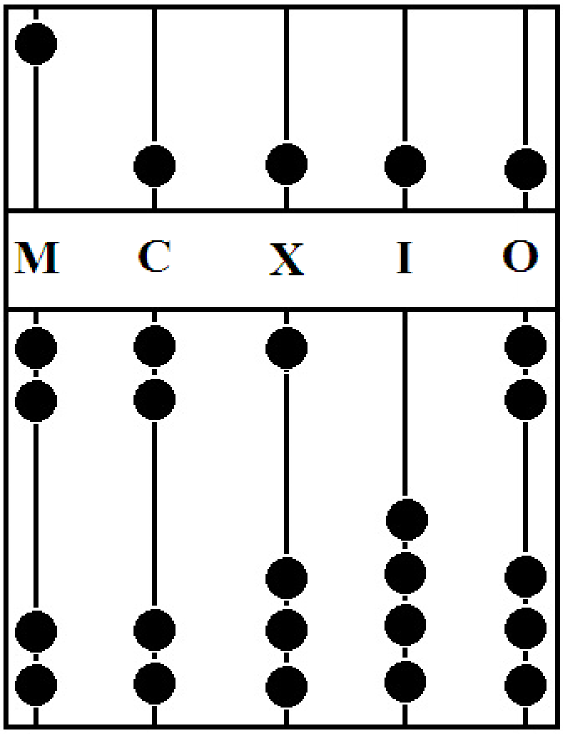
Na následujícím obr. 19 je římský abakus, jehož stáří se odhaduje asi do 5. stol. n.l. Není však kompletní. Chybí 4 kuličky v horní části abaku a 10 kuliček pro jednotky.



Obr. 19 – Římský abakus [4]

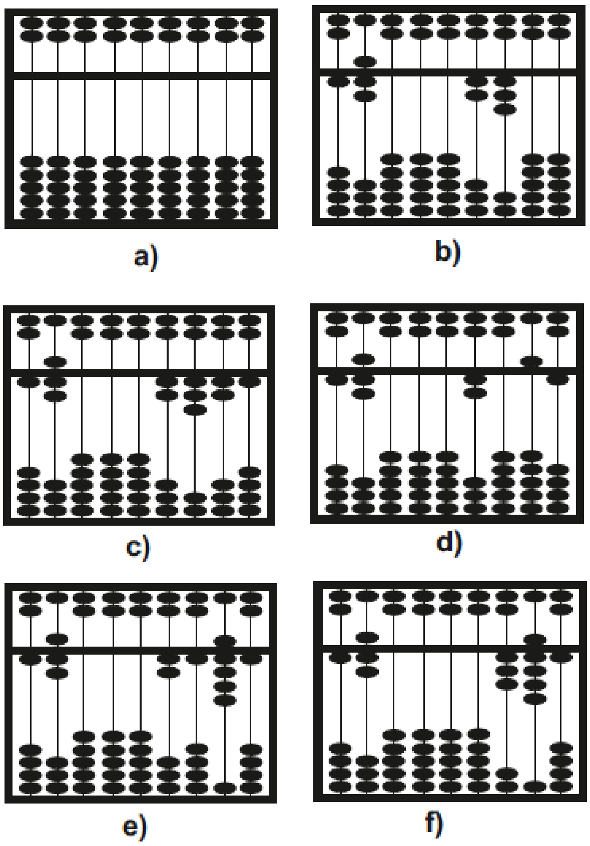
Na příčce vidíme staré římské číslice používané v tehdejší době. Tak např. pro číslo 1 000 není použito písmeno **M**, ale znak **(I)**. Podobně jsou označeny i vyšší řády: 10^4 jako **((I))**, 10^5 jako **(((I)))** a 10^6 jako $\boxed{*}$. Drážka označená **O** sloužila pro počítání se zlomky. Římská početní soustava neznala desetiny, setiny atd. Protože se plně opírala o peněžní soustavu, která měla jednotku „as“. Ten se dělil na 12 „uncí“. Desetinné zlomky neznali. Proto počítali jen s dvanáctinami. Příslušná drážka abaku měla pak v horní části nikoli pětku, ale šestku. V dolní části bylo proto 5 kuliček, nikoli jen 4. Význam poslední krátké drážky není úplně znám, ale asi se zde zapisovaly díly uncí. [1, s. 64]

Na obr. 20 si ukážeme schématické znázornění čísla **2 765 a** $\frac{8}{12}$.



Obr. 20 – Schématické znázornění na abaku – volně podle [1]

Princip abaku se později stal základem mnohých mechanických počítadel. Jedním z nich je tzv. čínské počítadlo, někdy také **východní abakus**. Má o jednu kuličku jednotek a o jednu kuličku pětek víc, ale princip je stejný. Toto počítadlo má obdélníkový dřevěný rám s vodorovnou příčkou a s devíti svislými dráty. Na obr. 21 ukážeme výpočet součinu **17 · 23**. [10, s. 226]



Obr. 21 – Součin na východním abaku
- volně podle [10]

Obr. a) ukazuje výchozí pozici.

Na obr. b) je číslo 17 znázorněno na prvních dvou drátech a číslo 23 na 6. a 7. drátu.

Násobení probíhá podle rozpisu:

$$17\cdot23 = \underbrace{3\cdot7}_{21} + \underbrace{3\cdot10}_{30} + \underbrace{20\cdot7}_{140} + \underbrace{20\cdot10}_{200} = 391$$

Obr. c) znázorňuje 1. sčítance rozpisu číslo 21 na posledních dvou drátech.

Obr. d) znázorňuje přičtení 2. sčítance 30 na posledních dvou drátech a zároveň anulaci čísla 3 na 7. drátu. To již splnilo svůj úkol.

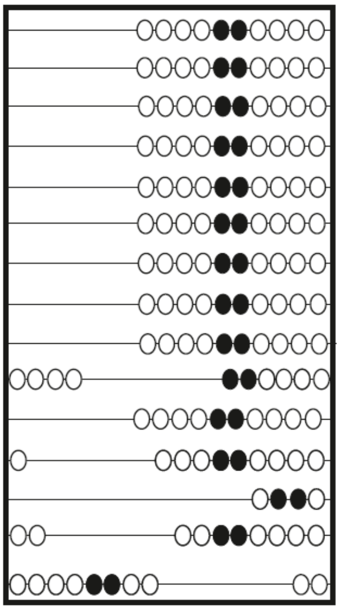
Obr. e) znázorňuje přičtení 3. sčítance 140 a konečně obr. f) přičtení posledního sčítance 200. Současně je anulováno číslo 2 na 6. drátu. To již také splnilo svůj úkol.

Zároveň na obr. f) můžeme přečíst na 7., 8. a 9. drátu výsledek **391**.

Druhou aplikací abaku je ruský **sčot**, někdy také **západní abakus.** Výrazně se odlišuje od původního abaku i od čínského počítadla a připomíná spíš naše kuličkové desítkové počítadlo, se kterým si hrají děti a někde ho můžeme ještě vidět i ve škole. Je orientován svisle, ale nemá příčku. Na každém drátu se pohybuje 10 kuliček. „Nultý“ drát (třetí od zdola) má jen čtyři kuličky a slouží k počítání se čtvrtinami. Dva dráty pod ním slouží k počítání s desetinami a setinami. Čtvrtý a další pak slouží k počítání s jednotkami, desítkami, stovkami, tisíci až 10^{11}. Pro lepší orientaci jsou dvě prostřední kuličky odlišeny barvou. [13, s. 16]

Podobně jako římský abakus i ruský sčot se opírá o ruskou měnu, jejíž jednotka rubl se dělí na 100 kopějek. Ještě v 80. letech 20. stol. se sčoty používaly ve všech ruských obchodech a prodavačky udivovaly rychlostí a přesností výpočtu ceny nákupu. Výhoda tohoto počítadla byla i v tom, že prodavačka na sčotu viděla, kolik má zákazníkovi vrátit.

Na obr. 22 je znázorněno číslo **401,28**.



Obr. 22 – Západní abakus (sčot) – volně podle [13, s. 16]

3.3 Trojčlenka a regula falsi

Mezi staré mechanické početní postupy patří i tzv. **trojčlenka** (regula de tri). Je to postup, podle kterého se ze tří daných čísel dá vypočítat číslo čtvrté aplikací úměrnosti. Leonardo Pisánský napsal ve 13. stol. učebnici, ve které zaujímá učivo o trojčlence významné místo. Uvedeme dva upravené příklady z této učebnice. [1, s. 74]

<u>Příklad 1</u>

75 g zboží stojí 60 Kč. Kolik stojí 50 g tohoto zboží?

Řešení: Daná čísla zapíšeme do schématu.

60 Kč 75 g
50 g

Spojíme levé **horní** číslo s **dolním** číslem na pravé straně. Tato čísla vynásobíme a výsledek dělíme třetím číslem:

$$60 \cdot 50 = 3\,000 \qquad 3\,000 : 75 = 40$$

Odpověď: 50 g tohoto zboží stojí 40 Kč.

V této úloze byla aplikována přímá úměrnost.

Příklad 2

6 dělníků o stejném výkonu udělá určenou práci za 30 dní. Za jak dlouho tuto práci udělají 4 dělníci?

Řešení: Daná čísla zapíšeme do schématu.

30 dní ——— 6 dělníků
4 dělníci

Protože se nyní jedná o nepřímou úměrnost, spojíme levé **horní** číslo s **horním** číslem na pravé straně. Tato čísla vynásobíme a výsledek dělíme číslem třetím:

$$30 \cdot 6 = 180 \qquad 180 : 4 = 45$$

Odpověď: Určenou práci vykonají 4 dělníci za 45 dní.

Je zřejmé, že počtář nemohl jen pracovat mechanicky, ale musel určit, o jaký druh úměrnosti se jedná. V pozdější době byl tento postup ještě více formalizován do následující podoby [7, s. 31-32]:

Příklad 3

1 000 velkých hřebů váží 6,25 kg. Kolik hřebů váží 0,5 kg? (Aplikace přímé úměrnosti.)

$\uparrow$ 6,25 kg . . . . .1 000 ks $\uparrow$

0,5 kg . . . . x ks

Ve sloupci s neznámou vyznačíme šipku **vždy** směrem nahoru a u druhé veličiny vyznačíme šipku **stejným směrem u přímé úměrnosti** a **opačným směrem u nepřímé úměrnosti.**

Zapíšeme úměru: $x : 1\,000 = 0{,}5 : 6{,}25$

$$x = \frac{0{,}5 \cdot 1000}{80} = 80$$

Odpověď: 80 hřebů váží 0,5 kg.

Příklad 4

K oplocení zahrady bylo třeba 400 latí 20 cm od sebe vzdálených. K dispozici však bylo jen 320 latí. Jak se musela vzdálenost latí zvětšit?

$\downarrow$ 400 latí . . . . 20 cm $\uparrow$		V posledním sloupci vyznačíme šipku směrem nahoru a u druhé veličiny směrem dolů protože se jedná o **nepřímou úměrnost.**
320 latí . . . . x cm		

Zapíšeme úměru: $x : 20 = 400 : 320$ $\qquad x = \dfrac{20 \cdot 400}{320} = 25$

Odpověď: Vzdálenost latí bude 25 cm.

Složitější úlohy s více proměnnými údaji se řešili **trojčlenkou složenou**. Ukážeme si takovou úlohu podle staré početnice [7, s. 36-37]:

Příklad 5

Utká-li se 16 kusů látky 40 metrů dlouhé a 140 cm široké z 80 kg příze, kolik kusů látky 45 metrů dlouhé a 160 cm široké ze 135 kg příze?

16 ks $\uparrow$	40 m $\downarrow$	140 cm $\downarrow$	80 kg $\uparrow$
x ks	45 m	160 cm	135 kg

Úměry: $x : 16 = 40 : 45$
$= 140 : 160$
$= 135 : 80$

Krátíme: $x : \cancel{16} = 40 : \cancel{45}$
$= 140 : \cancel{160}$
$= \cancel{135} : 80$

Krátíme: $x : 1 = \cancel{40} : 1$
$= \cancel{140} : \cancel{10}$
$= 3 : \cancel{80}$

Krátíme: $x : 1 = 1 : 1$
$= \cancel{14} : 1$
$= 3 : \cancel{2}$

Krátíme: $x : 1 = 1 : 1$
$= 7 : 1$
$= 3 : 1$

$x = 7 \cdot 3 = 21$

Odpověď: Utká se 21 kusů látky.

Tyto formalizované postupy, kterým se učilo ve druhé třídě měšťanských škol a v sekundách škol středních, byly v 50. letech 20. stol. kritizovány pro přílišnou formálnost a obtížnost a trojčlenka pak byla řešena jen úsudkem nebo tzv. přechodem přes jednotku v rámci učiva o úměrách.

Složená trojčlenka byla také někdy řešena postupem nazývaným **počet řetězový** (regula kata).

Leonardo Pisánský již ve zmíněné učebnici uvádí příklad „kurzovního lístku“, který svědčí o složitých peněžních a obchodních poměrech v té době. [1, s. 74]

<u>Příklad 6</u>

12 římských peněz platí jako 31 pisánských
23 pisánských peněz platí jako 12 janovských
31 janovských peněz platí jako 12 turínských
11 turínských peněz platí jako 12 barcelonských

Kolik barcelonských peněz platí jako 15 římských?

Barcelona	Turín	Janov	Pisa	Řím
x	12	13	31	12
12	11	12	23	15

Vyznačíme „řetěz“ (lomenou čarou) a zapíšeme:

$$x = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15}{11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12} = 20{,}36$$

Výše uvedená úloha využívá výlučně přímou úměrnost. V případě nepřímé úměrnosti by se musel „řetěz“ logicky upravit.

Známý německý pedagog zabývající se aritmetickými výpočty v 16. stol. Adam Riese, publikoval metodu, která umožňovala řešit různé diofantické úlohy přibližováním k řešení. Tuto metodu nazval **regula falsi**. Ukážeme si tři úlohy řešené touto metodou. ([5] str. 41-42)

<u>Příklad 7</u>

Příchozí pozdravil skupinu osob slovy: „Pozdrav pánbůh vám všem třiceti!“ A jeden ze skupiny odpověděl: „Kdyby nás bylo ještě půldruhakrát tolik, bylo by nás třicet“.

Kolik osob bylo ve skupině?

Postup řešení:

Protože v textu se hovoří o polovinách, zvolíme první odhad jako sudé číslo, např. 18. Vyzkoušíme ho:

2 ½ . 18 = 45 45 – 30 = 15 18 nevyhovuje

Jako druhý odhad musíme zvolit číslo menší než 18, např. 14.

Vyzkoušíme ho:

2 ½ . 14 = 35 35 – 30 = 5 14 ještě nevyhovuje

Zvolíme tedy číslo ještě menší, např. 12.

Vyzkoušíme ho:

2 ½ . 12 = 30 Číslo 30 úloze vyhovuje. Osob bylo 12.

Adam Riese nabízí i formalizované řešení této úlohy:

Po druhém odhadu napíšeme schéma:

18 + 15

14 + 5

15 – 5 = 10

Křížové součiny od sebe odečteme a vzniklý rozdíl dělíme rozdílem odchylek:

$5 \cdot 18 = 90$ $14 \cdot 15 = 210$ $210 - 90 = 120$ $120 : 10 = 12$

Příklad 8

Na stole stála mísa plná koláčů.

Když přišel Vašík, vzal si ¼ z nich.

Pak přišel Jakub a vzal si ⅓ zbytku.

Po něm přišla Kristinka a vzala si ⅔ zbytku.

Na Martinu zbyly jen 4 koláče.

Kolik koláčů bylo původně v míse?

Postup řešení:

Protože v textu se hovoří o čtvrtinách a třetinách, musí být celkový počet koláčů dělitelný číslem 12.

1. odhad: 36 koláčů	2. odhad: 24koláčů
V: vzal 9 koláčů, zbylo jich 27	V: vzal 6 koláčů, zbylo jich 18
J: vzal 9 koláčů, zbylo jich 18	J: vzal 6 koláčů, zbylo jich 12
K: vzala 12 koláčů, zbylo jich 6 $\neq$ 4	K: vzala 8 koláčů, zbyly 4 = 4
M: na Martina zbylo 6 koláčů	M: na Martina zbyly 4 koláče

2. odhad je správný. V míse bylo původně 24 koláčů.

Formalizované řešení metodou regula falsi se objevuje i v početnici Jiřího Mikuláše Brněnského z počátku 17. stol. [4, VIII/34]

Příklad 9

„Jeden chce koupiti za 40 grošů trojích živočichů, jakožto husí, kuřat a holubů též na počtu za 40, a prodává se jemu jedna hus za 2 groše, jedno kuře za 1 groš a dva holubi za 1 groš. Jest otázka, kolik každého živočichu koupiti má.“

	1.odhad	2.odhad
husy	12	9
kuřata	20	21
holubi	8	10
celkem kusů	40	40
celková cena	48	44
rozdíl v ceně	8	4

husy: 12 · 4 = 48 9 · 8 = 72
72 – 48 = 24 8 – 4 = 4
24 : 4 = **6**

kuřata: 20 · 4 = 80 21 · 8 = 168
168 – 80 = 88 8 – 4 = 4
88 : 4 = **22**

holubi: 8 · 4 = 32 10 · 8 = 80
80 – 32 = 48 8 – 4 = 4
48 : 4 = **12**

Řešení: 6 husí, 22 kuřat a 12 holubů.

Úlohu ve své početnici auror vyřešil, ale neprozradil, jak určil výše uvedené odhady. Je to však jednoduché. Stačí zvolit dvě libovolné trojice čísel, která mají součet 40, a úlohu podle návodu řešit. Zkusíme řešení úlohy s jinými odhady:

	1.odhad	2.odhad
husy	14	13
kuřata	20	19
holubi	6	8
celkem kusů	40	40
celková cena	51	49
rozdíl v ceně	11	9

husy: 14 · 9 = 126 13 · 11 = 143
143 – 126 = 17 11 – 9 = 2
17 : 2 = **8,5**

kuřata: 20 · 9 = 180 19 · 11= 209
209 – 180 = 29 11 – 9 = 2
88 : 4 = **14,5**

holubi: 6 · 9 = 54 8 · 11= 88
88 – 54 = 34 11 – 9 = 2
34 : 2 = **17**

Řešení 8,5 + 14,5 + 17 = 40 vyhovuje sice numerickým podmínkám, ale nevyhovuje textu. Výsledek není celočíselný.

Je vidět, že úloha má více řešení, ale zatím nevíme, jestli celočíselné řešení je pouze jedno.

Zkusme proto ještě jeden pokus:

	1. odhad	2. odhad
husy	15	14
kuřata	19	18
holubi	6	8
celkem kusů	40	40
celková cena	52	50
rozdíl v ceně	12	10

husy: $15 \cdot 10 = 150$ $\quad 14 \cdot 12 = 168$
$168 - 150 = 18$
$18 : 2 = \mathbf{9}$

kuřata: $19 \cdot 10 = 190$ $\quad 18 \cdot 12 = 216$
$216 - 190 = 26$
$26 : 2 = \mathbf{13}$

holubi: $6 \cdot 10 = 60$ $\quad 8 \cdot 12 = 96$
$96 - 60 = 36$ $\quad 12 - 10 = 2$
$36 : 2 = \mathbf{18}$

Nalezené řešení vyhovuje numerickým podmínkám i textu – je celočíselné.
Je zřejmé, že vyhovujících celočíselných řešení je více. Ale jak najít všechna? Prováděním dalších pokusů problém nevyřešíme.

Musíme úlohu řešit algebraicky. Označme hledaný počet husí x, kuřat y a holubů z. Podmínky úlohy vyjádříme rovnicemi:

Podmínka celkového počtu kusů $\quad x + y + z = 40$

Podmínka celkové ceny $\quad 2x + y + \frac{z}{2} = 40$

Úpravou této soustavy rovnic dostaneme $\quad 3x + y = 40$

Odtud plyne: Budeme-li volit x, pak $y = 40 - 3x$ a $z = 2x$

Sestavíme tabulku (tab. 4)

x	1	2	3	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13
y	37	34	31	28	25	**22**	19	16	**13**	10	7	4	1
z	2	4	6	8	10	**12**	14	16	**18**	20	22	24	26

Tab. 4 – Tabulka možných řešení

Už po několika vypočítaných sloupcích je vidět, že v řádcích jsou aritmetické posloupnosti a můžeme je doplnit bez výpočtů.

Tabulka končí, protože y nemůže být menší než 1.

V tabulce jsou zvýrazněna dvě řešení, která jsou uvedena v příkladu 9.

Daná úloha má tedy právě 13 řešení.

3.4 Napierovy tyčinky

V 16. a 17. stol. se již značně zvýšila potřeba řešit úlohy z oblasti kartografie, astronomie, techniky i samotné matematiky efektivněji a spolehlivěji než dosud, kdy se používalo těžkopádných algoritmů. Práce s nimi byla nejen zdlouhavá a často byla zatěžována osobními chybami způsobenými únavou a nepozorností. Počtáři měli hlavně potíže s násobením a dělením. [4, V/ 28]

John Napier (1550 – 1617) vymyslel metodu, která při násobení nahradila pomocné výpočty. Ve své knize „O rabdologii neboli o počítání s tyčinkami“ z roku 1617, ukázal, jak použít tabulku malé násobilky ve spojení s algoritmem gelosia (viz článek 2.3 této práce) k snadnému násobení čísel. Původně navrhl zmíněnou tabulku rozřezat na svislé proužky papíru, ale později byly tyto proužky nahrazeny tyčinkami čtvercového průřezu. Z tabulky násobilky byly vynechány násobky deseti, takže vzniklo jen devět tyčinek s devíti políčky. Následující tabulka (tab. 5) ukazuje úplnou soustavu **Napierových tyčinek.** [14, s. 20]

0/1	**0/2**	**0/3**	**0/4**	**0/5**	**0/6**	**0/7**	**0/8**	**0/9**
0/2	**0/4**	**0/6**	**0/8**	**1/0**	**1/2**	**1/4**	**1/6**	**1/8**
0/3	**0/6**	**0/9**	**1/2**	**1/5**	**1/8**	**2/1**	**2/4**	**2/7**
0/4	**0/8**	**1/2**	**1/6**	**2/0**	**2/4**	**2/8**	**3/2**	**3/6**
0/5	**1/0**	**1/5**	**2/0**	**2/5**	**3/0**	**3/5**	**4/0**	**4/5**
0/6	**1/2**	**1/8**	**2/4**	**3/0**	**3/6**	**4/2**	**4/8**	**5/4**
0/7	**1/4**	**2/1**	**2/8**	**3/5**	**4/2**	**4/9**	**5/6**	**6/3**
0/8	**1/6**	**2/4**	**3/2**	**4/0**	**4/8**	**5/6**	**6/4**	**7/2**
0/9	**1/8**	**2/7**	**3/6**	**4/5**	**5/4**	**6/3**	**7/2**	**8/1**

Tab. 5 – Soustava Napierových tyčinek

Chceme-li například násobit číslo **1 572**, vybereme ze soupravy tyčinek ty, které mají v záhlaví čísla 1, 5, 7, 2 a sestavíme z nich pravoúhelníkovou tabulku podle následujícího obrázku (tab. 6).

0/1	0/5	0/7	0/2
0/2	1/0	1/4	0/4
0/3	1/5	2/1	0/6
0/4	2/0	2/8	0/8
0/5	2/5	3/5	1/0
0/6	3/0	4/2	1/2
0/7	3/5	4/9	1/4
0/8	4/0	5/6	1/6
0/9	4/5	6/3	1/8

Tab. 6 – Výběr tyčinek s čísly 1, 5, 7, 2

Chceme-li dané číslo **1 572** násobit číslem **3**, přečteme ve třetím řádku systémem gelosia výsledek **4 716**. Podobně při násobení číslem 8 přečteme v osmém řádku výsledek **12 576** (tab. 7).

0/3	1/5	2/1	0/6		0/8	4/0	5/6	1/6
4	7	1	6		12	5	7	6

Tab. 7 - Násobení na Napierových tyčinkách

Ukážeme si nyní **násobení dvojciferným číslem**. Ponecháme již dříve zadané číslo **1 572** a budeme je násobit číslem **38**.

$1\ 572 \cdot 38 = 59\ 736$

Úlohu rozdělíme na dvě, které už byly dříve vypočítané:

$1\,572 \cdot 38 = 1\,572 \cdot (30 + 8) = 1\,572 \cdot 30 + 1\,572 \cdot 8$

$1\,572 \cdot 3 = 4\,716$, proto $1\,572 \cdot 30 = 47\,160$
$1\,572 \cdot 8 = 12\,576$
$47\,160 + 12\,576 = 59\,736$

Podobně postupujeme i při **násobení číslem víceciferným** a popřípadě při **umocňování.**

$254^2 = 254 \cdot 254 = 254 \cdot (200 + 50 + 4) = 254 \cdot 200 + 254 \cdot 50 + 254 \cdot 4$

$\underline{2 \quad 5 \quad 4 \quad \cdot\ 200 = 50\,800}$
$\boxed{0/4}\ \boxed{1/0}\ \boxed{0/8}$
5 0 8 0 0

$\underline{2 \quad 5 \quad 4 \quad \cdot\ 50 = 12\,700}$
$\boxed{1/0}\ \boxed{2/5}\ \boxed{2/0}$
1 2 7 0 0

$\underline{2 \quad 5 \quad 4 \quad \cdot\ 4 = 1\,016}$
$\boxed{0/8}\ \boxed{2/0}\ \boxed{1/6}$
1 0 1 6

$$\begin{array}{r} 50\,800 \\ 12\,700 \\ \underline{1\,016} \\ 64\,516 \end{array}$$

Složitější je ovšem provádět na tyčinkách **dělení.**

$\underline{2 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \ :\ 3 \ = \ 917}$
$\boxed{0/0}\ \boxed{2/7}\ \boxed{0/5}$
$\quad\quad \boxed{0/3}\ \boxed{2/1}$

Číslo 2 < 3, proto pod 2 napíšeme $\boxed{0/0}$. Toto políčko sice v tabulce neexistuje, ale při dělení je budeme občas potřebovat. Číslo 27 zapíšeme ve tvaru $\boxed{2/7}$ pod 7. Ve 3. řádku kompletní soupravy tyčinek najdeme toto políčko pod 9, a proto do výsledku dělení zapíšeme první číslici podílu **9**. Pod 5 v dělenci zapíšeme políčko $\boxed{0/5}$ (0 proto, že z předchozího dělení nic nezbylo, a 5 sepíšeme). Toto políčko v 3. řádku tabulky není, proto najdeme nejblíže menší. Tím je políčko $\boxed{0/3}$ pod číslem **1**, které zapíšeme jako 2. číslici do podílu. Pod 1 v dělenci napíšeme políčko $\boxed{2/1}$ (2 proto, že z předchozího dělení zbylo 5 – 3 = 2, a 1 sepíšeme). Toto políčko je ve 3. řádku tabulky pod číslem **7**, které zapíšeme jako 3. číslici podílu.

Už bez komentáře si ukážeme některé další příklady na dělení:

```
3    8    5    1    4   :   2  =  19 257
0/3
0/2  1/8  0/5
          0/4  1/1
               1/0  1/4
```

```
2    7    5    3    :    3  =  917, 66 . . .
0/0  2/7  0/5
          0/3  2/3
               2/1  2/0  ................ Zde buď dělení skončí se zbytkem 2,
                    1/8  2/0  .......... nebo pokračuje za desetinnou čárkou
                                         s periodou 6.
```

Na rozdíl od násobení při dělení dvojciferným či víceciferným dělitelem nelze rozložit dělitele na sčítance, protože $a : (b + c) \neq a : b + a : c$. Dělitele musíme rozložit, pokud je to možné, na jednociferné činitele a postupně jimi dělit.

Ukážeme si to na úloze **1 039 878 : 189 = 5 502**

Číslo 189 rozložíme na součin $9 \cdot 7 \cdot 3$ a postupně dělíme:

```
1    0    3    9    8    7    8    :    9  =  115 542
     1/0
     0/9  1/3
          0/9  4/9
               4/5  4/8
                    4/5  3/7
                         3/6  1/8
```

```
1    1    5    5    4    2    :    7  =  16 506
     1/1
     0/7  4/5
          4/2  3/5  0/4  4/2
```

$$\underline{1 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \quad 6 \quad : \quad 3 \; = \; 5\,502}$$

$$\boxed{1/6}$$

$$\boxed{1/5} \; \boxed{1/5} \; \boxed{0/0} \; \boxed{0/6}$$

Ne každý dělitel lze rozložit pouze na jednociferné činitele. Problém nastane, když v rozkladu je víceciferné prvočíslo, např. $819 = 13 \cdot 9 \cdot 7$. V takovém případě metoda selhává.

3.5 Logaritmické tabulky a jejich aplikace

Myšlenkou převést složité násobení a dělení na jednodušší sčítání a odčítání se zabývali již N. Chuqnet v 15. stol. a Michal Stifel v 16. stol. Ten vyšel z Archimedova srovnání aritmetické a geometrické posloupnosti [4, V/27]:

$$\ldots -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \ \ldots$$

$$-2 + 5 = 3 \qquad\qquad 3 - 5 = -2$$

$$\frac{1}{4} \cdot 32 = 8 \qquad\qquad 8 : 32 = \frac{1}{4}$$

To byla cesta k vytvoření pomůcky pro násobení a dělení prováděné pomocí sčítání a odčítání, která se později nazývala **logaritmické tabulky.**

Vytvoření logaritmických tabulek však nebylo jednoduché, protože pro praktické využití bylo nutné ve výše zmíněné aritmetické posloupnosti zvolit velice malou diferenci. John Napier vydal v Edinburgu v roce 1614 první tabulky a jako první použil i název „logaritmus“. Základem logaritmů v této tabulce nebylo číslo 10, ale číslo $(1- 10^7)^{10\,000\,000} = e^{-1}$. Nebyly to tedy logaritmy přirozené ani dekadické.

Na základě Napierova doporučení vydal v roce 1617 Henry Briggs první tabulky **dekadických logaritmů** se základem 10. Vycházel z matematické věty, že každé kladné číslo se dá zapsat jako mocnina čísla 10. [3, II. s. 49]

Anglický matematik Spidell vydal v roce 1619 první tabulky **přirozených logaritmů** se základem e = 2,718282. Jejich potřebu si vyžádal rozvoj matematiky a fyziky v té době.

J. Bürgi sestavil již kolem roku 1610 tabulky logaritmů se základem $(1 + 10^{-4})^{10\,000}$. Tento základ se lišil od čísla e jen o necelých $134 \cdot 10^{-6}$.

Výpočty prováděné pomocí logaritmů se opíraly o následující tři vlastnosti logaritmické funkce:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Nejstarší tabulky byly čtyřmístné, později se vydávaly tabulky pětimístné i šestimístné. K tabulkám byl vždy přikládán návod k použití. Práce s dekadickými logaritmickými tabulkami byla vždy významnou kapitolou učiva matematiky na středních školách. Koncem 80. let minulého století, kdy se na trhu objevilo dostatek finančně dostupných kalkulaček, přestalo toto učivo mít významné místo ve školské matematice a postupně bylo redukována jen na využívání logaritmické funkce.

V dalším textu se budeme zabývat již jen dekadickými logaritmy, které našly největší uplatnění v běžné praxi i technice při numerických výpočtech.

Logaritmická funkce $y = \log_{10} x$, dále už jen $y = \log x$ je definována pro všechna reálná čísla v oboru $(0 ; \infty)$ a nabývá v něm hodnot v intervalu $(-\infty ; +\infty)$. Dekadickým logaritmem kladného čísla N nazýváme číslo y, pro které platí $10^y = N$. Odtud plyne [12, s. 100-101]

$$\log 1 = 0 \qquad \log 10 = 1 \qquad \log 10^c = c$$

$$\text{Jestliže } 1 \leq N_0 < 10, \text{ je } 0 \leq \log N_0 < 1 \qquad (1)$$

Každé číslo kladné číslo N můžeme zapsat ve tvaru $N = 10^c \cdot N_0$, (2)

kde c je celé číslo (řád první platné číslice čísla N). Takže ze vztahů (1) a (2) platí

$$\log N = c + \log N_0 \qquad (3)$$

Každý dekadický logaritmus je tedy součtem celého čísla c, které udává řád první platné číslice čísla N a nazývá se **charakteristika**, a čísla $\log N_0$, které se nazývá **mantisa.** [12, s. 100] Známe-li logaritmy čísel 1 až 10 (čísel N_0), pak známe i logaritmy všech ostatních čísel. [3, II. s. 52]

Na obr. 23 uvádíme reprodukci části tabulky pětimístných dekadických logaritmů [12, s. 116] pro ukázky použití tabulek při řešení úloh. V záhlaví tabulky pod písmenem N jsou uvedeny první tři platné číslice logaritmovaného čísla a ve sloupci čtvrté platné číslice najdeme mantisu. Poslední sloupec záhlaví označený písmenem D uvádí diferenci sousedních mantis v řádku trojčíslí logaritmovaného čísla. Zcela vpravo najdeme pod P.P. tabulku s příslušnou diferencí mantis. Pod písmenem n vyhledáme pátou platnou číslici logaritmovaného čísla a odpovídající hodnotu (lineární interpolace) zaokrouhlíme a přičteme ji k poslední platné číslici nalezené mantisy. Výsledný logaritmus pak zapíšeme jako desetinné číslo, ve kterém celá část je charakteristikou a část desetinná mantisou.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	6
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628	6
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689	7
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751	6
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813	6
705	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874	6
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936	6
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997	6
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058	7
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120	6
710	85 126	132	138	144	150	156	163	169	175	181	6
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242	6
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303	6
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364	6
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425	6
715	431	437	443	449	455	461	467	473	479	485	6
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546	6
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606	6
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667	6
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727	6
720	85 733	739	745	751	757	763	769	775	781	788	6
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848	6
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908	6
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968	6
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028	6
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088	6
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147	6
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	6

P. P.

n	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

n	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

Obr. 23 - Tabulky pětimístných dekadických logaritmů [12]

Příklad 1

Logaritmy čísel 5,16, 51,6, 516 i 0,516 budou mít stejnou mantisu, ale různou charakteristiku:

log 5,16 = 0,71012

log 51,6 = 1,71012

log 516 = 2,71012

log 0,516 = 0,1012 – 1

Příklad 2

Vyhledejte v tabulkách log 71,763.

V tabulce najdeme mantisu k číslu 7176 v řádku 717 pod 6. Ta je 85588. Diference sousedních mantis v tomto řádku je 6, proto v interpolační tabulce „6“ najdeme k poslední zadané číslici 3 opravu 1,8. Tu zaokrouhlíme na 2 a přičteme ji k mantise:

85588 + 2 = 85590. Logaritmované číslo má první platnou číslici v řádu desítek, proto charakteristika bude 1. Můžeme zapsat výsledek:

$$\log 71{,}763 = 1{,}85590$$

Provádíme-li výpočty pomocí logaritmických tabulek, je stejně důležitá znalost nalezení logaritmu k danému číslu, jako nalezení čísla k danému logaritmu.

Příklad 3

Najděte číslo, jehož logaritmus je 3,84785.

Daný logaritmus má charakteristiku 3 a mantisu 84785. V tabulce najdeme nejblíže nižší mantisu k číslu 84785 a ta je 84782. Nachází se v řádku 704 pod 4 a to jsou první čtyři číslice hledaného čísla. Pátou číslici najdeme v interpolační tabulce „6“, protože diference na řádku 704 je 6. Diferenci 84785 – 84782 = 3 odpovídá v tabulce „6“ číslice 5 a to je pátá číslice hledaného čísla. Protože charakteristika je 3, můžeme psát:

$$7044{,}5 = \log 3{,}84785.$$

Příklad 4

Už bez podrobného návodu k hledání v tabulkách vypočteme

$$x = \frac{2{,}184 \cdot 0{,}015}{1{,}372}$$

$$\log x = \log 2{,}184 + \log 0{,}015 - \log 1{,}372$$

$$0{,}33925 + (0{,}17609 - 2) - 0{,}13735 = 0{,}37799 - 2$$

$$x = 0{,}023877$$

I když práce s logaritmickými tabulkami podstatně urychlila výpočty, objevovaly se poměrně často chyby způsobené ne úplným pochopením předepsaného postupu. Jedním takovým úskalím bylo právě počítání s logaritmy majícími zápornou charakteristiku.

Ukážeme si to na předchozím příkladu.

Pokud bychom při slučování logaritmů zahrnuli do výpočtu i charakteristiku – 2, dostali bychom:

$$0{,}33925 + (0{,}17609 - 2) - 0{,}13735 = -1{,}62201$$

Toto číslo je sice <u>skutečnou funkční hodnotou log *x*</u>, ale číslo –1 není charakteristika a 62201 není mantisa. Záporná charakteristika nemůže stát před desetinnou čárkou, protože pak znaménko mínus platí pro celý zápis. Pokud tedy dostaneme jako výsledek logaritmování číslo –1,62201, musíme je opravit přičtením o odečtením vhodného přirozeného čísla, v našem případě čísla 2:

$$(-1{,}62201 + 2) - 2 = 0{,}37799 - 2.$$

I když technická praxe si vyžadovala pro přesnější výpočty vícemístné tabulky, byly s jejich vydáním dva významné problémy. Předně výpočty mantis byly bez možného použití vhodné výpočetní techniky velice obtížné a zdlouhavé. Druhý problém spočíval v rozsahu těchto tabulek. Pětimístné tabulky mají minimálně 20 stran, ale šestimístné už mají 200 stran. Tento rozsah je už pro praktické použití málo operativní.

Po vzniku výkonných počítačů už nebyl problém na základě vhodného programu sestavit i vícemístné tabulky logaritmů. Na internetu jsou k dispozici desetimístné tabulky logaritmů sedmimístných čísel od 1 000 000 do 9 999 999, které ve fyzické podobě by se skládaly z 9 svazků po 1 000 stranách.

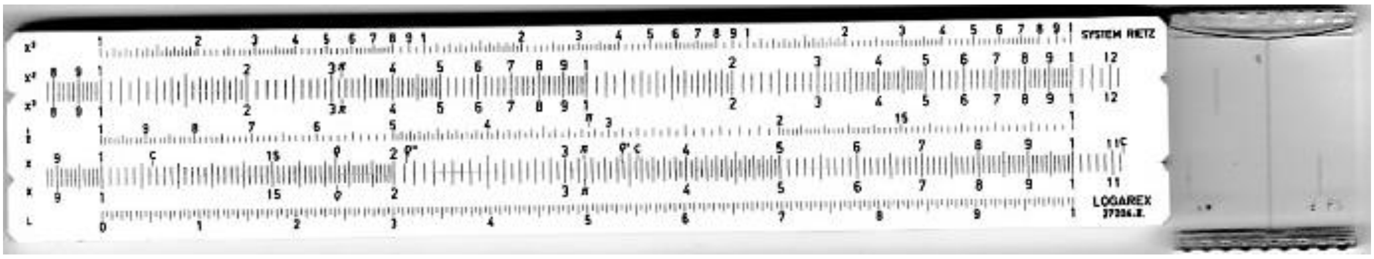
3.6 Logaritmické pravítko

Možnost nahradit násobení čísel sčítání jejich logaritmů vedla k myšlence vytvořit nerovnoměrnou logaritmickou stupnici a přenést ji na dvě lišty, které by se po sobě posouvaly a tím by se logaritmy sčítaly. První s touto myšlenkou vystoupil již v roce 1620 Edmund Gunter (1581 – 1626). Ten však přenášel úseky logaritmické stupnice kružidlem. Objevily se i pohyblivé logaritmické stupnice na soustředných kruzích. Současnou podobu dostalo logaritmické pravítko až v 19. stol. Vytvořil je A. Manheim (1830 – 1906). [4, V/27]

Logaritmické pravítko je analogová početní pomůcka, která sloužila především technikům k provádění přibližných výpočtů a odhadů. Původní logaritmická pravítka se vyráběla z kvalitního tvrdého dřeva a části, které se po sobě posouvaly, byly opatřeny kovovými hranami. Existovala také pravítka celokovová. Pořídit si logaritmické pravítko až do konce první poloviny 20. stol. nebyla levná záležitost. I když se vyráběla také kruhová a válcová pravítka, nejvíce se používala pravítka lineární. [14, s. 21]

V 50. letech 20. stol. začala českobudějovická firma LOGAREX vyrábět logaritmická pravítka z umělé hmoty, na které se stupnice tiskly. Tím se podstatně snížila cena pravítek a ta se brzy stala běžnou pomůckou na středních školách. Logaritmická pravítka se vyráběla v několika verzích podle odborného zaměření uživatele (systémy DARMSTADT, EXPONENT, RIETZ a další) a ve třech délkách hlavní stupnice (modul pravítka) 125 mm, 250 mm a 500 mm. Čím bylo pravítko delší, tím přesnější byl výpočet. Nejvíce se používalo pravítko s modulem 250 mm.

Práci na logaritmickém pravítku si ukážeme na nejjednodušší verzi – systému RIETZ a modulu 125 mm (tzv. kapesním pravítku), které je zobrazeno na obr. 24. Zvolili jsme je proto, že logaritmické pravítko se dnes už prakticky nepoužívá a jde hlavně jen o historickou připomínku.



Obr. 24 – Logaritmické pravítko (stupnice x^3, x^2, x^2, 1/x, x, x, L)

Logaritmické pravítko má tři části: pevné **těleso pravítka**, v jehož podélné ose se pohybuje **šoupátko** a dále je na pevné části umístěn **jezdec** s ryskami. Prostřední ryska přesahuje přes celou šíři pravítka a slouží k odečítání přiřazených hodnot na stupnicích, které nejsou spolu v kontaktu.

Vlevo na okraji pravítka jsou označení stupnic v pořadí: **x^3, x^2, x^2, 1/x, x, x, L**. (obr. 24)

Stupnice **x** na pevné části a šoupátku se někdy označují jako „hlavní“. Jsou to logaritmické stupnice čísel 1 až 10, kde číslo 10 je zapsáno jako 1, protože je to začátek dalšího modulu s charakteristikou o 1 větší. Podobně i vlevo je naznačen konec předchozího modulu s charakteristikou o 1 menší. Obě stupnice **x** slouží k násobení a dělení.

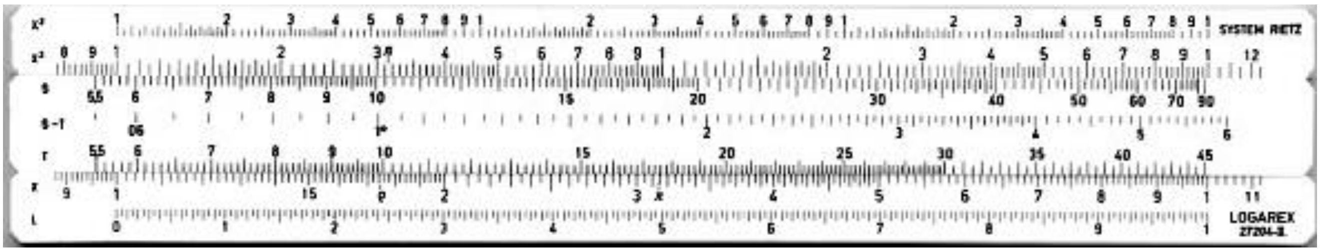
Stupnice **x^2** má dva moduly a ta na pevné části slouží k odečtení druhé mocniny čísla *x* na hlavní stupnici pomocí jezdce. Obě stupnice pak slouží k násobení a dělení.

Stupnice **x^3** má tři moduly a slouží k odečtení třetí mocniny čísla *x* na hlavní stupnici pomocí jezdce.

Stupnice **1/x** umožňuje jednak odečtení převrácené hodnoty čísla *x* na hlavní stupnici pomocí jezdce, ale také převést dělení na násobení převrácenou hodnotou.

Stupnice **L** je lineární a umožňuje odečíst log *x* čísla x na hlavní stupnici pomocí jezdce.

Na obrácené straně šoupátka jsou další stupnice: **S**, **S-T**, **T**. (obr. 25)



Obr. 25 - Logaritmické pravítko (stupnice S, S-T, T)

Stupnice **S** je určena pro odčítání hodnot sin α v intervalu ($5{,}5^o$; 90^o >
Stupnice **S-T** je určena pro odčítání hodnot sin α a tg α v intervalu ($0{,}6^o$; 6^o)
Stupnice **T** je určena pro odčítání hodnot tg α v intervalu ($5{,}5^o$; 45^o >

Na stupnicích **x** a $\mathbf{x^2}$ jsou vyznačeny konstanty, které běžný uživatel s výjimkou π nepoužije, ale pro úplnost popisu uvádíme jejich hodnoty ([2] str. 797-798)

$\pi \doteq 3{,}141\ 59$ $\rho = \pi / 180 \doteq 1{,}745 \cdot 10^{-2}$ $\rho' = (180/\pi) \,.\, 60 \doteq 3{,}438 \cdot 10^3$

$\rho'' = (180/\pi) \,.\, 60^2 \doteq 2{,}0626 \cdot 10^5$ $c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \doteq 1{,}128$ $c' = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \doteq 3{,}568$

Konečně si objasníme význam a použití rysek na jezdci. Kromě hlavní rysky označené **q** je vlevo od ní horní ryska bez označení a dolní ryska označená **kW**. Vpravo od hlavní rysky je dolní ryska označená **d** a **PS**. Levá horní ryska a pravá dolní ryska jsou od hlavní rysky stejně vzdálené.

Použití dolních rysek slouží k převodu kW na PS a naopak.

Použití horní levé rysky a hlavní rysky nebo hlavní rysky a dolní pravé rysky slouží k výpočtu obsahu kruhu o daném průměru *d* nebo k výpočtu průměru *d* z daného obsahu kruhu.

Ukážeme si použití logaritmického pravítka na jednoduchých typických příkladech. Protože v popisu budeme používat stupnice **x** a $\mathbf{x^2}$, které jsou na pravítku dvakrát v různých významech, dohodněme se, že pro řešení následujících příkladů budeme stupnice **x** a $\mathbf{x}^2$ na pevné části pravítka označovat $_1\mathbf{x}$ a $_1\mathbf{x}^2$ a ty, které jsou na šoupátku $_2\mathbf{x}$ a $_2\mathbf{x}^2$.

Příklad 1 – Násobení na jednom modulu

Vypočítejte $2 \cdot 4$

K číslu 2 na stupnici $_1\mathbf{x}$ přisuneme číslo 1 stupnice $_2\mathbf{x}$ a pod číslem 4 na stupnici $_2\mathbf{x}$ čteme na stupnici $_1\mathbf{x}$ výsledek 8.

Zároveň je vidět, že pod každým číslem stupnice $_2\mathbf{x}$ je na stupnici $_1\mathbf{x}$ jeho dvojnásobek.

Příklad 2 – Násobení na dvou modulech

Vypočítejte $3 \cdot 8$

Jestliže bychom postupovali stejně jako v předchozím příkladu, tak výsledek nenajdeme, protože číslo 8 na stupnici $_2\mathbf{x}$ je mimo pravítko. Je to proto, že výsledek 24 není v intervalu od 1 do 10 (v modulu pravítka).

Musíme šoupátko posunout o jeden modul vlevo, což je totéž, jako bychom posunuli pevnou část pravítka o jeden modul vpravo.

K číslu 3 na stupnici $_1\mathbf{x}$ přisuneme číslo 1 na konci stupnice $_2\mathbf{x}$ a pod číslem 8 na stupnici $_2\mathbf{x}$ čteme na stupnici $_1\mathbf{x}$ 2,4. Protože posunem šoupátka o jeden modul vlevo se zvětšila charakteristika o 1, je výsledek 24.

Příklad 3 – Dělení

Vypočítejte 56 : 7

K číslu 56 (5,6) na stupnici $_1\mathbf{x}$ přisuneme číslo 7 na stupnici $_2\mathbf{x}$ a pod číslem 1 stupnice $_2\mathbf{x}$ čteme na stupnici $_1\mathbf{x}$ výsledek 8.

K výpočtu můžeme použít také stupnice **1/x** na šoupátku. K číslu 56 (5,6) na stupnici $_1\mathbf{x}$ přisuneme číslo 1 na stupnici **1/x** a pod číslem 7 na této stupnici přečteme na stupnici $_1\mathbf{x}$ výsledek 8. Protože stupnice $_1\mathbf{x}$ a **1/x** nejsou kontaktní, použije k přečtení hlavní rysku šoupátka.

Příklad 4 – Výpočet obsahu kruhu

Vypočítejte obsah kruhu, jehož poloměr je 3 cm.

K číslu 6 (průměr kruhu) na stupnici $_{1}\mathbf{x}$ přisuneme hlavní rysku jezdce a pod levou horní ryskou čteme na stupnici $_{2}\mathbf{x}$ výsledek 28,2 cm^2. Polohu desetinné čárky musíme určit hrubým odhadem výsledku – nemohou to být jednotky ani stovky.

Příklad 5 – Určení hodnot funkcí

Určení druhé a třetí mocniny je jednoduché. Pomocí hlavní rysky jezdce odečítáme mocninu čísla ze stupnice $_{1}\mathbf{x}$ na stupnici $\mathbf{x^2}$, resp.$\mathbf{x^3}$.

Určení hodnoty dekadického logaritmu čísla ze stupnice $_{1}\mathbf{x}$ provádíme pomocí jezdce na stupnici **L.**

Složitější je hledání hodnot goniometrických funkcí. Pro tento účel musíme vysunout šoupátko z pravítka a zasunout je tam opačnou stranou. Zarovnání zkontrolujeme na pravé straně pravítka.

Nyní už můžeme odečítat pomocí jezdce hodnoty sinα a tgα. Protože v intervalu do 6^o jsou hodnoty těchto funkcí prakticky stejné, odečítáme je na společné stupnici **S-T**. Hodnoty sinα do 90^o odečítáme na stupnici **S** a hodnoty tgα do 45^o na stupnici **T.** Např. sin $30^o = 0{,}5$, tg $45^o = 1$.

K určení hodnot cosα a cotgα použijeme známých převodů na sinα a tgα. Rovněž tak pro určení hodnot tgα a cotgα pro $\alpha > 45^o$.

Práce s logaritmickým pravítkem byla velmi efektivní, ale vyžadovala od uživatele značnou zkušenost s numerickými výpočty a schopnost hrubého odhadu řádu první platné číslice výsledku. Vyžadovala také znalost různých matematických vztahů. Skutečnost, že logaritmické pravítko bylo téměř 100 let nezbytnou pomůckou každého technika a symbolem technické gramotnosti však stojí za to si práci s ním připomenout.

4. Počítání s čísly, která nelze v dekadické soustavě zapsat úplně

4.1 Počítání s periodickými racionálními čísly

Aby zlomek $\frac{p}{q}$ v základním tvaru mohl být zapsán jako zlomek desetinný nebo desetinné číslo s konečným rozvojem, musí kanonický rozklad jmenovatele q mít pouze prvočinitele 2 a 5, tedy být zapsán ve tvaru $q = 2^n \cdot 5^m$, kde čísla n a m jsou přirozená nebo nula. Například:

$$\frac{147}{840} = \frac{21 \cdot 7}{21 \cdot 40} = \frac{7}{40} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$$

Ve všech ostatních případech povede převod zlomku $\frac{p}{q}$ v základním tvaru na periodický desetinný rozvoj. Například:

$$\frac{738}{630} = \frac{18 \cdot 41}{18 \cdot 35} = \frac{41}{35} = \frac{41}{5 \cdot 7} = 1{,}1\overline{714285}$$

Ukážeme si, jak se s periodickými čísly počítá, abychom dostali přesný výpočet.

<u>Sčítání a odčítání periodických čísel</u>

<u>Příklad 1</u>

Vypočítejte $2{,}3\overline{165} + 3{,}21\overline{54}$

Napíšeme si daná čísla pod sebe a prodloužíme jejich zápis o několik period:

$$2{,}3\overline{165}165165165165\ldots$$

$$\underline{3{,}21\overline{54}545454545454\ldots}$$

$$5{,}53\overline{197106}19710619\ldots$$

$$2{,}3\overline{165} + 3{,}21\overline{54} = 5{,}53\overline{197106}$$

Po sečtení je zřejmé, že součet má dvoumístnou předperiodu a šestimístnou periodu. To odpovídá pravidlu:

V součtu dvou periodických čísel má předperioda tolik desetinných míst jako má delší předperioda sčítanců. Perioda součtu má tolik desetinných míst jako je nejmenší společný násobek počtu míst v periodách sčítanců.

<u>Příklad 2</u>

Vypočítejte $5{,}07\overline{23} + 2{,}314\overline{7213}$

Už víme, že součet bude mít třímístnou předperiodu a čtyřmístnou periodu. Jeho zápis bude mít 7 desetinných míst. Protože by mohlo dojít při sčítání na 8. desetinném místě k přechodu přes desítku, což by ovlivnilo číslici na 7. desetinném místě, napíšeme oba sčítance s osmi desetinnými místy:

$$\begin{array}{r} 5{,}07\overline{23}2323\ldots \\ \underline{2{,}314\overline{7213}7\ldots} \\ 7{,}38704460\ldots \end{array}$$

$$5{,}07\overline{23} + 2{,}314\overline{7213} = 7{,}387\overline{0446}$$

Odečítání provádíme podle téhož pravidla:

<u>Příklad 3</u>

K ilustraci použijeme čísla z předchozího příkladu.

Vypočítejte $7{,}387\overline{0446} - 5{,}07\overline{23}$

Předperioda bude zřejmě třímístná a perioda čtyřmístná. Zapíšeme tedy čísla s osmi desetinnými místy:

$$\begin{array}{r} 7{,}387\overline{0446}0\ldots \\ \underline{-\ 5{,}07\overline{23}2323\ldots} \\ 2{,}31472137\ldots \end{array}$$

$$7{,}387\overline{0446} - 5{,}07\overline{23} = 2{,}314\overline{7213}$$

Příklad 4

Vypočítejte $7{,}387\overline{0446} - 2{,}314\overline{7213}$

Předperioda bude třímístná a perioda čtyřmístná. Zapíšeme tedy čísla s osmi desetinnými místy:

$$\begin{array}{r} 7{,}387\overline{0446}0 \\ -\underline{2{,}314\overline{7213}7} \\ 5{,}07232323 \end{array}$$

Výsledek $5{,}072\overline{3232}$ odpovídá sice pravidlu, ale je možné ho zjednodušit na $5{,}07\overline{23}$.

Násobení a dělení periodických čísel

Na rozdíl od sčítání a odčítání nelze násobení a dělení provádět s periodickými čísly přímo, ale až po jejich převodu na obyčejné zlomky.

Periodické číslo zapíšeme ve tvaru obyčejného zlomku tímto postupem:

Nejprve je zapíšeme jako součet části celé a části desetinné.

Desetinnou část zapíšeme jako zlomek, v jehož čitateli bude zapsána celá desetinná část zmenšená o předperiodu. Ve jmenovateli bude zapsáno tolik devítek, kolik míst má perioda a za nimi tolik nul, kolik míst má předperioda. [3, I. str. 65-68]

Příklad 5

Převeďte periodické číslo $2{,}1\overline{296}$ na obyčejný zlomek.

$$2{,}1\overline{296} = 2 + 0{,}1\overline{296}$$

$$0{,}1\overline{296} = \frac{1296 - 1}{9990} = \frac{1295}{9990} = \frac{5 \cdot 259}{5 \cdot 1998} = \frac{259}{1998} = \frac{37 \cdot 7}{37 \cdot 54} = \frac{7}{54}$$

$$2{,}1\overline{296} = 2 + \frac{7}{54} = \frac{115}{54}$$

Příklad 6

Vypočítejte $0{,}1\overline{296} \cdot 0{,}\overline{238095}$ a $0{,}1\overline{296} : 0{,}\overline{238095}$

Podle příkladu 5 je $0{,}1\overline{296} = \frac{7}{54}$

$$0{,}\overline{238095} = \frac{238095}{999999} = \frac{9 \cdot 26455}{9 \cdot 11111} = \frac{11 \cdot 2405}{11 \cdot 10101} = \frac{481 \cdot 5}{481 \cdot 21} = \frac{5}{21}$$

$$\frac{7}{54} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{162} = 0{,}0\overline{30864197}$$

$$\frac{7}{54} : \frac{5}{21} = \frac{7}{54} \cdot \frac{21}{5} = \frac{49}{90} = 0{,}5\overline{4}$$

4.2 Počítání s iracionálními čísly

„Rozumem nepostižitelná čísla" objevil pravděpodobně už Pythagoras (570 – 496 př.n.l.), když zkoumal problém souměřitelnosti úseček. V té době znali lidé jen čísla celá a zlomky – tedy čísla racionální. Byli přesvědčeni, že každé dvě úsečky lze poměřit zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel jsou celá čísla. Pythagoras objevil, že poměr délky strany a úhlopříčky téhož čtverce nelze zlomkem vyjádřit.

Dlouho nechtěli lidé připustit, že taková čísla mohou existovat. Bylo dokonce zakázáno o nich mluvit, protože jejich existence mohla narušit některá všeobecně uznávaná tvrzení. Existence iracionálních čísel byla uznána až v 17. a 18. stol. zásluhou Descarta, Newtona, Leibnize a dalších matematiků. [1, s. 104] Jedním z problémů uznání existence iracionálních čísel, byl objev spojitosti množiny všech reálných čísel. Připustit existenci číselné množiny, která by měla větší mohutnost, než nekonečná množina racionálních čísel, byla nemyslitelná. Zvolíme-li totiž na číselné ose libovolný bod, pak zobrazuje s pravděpodobností 1 číslo iracionální a s pravděpodobností 0 číslo racionální.

Každé iracionální číslo má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj a můžeme ho tedy zapsat jedině buď symbolem, nebo pomocí racionální aproximace.

Máme-li počítat s iracionálními čísly, musíme si uvědomit, s jakou nepřesností budeme pracovat, jestliže použijeme racionální aproximaci. Ukážeme si některé známé aproximace $\sqrt{2}$ a jejich nepřesnosti:

Aproximace	Nepřesnost		Aproximace	Nepřesnost
7/5	1 %		41/29	0,03 %
1,41	0,3 %		1,41421	0,0003 %

Z toho důvodu je výhodnější ve výpočtu pracovat jen se symboly a teprve ve výsledku buď symbol nahradit vhodnou aproximací, nebo nechat symbol i ve výsledku. Pokud totiž je dané iracionální číslo algebraické (jako např. $\sqrt{2}$), je naděje, že projde algebraickou úpravou a tím se přemění na číslo racionální. I když se tak nestane, tak je výsledek určitě přesnější, než kdybychom už ve výpočtu pracovali s aproximací.

Ukážeme si problém na příkladu.

<u>Příklad 1</u>

Vypočtěte hodnotu zlomku $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$

a) Jestliže do zlomku dosadíme aproximace s přesností na 2 desetinná místa, pak

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1} \doteq \frac{2,24+1}{3,16-2,24+1,41-1}$$

$$\text{po úpravě } \frac{3,24}{1,33} \doteq 2,44$$

b) Jestliže zlomek napřed upravíme a teprve pak dosadíme aproximaci, pak

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1 \doteq 2{,}41$$

Chyba výpočtu a) je asi 1,25 %, výpočtu b) asi 0,3%.

Je třeba si závěrem uvědomit, že výpočet hodnoty daného zlomku způsobem b) by se počítal jen na příkaz učitele střední školy, ale v běžné praxi bychom ho vypočítali na kalkulačce s výsledkem 2,414 213 6 nebo i s přesnějším podle typu kalkulačky.

5. Závěr

Ve své práci jsem se zabývala různými historickými cestami, které zasáhly matematiku v jejím vývoji. Některé byly velmi přínosné a podnětné, jiné však způsobily zpomalení nebo byly dokonce slepou cestou.

Postupně jsem uvedla příklady ze všech historických etap. V práci jsou uvedeny příklady různých pomůcek, ale i postupný rozvoj algoritmizačních metod. Samozřejmě, že můj přehled není úplný. Jedná se pouze o výběr. Z historického vývoje lidstva můžeme tušit mnohdy překvapivé znalosti různých civilizací, které se nám však nedochovaly nebo jen částečně.

Práce by měla pomoci čtenáři v základní orientaci při návratu ke kořenům matematiky. Ne všechny poznatky dřívějších generací jsou slepými cestami.

6. Použitá literatura

[1] Balada F.: *Z dějin elementární matematiky*, Praha: SPN, 1959

[2] Bartsch Hans-Jochen: *Matematické vzorce*, Praha: SNTL, 1983

[3] Bydžovský B. *Aritmetika pro IV. – VII. třídu středních škol, I. a II. díl*, Praha: JČSMF, 1923

[4] *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech*, Praha: JČSMF, 1982-1990

[5] Genau A., *Dějiny počtářství*, Nakladatelství Emil Šolc, Telč, 1912

[6] Hruša K., *Aritmetika pro PI*, Praha: SPN, 1961

[7] Kneidl K., *Početnice pro 2. třídu měšťanských škol*, Praha: Čsl. Grafická unie, 1923

[8] Kneidl F., *Početnice pro 3. třídu měšťanských škol*, Praha: Čsl. Grafická unie, 1923

[9] Koval V., *Kamarádi čísla*, Praha: SPN 1968

[10] Křížek Michal, Liping Liu, *Matematika ve starověké Číně*, č. 5, s. 223-233, Praha: Pokroky MFA, 1997

[11] *Malá encyklopedia matematiky*, Bratislava: Obzor, 1981

[12] *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*, Praha: SPN, 1970

[13] Room A., *Guinessova kniha o číslech*, Praha: Mladá fronta, 1993

[14] *Svět čísel, atomů a molekul*, Praha: Albatros, 1986

[15] Úlehla Josef, *Početnice pro občanské školy*, Praha: Státní nakladatelství, 1921

[16] Vít Pavel, *Reálná čísla*, Praha: SPN 1980