Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Bakalářská práce

VERIFIKACE V SYSTÉMECH DYNAMICKÉ GEOMETRIE

Vypracoval: Pavel Cukr

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2014

Prohlaġuji, ġe svojí bakaláŚskou práci na téma Verifikace v systémech dynamické geometrie jsem vypracoval samostatnŊ pouze s pouġitím pramenŢ a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlaġuji, ġe v souladu s § 47b zákona ļ. 111/1998 Sb. v platném znŊní souhlasím se zveŚejnŊním své bakaláŚské práce, a to v nezkrácené podobŊ elektronickou cestou ve veŚejnŊ pŚístupné ļásti databáze STAG provozované Jihoļeskou univerzitou v Ļeských BudŊjovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéġ elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona ļ. 111/1998 Sb. zveŚejnŊny posudky ġkolitele a oponentŢ práce i záznam o prŢbŊhu a výsledku obhajoby kvalifikaļní práce. RovnŊġ souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikaļní práce s databází kvalifikaļních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoġkolských kvalifikaļních prací a systémem na odhalování plagiátŢ.

Datum: Podpis:é é é é é é é ..

ANOTACE

Cílem bakaláŚské práce Verifikace v systémech dynamické geometrie je ovĽŚování nĽkolika vybraných problémŢ z planimetrie pomocí programu GeoGebra. U kaģdého problému je popsán klasický dŢkaz, konstrukce a verifikace v programu GeoGebra. Následné vyuģití programu je vhodné jako uļební pomŢcka v hodinách matematiky na základních, potaģmo na stŚedních ģkolách.

ABSTRACT

The aim of bachelor thesis Verification in Dynamic Geometry Systems is the verification of several chosen problems of plane geometry using Geogebra programme. Classical proof, construction and verification are depicted in the selected problems. The next part of the thesis deals with the utilization of this programme as teaching aids in mathematics lessons in elementary schools and in high schools.

POD’nKOVÁNÍ

Rád bych tímto podĽkoval vedoucímu své bakaláŚské práce, panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení pŚi Śeġení bakaláŚské práce.

OBSAH

1 Úvod

Dynamický matematický software je velice dobrou uļební pomŢckou k výuce matematiky. Jeho vyuģitím lze vysvŊtlit nŊkterá témata názornŊji a díky tomu je ģáci snadnŊji pochopí. Pro svou práci jsem si vybral program GeoGebra, který je volnŊ staģitelný a má pŚehledné pracovní prostŚedí. Dalģí výhodou programu je moģnost ģirokého vyuģití, protoģe dokáģe pracovat s geometrickými i algebraickými problémy.

ZmiŔované téma jsem si vybral proto, ģe se o geometrii zajímám jiģ od základní ģkoly. V kapitolách jsou popsány jednotlivé problémy z planimetrie. Vģdy je uvedena definice, ovŊŚení vŊty spolu s konstrukcí a klasický dŢkaz.

Práce je rozdŊlena do devíti základních kapitol. Po prvním úvodním oddílu následuje druhá kapitola, ve které se seznámíme s vlastním pojmem verifikace.

TŚetí kapitola je zamŊŚena na Thaletovu vŊtu. Zaļátek je vŊnován její definici, návodu jak zkonstruovat Thaletovu kruģnici a ovŊŚit verifikaci pomocí DGS. Následuje klasický dŢkaz Thaletovy vŊty.

Dalģí kapitola se zabývá Pythagorovu vŊtou, v níģ je pŚedstaveno znŊní vŊty, konstrukce a samotná verifikace. U klasických dŢkazŢ jsem v bakaláŚské práci volil dva z nŊkolika moģných, a to rozdŊlení ļtverce, podobnost trojúhelníkŢ a vnitŚních úhlŢ.

V dalģích dvou kapitolách popisuji FermatŢv bod a NapoleonŢv trojúhelník, tyto dvŊ kapitoly mají urļitou podobnost.

Sedmá kapitola se zabývá verifikací, konstrukcí a dŢkazem Thébaultovy vŊty.

V bakaláŚské práci nechybí ani struļný závŊr a seznam pouģité literatury.

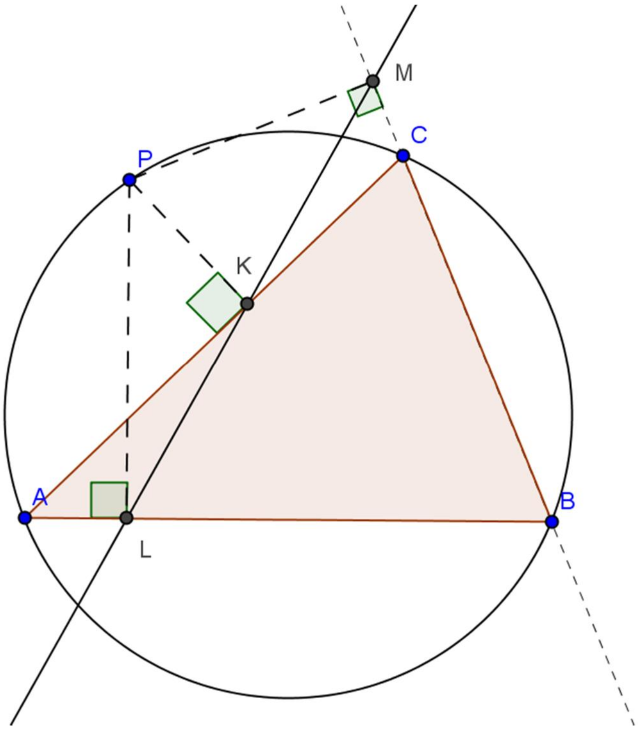
2 Verifikace v DGS

Slovo verifikace pochází z latinského *verum facare*, coģ v pŚekladu znamená *ļinit pravdivým* a do ļeského jazyka ho mŢģeme volnĿ pŚeloģit jako ovĿŚování, kontrola pravdivosti výroku, tvrzení argumentu. Mezi soubor matematických poļítaļových programŢ Dynamic geometry software (dále v práci pouģíváme zkratku DGS) patŚí napŚíklad také program GeoGebra, který v této práci aplikujeme pro demonstraci ovĿŚování problémŢ z planimetrie. Verifikace v DGS provádí ovĿŚení daného tvrzení na základĿ numerických výpoļtŢ. Verifikaci nemŢģeme povaģovat za ļistý matematický dŢkaz, ale mŢģeme tvrdit, ģe s vysokou pravdĿpodobností je tvrzení pravdivé.

Protoģe na základních ģkolách je dokazování matematických problémŢ sloģité a studenti jej nemají rádi, lze dŢkaz nahradit právĿ verifikací. Proto je verifikace v DGS velmi dŢleģitá pomŢcka, vede k urļité motivaci a k snadnĿjģímu pochopení výkladu daných problémŢ z planimetrie. Ģáci si s programem hrají a zároveŔ se uļí. VysvĿtlení kaģdého problému mŢģe pŚi výuce zaļínat verifikací v DGS, pak podle úrovnĿ ģákŢ pokraļovat klasickým dokazováním nebo úplným vynecháním dŢkazŢ.

Jako ukázkový pŚíklad na verifikaci pomocí DGS volíme Wallace ï Simsonovu vĿtu. Tato vĿta nám ukazuje vlastnosti bodŢ, které leģí na kruģnici opsané trojúhelníku (Obr. 1). ZnĿní vĿty:

NechŠ ABC je trojúhelník a P je bod kruģnice opsané trojúhelníku ABC. Potom paty kolmic K, L, M spuģtĿných z bodu P na strany trojúhelníka ABC leģí na jedné pŚímce. [1]



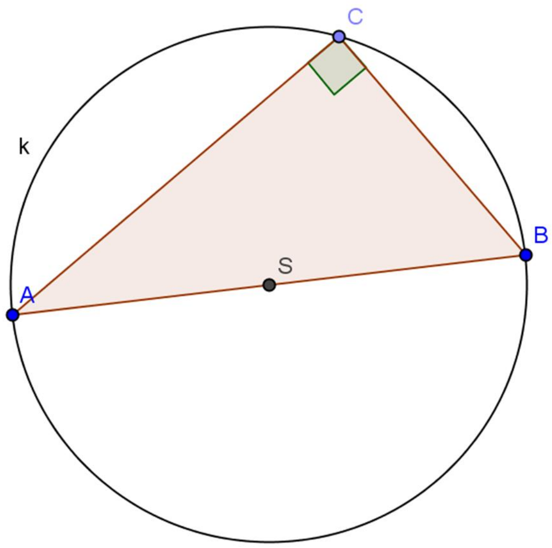
Obr. 1 Wallace ï Simsonova pŚímka

Chceme dokázat, ģe body *K*, *L*, *M* jsou kolineární, coģ znamená, ģe body leģí na jedné pŚímce. Po spojení dvou pat kolmic *LM* dostávám pŚímku *p*, v programu vidíme, ģe bod *K* nejspíģ leģí také na dané pŚímce *p*. Kliknutím pomocí *Vztah mezi dvŊma objekty* na bod *K* a na pŚímku *LM* nám GeoGebra vygeneruje a numericky ovŊŚí, ģe *Bod K leģí na pŚímce p (zkontrolováno numericky)*. Pohybujeme-li pomocí *Ukazovátko* bodem *P* po kruģnici opsané trojúhelníka *ABC*, mŊní se paty kolmic z bodu P na jednotlivé strany trojúhelníka. Dostáváme rŢzné pŚímky. Abychom se vyhnuli problému, tak pomocí *Vloģit text* napíģeme znŊní Wallace ï Simsonovy vŊty a díky funkci *Vlastnostié* zapíģeme vztah pro zobrazení objektu, a to takový, ģe bod *K* leģí na pŚímce *p*. Tímto jsme dokázali, ģe text se bude zobrazovat pouze tehdy, kdyģ bod *K* bude souļástí pŚímky. Verifikujeme tak, ģe pomocí *PŚipojit / OddŊlit bod* oddŊlujeme bod *P* od kruģnice opsané trojúhelníku *ABC*. ZnŊní Wallace ï Simsonovy vŊty se nám ztrácí, protoģe bod *K* jiģ neleģí na dané pŚímce *p*.

3 Thaletova věta

Tato matematická věta, pojmenovaná podle filozofa, geometra a astronoma Thaléta z Milétu, který jí dokázal jako první, patří k tradičním úlohám na základních školách. Thaletova věta zní:

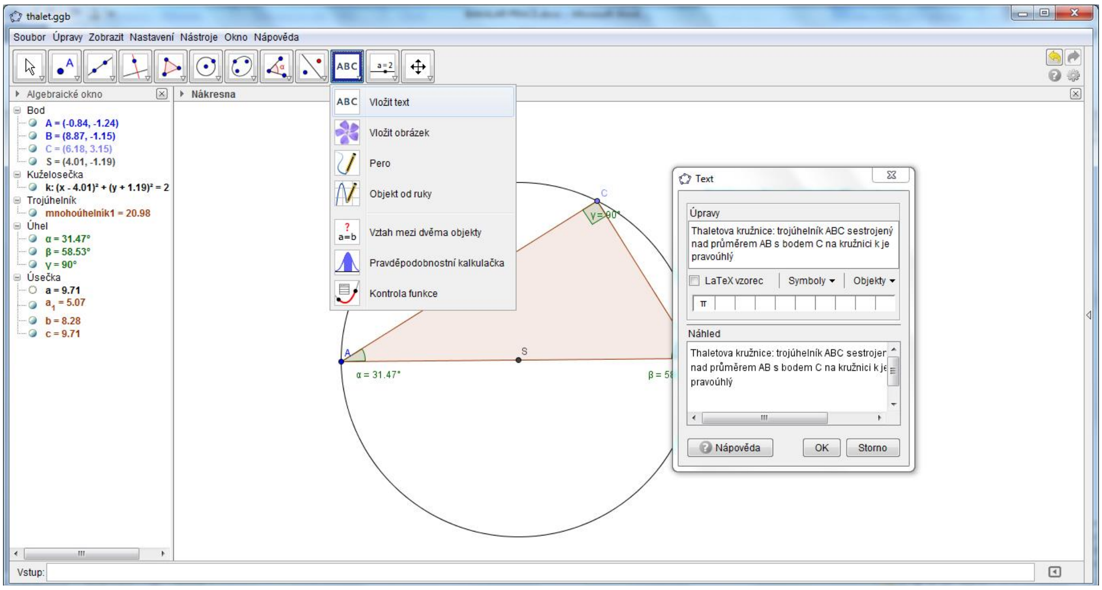
Je dána kružnice k nad průměrem AB. Nechť C je libovolný vod na kružnici k. Poté platí, že trojúhelník vzniklý spojením bodů ABC je vždy pravoúhlý a v bodě C je pravý úhel 90°.



Obr. 2 Thaletova kružnice

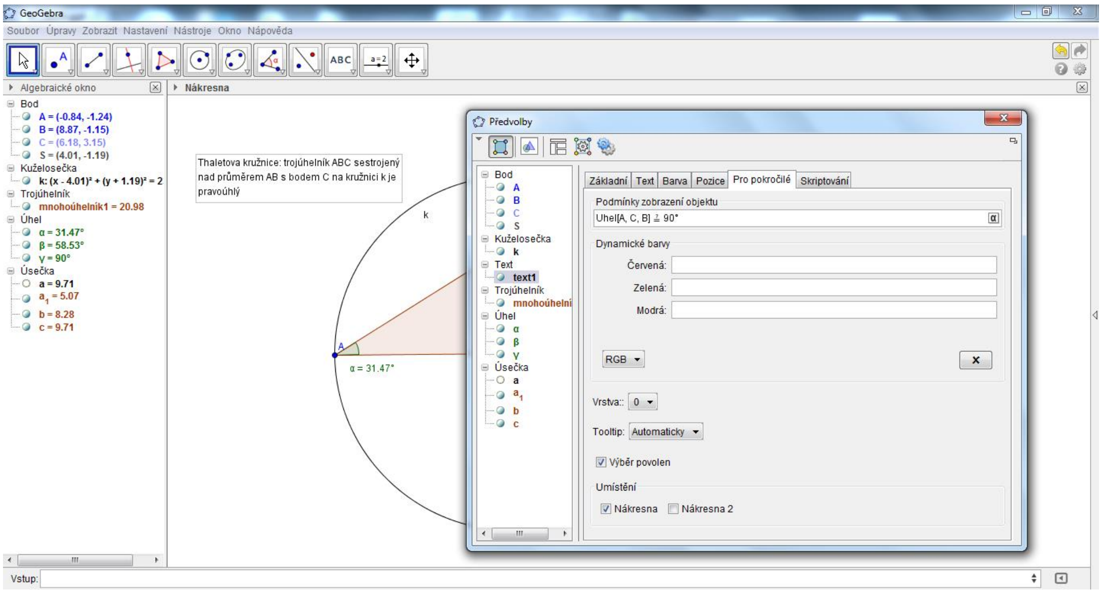
3.1 Verifikace a konstrukce Thaletovy kružnice pomocí DGS

Nejprve sestrojíme úsečku *AB* pomocí nástroje *Úsečka daná dvěma body*, pak nástrojem *Střed* vytvoříme střed úsečky. Automaticky nám program GeoGebra označí střed písmenem *C*. Klikneme pravým tlačítkem myši na bod *C* (střed), najdeme v nabídce *přejmenovat* a přepíšeme bod *C* na *S*. Pak pomocí nástroje *Kružnice daná středem a bodem* sestrojíme kružnici *k* tak, že klikneme na bod *S* a bod *A*. Přes ikonu *Nový bod* zvolíme bod *C* na kružnici *k*. Spojením bodů *ABC* pomocí nástroje *Mnohoúhelník* získáváme trojúhelník *ABC*. Chceme dokázat, že tento trojúhelník je pravoúhlý. Pomocí nástroje *Vložit text* napíšeme znění našeho textu (Obr. 3). Kliknutím na napsaný text pravým tlaļítkem myģi zvolíme *Vlastnostié* a v nabídce vlastností textu najdeme záloģku *Pro pokroļilé*, kde do kolonky *Podmínky pro zobrazení textu* zadáme *Uhel[A, C, B] ≟ 90°* (Obr. 4).



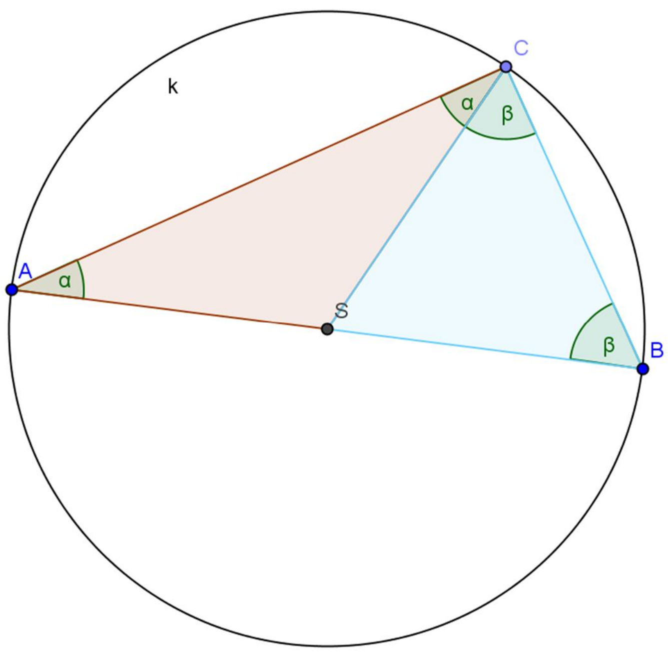
Obr. 3 Vloģení textu

Víme, ģe text Thaletovy vŊty bude zobrazen, jen kdyģ velikost úhlu *ACB* = *90°*. Pomocí vlastností z nabídky *PŚipojit / OddŊit bod* oznaļíme bod *C*, který se nám oddŊlí od kruģnice *k*, a úhel, který svíral, jiģ není pravý. ZároveŔ nám mizí text, který se zobrazuje, jen kdyģ úhel *ACB* bude *90°*. Verifikace je tím pádem hotová. Tato verifikace probíhá na základŊ numerických výpoļtŢ, a nelze jí proto povaģovat za plnohodnotný matematický dŢkaz.



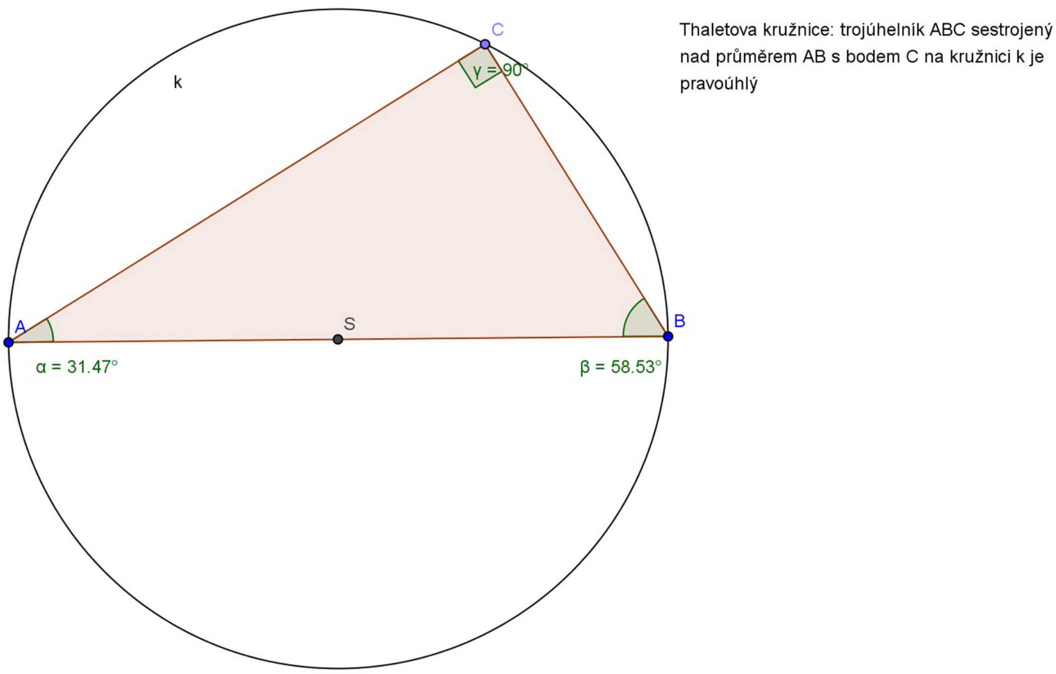
Obr. 4 Podmínky pro zobrazení objektu

3.2 Klasický dŢkaz Thaletovy vĕty



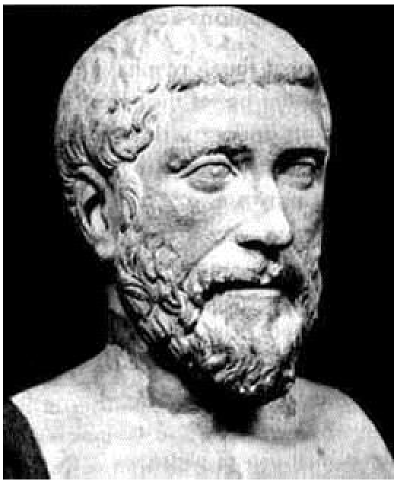
Obr. 5 DŢkaz Thaletovy kruģnice

Máme danou kružnici *k* s průměrem *AB*, bod *C* různý od bodů *AB* a bod *S*, který je středem úsečky *AB*. Dostáváme trojúhelník *ABC*, který se dá rozdělit na dva rovnoramenné trojúhelníky *ASC* a *SBC* (Obr. 5). Trojúhelník *ASC* má při straně *AC* shodné úhly α a trojúhelník *SBC* má při straně *BC* shodné úhly β, protože trojúhelníky jsou rovnostranné. Z obrázku je možno vidět, že úhly α, β, $\alpha + \beta$ jsou vnitřní úhly trojúhelníku *ABC*. Proto součet daných vnitřních úhlů musí být *180°*. Tedy $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$. Dále lze dokázat, když $2\alpha + 2\beta = 180°$, tak bude platit $\alpha + \beta = 90°$. Z toho vyplývá, že úhel $ACB = 90°$.



Obr. 6 Thaletova kružnice s textem

4 Pythagorova věta

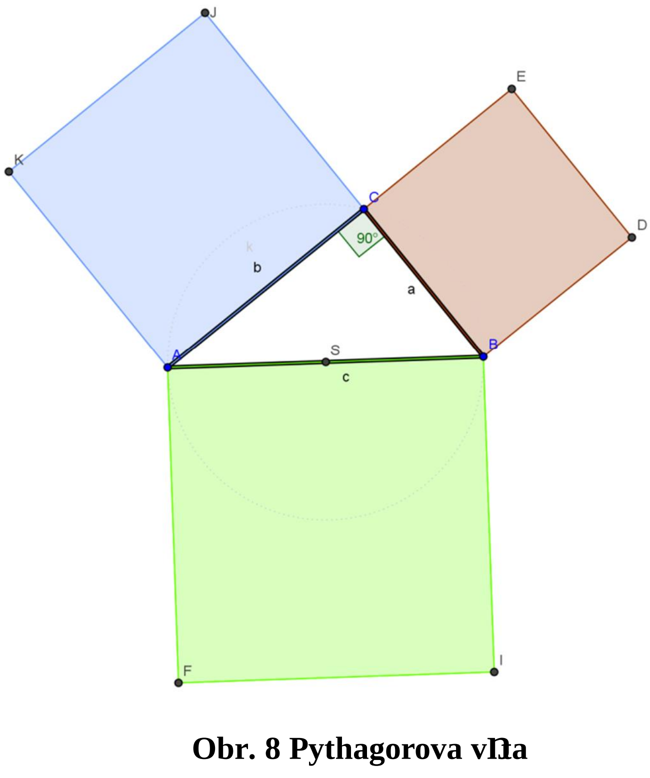


Obr. 7 Pythagoras ze Samu [2]

Tato věta je pojmenována podle řeckého filozofa a matematika Pythagora ze Samu, který jí objevil na přelomu 6. a 5. století před naším letopočtem. Věta zní:

Obsah čtverce nad přeponou c pravoúhlého trojúhelníku ABC se rovná součtu obsahů čtverců nad odvěsnami a, b. Zapisujeme:

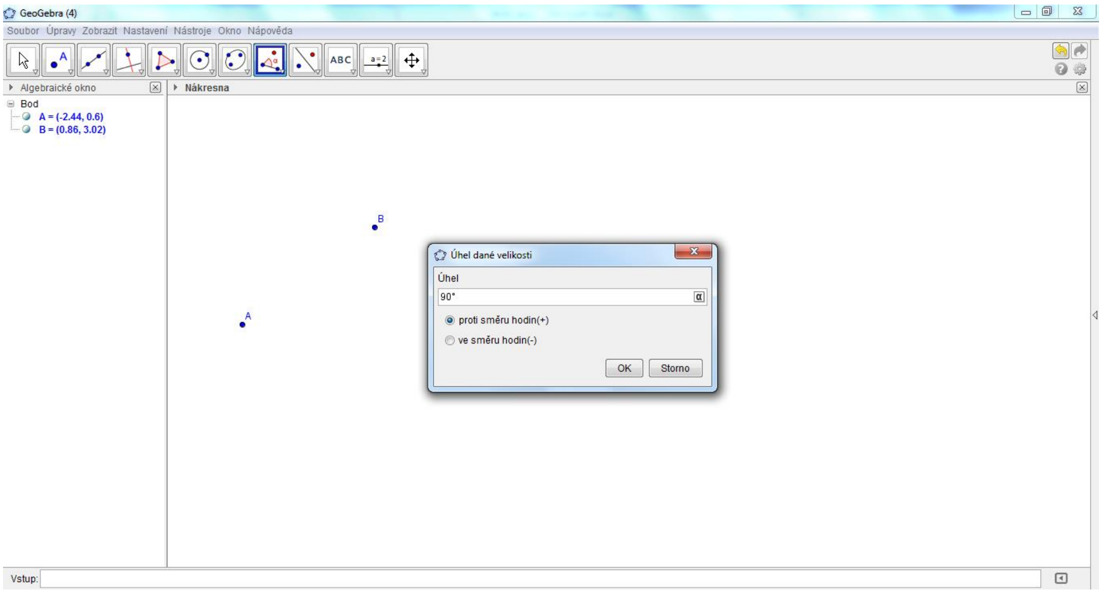
$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Obr. 8 Pythagorova věta

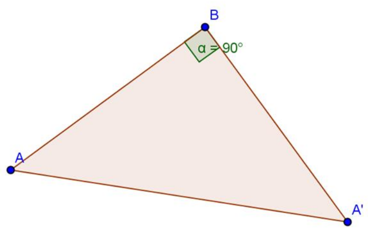
4.1 Verifikace a konstrukce Pythagorovy věty pomocí DGS

Konstruovat Pythagorovu větu můžeme několika způsoby. Například použitím Thaletovy kružnice, což jsme si podrobně vysvětlili v předešlé kapitole. Dále můžeme použít v GeoGebře funkci *Úhel dané velikosti*, kde zvolíme bod, vrchol budoucího trojúhelníku a úhel *90°*.

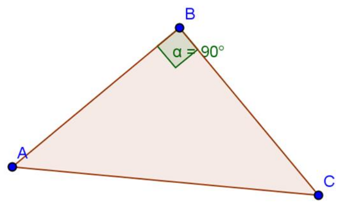


Obr. 9 Znázornění *Úhlu dané velikosti*

Nástrojem *Mnohoúhelník* pospojujeme body a vznikne nám trojúhelník *ABA´*. Pravý úhel máme v bodě *B* (Obr. 10). Pomocí *Vlastností* přepíšeme body na *ABC* (Obr. 11).

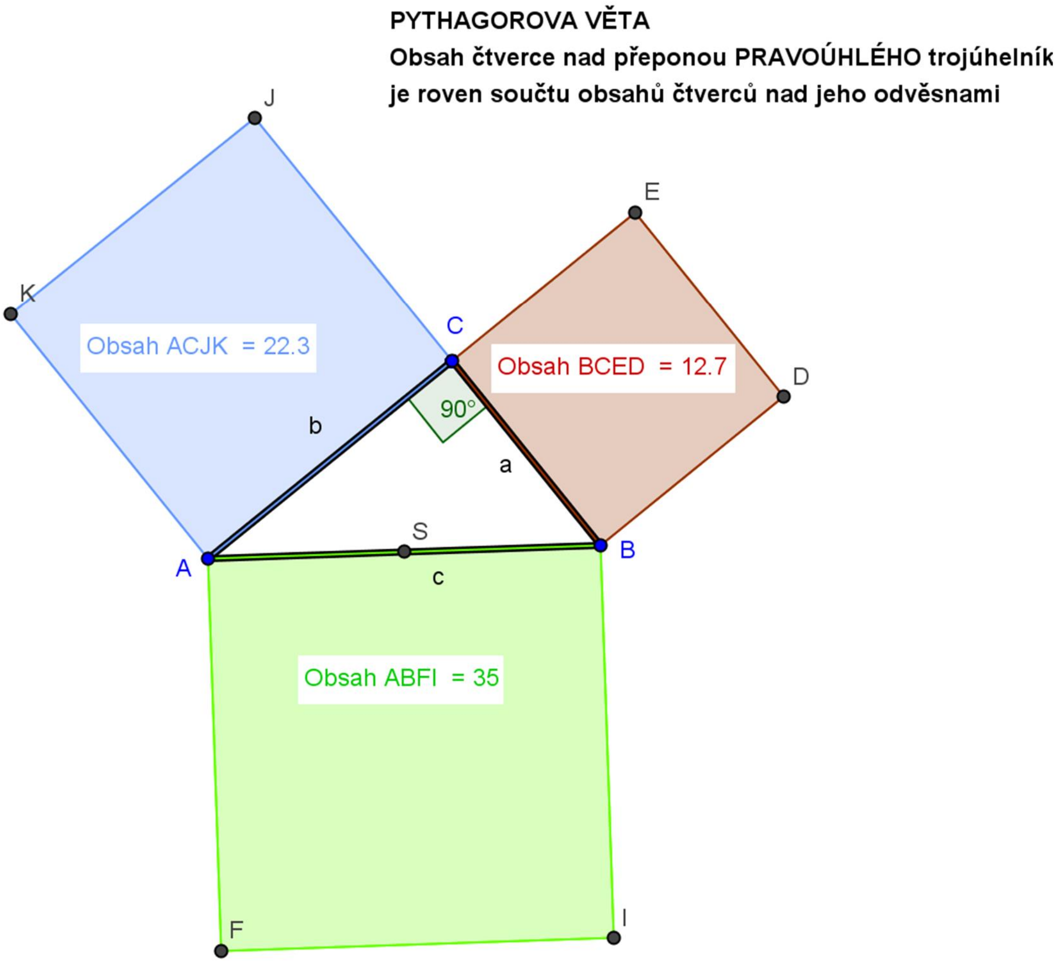


Obr. 10



Obr. 11

Nástrojem *Pravidelný mnohoúhelník* sestrojíme čtverce nad stranami *a, b, c,* a to tak, že označíme body *A, C* a do nabídky napíšeme požadovaný počet vrcholů, v našem případě čtyři. Musíme dávat pozor, jaký bod označíme jako první, aby nám čtverec nad ramenem trojúhelníka nezasahoval do trojúhelníka *ABC*. Funkcí *Obsah*, jak už její název napovídá, zjistíme obsahy jednotlivých čtverců. Poté můžeme vidět, že tvrzení Pythagorovy věty je pravdivé.

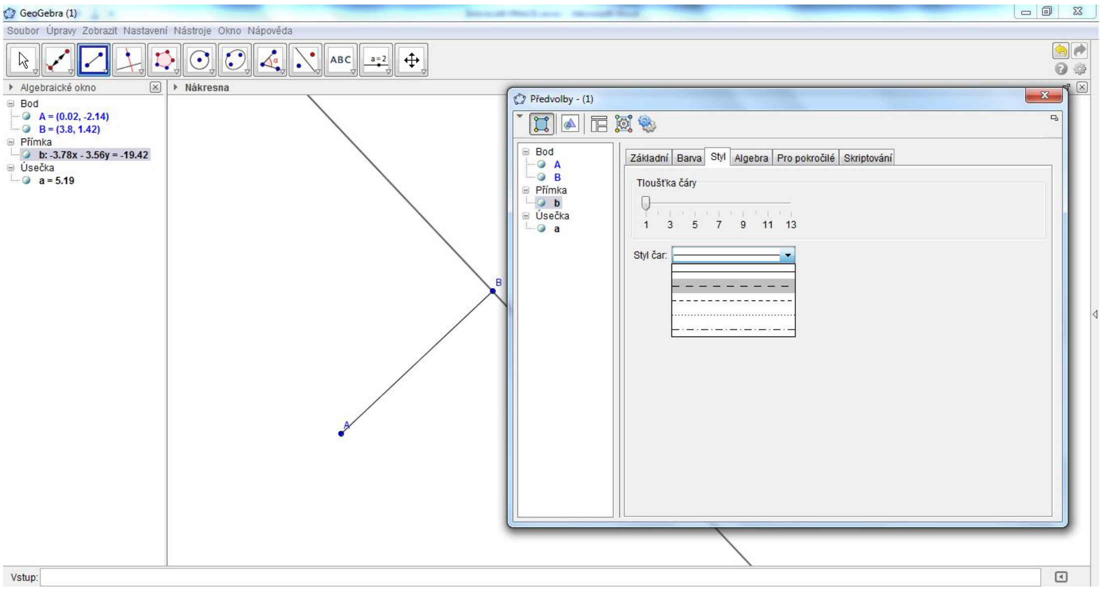


Obr. 12 Pythagorova věta

Z obrázku je zřejmé, že obsah *ABFI* (35) = obsah *ACJK* (22,3) + obsah *BCED* (12,7)

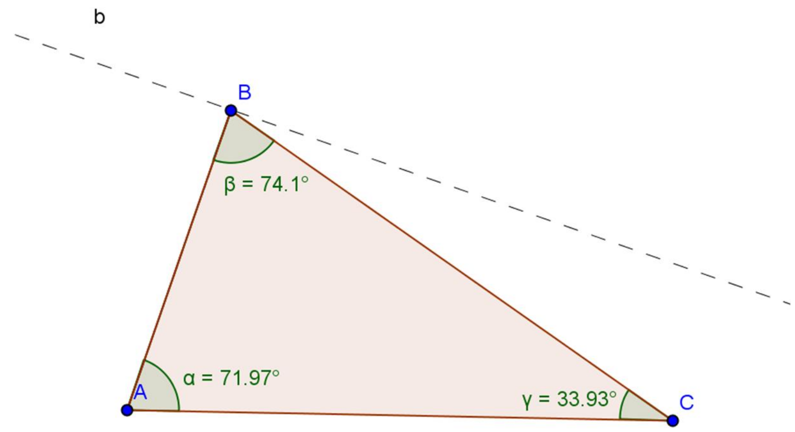
$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

Dalším způsobem konstrukce Pythagorovy věty, kde ukážeme její verifikaci pomocí *DGS*, je *Úsečka daná dvěma body*. Dostáváme úsečku *AB*, pomocí *Kolmice* sestrojíme kolmici *b*. Po zobrazení *Vlastností* kolmice *b* volíme *Styl*, kde si vybereme *Tloušťku čáry* a *Styl čáry* (Obr. 13). V našem případě budeme mít kolmici *b* čárkovanou a tloušťka kolmice *b* bude nejmenší z možných.



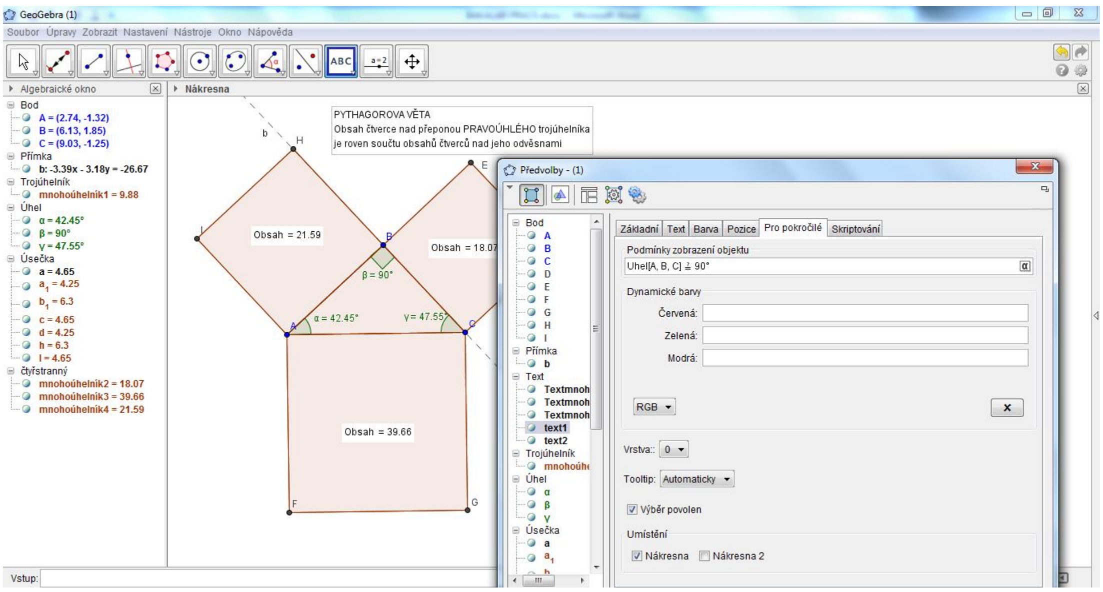
Obr. 13 Upravení stylu kolmice *b*

Dále sestrojíme pomocí nástroje *Nový bod* bod *C* a spojením bodů *ABC* pomocí funkce *Mnohoúhelník* dostáváme trojúhelník *ABC*, který není pravoúhlý (Obr. 14).



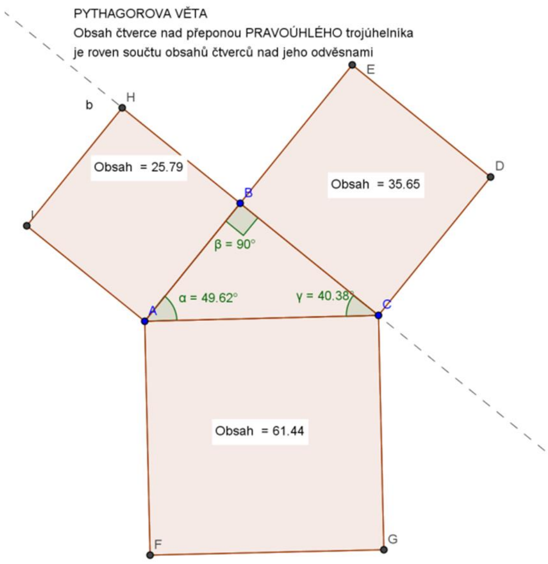
Obr. 14 Trojúhelník *ABC* není pravoúhlý

Funkcí *Pravidelný mnohoúhelník* sestrojíme ļtverce nad stranami trojúhelníka *ABC*, jako jsme provedli v kapitole o konstrukci Pythagorovy vŊty. Vloģením textu znŊní Pythagorovy vŊty a pomocí nástroje *Vlastnostíé* vybereme záloģku *Pro pokroļilé* a do kolonky *Podmínky pro zobrazení objektu* zapíģeme *Uhel[A, B, C] ≟ 90°* (Obr. 15).



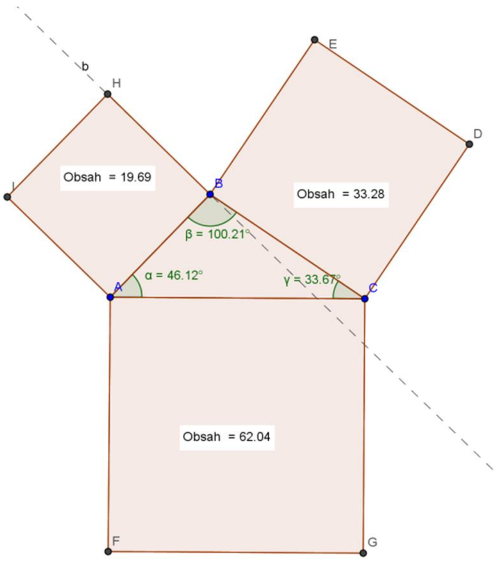
Obr. 15 Podmínky pro zobrazení objektu

Text se zněním věty se zobrazí pouze tehdy, když *úhel ABC* je pravoúhlý. Pomocí nástroje *Připojit / Oddělit bod* dokážeme připojit bod *C* ke kolmici *b*. Touto aplikací vytvoříme pravoúhlý trojúhelník *ABC* tehdy, pokud bod *C* leží na kolmici *b*. V tomto případě se nám pomocí vlastností pro zobrazení textu zobrazí text Pythagorovy věty, jak lze vidět na obrázku (Obr. 16). Pokud bod *C* neleží na kolmici *b*, trojúhelník *ABC* není pravoúhlý a text se nezobrazí (Obr. 17). Z obrázků jsou patrné i součty čtverců.



Obr. 16

Trojúhelník *ABC* je pravoúhlý
S_1 (ABHI) + S_2 (BCDE) = S_3 (ACFG)

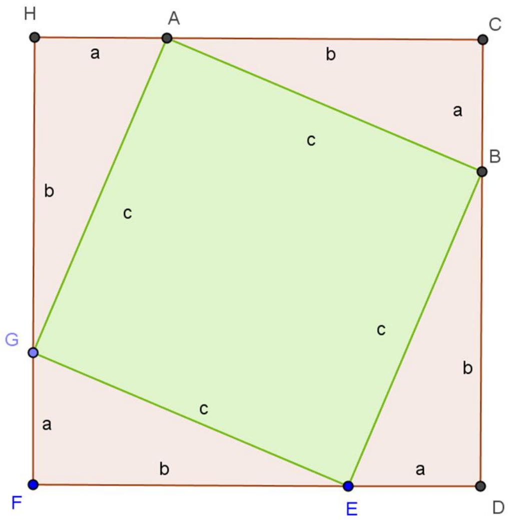


Obr. 17

Trojúhelník *ABC* není pravoúhlý
S_1(ABHI)+ S_2 (BCDE) $\neq$ S_3 (ACFG)

4.2 DŢkaz Pythagorovy vĿty

4.2.1 DŢkaz ļ. 1 pomocí rozdĿlení ļtverce



Obr. 18 RozdĿlení ļtverce

DŢkaz potvrdíme pomocí dvou rovnic obsahu celkového ļtverce *CDFH*, který je sloģen z jednoho ļtverce *ABEG* a ļtyŚ stejných pravoúhlých trojúhelníkŢ. Stranu celkového ļtverce lze nejprve vyjádŚit $a + b$, z toho plyne rovnice obsahu:

$$S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Pak je celkový ļtverec sloģen z jednoho ļtverce *ABEG* o stranĿ *c* (Obr. 18) a ļtyŚ pravoúhlých trojúhelníkŢ. Rovnice pro výpoļet obsahu pomocí tĿchto pĿti obrazcŢ je následující:

$$S = 4\ (ab/2) + c^2 = 2ab + c^2.$$

Tyto obsahy se musí rovnat, proto dáváme oba obsahy do rovnosti:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

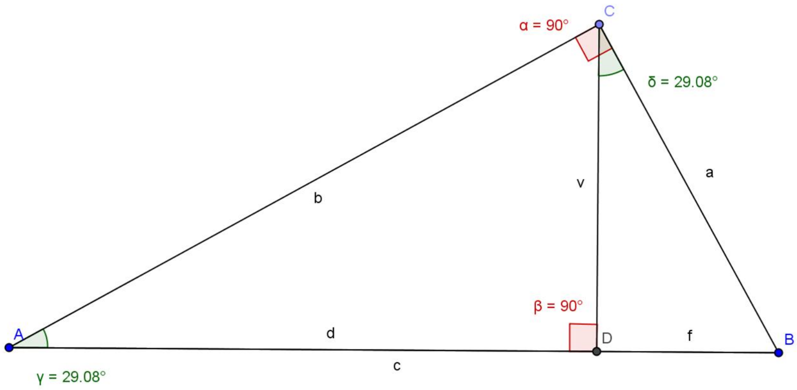
Z toho dostáváme tvrzení:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

kde, jak vidíme, se jedná o vzorec Pythagorovy vĿty.

4.2.2 Důkaz č. 2 pomocí podobnosti trojúhelníků a vnitřních úhlů

Je dán trojúhelník *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*. Patu výšky *v*, sestrojené z vrcholu *C* na stranu *AB*, pojmenujeme *D*. Výška *v* nám rozděluje trojúhelník *ABC* na dva pravoúhlé trojúhelníky *ADC* a *BDC* (Obr. 19).



Obr. 19 Vnitřní úhly v trojúhelníku

V každém trojúhelníku *ABC, CBD* a *ACD* je jeden z vnitřních úhlů pravý. Potom platí:

$$\angle CBD + \angle DCB = 90°,$$

$$\angle CAD + \angle DCA = 90°,$$

$$\angle CAB + \angle ABC = 90°.$$

Z toho vyplývá, že $\angle BAC = \angle DCB$, protože $\angle BAC = \angle DAC = \angle DCB$. Je jasné, že trojúhelníky *ABC*, *ACD* a *CBD* jsou podobné podle věty UU o podobnosti trojúhelníka, tj:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

Z podobnosti trojúhelníka *ABC* a trojúhelníka *CBD* podle obrázku (Obr. 19) je zřejmé, že platí

$$a/f = c/a,$$

kde po úpravě dostáváme

$$a^2 = cf.$$

Z podobnosti trojúhelníka *ABC* a trojúhelníka *ACD* plyne

$$b/d = c/b,$$

po úpravě platí

$$b^2 = cd.$$

Sečtením obou rovnic dostáváme

$$a^2 + b^2 = cf + cd,$$

$$a^2 + b^2 = c(f + d).$$

Z obrázku (Obr. 19) je vidět, že součet $f + d$ se rovná délce strany c. A z toho vyplývá

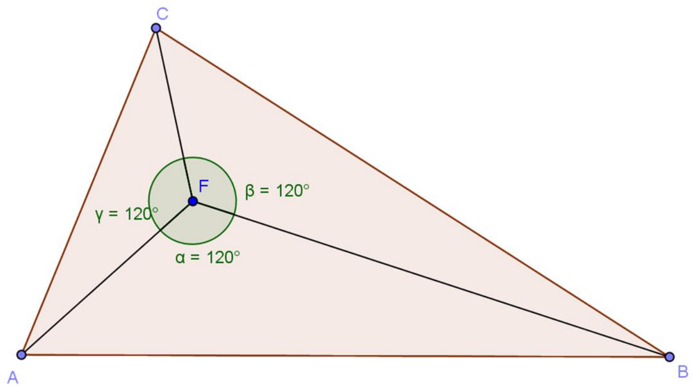
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

5 Fermatův bod

Obr. 20 Pierre de Fermat [3]

Větu pronesl jako první francouzský matematik Pierre de Fermat. Její znění je:

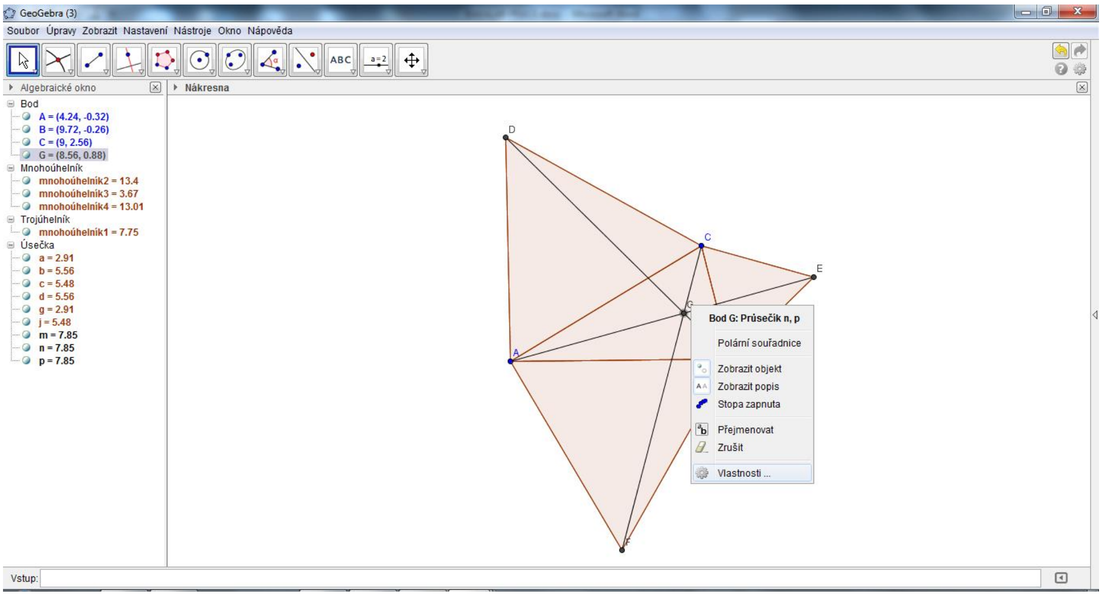
V každém trojúhelníku s vnitřním úhlem do 120° existuje právě jediný bod F takový, že součet jeho délek |AF| + |BF| + |CF| je minimálně možný. Tento bod F je umístěn v trojúhelníku tak, že úhly AFC, AFB, BFC mají vždy velikost 120°. [4]



Obr. 21 Fermatův bod *F*

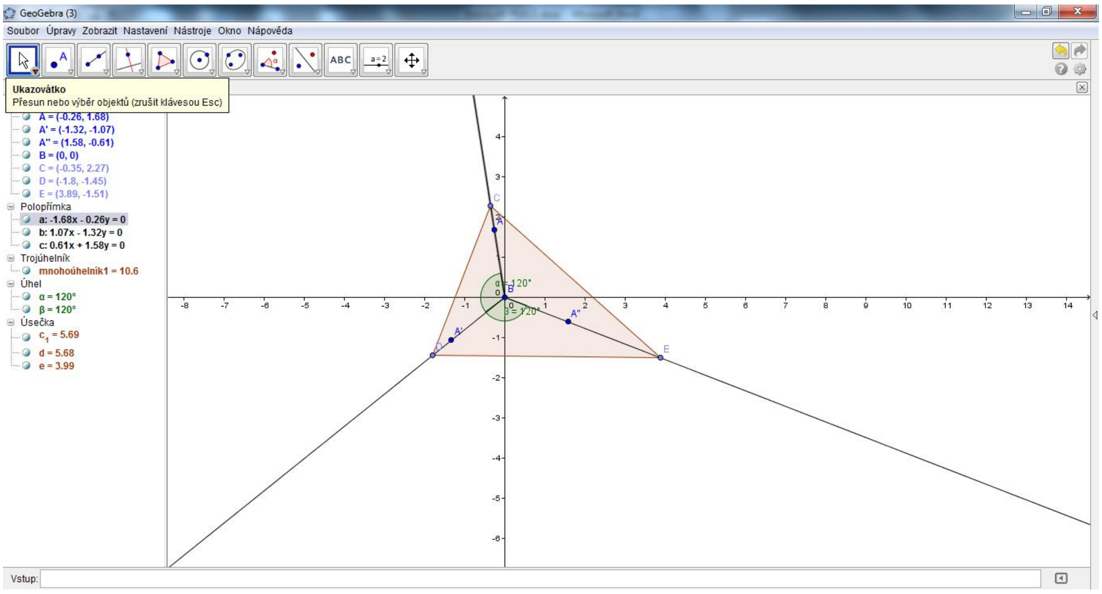
5.1 Verifikace a konstrukce Fermatova bodu pomocí DGS

Nejprve si sestrojíme libovolný trojúhelník *ABC* pomocí funkce *Mnohoúhelník*. Poté pomocí nástroje *Pravidelný mnohoúhelník* sestrojíme nad stranami trojúhelníku *a*, *b* a *c* rovnostranné trojúhelníky *ACD*, *BCE* a *ABF*. Nástrojem *Úsečka* vedeme úsečku *AE*, *BD* a *CF*. Nástrojem *Průsečíky dvou objektů* sestrojíme průsečík *G*, pravým tlačítkem a vlastností *Přejmenovat* pojmenujeme bod *F* (Obr. 22).



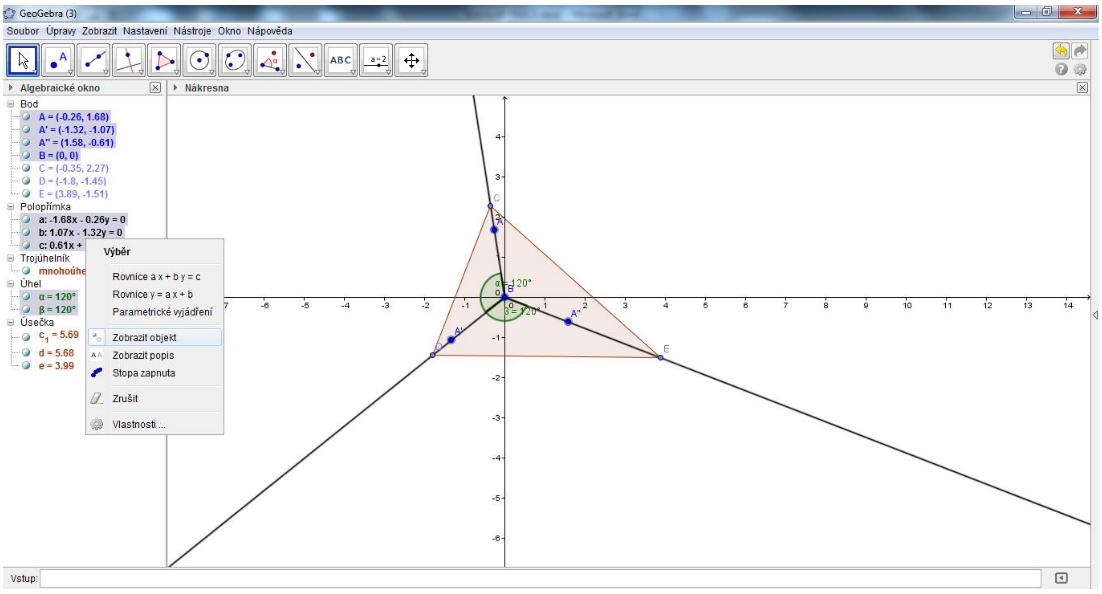
Obr. 22 Přejmenování bodu

Ověřením funkce *Úhel* přeměříme úhly *AFB*, *BFC* a *AFC*. Program GeoGebra nám okamžitě dokáže, že všechny úhly jsou stejné a mají velikost *120°*.



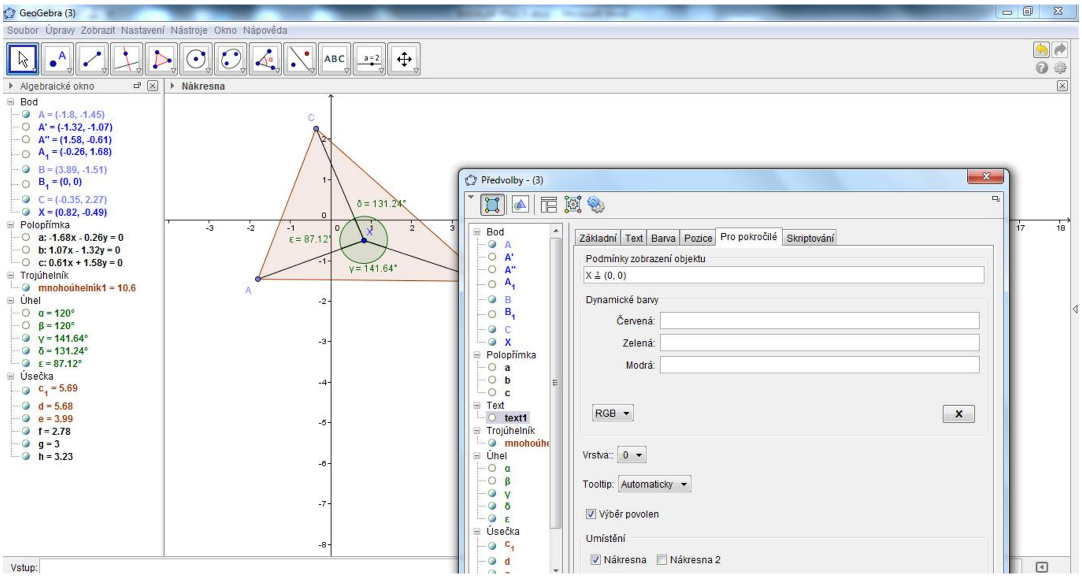
Obr. 23 posunutí trojúhelníku pomocí *Ukazovátka*

Nejprve si pomocí nástroje *Úhel dané velikosti* sestrojíme úhel *ABA´* o velikosti *120°*. Pak stejnĚ sestrojíme druhý úhel *A´BA´´*. Pomocí *PolopŚímka* narýsujeme polopŚímky *BA, BA´* a *BA´´*. Na polopŚímkách zvolíme libovolné body *CDE*. Pomocí funkce *Mnohoúhelník* a spojením bodŢ *CDE* dostáváme trojúhelník, pro který platí, ģe bod *B* je pro trojúhelník *CDE* právĚ FermatŢv bod. Nástrojem *Ukazovátko* pŚesuneme celý trojúhelník *CDE* do prŢseļíku os souŚadnosti tak, ģe právĚ bod *B* bude leģet v poļátku (Obr. 23). V algebraickém oknĚ v programu GeoGebra oznaļíme vģechny nepotŚebné kroky v konstrukci a pomocí *Zobrazit objekt* je mŢģeme odstranit (Obr. 24).



Obr. 24 Odstranění pomocí vlastnosti *Zobrazit objekt*

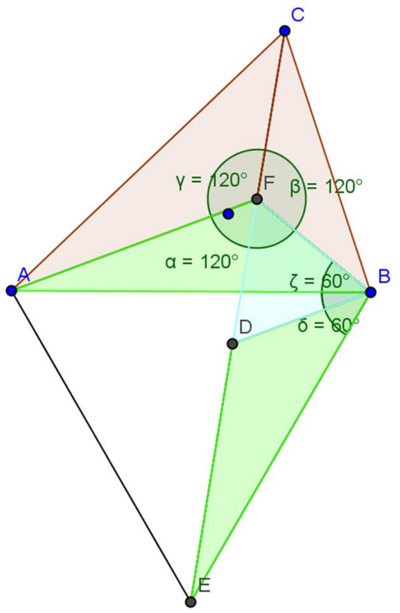
Jak bylo již zmíněno v předešlých kapitolách, přejmenujeme trojúhelník *CDE* na trojúhelník *ABC*. Vložíme bod *F*, který umístíme do trojúhelníku *ABC*, pomocí *Úsečka* spojíme bod *F* s vrcholy trojúhelníka. Dostáváme úsečky *AF*, *BF* a *CF*. Nástrojem *Úhel* změříme v programu GeoGebra úhly, které svírají dané úsečky. Pomocí *Vložením textu* napíšeme text a přes *Vlastnosti* v záložce *Pro pokročilé* napíšeme do kolonky *Podmínky pro zobrazení textu F = (0, 0)*. Pomocí nástroje *Ukazovátko* vidíme, že úhly kolem bodu *F* se nám mění, a když přiložíme bod *F* do průsečíku os *x* a *y*, objeví se nám zadaný text a tím je verifikace splněna (Obr. 25).



Obr. 25 Verifikace Fermatova bodu

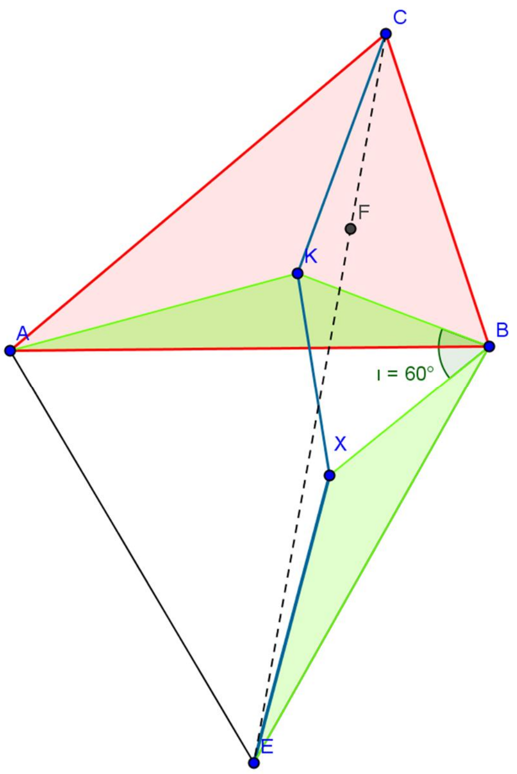
5.2 Důkaz věty o Fermatově bodu

Rotací trojúhelníku *ABF* kolem bodu *B* o *60°* dostáváme bod *D* obrazem bodu *F* a bod *E* obrazem bodu *A*. Získáváme tedy trojúhelník *BDE*. Všimneme si, že vzniklý trojúhelník *BDF* je evidentně rovnostranný. A tedy |*BF*| = |*DF*| = |*BD*|.



Obr. 26 Rotace trojúhelníku *ABF* kolem bodu *B*

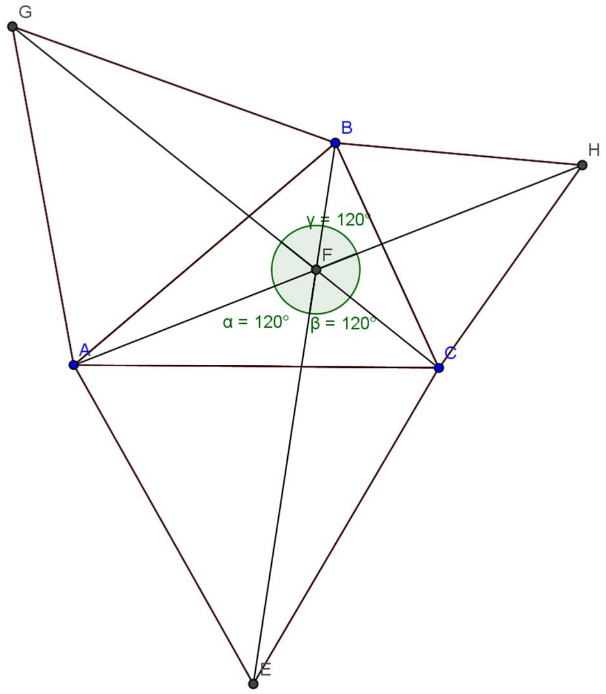
Stejně tak je vidět, že rotací bodu *A* kolem bodu *B* o *60°* dostáváme bod *E*, a tak vzdálenost |*AB*| = |*EB*|, tudíž i trojúhelník *ABE* je rovnostranný. Strana *AF* se otočí na stejně velkou stranu *ED*, pak |*AF*| = |*ED*| a dostáváme dosazením do součtu nejmenších délek |*ED*| + |*DF*| + |*CF*|, což by měla být délka lomené čáry *EDFC*. Délka čáry *EDFC* je nejkratší právě tehdy, když body leží na přímce. Z toho vyplývá, že bod *F* leží na úsečce *CE*.



Obr. 27 Otočení libovolného trojúhelníku *ABK*

Na obrázku 27 vidíme, že když otočíme kolem bodu *B* o *60°* trojúhelník *ABK*, kde *K* je libovolný bod uvnitř trojúhelníku *ABC*, tak vzniklá lomená čára složená z úseček *EX*, *KX* a *KC* neleží na jedné úsečce *EC* jako v předešlém důkazu. Potom lomená čára *EXKC* nemůže být nejkratší vzdálenost.

Sestrojením rovnoramenných trojúhelníků *ACG* a *BCH* (Obr. 28) vidíme, že bod *F* musí ležet na úsečkách *AH* a *BG*. Tyto úsečky se protnou v jednou bodě a to bodě *F* (nejmenší možná vzdálenost). To je důkaz, že úhly *AFB, BFC* a *AFC* mají *120°*. V předešlých řádcích jsme konstatovali, že trojúhelník *BDF* je rovnostranný, jeho vnitřní úhly jsou *60°*. Víme, že body *E, D, X* a *C* leží na stejné přímce, potom musí být úhel *BFE* = *60°*. Podobností trojúhelníkŢ je zŚejmé, ģe úhly *CFH* a *AFG* jsou shodné a rovnají se *60°*. Pomocí vrcholových úhlŢ je vidĕt, ģe úhly *AFC*, *AFB* a *BFC* svírají opravdu *120°*.

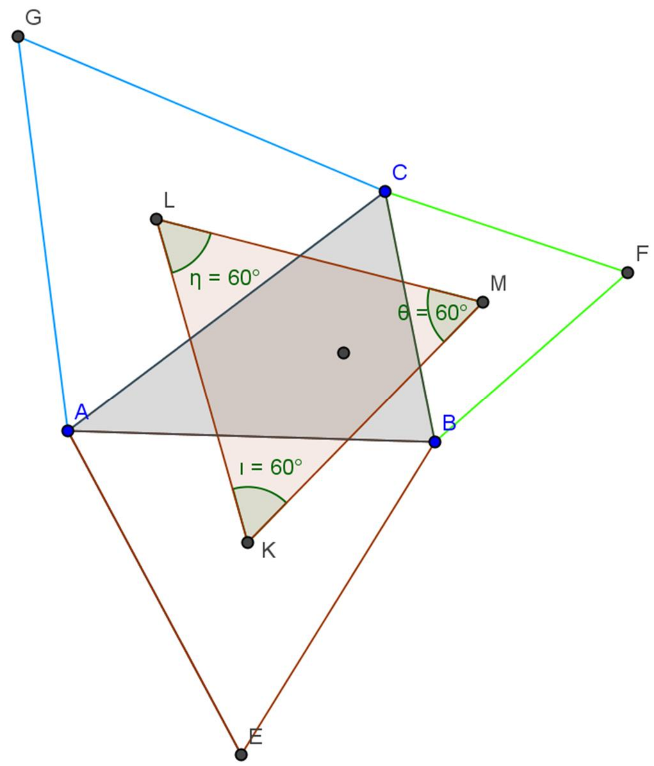


Obr. 28 FermatŢv bod *F*

6 NapoleonŢv trojúhelník

Tento geometrický jev je pojmenován na poļest známého francouzského vojevŢdce Napoleona Bonaparta. Ten jeġtĚ pŚed tím neġ se stal generálem, slouġil v armádĚ u dĚlostŚelcŢ, kde potŚeboval znalosti geometrie. Tato vĚda ho zaujala natolik, ġe zaļal zkoumat i sloġitĚjġí pŚíklady jako je zmínĚná problematika. Definice Napoleonovy vĚty zní:

Sestrojíme-li nad stranami v libovolném trojúhelníku ABC rovnostranné trojúhelníky ABE, BCF a ACG a stŚedy kruġnic opsaných i vepsaných (jedná se o rovnostranný trojúhelník) oznaļíme KLM, dostáváme rovnostranný trojúhelník.

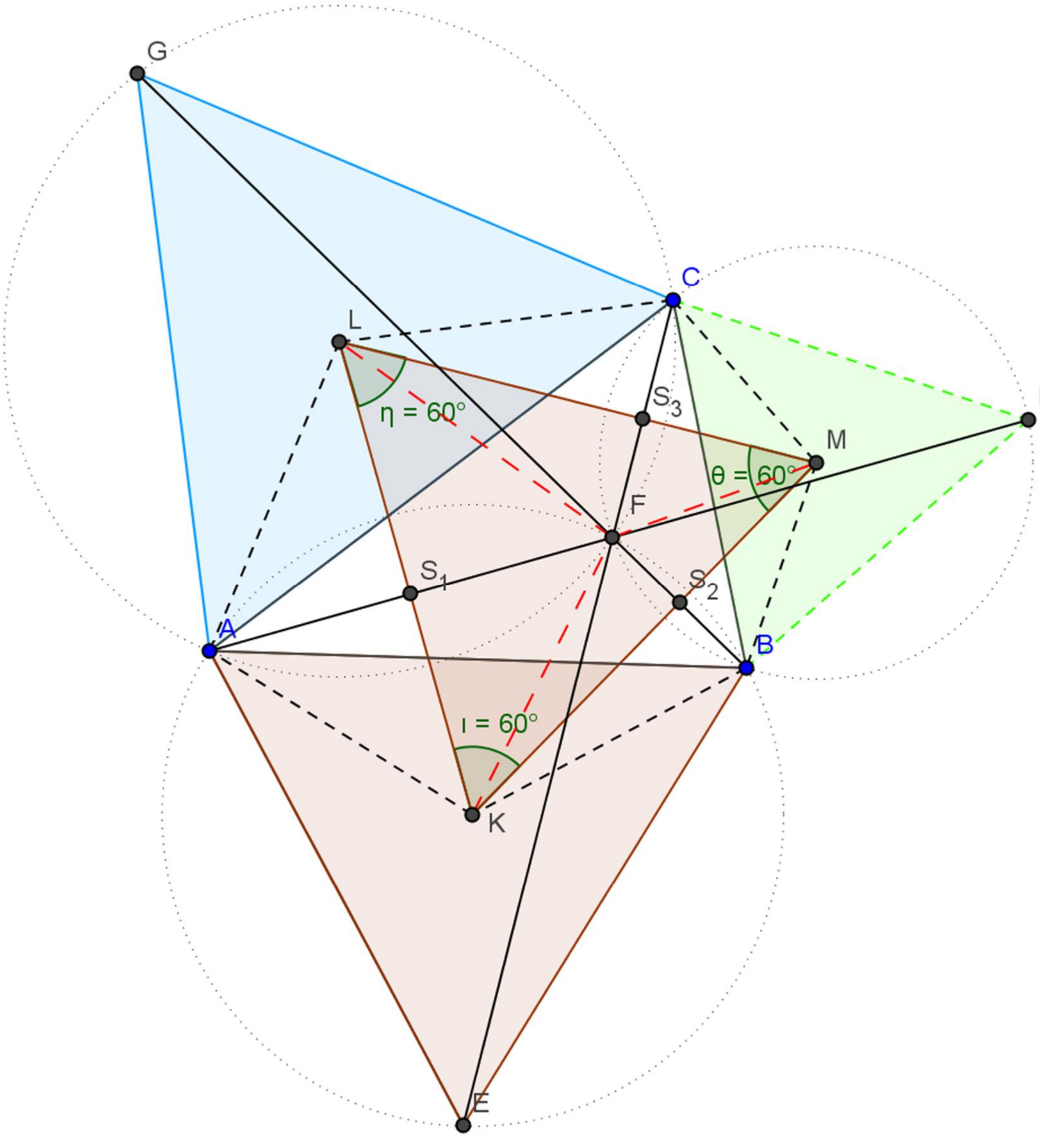


Obr. 29 NapoleonŢv trojúhelník

6.1 Verifikace a konstrukce Napoleonova trojúhelníku pomocí DGS

Pomocí *Mnohoúhelník* narýsujeme libovolný trojúhelník *ABC* a nad stranami *a, b, c* sestrojíme pomocí funkce *Pravidelný mnohoúhelník* rovnostranné trojúhelníky *ABF*, *ACD* a *BCE*. Pomocí funkce *Osa úhlu* (nebo *Osa stran*) dostáváme body *K*, *L* a *M*, což jsou středy kružnic opsaných nebo vepsaných, protože se jedná o rovnostranné trojúhelníky. Spojením těchto bodů dostáváme trojúhelník *KLM*. Díky programu GeoGebra můžeme jednoduše zjistit, zda se opravdu jedná o rovnostranný trojúhelník a to tím, že změříme úhly v trojúhelníku *KLM*. Program nám hned napíše hodnotu jednotlivých úhlů. Vidíme, že každý úhel má velikost *60°* a tím je verifikace hotova.

6.2 DŢkaz vĿty o NapoleonovĿ trojúhelníku



Obr. 30 DŢkaz Napoleonova trojúhelníka

Tento dŢkaz úzce souvisí s Fermatovým bodem, jehoġ vlastnosti jsme popsali v pŚedeġlé kapitole. Do trojúhelníka *ABC* zavedeme FermatŢv bod *F*. Víme, ġe $\angle ABE = 60°$ a z vlastností Fermatova bodu víme, ġe $\angle AFB = 120°$. Kruġnice opsaná trojúhelníka *ABE* musí být shodná s kruġnicí opsanou ļtyŚúhelníku *AEBF* a stŚed této kruġnice *k* musí být bod *K*. Úseļky *AK*, *BK* a *XK* jsou stejnĿ dlouhé. Totéġ platí také u zbývajících stran trojúhelníku ABC tzn., ġe stejné polomĿry musí být i u ostatních opsaných kruġnic nad trojúhelníky *BCD* a *ACG*, tj. *BM*, *FM*, *CM* a *CL*, *FL*, *AL*. Pokud jsou úseļky *AK* a *FK* shodné, stejnĿ tak pokud jsou shodné úseļky *AL* a *FL*, potom ļtyŚúhelník *AKFL* nazýváme deltoid. ÚhlopŚíļky *AF* a *KL* v deltoidu *AKF*L jsou na sebe kolmé. PrŢseļík tŊchto úhlopŚíļek pojmenujeme S_1 a cyklicky v kaģdém dalģím ļtyŚúhelníku dostáváme stŚedy S_2 a S_3. Úseļka AS_1 je osou úhlu *KAL* a úseļka KS_1 je osou úhlu *AKF*. Potom vidíme, ģe $\angle ALS_1$ a $\angle FLS_1$ jsou shodné, stejnŊ tak jako úhly $\angle AKS_1$ *a* $\angle FKS_1$. ZámŊnou je zŚejmé, ģe bude platit i $\angle FKS_2 = \angle BKS_2$, $\angle FMS_2 = \angle BMS_2$, $\angle CLS_3 = \angle FLS_3$ *a* $\angle CMS_3 = \angle FMS_3$. Vidíme, že ∠AKB lze vyjádřit součtem úhlů

$$\angle AKB = \angle AKS_1 + \angle FKS_1 + \angle FKS_2 + \angle BKS_2.$$

O shodnosti pŚísluģných úhlŢ mŢģeme napsat tento zápis

$$\angle AKB = 2(\angle FKS_1 + \angle FKS_2).$$

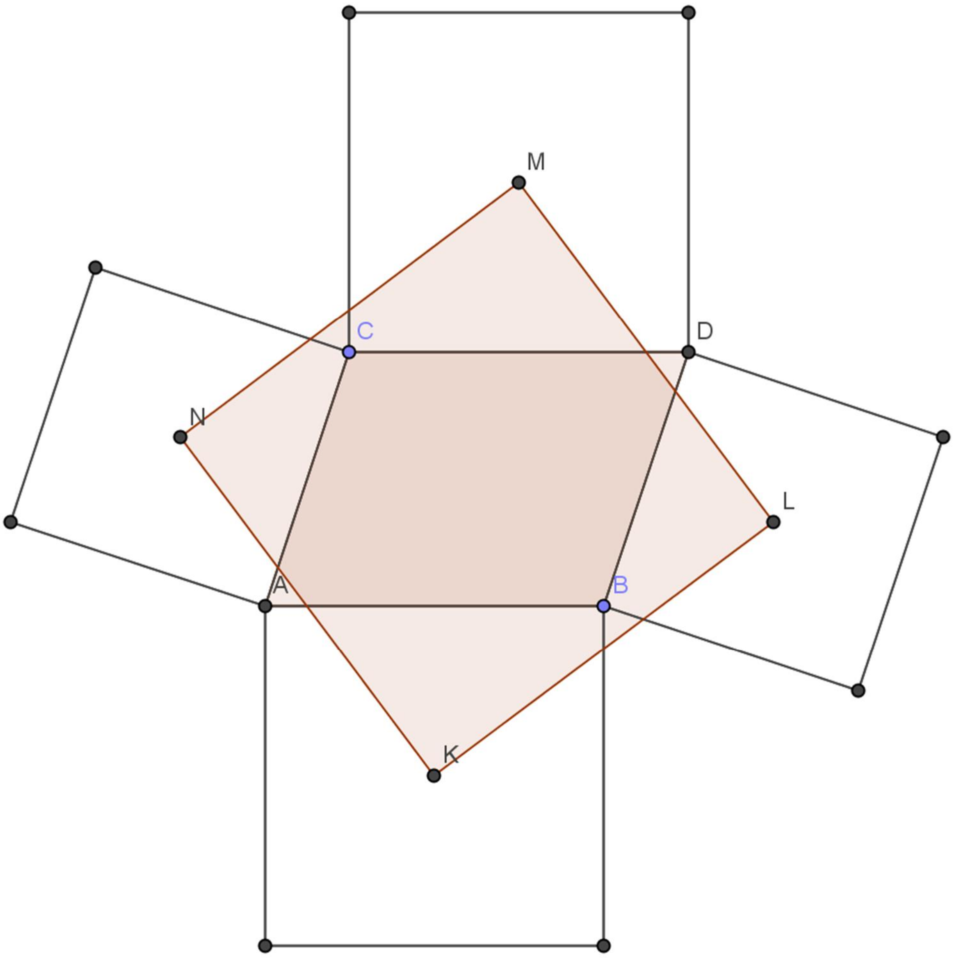
$$\angle AKB = 2\angle S_1KS_2.$$

Víme, ģe $\angle AKB = 120°$, protoģe trojúhelník *ABE* je rovnostranný. Pak $\angle S_1KS_2 = 60°$. Vidíme, ģe se jedná o úhel *MKL*. Trojúhelník *KLM* je rovnostranný.

7 Thébaultova věta

Věta zní (V. Thébault 1937):

Nad stranami rovnoběžníku sestrojme čtverce (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy čtverců tvoří čtverec.[5]



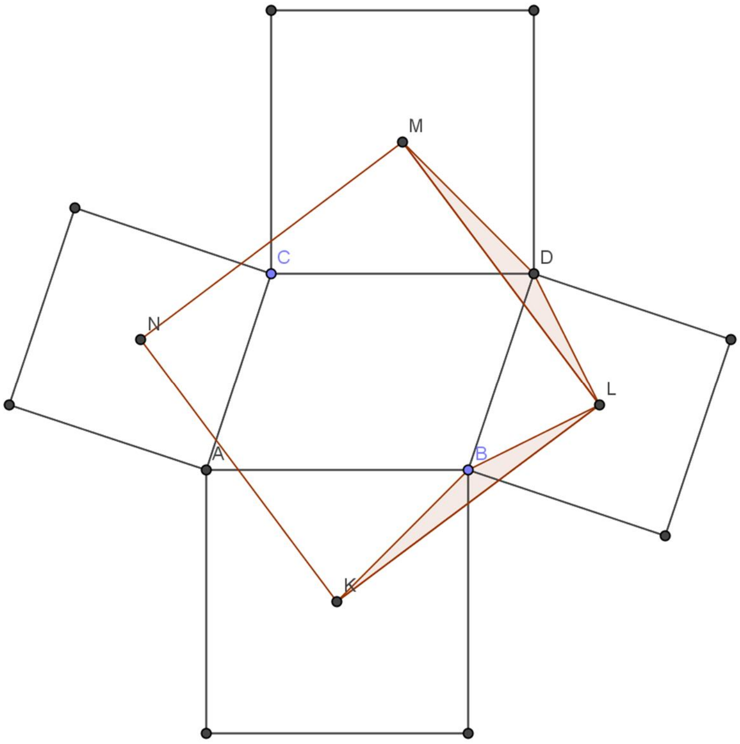
Obr. 31 Thébaultova věta

7.1 Verifikace a konstrukce Thébaultovy věty pomocí DGS

Do příkazového řádku zapíšeme jednotlivé body. Musíme je zadat tak, aby nám po spojení bodů *ABCD* vzniknul rovnoběžník. Poté přes *Pravidelný mnohoúhelník* sestrojíme čtverce nad stranami rovnoběžníku. Funkcí *Střed* dostáváme středy jednotlivých čtverců. Spojením těchto středů dostávám čtverec *KLMN*. V programu GeoGebra pomocí *Vzdálenost* ověříme, zda se jedná opravdu o čtverec. Pomocí *Ukazovátka* jednoduše ověříme, že věta platí pouze pro rovnoběžník. Verifikace je tím pádem hotová.

7.2 Důkaz Thébaultovy věty

Klasicky lze tuto větu dokázat pomocí shodnosti trojúhelníků *KBL* a *LDM*. Na obrázku číslo 32 vidíme, že |*BL*| = |*LD*|, |*BK*|= |*DM*| a zároveň úhly $\angle KBL = \angle LDM$. Když otočíme trojúhelník *KBL* o 90° se středem v bodě L, zobrazí se nám do trojúhelníku *LDM*. Odtud je zřejmé *KL* = *LM* a zároveň, že *KL* je kolmá na *LM*. Stejně to lze provést i u ostatních stran.



Obr. 32 Thébaultova věta se shodnými trojúhelníky

8 Závěr

GeoGebra je program, který usnadňuje vysvětlení některých matematických problémů jak na základních, tak rovněž na středních školách. Díky tomuto programu žáci lépe pochopí daný problém. Mezi kladné vlastnosti programu GeoGebra patří přehlednost prostředí a názornost dynamických konstrukcí. Velikou výhodou je bezplatná licence, tudíž tento program mohou využívat žáci jak ve škole, tak i z domova. S negativními vlastnostmi jsme se při používání programu GeoGebra nesetkali, a tudíž mu nelze z našeho pohledu nic vytknout.

9 Seznam pouġité literatury

[1] PECH, Pavel: Klasické vs. poļítaļové metody pŚi Śeġení úloh v geometrii. 1. vyd. Ļeské BudĲovice: Vlastimil Johanus TISKÁRNA, 2004.

[2] PYTHAGORAS. [online]. [cit. duben 2014]. Dostupné z WWW: http://hermetic.com/sabazius/pythagoras.htm.

[3] FERMAT, Pierre. [online]. [cit. duben 2014]. Dostupné z WWW: http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo#mediaviewer/Archivo:Pierre_de_Fermat.jpg

[4] KUCHAř ÍK, Jan : NĲkteré netradiļní vhledy do geometrie. SOĻ z matematiky. Gymnázium Jihlava, 2011/2012.

[5] PECH, Pavel: Klasické vs. poļítaļové metody pŚi Śeġení úloh v geometrii. 1. vyd. Ļeské BudĲovice: Vlastimil Johanus TISKÁRNA, 2004.