Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Extrémy funkcí více proměnných – sbírka řešených příkladů

Vypracoval: Jan Kuvik
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Extrémy funkcí více proměnných – sbírka řešených příkladů jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Anotace

Cílem diplomové práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů z oboru matematické analýzy. Stěžejní částí jsou příklady zaměřené na globální i lokální extrémy funkcí dvou a tří proměnných. Jsou zde také uvedeny příklady, které ukazují aplikaci teorie funkcí více proměnných na teorii funkce jedné proměnné. Vybírány byly příklady, které jsou podobné zadáním, ale liší se postupem řešení a výsledkem. Každý příklad je podrobně vyřešen a některé jsou doplněny obrázky. Tato práce má pomoci studentům bakalářského, případně magisterského studia učitelství matematiky.

Klíčová slova: extrém funkce, lokální extrém funkce, maximum, minimum, lokální maximum, lokální minimum, parciální derivace, Jakobián, tečna implicitně zadané funkce.

Annotation

The goal of the thesis was to create a collection of solved problems of mathematical analysis. The main part of the thesis is formed by examples of global and local extremes of functions with two and three variables. Problems which show the application of the theory of functions with more variables to the theory of function with one variable are included as well. The problems have been chosen, the assignments of which are similar, but they differ by the method of sollution and result. Each problem has a detailed sollution and pictures have been added to some of them. This thesis should help students of bachelor's, possibly graduate studies of mathematic teaching.

Key words: extreme of a function, local extreme of a function, maximum, minimum, local maximum, local minimum, partial derivative, Jacobi's determinant, tangent of an implicit defined function.

Poděkování

Děkuji především vedoucí práce paní RNDr. Libuši Samkové za její odbornou pomoc a poskytnutí cenných rad a připomínek při psaní mé diplomové práce.

Obsah

Úvod **1**

1 Funkce 2 proměnných **2**

1.1 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných na omezené množině metodou Jakobiánu . . . 2

1.1.1 Příklad . . . 3

1.1.2 Příklad . . . 5

1.1.3 Příklad . . . 7

1.2 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných na dané množině metodou dosazovací . . . 11

1.2.1 Příklad . . . 11

1.2.2 Příklad . . . 14

1.2.3 Příklad . . . 16

1.2.4 Příklad . . . 20

1.2.5 Příklad . . . 24

1.2.6 Příklad . . . 26

1.2.7 Příklad . . . 29

1.3 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných metodou Jakobiánu na množině, která není omezená . . . 33

1.3.1 Příklad . . . 33

1.3.2 Příklad . . . 35

1.3.3 Příklad . . . 36

1.3.4 Příklad . . . 39

1.3.5 Příklad . . . 41

1.4 Lokální extrémy funkcí 2 proměnných . . . 44

1.4.1 Příklad . . . 44

1.4.2 Příklad . . . 46

1.4.3 Příklad . . . 47

1.4.4 Příklad . . . 48

1.4.5 Příklad . . . 50

1.4.6 Příklad . . . 51

1.4.7 Příklad . . . 53

2 Tečna implicitně zadané funkce **56**

2.1 Příklad . . . 56

2.2 Příklad . . . 57

2.3 Příklad . . . 59

2.4 Příklad . . . 60

2.5 Příklad . . . 61

3 Funkce 3 proměnných **63**
3.1 Extrémy funkce 3 proměnných na dané množině metodou Jakobiánu 63
3.1.1 Příklad 63
3.1.2 Příklad 65
3.1.3 Příklad 66
3.2 Lokální extrémy funkce 3 proměnných pomocí Sylvestrova pravidla 68
3.2.1 Příklad 69
3.2.2 Příklad 71
3.2.3 Příklad 72
3.2.4 Příklad 73
3.2.5 Příklad 76

Závěr **79**

Literatura **80**

Úvod

Cílem mé diplomové práce je vytvořit sbírku řešených příkladů na extrémy funkcí dvou a více proměnných.

Práce je určena studentům matematiky, zejména pedagogických fakult, kteří jsou již seznámeni s problematikou funkce více proměnných a rozšiřují si tyto znalosti o jejich aplikace.

Na začátku každé kapitoly je uvedena pouze nejnutnější teorie, která je potřebná k porozumění řešení uvedených příkladů. Zdrojem pro sestavení těchto vodítek byla zejména [1]. Jako další zdroj informací jsem často používal [6]. Pro další rozšíření teoretického základu lze čerpat z [2].

Těžištěm práce bylo vybrat vhodné příklady, vyřešit je a vytvořit k nim obrázky. Příklady byly čerpány z [5]. Jde o příklady různé obtížnosti, které jsou seřazeny od lehčích k obtížnějším. Často jsou vybrány příklady s podobným zadáním, které ale mají rozdílný postup řešení, případně se radikálně liší ve výsledku. U některých příkladů je uvedeno více způsobů řešení, což by mělo přispět k lepšímu pochopení dané problematiky. Ze stejného důvodu jsou i triviální matematické postupy detailně rozpracovány a vyřešeny. Zde jsem nejvíce čerpal z [3] a [7].

Práce je rozdělena do tří velkých kapitol. První kapitola se zabývá řešením globálních extrémů funkcí dvou proměnných a to jak metodou Jakobiánu, tak metodou dosazovací. Obsahuje také příklady na výpočet lokálních extrémů funkcí dvou proměnných. Tato kapitola je rozpracována velmi podrobně. Druhá kapitola je věnována aplikaci teorie funkcí dvou proměnných při určování tečny ke grafu implicitně zadané funkce. Třetí část popisuje určování globálních extrémů funkcí tří proměnných metodou Jakobiánu a v závěru se lehce dotýká určování lokálních extrémů funkcí tří proměnných.

Pro tvorbu obrázků k příkladům jsem použil program Geogebra, odkud jsem poté obrázky exportoval jako grafické náhledy png a vložil do textu, který je vysázen systémem LaTeXv programu TeXmaker. Informace pro sázení textu jsem hledal v [4] a [8].

1 Funkce 2 proměnných

Funkce 2 proměnných je zobrazení, které uspořádané dvojici $[x, y]$ přiřazuje reálné číslo $F(x, y)$. Definičním oborem funkce $F(x, y)$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$ a oborem hodnot je podmnožina $\mathbb{R}$. Více je tato problematika vysvětlena v [1].

1.1 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných na omezené množině metodou Jakobiánu

Pokud chceme hledat extrémy funkce v $\mathbb{R}^2$, postupujeme podobně jako v $\mathbb{R}$. Nejdříve musíme najít tzv. body podezřelé z extrému.
To jsou jednak body, které patří do hranice definičního oboru funkce a jednak vnitřní body definičního oboru, ve kterých jsou parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}$ nebo $\frac{\partial F}{\partial y}$ rovné nule nebo neexistují.
Tedy $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$ neexistují,
nebo $\frac{\partial F}{\partial x}$ neexistuje a $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$,
nebo $\frac{\partial F}{\partial y}$ neexistuje a $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$,
nebo $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.
Pokud např. $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ na celém definičním oboru, potom uvnitř $D(F)$ není žádný podezřelý bod.
Pro hledání extrémů na uzavřené omezené množině najdeme nejdříve všechny podezřelé body a poté zjistíme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech a v podezřelém bodě s největší funkční hodnotou je maximum a v podezřelém bodě s nejmenší funkční hodnotou je minimum.
Metoda Jakobiánu je určena k výpočtům extrémů takových funkcí, kde je množina definičního oboru kompaktní množina. Tedy často se jedná o kružnici, nebo elipsu.
Extrémy funkce $F(x, y)$ na množině $g(x, y) = 0$ můžeme určovat pomocí determinantu, který se označuje jako Jakobián. Pokud F, g mají spojité parciální derivace a množina $g(x, y)$ je omezená. Potom funkce nabývá extrému v některém z bodů splňujících:

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Podrobně je tato problematika rozebrána v [1].

1.1.1 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x,y) = \arctan(x^2 - y^2)$ na množině $M : x^2 + y^2 \leq 1$. ([5])

Řešení:
Definičním oborem funkce $F(x,y)$ je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $M \in D(F)$ a parciální derivace funkce $F(x,y)$ jsou definované na celém $D(F)$.
Začneme se zabývat nejdříve hranicí definičního oboru, potom přejdeme k vnitřní části definičního oboru. Množina M patří do $D(F)$. Jde o kruh, který má poloměr $r = 1$ a střed je v počátku soustavy souřadnic.

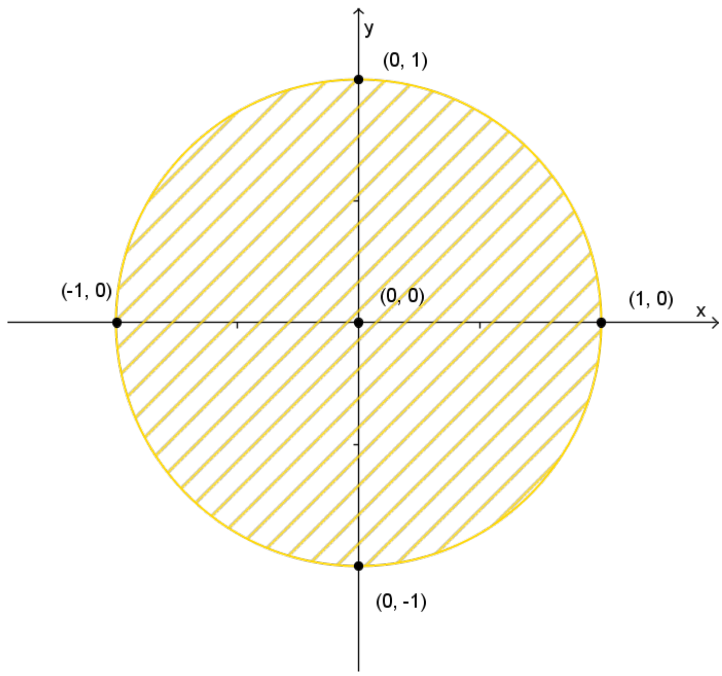
1. Hranice $D(F)$:
   U tohoto příkladu se velice hodí využít na zjištění podezřelých bodů Jakobiho determinant, neboť množina $x^2 + y^2 \leq 1$ je omezená. Funkci $x^2 + y^2 \leq 1$ označíme jako $g(x,y)$.
   Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+(x^2-y^2)^2} \cdot 2x & \dfrac{1}{1+(x^2-y^2)^2} \cdot (-2x) \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$= 4xy \cdot \frac{1}{1+(x^2-y^2)^2} + 4xy \cdot \frac{1}{1+(x^2-y^2)^2} = 8xy \cdot \frac{1}{1+(x^2-y^2)^2} = 0$$

   pro $x = 0 \vee y = 0$.
   Zjistili jsme, že podezřelé body na hranici jsou takové, pro které platí: $x = 0 \vee y = 0$, to znamená, jak je patrné i z obrázku, že jde o body: $[0, \pm 1]; [\pm 1, 0]$.



Obrázek 1: Množinu M tvoří kruh s poloměrem $r = 1$ a se středem v počátku soustavy souřadnic

2. Vnitřek $D(F)$:
   Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

   $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x^2 - y^2)^2} \cdot 2x = 0$$

   Pro $x = 0$, neboť výraz $1 + (x^2 - y^2)^2 > 0$ pro všechna čísla.

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 - y^2)^2} \cdot (-2x) = 0$$

   Pro $y = 0$, neboť výraz $1 + (x^2 - y^2)^2 > 0$ pro všechna čísla.
   Získali jsme tedy podezřelý bod: $[0, 0]$.
   Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých

bodech.

$$F(0,1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$
$$F(0,-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$
$$F(1,0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$F(-1,0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$F(0,0) = \arctan(0) = 0$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodech: $[0, \pm 1]$, maxima v bodech: $[\pm 1, 0]$.

1.1.2 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 5$ na množině $M : x^2 + y^2 \leq 2$. ([5])

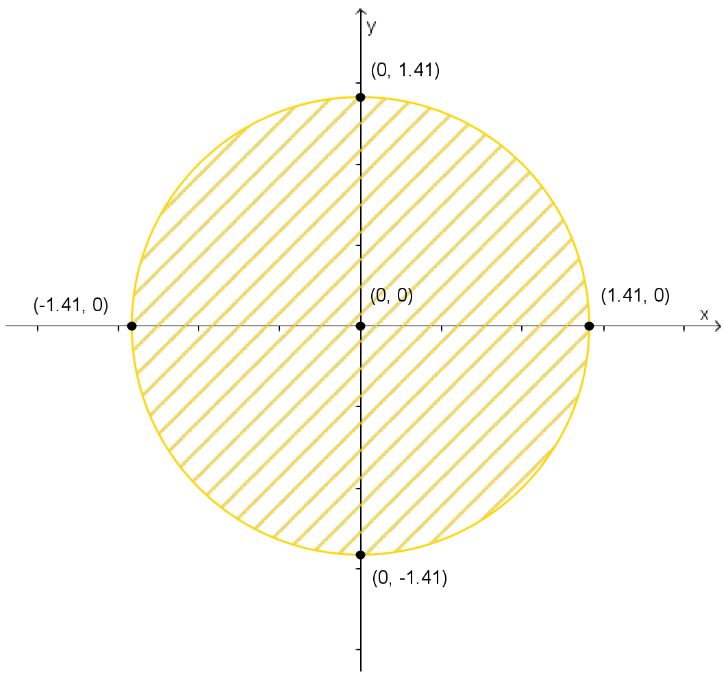
Řešení:

Definičním oborem funkce $F(x,y)$ je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $M \in D(F)$ a parciální derivace funkce $F(x,y)$ jsou definované na celém $D(F)$.
Začneme se zabývat nejdříve hranicí definičního oboru, potom přejdeme k vnitřní části definičního oboru. Množina M patří do $D(F)$. Jde o kruh, který má poloměr $r = \sqrt{2}$ a střed je v počátku soustavy souřadnic.

1. Hranice $D(F)$:
   U tohoto příkladu se velice hodí využít na zjištění podezřelých bodů Jakobiho determinant, neboť množina $x^2 + y^2 \leq 2$ je omezená. Funkci $x^2 + y^2 \leq 2$ označíme jako $g(x,y)$.
   Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
$$= 4xy - 12xy = -8xy = 0$$

   pro $x = 0 \vee y = 0$.
   Zjistili jsme, že podezřelé body na hranici jsou takové, pro které platí:



Obrázek 2: Množinu M tvoří kruh o poloměru $r = \sqrt{2}$ a střed je v počátku soustavy souřadnic

$x = 0 \vee y = 0$, to znamená, jak je patrné i z obrázku, že jde o body: $[0, \pm\sqrt{2}]; [\pm\sqrt{2}, 0]$.

2. Vnitřek $D(F)$:
Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0$$

Pro $x = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y = 0$$

Pro $y = 0$.
Získali jsme tedy podezřelý bod: $[0, 0]$.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých

bodech.

$$\begin{aligned} F(\sqrt{2},0) &= 2+5=7 \\ F(-\sqrt{2},0) &= 2+5=7 \\ F(0,\sqrt{2}) &= 6+5=11 \\ F(0,-\sqrt{2}) &= 6+5=11 \\ F(0,0) &= 5 \end{aligned}$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodě: $[0,0]$, maxima v bodech: $[0,\pm\sqrt{2}]$.

1.1.3 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x,y) = x^2+4y^2-x+2y$ na množině $M : x^2+4y^2 \leq 1$. ([5])

Řešení:

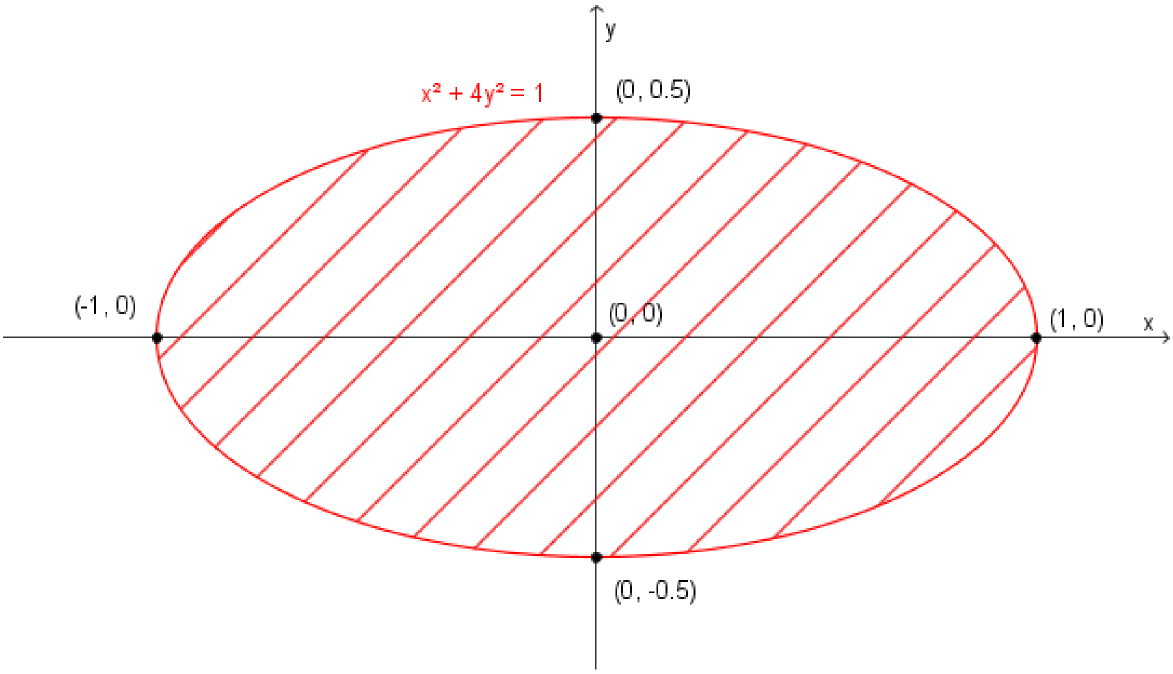
Definičním oborem funkce $F(x,y)$ je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $M \in D(F)$ a parciální derivace funkce $F(x,y)$ jsou definované na celém $D(F)$.
Začneme se zabývat nejdříve hranicí definičního oboru, potom přejdeme k vnitřní části definičního oboru. Množina M patří do $D(F)$. Jde o elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic.

1. Hranice $D(F)$:
   U tohoto příkladu se velice hodí využít na zjištění podezřelých bodů Jakobiho determinant, neboť množina $x^2+4y^2 \leq 1$ je omezená. Tentokráte jde o elipsu, pro kterou platí:

$$x^2+4y^2=1$$
$$x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

   Odtud zjišťujeme, že pro obě poloosy platí: $a=1$ a $b=0,5$. Střed elipsy je v bodě $[0,0]$.
   Funkci $x^2+4y^2 \leq 1$ označíme jako $g(x,y)$.
   Potom determinant vypadá:

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Obrázek 3: Množinu M tvoří elipsa

$$= det \begin{pmatrix} 2x-1 & 8y+2 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$$

$$= 16xy - 8y - 16xy - 4x = 4(x+2y) = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 4(x+2y) &= 0 \\ x+2y &= 0 \\ x &= -2y \\ y &= -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Nyní tuto rovnost dosadíme do zadání funkce $g(x, y)$.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 &= 1 \\
x^2 + x^2 &= 1 \\
2x^2 &= 1 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \\
x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Odtud poté dostáváme:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \\
y &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
y &= \mp\frac{1}{\sqrt{8}}
\end{aligned}
$$

Nalezli jsme tedy dva podezřelé body: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$.

2. Vnitřek $D(F)$:
   Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 1 = 0$$

Pro:

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &= 0 \\
2x &= 1 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8y + 2 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned}8y+2&=0\\8y&=-2\\y&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Získali jsme tedy podezřelý bod: $\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech.

$$\begin{aligned}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}\\F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{8}}\right)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\\F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)&=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodě: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, maxima v bodě: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$.

1.2 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných na dané množině metodou dosazovací

Dosazovací metodu lze využít, jde-li z množiny M jednoznačně vyjádřit jednu proměnnou. Často je tedy množinou M přímka, kružnice, parabola, apod. Naším cílem je z rovnice množiny M vyjádřit jednu proměnnou a dosadit ji do rovnice zadané funkce $F(x, y)$. Takto získáme funkci jedné proměnné, kde už určit extrémy umíme. Podrobně je tato problematika rozebrána v [1].

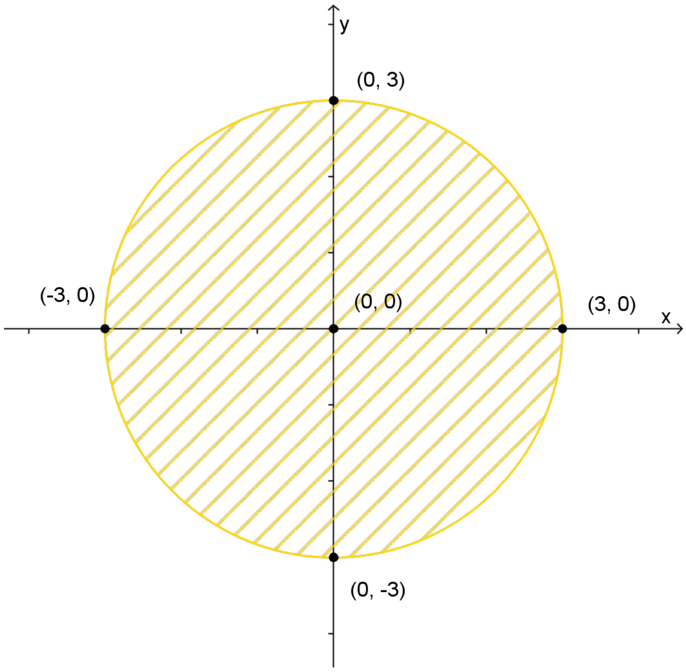
1.2.1 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2$ na množině $M : x^2 + y^2 \leq 9$. ([5])

Řešení:

Definičním oborem funkce $F(x, y)$ je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $M \in D(F)$ a parciální derivace funkce $F(x, y)$ jsou definované na celém $D(F)$.
Začneme se zabývat nejdříve hranicí definičního oboru, potom přejdeme k vnitřní části definičního oboru. Množina M patří do $D(F)$. Jde o kruh, který má poloměr $r = 3$ a střed je v počátku soustavy souřadnic.

1. Hranice $D(F)$:
   Pro body, jež tvoří hranici množiny platí rovnice $x^2 + y^2 = 9$. Jde o rovnici kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem $r = 3$. Tuto rovnici můžeme upravit do tvaru: $y^2 = 9 - x^2$.
   Poté takto upravenou rovnici dosadíme do zadání funkce:
   $$F(x, y) = \frac{x^3}{3} + 9 - x^2 = \frac{x^3}{3} - x^2 + 9$$
   Získali jsme tedy novou funkci:
   $$h(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 9,$$
   kde x je z intervalu: $\langle -3, 3 \rangle$.
   Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:
   $$\begin{aligned} h'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2x = x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x = 0 \vee x &= 2 \end{aligned}$$
   Nyní naše 2 řešení dosadíme do rovnice pro množinu M.



Obrázek 4: Množinu M tvoří kružnice o poloměru $r = 3$ a se středem v počátku soustavy souřadnic

(a) $x = 0$

$$\begin{aligned} 0^2 + y^2 &= 9 \\ y^2 &= 9 \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

(b) $x = 2$

$$\begin{aligned} 2^2 + y^2 &= 9 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Získali jsme tedy 4 podezřelé body: $[0, -3], [0, 3], [2, \sqrt{5}], [2, -\sqrt{5}]$. Ještě musíme vzít v potaz 2 krajní body intervalu $\langle -3, 3 \rangle$, to znamená, což je i patrné z obrázku, že jde o body: $[-3, 0], [3, 0]$.

2. Vnitřek $D(F)$:
Hledáme body, kde neexistují parciální derivace funkce $F(x, y)$ podle

x a y, nebo kde jsou rovné nule. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3}+y^2\right)=\frac{3x^2}{3}=x^2=0$$

Pro $x=0$.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2\right)=2y=0$$

Pro $y=0$.
Z vnitřní části množiny M jsme tedy získali jediný podezřelý bod: $[0,0]$.
Nyní musíme zjistit všechny funkční hodnoty vše všech získaných podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}
F(-3,0)&=\frac{-27}{3}=-9\\
F(3,0)&=\frac{27}{3}=9\\
F(0,-3)&=9\\
F(0,3)&=9\\
F(2,\sqrt{5})&=\frac{8}{3}+5=\frac{23}{3}\\
F(2,-\sqrt{5})&=\frac{8}{3}+5=\frac{23}{3}\\
F(0,0)&=0
\end{aligned}$$

Ze zjištěných funkčních hodnot je patrné, že zadaná funkce má minimum v bodě $[-3,0]$ a maxima nabývá v bodech $[3,0],[0,3],[0,-3]$.

Podezřelé body na hranici $D(F)$ můžeme zjistit i pomocí metody Jakobiánu. Tato metoda je popsaná v předcházející části textu. Naše zadání:

$$\begin{aligned}
F(x,y)&=\frac{x^3}{3}+y^2\\
M&:x^2+y^2\leq 9,
\end{aligned}$$

což upravíme do tvaru:

$$g(x,y)=x^2+y^2-9$$

Jakobiho determinant má tvar:

$$det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} x^2 & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$= 2x^2y - 4xy = 2xy(x-2) = 0$$

Pro $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ a pro $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Pro $x = 2$ platí:

$$\begin{aligned} 4 + y^2 &= 9 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Získáváme tedy podezřelé body. Jednak průsečíky kružnice a souřadnicových os: $[\pm 3, 0]; [0, \pm 3]$ a jednak pro $x = 2$ dostáváme: $[2, \pm\sqrt{5}]$.
Zbytek příkladu už odpovídá předešlému postupu. Určili bychom podezřelé body uvnitř definičního oboru a poté u všech podezřelých bodů vypočítali funkční hodnotu a rozhodli o extrémech dané funkce.

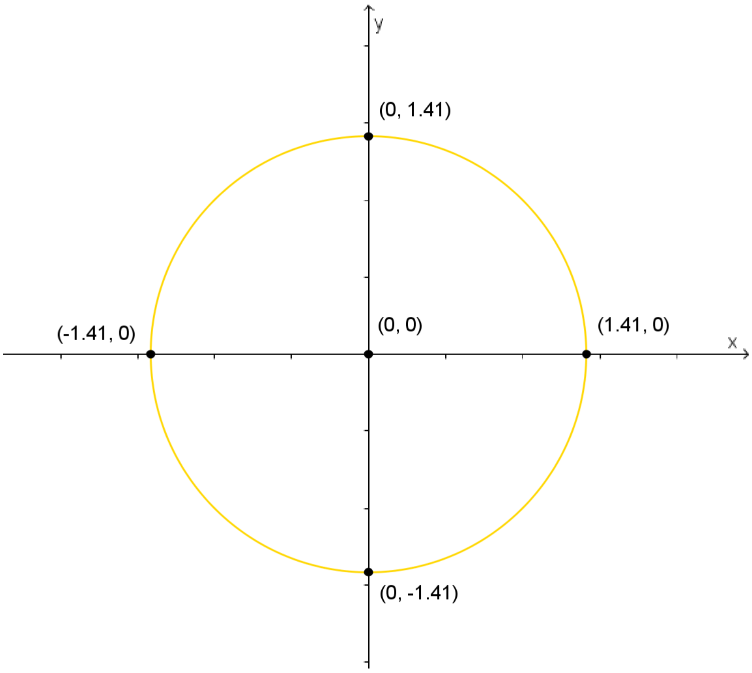
1.2.2 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x,y) = x^2 + 3y^2$ na množině $M : x^2 + y^2 = 2$. ([5])

Řešení:
Definičním oborem funkce $F(x,y)$ je celá množina $\mathbb{R}^2$. Množina $M \in D(F)$ a parciální derivace funkce $F(x,y)$ jsou definované na celém $D(F)$.
Začneme se zabývat nejdříve hranicí definičního oboru, potom přejdeme k vnitřní části definičního oboru. Množina M patří do $D(F)$. V tomto případě je definičním oborem zadané funkce kružnice se středem v bodě $[0,0]$ a s poloměrem $r = \sqrt{2}$.

Rovnici kružnice upravíme do tvaru: $x^2 = 2 - y^2$ a dosadíme ji do zadané funkce $F(x,y)$:

$$F(x,y) = 2 - y^2 + 3y^2 = 2 + 2y^2$$



Obrázek 5: Množinu M tvoří kružnice o poloměru $r = \sqrt{2}$ a se středem v počátku soustavy souřadnic

Získali jsme novou funkci jedné proměnné:

$$h(y) = 2 + 2y^2,$$

na intervalu $y \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné y zderivovat a zjistit, pro která y je rovna nule:

$$h'(y) = 4y = 0$$

Pro $y = 0$.
Po dosazení do rovnice kružnice za $y = 0$ dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 - 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Získali jsme tedy 2 podezřelé body: $[\sqrt{2}, 0], [-\sqrt{2}, 0]$. Ještě musíme vzít v úvahu krajní body intervalu $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$. Jak je i z obrázku patrné, jde o body: $[0, -\sqrt{2}], [0, \sqrt{2}]$. Jelikož je množina M pouze daná kružnice, žádné jiné podezřelé body už získat nemůžeme, proto zjistíme funkční hodnoty pouze v těchto podezřelých bodech.

$$F(0, \pm\sqrt{2}) = 0 + 3 \cdot 2 = 6$$
$$F(\pm\sqrt{2}, 0) = 2 + 3 \cdot 0 = 2$$

Ze získaných funkčních hodnot je patrné, že v bodech $[\pm\sqrt{2}, 0]$ je minimum funkce a v bodech $[0, \pm\sqrt{2}]$ je maximum funkce $F(x, y)$.
Podezřelé body na hranici $D(F)$ můžeme zjistit i pomocí metody Jakobiánu. Tato metoda je popsaná v předcházející části textu.
Naše zadání:

$$F(x, y) = x^2 + 3y^2$$
$$g(x, y) : x^2 + y^2 = 2,$$

což upravíme do tvaru:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2.$$

Jakobiho determinant má tvar:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$= 4xy - 12xy = -8xy = 0$$

Pro $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.
Získáváme tedy podezřelé body jako průsečíky kružnice a souřadnicových os: $[\pm\sqrt{2}, 0]; [0, \pm\sqrt{2}]$.
Zbytek příkladu už odpovídá předešlému postupu. U všech podezřelých bodů bychom vypočítali funkční hodnotu a rozhodli o extrémech dané funkce.

1.2.3 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4$ na množině ohraničené nerovnicí $M : 0 \leq y \leq \sqrt{2x}$; $x \in \langle 0, 2 \rangle$. ([5])

Řešení:
Z nerovnice $0 \le y \le \sqrt{2x}$, která určuje část definičního oboru funkce $F(x, y)$, můžeme získat 2 nerovnice:

$$y \ge 0$$

A

$$\begin{aligned} y &\le \sqrt{2x} \\ y^2 &\le 2x \end{aligned}$$

Pokud do výsledku dosadíme za x horní mez intervalu $\langle 0, 2\rangle$, tedy číslo 2, tak získáme i omezení pro y.

$$\begin{aligned} y^2 &\le 2x \\ y^2 &\le 2 \cdot x \\ y^2 &\le 2 \cdot 2 \\ y^2 &\le 4 \\ y &\le \pm 2 \end{aligned}$$

Definičním oborem této funkce tedy je oblast ohraničená křivkami:

1. úsečkou $y = 0$, pro $x \in \langle 0, 2\rangle$,
2. úsečkou $x = 2$, ze zadání víme, že $y \ge 0$ a zároveň $y \le 2$,
3. částí paraboly $y = \sqrt{2x}$, pro $x \in \langle 0, 2\rangle$.

Definiční obor je vnitřní část obrázku.

1. Hranice $D(F)$:

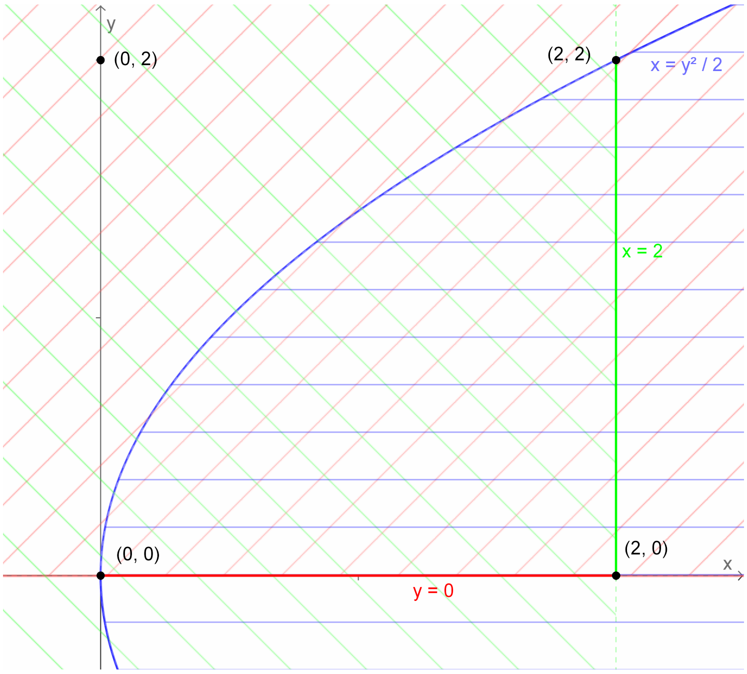
   (a) První část def. oboru hranice $y = 0; x \in \langle 0, 2\rangle$.
   Nyní do zadané funkce dosadíme za $y = 0$:

   $$F(x, 0) = 2x^2 = h(x)$$

   Dostaneme funkci $h(x)$, což už je funkce jedné proměnné x. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této první části hranice definičního oboru.

   $$h'(x) = 4x = 0$$

   Pro $x = 0; y = 0$.
   Získáváme tedy podezřelý bod: $[0, 0]$, krajní body této úsečky: $[0, 0], [2, 0]$.



Obrázek 6: Množinu M tvoří útvar ohraničený přímkou $y = 0$ a $x = 2$ a parabolou $y = \sqrt{2x}$

(b) Druhá část def. oboru hranice $x = 2; y \in \langle 0, 2\rangle$.
Nyní do zadané funkce dosadíme za $x = 2$:

$$F(2, y) = 8 - 8y + y^4 = i(y)$$

Dostaneme funkci $i(y)$, což už je funkce jedné proměnné y. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této druhé části hranice definičního oboru.

$$i'(y) = -8 + 4y^3 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 4y^3 &= 8 \\ y^3 &= 2 \\ y &= \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Získáváme tedy podezřelý bod: $[2, \sqrt[3]{2}]$, krajní bod této úsečky: $[2, 2]$.

(c) Třetí část def. oboru hranice $y = \sqrt{2x}; x \in \langle 0, 2\rangle$.
Rovnici $y = \sqrt{2x}$ upravíme do tvaru: $y^2 = 2x$ a vyjádříme x:

$$x = \frac{y^2}{2}; y \in \langle 0, 2\rangle$$

Nyní do zadané funkce dosadíme za $x = \frac{y^2}{2}$:

$$\begin{aligned} F(x,y) = F\left(\frac{y^2}{2}, y\right) &= 2\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{y^2}{2}\right) \cdot y + y^4 = \\ &= \frac{y^4}{2} - 2y^3 + y^4 = \frac{3}{2}y^4 - 2y^3 = k(y) \end{aligned}$$

Dostaneme funkci $k(y)$, což už je funkce jedné proměnné y. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této třetí části hranice definičního oboru.

$$\begin{aligned} k'(y) = \frac{3}{2} \cdot 4y^3 - 6y^2 &= 0 \\ 6y^3 - 6y^2 &= 0 \\ 6y^2(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Pro: $y = 0 \vee y = 1$.
Po dosazení: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0$
a $y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
získáváme podezřelý bod: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Krajní body této paraboly jsme už zahrnuli do předcházejících dvou částí hranice definičního oboru.

2. Vnitřek $D(F)$: Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 4y = 0$$

Pro $x = y$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x - 4y^3 = 0$$

Pro $x = y^3$,
$\Rightarrow$ obě rovnice jsou nulové pro: $y = y^3$.

$$\begin{aligned} y - y^3 &= 0 \\ y(1 - y^2) &= 0 \\ y(1 - y)(1 + y) &= 0 \end{aligned}$$

Je rovno nule pro:
$y = 0 \rightarrow$ neleží uvnitř definičního oboru,
$y = -1 \rightarrow$ neleží v definičním oboru,
$y = 1 \Rightarrow x = 1$.
Dostáváme jediný podezřelý bod uvnitř definičního oboru: $[1, 1]$.

Nyní určíme funkční hodnoty všech podezřelých bodů a rozhodneme, ve kterých bodech má funkce $F(x, y)$ extrém.

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 0 \\ F(2,0) &= 2 \cdot 4 - 0 + 0 = 8 \\ F\left(2, \sqrt[3]{2}\right) &= 8 - 8 \cdot \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = 8 - 6\sqrt[3]{2} \\ F(2,2) &= 8 - 16 + 16 = 8 \\ F\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2} \\ F(1,1) &= 2 - 4 + 1 = -1 \end{aligned}$$

Funkce $F(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4$ nabývá na množině $0 \leq y \leq \sqrt{2x}$; $x \in \langle 0, 2 \rangle$ maxima v bodech: $[2, 0]$ a $[2, 2]$ a minima v bodě: $[1, 1]$.

1.2.4 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ na množině ohraničené $M : 0 \leq y \leq \sqrt{x}$; $x \in \langle 0, 4 \rangle$. ([5])

Řešení:
Z nerovnice $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, která určuje část definičního oboru funkce $F(x, y)$, můžeme získat 2 nerovnice:

$$y \geq 0$$

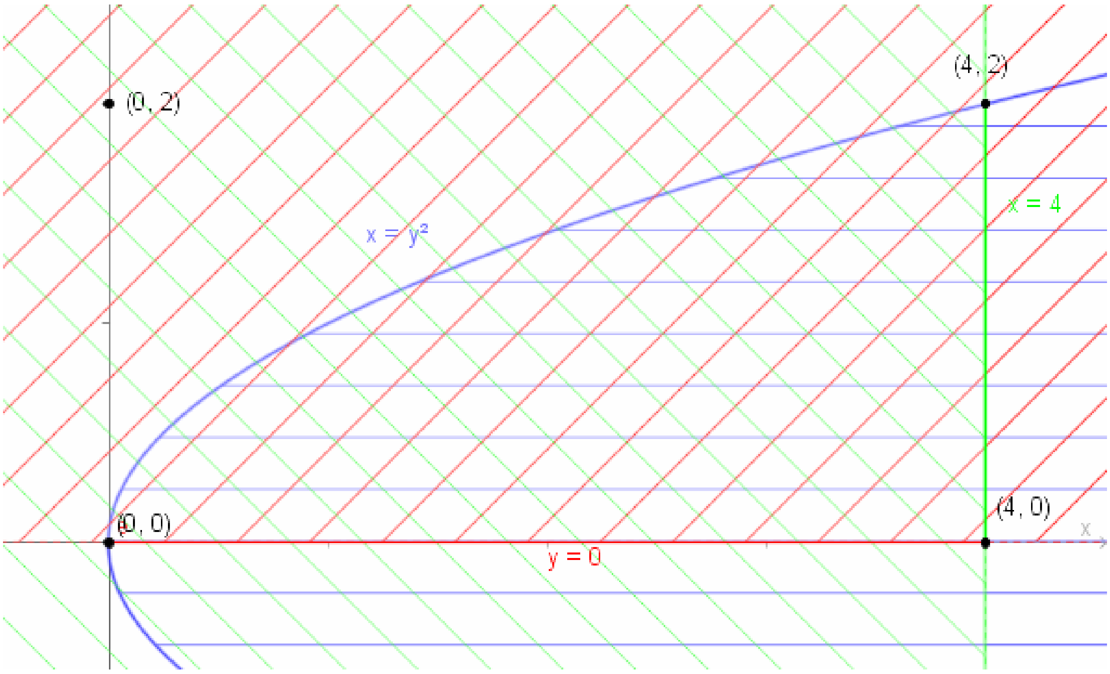
A

$$y \leq \sqrt{x}$$
$$y^2 \leq x.$$

Pokud do výsledku dosadíme za x horní mez intervalu $\langle 0, 4 \rangle$, tedy číslo 4, tak získáme i omezení pro y.

$$y^2 \leq x$$
$$y^2 \leq 4$$
$$y \leq 2$$

Definičním oborem této funkce tedy je oblast ohraničená křivkami:



Obrázek 7: Množinu M tvoří útvar ohraničený křivkami $y = 0$ a $x = 4$ a $y = \sqrt{x}$

1. úsečkou $y = 0$, pro $x \in \langle 0, 4 \rangle$,
2. úsečkou $x = 4$, ze zadání víme, že $y \geq 0$ a zároveň $y \leq 2$,
3. částí paraboly $y = \sqrt{x}$, pro $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Definiční obor je vnitřní část obrázku.

1. Hranice $D(F)$:

   (a) První část def. oboru hranice $y = 0; x \in \langle 0, 4 \rangle$.
   Nyní do zadané funkce dosadíme za $y = 0$:

   $$F(x, 0) = \sqrt{x} = h(x)$$

   Dostaneme funkci $h(x)$, což už je funkce jedné proměnné x. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této první části hranice definičního oboru.

   $$h'(x) = \frac{1}{2}\,(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$$

   Nezískáváme tedy žádný podezřelý bod, krajní body této úsečky jsou: $[0, 0], [4, 0]$.

   (b) Druhá část def. oboru hranice $x = 4; y \in \langle 0, 2 \rangle$.
   Nyní do zadané funkce dosadíme za $x = 4$:

   $$F(4, y) = 2 + \sqrt{y} = i(y)$$

   Dostaneme funkci $i(y)$, což už je funkce jedné proměnné y. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této druhé části hranice definičního oboru.

   $$i'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \neq 0$$

   Nezískáváme žádný podezřelý bod, krajní bod této úsečky je: $[4, 2]$.

   (c) Třetí část def. oboru hranice $y = \sqrt{x}; x \in \langle 0, 4 \rangle$.
   Rovnici $y = \sqrt{x}$ upravíme do tvaru:

   $$y^2 = x$$

   Nyní do zadané funkce dosadíme za $x = y^2$:

   $$F(x, y) = F\left(y^2, y\right) = \left(y^2\right) + \sqrt{y} = y + \sqrt{y} = k(y)$$

   Dostaneme funkci $k(y)$, což už je funkce jedné proměnné y. Nyní tuto funkci zderivujeme a získáme podezřelé body z této třetí části hranice definičního oboru.

$$k'(y) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \neq 0,$$

neboť výraz je pro všechna čísla $\frac{1}{2\sqrt{y}} > 0$.
Nezískáváme tedy žádný podezřelý bod. Krajní body této paraboly už jsme zahrnuli do předcházejících dvou částí hranice definičního oboru.

2. Vnitřek $D(F)$: Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$$

   Pro všechna čísla.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \neq 0$$

   Také pro všechna čísla.
   Z vnitřní části definičního oboru tedy nezískáváme žádný podezřelý bod.

Nyní určíme funkční hodnoty všech krajních bodů a rozhodneme, ve kterých bodech nabývá funkce $F(x, y)$ extrémů.

$$F(0,0) = 0$$
$$F(4,0) = 2$$
$$F(4,2) = 2 + \sqrt{2}$$

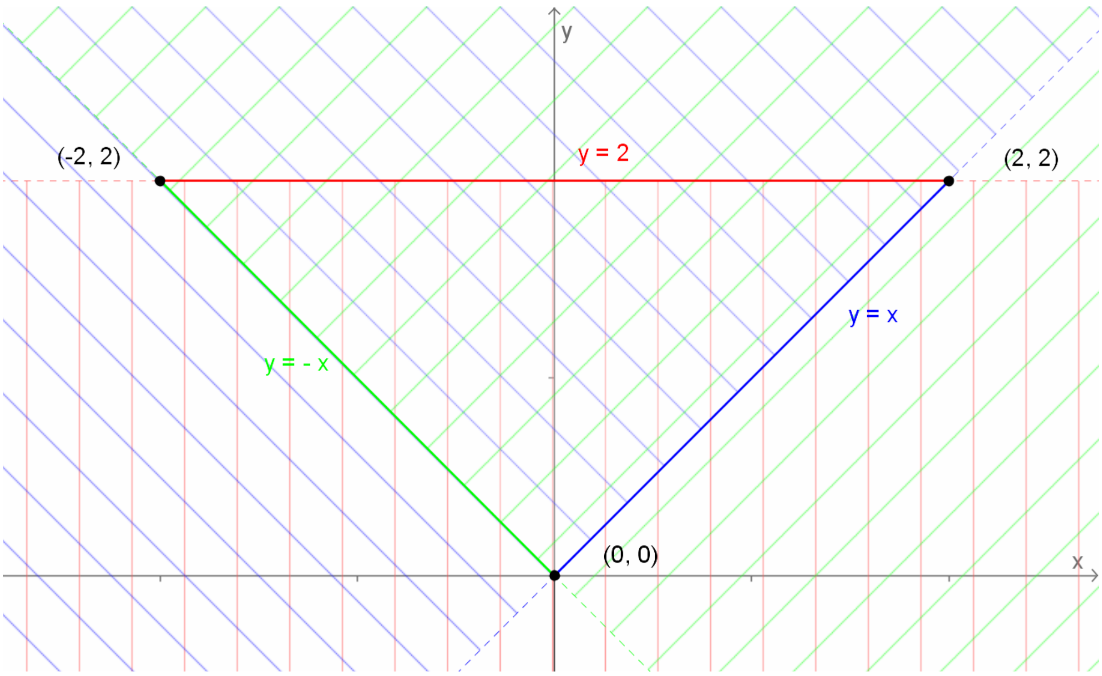
Funkce $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ nabývá na množině $0 \leq y \leq \sqrt{x}$; $x \in \langle 0, 4\rangle$ maxima v bodě: $[4, 2]$ a minima v bodě: $[0, 0]$.

1.2.5 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ na množině $M : |x| \leq y \leq 2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve zjistíme, jaké jsou podezřelé body na hranici definičního oboru $D(F)$.

1. Hranice $D(F)$:
   Pro body, jež tvoří hranici množiny platí nerovnice $|x| \leq y \leq 2$. Tuto nerovnici můžeme upravit do tvaru: $y \geq |x|$ a $y \leq 2$. Jak je z obrázku patrné, jde o trojúhelník s vrcholy v bodech $[0,0], [2,2], [-2,2]$.
   Proto si hranici rozdělíme na tři úsečky:



Obrázek 8: Množinu M tvoří trojúhelník ohraničený přímkami $y = -x$ a $y = x$ a $y = 2$

(a) $y = -x; x \in \langle -2, 0\rangle, y \in \langle 0, 2\rangle$
Rovnici $y = -x$ dosadíme do zadání funkce $F(x,y)$:

$$F(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 - 3x - x^2 = -3x^2 + x + 5 = h(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $h(x)$, což je funkce jedné proměnné x.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$\begin{aligned} h'(x) = -6x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{6} \notin \langle -2, 0 \rangle \end{aligned}$$

Nedostáváme tedy žádný podezřelý bod, pouze musíme vzít v úvahu krajní body úsečky, což jsou body $[-2, 2]$ a $[0, 0]$.

(b) $y = x; x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle$
Rovnici $y = x$ dosadíme do zadání funkce $F(x, y)$:

$$F(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3x - x^2 = -3x^2 + 7x + 5 = i(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $i(x)$, což je funkce jedné proměnné x.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$\begin{aligned} i'(x) = -6x + 7 &= 0 \\ x &= \frac{7}{6} \Rightarrow y = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy podezřelý bod $\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right]$ a krajní bod úsečky $[2, 2]$.

(c) $y = 2; x \in \langle -2, 2 \rangle$
Dosadíme do zadání funkce $F(x, y)$ za $y = 2$:

$$F(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 6 - 4 = -2x^2 + 4x - 7 = j(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $j(x)$, což je funkce jedné proměnné x.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$\begin{aligned} j'(x) = -4x + 4 &= 0 \\ x &= 1 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy podezřelý bod $[1, 2]$ a krajní body úsečky už jsme zahrnuli do předchozích částí.

2. Vnitřek $D(F)$:
   Hledáme body, kde neexistují parciální derivace funkce $F(x, y)$ podle x a y, nebo kde jsou rovné nule. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body, kde jsou derivace rovny nule.

   $$\frac{\partial F}{\partial x} = 4 - 4x = 0$$

   Pro $x = 1$.

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = 3 - 2y = 0$$

   Pro $y = \frac{3}{2}$.
   Z vnitřní části množiny M jsme tedy získali jediný podezřelý bod: $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Nyní musíme zjistit všechny funkční hodnoty vše všech získaných podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}
F(0,0) &= 5 \\
F(-2,2) &= 5 - 8 - 8 + 6 - 4 = -9 \\
F(2,2) &= 5 + 8 - 8 + 6 - 4 = 7 \\
F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right) &= 5 + \frac{28}{6} - 2 \cdot \frac{49}{36} + \frac{21}{6} - \frac{49}{36} = 5 + \frac{49}{6} - \frac{49}{12} = \frac{109}{12} \\
F\left(1, \frac{3}{2}\right) &= 7 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{37}{4} \\
F(1,2) &= 5 + 4 - 2 + 6 - 4 = 9
\end{aligned}$$

Ze zjištěných funkčních hodnot je patrné, že zadaná funkce má minimum v bodě $[-2, 2]$ a maxima nabývá v bodě $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

1.2.6 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x, y) = \arctan\left(\frac{x^2 - xy + 6y - 13}{9}\right)$ na množině $M : x + y = 2; x \in \langle -1, 5\rangle$. ([5])

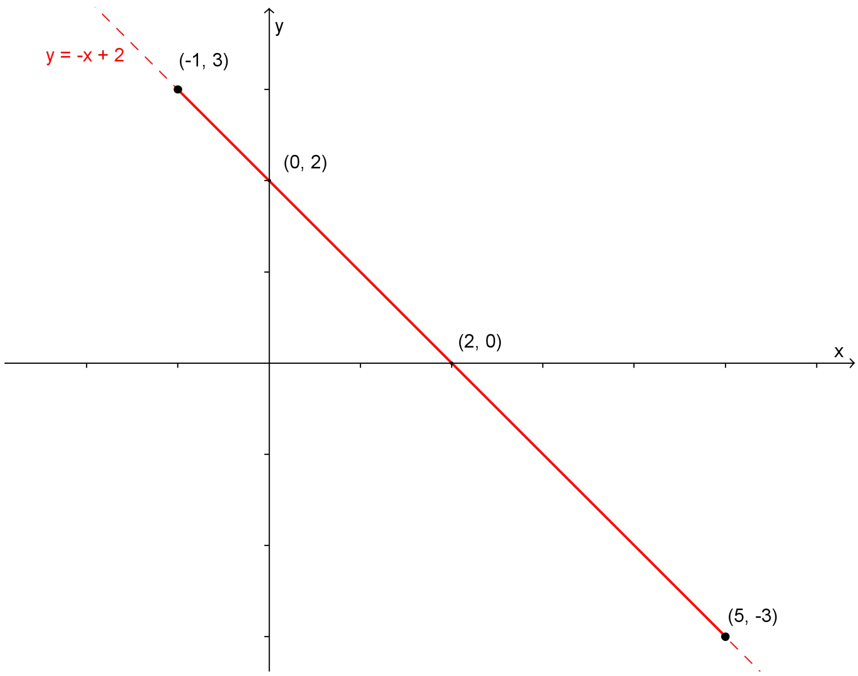
Řešení:

Nejdříve zjistíme, jaké jsou podezřelé body na hranici definičního oboru $D(F)$. Rovnici $x + y = 2$ upravíme do tvaru $y = 2 - x$.

1. Hranice $D(F)$:

   Pokud dosadíme do rovnice $y = 2 - x$ za $x = -1$ a $x = 5$, získáme i krajní hodnoty pro y po řadě jdoucí: $y = 3$ a $y = -3$. Jak je patrné i z obrázku, jedná se o úsečku spojující body $[-1, 3]$ a $[5, -3]$. To znamená, že jsme získali interval i pro y: $y \in \langle -3, 3 \rangle$.

   Nyní dosadíme do zadané funkce $F(x, y)$ za $y = 2 - x$ a dostáváme:



Obrázek 9: Množina M

$$F(x, y) = \arctan\left(\frac{x^2 - x(2 - x) + 6(2 - x) - 13}{9}\right)$$

$$F(x, y) = \arctan\left(\frac{x^2 - 2x + x^2 + 12 - 6x - 13}{9}\right)$$

$$F(x, y) = \arctan\left(\frac{2x^2 - 8x - 1}{9}\right) = h(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $h(x)$, což je funkce jedné proměnné x. Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x^2 - 8x - 1}{9}\right)^2} \cdot \left(\frac{4x}{9} - \frac{8}{9}\right) = 0$$

První zlomek:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{2x^2 - 8x - 1}{9}\right)^2} \neq 0$$

Pro všechna čísla. Druhý zlomek:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} - \frac{8}{9} &= 0 \\ 4x - 8 &= 0 \\ x &= 2 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Získáváme tedy podezřelý bod $[2, 0]$ a ještě musíme vzít v úvahu krajní body úsečky, což jsou body $[5, -3]$ a $[-1, 3]$.

2. Vnitřek $D(F)$:
   Jak je i z obrázku patrné, tak v tomto příkladu není žádná vnitřní část zadané množiny - jedná se o úsečku, kterou jsme už celou vyšetřili v odstavci zabývajícím se hranicí.
   Z vnitřní části množiny M jsme tedy nezískali žádný podezřelý bod.

Nyní musíme zjistit všechny funkční hodnoty vše všech získaných podezřelých bodech:

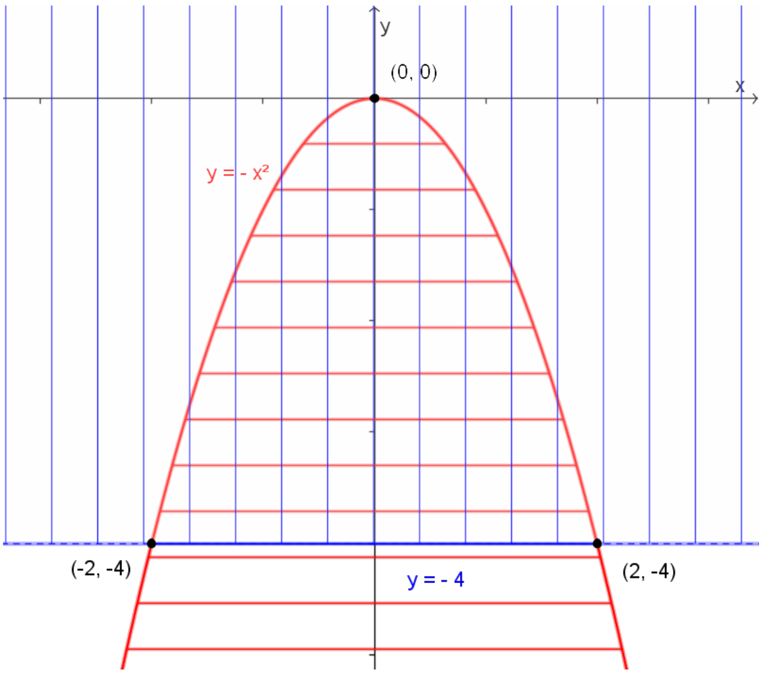
$$\begin{aligned} F(2,0) &= \arctan\left(\frac{4-13}{9}\right) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \\ F(-1,3) &= \arctan\left(\frac{1+3+18-13}{9}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4} \\ F(5,-3) &= \arctan\left(\frac{25+15-18-13}{9}\right) = arctg(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ze zjištěných funkčních hodnot je patrné, že zadaná funkce má minimum v bodě $[2, 0]$ a maxima nabývá v bodech $[-1, 3]$ a $[5, -3]$.

1.2.7 Příklad

Určete extrémy funkce $F(x, y) = (x^2 - 4y) \cdot e^{x-2y}$ na množině určené nerovnicí $M : -4 \leq y \leq -x^2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve zjistíme, jaké jsou podezřelé body na hranici definičního oboru $D(F)$, kterou tvoří úsečka $y = -4; x \in \langle -2, 2\rangle$ a část paraboly $y = -x^2; x \in \langle -2, 2\rangle$. Nerovnici $-4 \leq y \leq -x^2$ upravíme do tvaru $y \geq -4$ a $y \leq -x^2$.



Obrázek 10: Množinu M tvoří část paraboly

1. Hranice $D(F)$:

   (a) $y = -4; x \in \langle -2, 2\rangle$
   Pokud dosadíme do $F(x, y)$ za $y = -4$, získáme funkci jedné proměnné.

$$F(x, -4) = (x^2 + 16) \cdot e^{x+8} = h(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $h(x)$, což je funkce jedné proměnné x.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$h'(x) = 2x \cdot e^{x+8} + (x^2 + 16) \cdot e^{x+8}$$
$$h'(x) = e^{x+8} \cdot (x^2 + 2x + 16) = 0$$

Výraz $e^{x+8} > 0$ pro všechna čísla, druhý výraz $x^2 + 2x + 16 > 0$ pro všechna čísla. Nezískali jsme tedy žádný podezřelý bod. Ještě musíme vzít v úvahu krajní body dané úsečky, pro které platí, že $y = -4$ a $x \in \langle -2, 2 \rangle$, z čehož dostáváme: $[-2, -4], [2, -4]$.

(b) $y = -x^2; y \in \langle -4, 0 \rangle, x \in \langle -2, 2 \rangle$
Pokud dosadíme do $F(x, y)$ za $y = -x^2$, získáme funkci jedné proměnné.

$$F(x, y) = [x^2 - 4(-x^2)] \cdot e^{x-2(-x^2)}$$
$$F(x, y) = x^2 + 4x^2 \cdot e^{2x^2+x}$$
$$F(x, y) = 5x^2 \cdot e^{2x^2+x} = i(x)$$

Získali jsme tedy novou funkci: $i(x)$, což je funkce jedné proměnné x.
Nyní potřebujeme tuto funkci jedné proměnné x zderivovat a zjistit, pro která x je rovna nule:

$$i'(x) = 10x \cdot e^{2x^2+x} + 5x^2 \cdot e^{2x^2+x} \cdot (4x + 1)$$
$$i'(x) = e^{2x^2+x} \cdot [10x + 5x^2 \cdot (4x + 1)]$$
$$i'(x) = e^{2x^2+x} \cdot (20x^3 + 5x^2 + 10x)$$
$$i'(x) = e^{2x^2+x} \cdot 5x(4x^2 + x + 2) = 0$$

Výraz $e^{x+8} > 0$ pro všechna čísla, druhý výraz $5x^2 = 0$ pro $x = 0 \Rightarrow y = 0$ a třetí výraz $4x^2 + x + 2 > 0$ pro všechna čísla. Získali jsme tedy podezřelý bod $[0, 0]$. Krajní body už jsme zahrnuli do předchozího bodu hranice.

2. Vnitřek $D(F)$:
Zjistíme, kdy se parciální derivace zadané funkce rovnají nule, nebo kdy neexistují. V těchto bodech jsou podezřelé body. Parciální derivace jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, proto nás zajímají pouze body,

kde jsou derivace rovny nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \cdot e^{x-2y} + (x^2 - 4y) \cdot e^{x-2y} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x-2y}(x^2 - 4y + 2x) = 0$$

Výraz $e^{x-2y} > 0$ pro všechna čísla a výraz

$$x^2 + 2x - 4y = 0$$
$$x^2 + 2x = 4y$$
$$\frac{x^2 + 2x}{4} = y$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4 \cdot e^{x-2y} + (x^2 - 4y) \cdot e^{x-2y} \cdot (-2) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x-2y}(-4 - 2x^2 + 8y) = 0$$

Výraz $e^{x-2y} > 0$ pro všechna čísla a výraz

$$-4 - 2x^2 + 8y = 0$$

Do tohoto výrazu dosadíme za $y = \dfrac{x^2 + 2x}{4}$ a získáme

$$-4 - 2x^2 + 2(x^2 + 2x) = 0$$
$$-4 + 4x = 0$$
$$x = 1$$

Z čehož pod dosazení za $x = 1$ dostáváme pro x

$$y = \frac{x^2 + 2x}{4}$$
$$y = \frac{1 + 2}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}$$

Získáváme tedy podezřelý bod $\left[1, \dfrac{3}{4}\right]$. Tento bod ale neleží uvnitř definičního oboru dané funkce.

Nyní musíme zjistit všechny funkční hodnoty vše všech získaných podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} F(-2,-4) &= (4+16)\cdot e^{6} = 20e^{6} \\ F(2,-4) &= (4+16)\cdot e^{10} = 20e^{10} \\ F(0,0) &= 0\cdot e^{0} = 0 \end{aligned}$$

Ze zjištěných funkčních hodnot je patrné, že zadaná funkce má minimum v bodě $[0,0]$ a maxima nabývá v bodě $[2,-4]$.

1.3 Výpočet extrémů funkce 2 proměnných metodou Jakobiánu na množině, která není omezená

U funkcí, které jsou zadány na množině, která není omezená, je nutné kromě zjištění podezřelých bodů uvnitř množiny zjistit, jak se chová funkce na hranici množiny M. Často tak dostaneme infimum či supremum dané funkce.

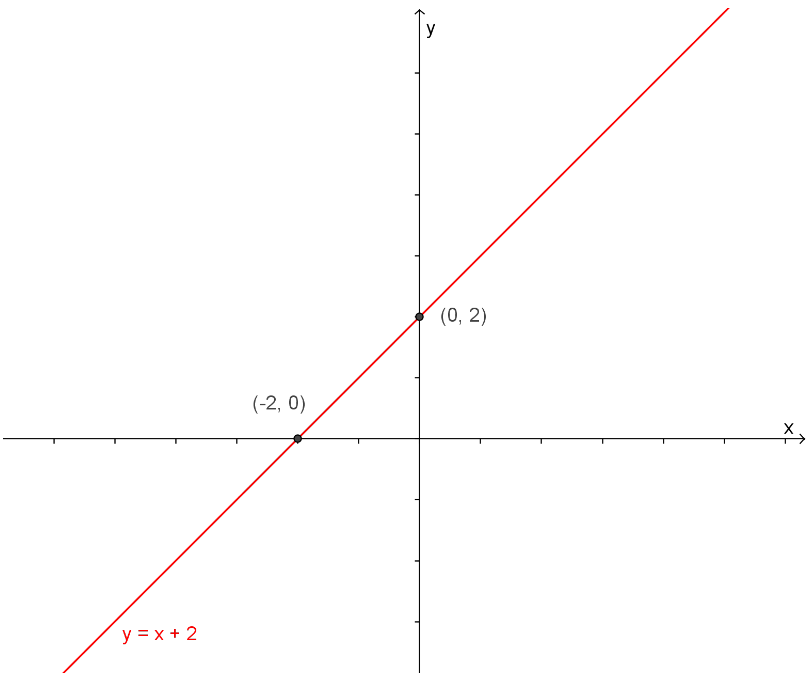
1.3.1 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ na množině $M : x - y + 2 = 0$. ([5])

Řešení:

Množina, která tvoří $D(F)$ lze upravit do tvaru: $y = x + 2$.

Je tedy zřejmé, že jde o rovnici přímky, to znamená, že definičním oborem je



Obrázek 11: Množinu M tvoří přímka $y = x + 2$

přímka. Nejedná se tedy o množinu omezenou, proto musíme nejdříve zjistit, jak vypadají limity v krajních bodech množiny, tedy v $+\infty$ a v $-\infty$.

Krajní body:

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} F(x,y) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,-\infty]} F(x,y) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$

Na vnitřní body přímky $y = x + 2$ využijeme opět Jakobiho determinant. Množinu $x - y + 2 = 0$ označíme jako $g(x, y)$.
Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= 2x + 2y = 0$$

Pro $y = -x$.
Nyní vezmeme tuto rovnost a dosadíme ji zpět do funkce $g(x, y)$:

$$x - (-x) + 2 = 0$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

Odtud a z $y = -x$ vyplývá, že jediný podezřelý bod je $[-1, 1]$. Pozor, pokud nám vyjde u metody Jakobiánu pouze jeden podezřelý bod, pak funkce $g(x, y)$ není funkce omezená, proto se ještě musejí dělat limity.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnotu v podezřelém bodě a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

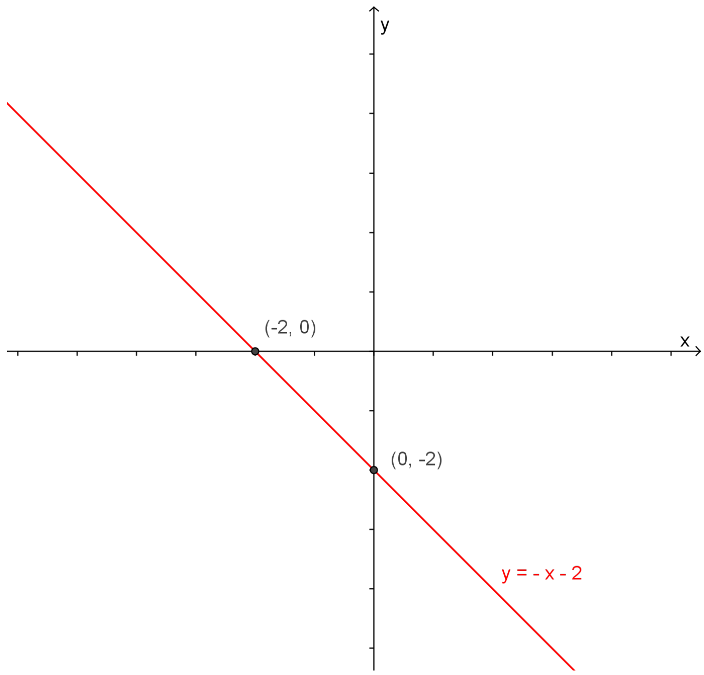
$$x \to \infty, y \to \infty \Rightarrow F(x,y) \to -\infty$$
$$x \to -\infty, y \to -\infty \Rightarrow F(x,y) \to -\infty$$
$$F(-1,1) = -1$$

Infima nabývá zadaná funkce pro $x \to \infty, y \to \infty$ a pro $x \to -\infty, y \to -\infty$ a maxima nabývá v bodě: $[-1, 1]$.

1.3.2 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ na množině $M : x + y + 2 = 0$. ([5])

Řešení:
Množina, která tvoří $D(F)$ lze upravit do tvaru: $y = -x - 2$.
Je tedy zřejmé, že jde o rovnici přímky, to znamená, že definičním oborem je



Obrázek 12: Množinu M tvoří přímka $y = -x - 2$

přímka. Nejedná se tedy o množinu omezenou, proto musíme nejdříve zjistit, jak vypadají limity v krajních bodech množiny, tedy v $+\infty$ a v $-\infty$.
Krajní body:

$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,\infty]} F(x, y) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[\infty,-\infty]} F(x, y) = 1 - \infty - \infty = -\infty$$

Na vnitřní body přímky $y = -x - 2$ využijeme opět Jakobiho determinant. Množinu $x - y + 2 = 0$ označíme jako $g(x, y)$.

Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2x + 2y = 0$$

Pro $y = x$.
Nyní vezmeme tuto rovnost a dosadíme ji zpět do funkce $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} x + (x) + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Odtud a z $y = x$ vyplývá, že jediný podezřelý bod je $[-1, -1]$. Pozor, pokud nám vyjde u metody Jakobiánu pouze jeden podezřelý bod, pak funkce $g(x, y)$ není funkce omezená, proto se ještě musejí dělat limity.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnotu v podezřelém bodě a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

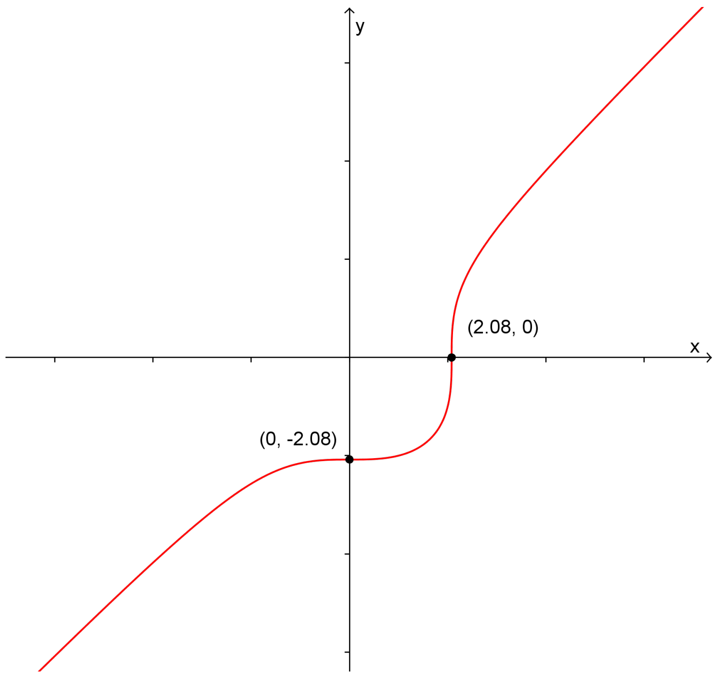
$$\begin{aligned} x \to \infty, y \to -\infty &\Rightarrow F(x, y) \to -\infty \\ x \to -\infty, y \to \infty &\Rightarrow F(x, y) \to -\infty \\ F(-1, -1) &= -1 \end{aligned}$$

Infima nabývá zadaná funkce pro $x \to \infty, y \to -\infty$ a pro $x \to -\infty, y \to \infty$ a maxima nabývá v bodě: $[-1, -1]$.

1.3.3 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ na množině $x^3 - y^3 = 9$. ([5])

Řešení:
Množina, která tvoří $D(F)$ lze upravit do tvaru: $x^3 - y^3 - 9 = 0$.
I v tomto případě se jedná o množinu, která není omezená, proto musíme nejdříve zjistit, jak vypadají limity v krajních bodech množiny,



Obrázek 13: Množinu M tvoří křivka $x^3 - y^3 = 9$

tedy v $+\infty$ a v $-\infty$.
Krajní body:

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} F(x,y) = \infty + \infty = \infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,-\infty]} F(x,y) = \infty + \infty = \infty$$

Na vnitřní body množiny $x^3 - y^3 - 9 = 0$ využijeme opět Jakobiho determinant. Množinu $x^3 - y^3 - 9 = 0$ označíme jako $g(x,y)$.
Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= -6xy^2 - 12x^2y = -6xy(y + 2x) = 0$$

Pro $x = 0 \vee y = 0 \vee y + 2y = 0$.
Nyní tyto tři rovnosti dosadíme do funkce $g(x, y)$:

1. pro $x = 0$ dostáváme:
$$\begin{aligned} 0^3 - y^3 &= 9 \\ y^3 &= -9 \\ y &= \sqrt[3]{-9} \end{aligned}$$
2. pro $y = 0$ dostáváme:
$$\begin{aligned} x^3 - 0^3 &= 9 \\ x^3 &= 9 \\ x &= \sqrt[3]{9} \end{aligned}$$
3. $y + 2x = 0$ nejdříve upravíme do tvaru:
$$\begin{aligned} y + 2x &= 0 \\ 2x &= -y \\ y &= -2x \\ y^3 &= -8x^3 \end{aligned}$$
Odkud potom dostáváme:
$$\begin{aligned} x^3 + 8x^3 &= 9 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
Odtud a z $y = -2x$ plyne, že $x = -2$.

Získáváme tedy trojici podezřelých bodů $[0, \sqrt[3]{-9}]$, $[\sqrt[3]{9}, 0]$ a $[1, -2]$.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

$$\begin{aligned} x \to \infty, y \to \infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ x \to -\infty, y \to -\infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ F(0, \sqrt[3]{-9}) &= 2 \cdot \sqrt[3]{(-9)^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{81} = 2 \cdot \sqrt[3]{27 \cdot 3} = 6\sqrt[3]{3} \\ F(\sqrt[3]{9}, 0) &= \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} \\ F(1, -2) &= 1 + 2 \cdot 4 = 9 \end{aligned}$$

Z funkčních hodnot v podezřelých bodech plyne, že funkce $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ nabývá supréma pro $x \to \infty, y \to \infty$ a pro $x \to -\infty, y \to -\infty$ a minima nabývá v bodě: $[\sqrt[3]{9}, 0]$.

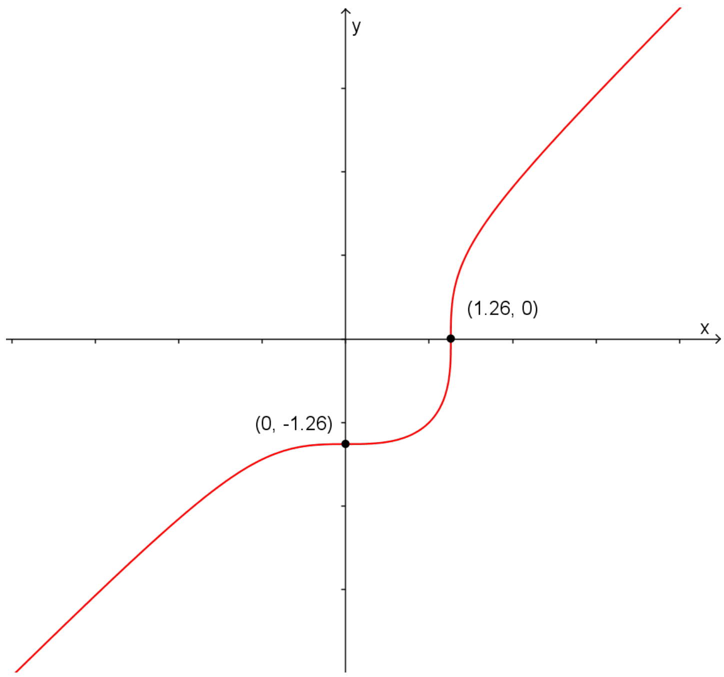
1.3.4 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y) = e^{xy}$ na množině $M : x^3 - y^3 = 2$. ([5])

Řešení:
Množina, která tvoří $D(F)$ lze upravit do tvaru:

$$x^3 - y^3 - 2 = 0.$$

Tato množina není omezená, bude tedy nutné zjistit limity v krajních bodech



Obrázek 14: Množinu M tvoří křivka $x^3 - y^3 = 2$

množiny, tedy v $+\infty$ a v $-\infty$.
Krajní body:

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} F(x, y) = e^{\infty} = \infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,-\infty]} F(x, y) = e^{\infty} = \infty$$

Na vnitřní body množiny $x^3 - y^3 = 2$ využijeme opět Jakobiho determinant. Množinu $x^3 - y^3 - 2 = 0$ označíme jako $g(x, y)$.

Potom determinant vypadá:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} y \cdot e^{xy} & x \cdot e^{xy} \\ 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= -3y^3 \cdot e^{xy} - 3x^3 \cdot e^{xy} = -3e^{xy} \cdot (y^3 + x^3) = 0$$

Výraz $-3e^{xy} \neq 0$ pro všechna čísla a výraz $y^3 + x^3 = 0$ upravíme do tvaru:

$$\begin{aligned} y^3 + x^3 &= 0 \\ x^3 &= -y^3 \\ x &= -y \end{aligned}$$

Nyní vezmeme tuto rovnost a dosadíme ji zpět do funkce $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} -y^3 - y^3 &= 2 \\ -2y^3 &= 2 \\ y^3 &= -1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Odtud a z $x = -y$ vyplývá, že jediný podezřelý bod je $[1, -1]$. Opět nám z Jakobiánu vyšel pouze jediný podezřelý bod, což znamená, že množina $g(x, y)$ není omezená.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnotu v podezřelém bodě a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

$$\begin{aligned} x \to \infty, y \to \infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ x \to -\infty, y \to -\infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ F(1, -1) = e^{1 \cdot (-1)} &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Supréma nabývá zadaná funkce pro $x \to \infty, y \to \infty$ a pro $x \to -\infty, y \to -\infty$ a minima nabývá v bodě: $[1, -1]$.

1.3.5 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$ na množině $M : x^2 - y^2 = 1$. ([5])

Řešení:

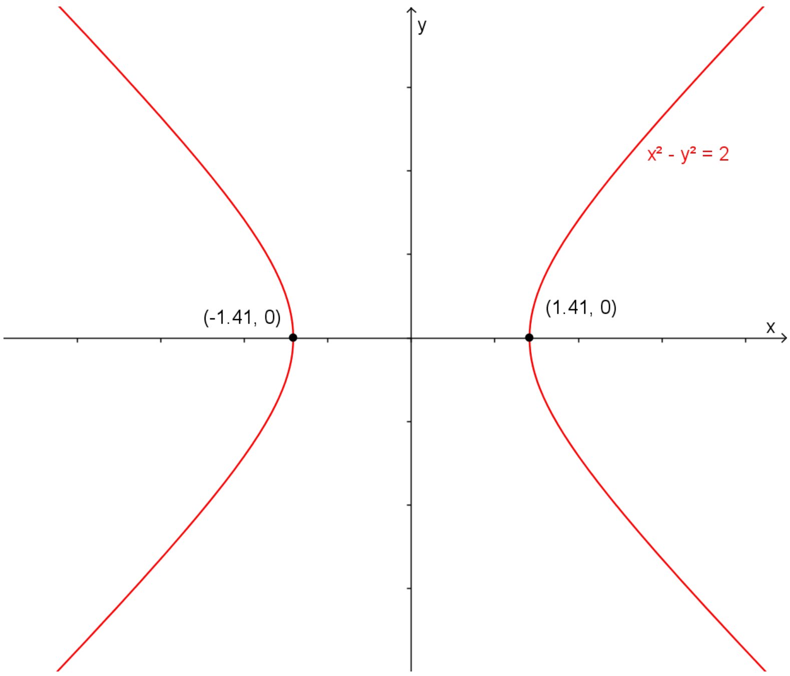
Množina, která tvoří $D(F)$ není omezená. Než ale přikročíme k výpočtu limit v krajních bodech, musíme nejdřív ověřit, zda je argument logaritmu větší než nula.

Podmínky:

$$\begin{aligned} 1 + x^2y^2 &> 0 \\ x^2y^2 &> -1 \end{aligned}$$

Tato nerovnost platí vždy, protože $x^2 \geq 0$ a $y^2 \geq 0$, z čehož plyne $x^2 \cdot y^2 \geq 0$. Je tedy zřejmé, že $x^2 \cdot y^2 \geq -1$. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu limit.

Krajní body:



Obrázek 15: Množinu M tvoří hyperbola s rovnicí $x^2 - y^2 = 1$

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} F(x,y) = \ln(\infty) = \infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[\infty,-\infty]} F(x,y) = \ln(\infty) = \infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,\infty]} F(x,y) = \ln(\infty) = \infty$$
$$\lim_{[x,y]\to[-\infty,-\infty]} F(x,y) = \ln(\infty) = \infty$$

Na vnitřní body množiny $x^2 - y^2 = 1$ využijeme opět Jakobiho determinant:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} 2xy^2 \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} & 2x^2y \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$
$$= -4xy^3 \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} - 4x^3y \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} = -4xy \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} \cdot (y^2+x^2) = 0$$

Výraz $\frac{1}{1+x^2y^2} \neq 0$ pro všechna čísla, výraz $-4xy = 0$ pro $x = 0 \vee y = 0$ a ještě musíme posoudit, kdy je výraz $y^2 + x^2 = 0$?

1. $x = 0$
   Nyní tuto rovnost dosadíme do rovnice množiny $g(x,y)$:
   $$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ -y^2 &= 1 \\ y^2 &= -1 \end{aligned}$$
   Odtud jsme nezískali žádný podezřelý bod, protože rovnost $y^2 = -1$ nemůže nastat nikdy.

2. $y = 0$
   Opět rovnost dosadíme do rovnice množiny $g(x,y)$:
   $$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$
   Získáváme tedy podezřelé body $[1,0], [-1,0]$.

3. $y^2 + x^2 = 0$
   Nejdříve rovnost upravíme do tvaru:

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 0 \\ y^2 &= -x^2 \end{aligned}$$

   Nyní tento upravený tvar dosadíme do rovnice množiny $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} x^2 - (-x^2) &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Odtud a z $y^2 = -x^2$ vyplývá, že $y^2 = -\frac{1}{2}$ což nelze, protože druhá mocnina jakéhokoliv čísla je větší nebo rovna nule. Nezískali jsme žádný podezřelý bod.

Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnotu v podezřelých bodech a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

$$\begin{aligned} x \to \infty, y \to \infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ x \to \infty, y \to -\infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ x \to -\infty, y \to \infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ x \to -\infty, y \to -\infty &\Rightarrow F(x, y) \to \infty \\ F(1, 0) = \ln(1 + 0) &= ln1 = 0 \\ F(-1, 0) = \ln(1 + 0) &= ln1 = 0 \end{aligned}$$

Supréma nabývá zadaná funkce pro $x \to \infty, y \to \infty$, pro $x \to \infty, y \to -\infty$, pro $x \to -\infty, y \to \infty$ a pro $x \to -\infty, y \to -\infty$. Minima nabývá v bodech: $[\pm 1, 0]$.

1.4 Lokální extrémy funkcí 2 proměnných

Jde o zjišťování tvaru funkce. Nezajímá nás největší, nebo nejmenší hodnota funkce, ale zajímá nás, kde funkce tvoří tzv. „kopečky", nebo „dolíčky". Funkce F má v bodě lokální maximum, případně lokální minimum, pokud tam má maximum, případně minimum, vzhledem k nějakému okolí tohoto bodu. Funkce F musí být definovaná na okolí daného bodu, proto je tedy tento bod vnitřním bodem $D(F)$.
Pokud chceme zjišťovat lokální extrémy funkce f v $\mathbb{R}$, pak pracujeme s druhými derivacemi funkce f.
Podobně, budeme-li chtít zjišťovat lokální extrémy funkce $F(x,y)$ v $\mathbb{R}^2$, pak budeme pracovat s parciálními derivacemi druhého řádu.
V prostoru $\mathbb{R}^2$ se ale mění terminologie. Lokální maximum a lokální minimum zůstává, ale inflexní bod se zde nazývá sedlo.
K určení lokálních extrémů se využívá determinant, pro který platí:

$$D = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Na základě znaménka determinantu D můžeme rozhodnou o lokálních extrémech. Platí následující:

1. $D > 0 \Rightarrow$ *v bodě je lokální*
   (a) *maximum* $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$
   (b) *minimum* $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$
2. $D < 0 \Rightarrow$ *je v bodě sedlo*
3. $D = 0 \Rightarrow$ *nelze určit (nutné použít jinou metodu)*

Celá problematika lokálních extrémů funkcí 2 proměnných je vysvětlena v [1].

1.4.1 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x,y) = 10 - x^2 - y^2$. ([5])

Řešení:

Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Nemusíme se zabývat hranicí $D(F)$, protože lokální extrémy jsou vždy uvnitř $D(F)$. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x = 0$$

Pro $x = 0$. A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0$$

Pro $y = 0$.
Odtud dostáváme podezřelý bod $[0, 0]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial(-2x)}{\partial x} = -2$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial(-2y)}{\partial y} = -2$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

Determinant vyšel roven 4, což je číslo kladné, v bodě $[0, 0]$ je lokální extrém. Jelikož zároveň platí, že:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 < 0$$

Tak je v bodě $[0, 0]$ lokální maximum.

Další příklad je velice podobný předcházejícímu příkladu.

1.4.2 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y) = 10 - x^2 - y^3$. ([5])

Řešení:
Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Nemusíme se zabývat hranicí $D(F)$, protože lokální extrémy jsou vždy uvnitř $D(F)$. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x = 0$$

Pro: $x = 0$. A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3y^2 = 0$$

Pro: $y = 0$.
Odtud dostáváme podezřelý bod $[0, 0]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial(-2x)}{\partial x} = -2$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial(-3y^2)}{\partial y} = -6y$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix} = 12y$$

Nyní do výsledku z determinantu dosadíme bod $[0, 0]$:

$$D = 12y = 12 \cdot 0 = 0$$

Determinant vyšel roven 0, což znamená, že touto metodou nelze rozhodnout o lokálních extrémech.

1.4.3 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y) = (x + 2)^2 - (y + 1)^2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Nemusíme se zabývat hranicí $D(F)$, protože lokální extrémy jsou vždy uvnitř $D(F)$. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x + 2) = 2x + 4 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2(y + 1) = -2y - 2 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} -2y - 2 &= 0 \\ 2y &= -2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme podezřelý bod $[-2, -1]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial(2x+4)}{\partial x} = 2$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial(-2y-2)}{\partial y} = -2$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2x+4)}{\partial y} = 0$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

Determinant vyšel roven -4, což je číslo záporné, v bodě $[-2,-1]$ je sedlo.

1.4.4 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x,y) = 2x + 3y - \ln(xy)$. ([5])

Řešení:

Ještě než začneme zjišťovat podezřelé body, je vhodné u tohoto příkladu stanovit podmínky pro x a y, aby měl logaritmus smysl.

$$\begin{aligned} x \cdot y > 0 &\Rightarrow x > 0 \land y > 0 \\ &\Rightarrow x < 0 \land y < 0 \end{aligned}$$

Nyní můžeme pokračovat hledáním podezřelých bodů. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + \left(-\frac{1}{xy}\right) \cdot y = 2 - \frac{y}{xy} = 2 - \frac{1}{x} = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{x} &= 0 \\ 2 &= \frac{1}{x} \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3 - \frac{1}{xy} \cdot x = 3 - \frac{x}{xy} = 3 - \frac{1}{y} = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{y} &= 0 \\ 3 &= \frac{1}{y} \\ 3y &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Odtud dostáváme podezřelý bod $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -(-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3 - \frac{1}{y}\right) = -(-1)y^{-2} = \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Nyní do výsledku determinantu dosadíme získaný podezřelý bod $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ a dostáváme:

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9}} = 4 \cdot 9 = 36 > 0.$$

Odtud vyplývá, že je v bodě lokální extrém. Abychom mohli rozhodnout, zda se jedná o lokální minimum, nebo lokální maximum, musíme se zaměřit na znaménko parciální derivace druhého řádu podle x:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 > 0.$$

V bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ je lokální minimum.

Následující příklad je velice podobný předešlému příkladu.

1.4.5 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y) = \ln(xy) + x - y$. ([5])

Řešení:

Ještě než začneme zjišťovat podezřelé body, je vhodné u tohoto příkladu stanovit podmínky pro x a y, aby měl logaritmus smysl.

$$\begin{aligned} x \cdot y > 0 &\Rightarrow x > 0 \wedge y > 0 \\ &\Rightarrow x < 0 \wedge y < 0 \end{aligned}$$

Nyní můžeme pokračovat hledáním podezřelých bodů. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot y + 1 = \frac{y}{xy} + 1 = \frac{1}{x} + 1 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 1 &= 0 \\ \frac{1}{x} &= -1 \\ -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x - 1 = \frac{x}{xy} - 1 = \frac{1}{y} - 1 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{y} &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme podezřelý bod $[-1, 1]$. Tento bod ale nesplňuje podmínky vzešlé z logaritmu, že $x > 0 \wedge y > 0 \vee x < 0 \wedge y < 0$. Tento bod tedy není částí definičního oboru funkce $F(x, y)$, protože:

$$\ln(xy) = \ln(-1)$$

a logaritmus $\ln(-1)$ není definován.

1.4.6 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - y$. ([5])

Řešení:

Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Nemusíme se zabývat hranicí $D(F)$, protože lokální extrémy jsou vždy uvnitř $D(F)$. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y = 2(x - y) = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2(x - y) &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x + y^2 - 1 = 0$$

Po dosazení za $x = y$ dostáváme pro:

$$\begin{aligned} 2y - 2x + y^2 - 1 &= 0 \\ 2y - 2y + y^2 - 1 &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$$

Odtud a z $x = y$ dostáváme 2 podezřelé body $[1, 1]$ a $[-1, -1]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial(2x - 2y)}{\partial x} = 2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial(2y - 2x + y^2 - 1)}{\partial y} = 2 + 2y \end{aligned}$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2x - 2y)}{\partial y} = -2$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 + 2y \end{pmatrix} = 2(2 + 2y) - 4 = 4 + 4y - 4 = 4y$$

Nyní do výsledku dosadíme postupně oba podezřelé body:

1. bod $[1, 1]$

   $$D = 4y = 4 > 0.$$

   V bodě $[1, 1]$ je lokální extrém:

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

   V bodě $[1, 1]$ je tedy lokální minimum.

2. bod $[-1, -1]$

$$D = 4y = -4 < 0.$$

V bodě $[-1, -1]$ je sedlo.

1.4.7 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y) = \frac{2}{x} + x^2y + \frac{1}{y}$. ([5])

Řešení:

Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2}{x^2} + 2xy = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{x^2} + 2xy &= 0 \\ -2 + 2x^3y &= 0 \\ x^3y &= 1 \\ x^3 &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - \frac{1}{y^2} = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{y^2} &= 0 \\ x^2 &= \frac{1}{y^2} \\ x &= \pm\frac{1}{y} \end{aligned}$$

Nyní se postupně zaměříme na oba případy:

1. $x = \frac{1}{y}$

   Dosadíme tuto rovnost do $x^3 = \frac{1}{y}$ a dostáváme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y}\right)^3 &= \frac{1}{y} \\ y^3 &= y \\ y^2 &= 1 \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$$

2. $x = -\frac{1}{y}$

   Dosadíme tuto rovnost do $x^3 = \frac{1}{y}$ a dostáváme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{y}\right)^3 &= \frac{1}{y} \\ -y^3 &= y \\ y^2 &= -1 \end{aligned}$$

   Tato rovnost nemá smysl, protože druhá mocnina čísla je vždy větší, nebo rovná nule.

Dostáváme 2 podezřelé body $[1, 1]$ a $[-1, -1]$. Můžeme tedy pokročit k výpočtu determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nyní si vypočítáme parciální derivace druhého řádu, abychom je mohli doplnit do determinantu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2}{x^2} + 2xy\right) &= 2y + \frac{4}{x^3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right) &= \frac{2}{y^3} \end{aligned}$$

Protože hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2}{x^2} + 2xy\right) = 2x$$

Nyní tyto hodnoty dosadíme do determinantu D:

$$D = det \begin{pmatrix} 2y + \dfrac{4}{x^3} & 2x \\ 2x & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

U těchto složitějších determinantů je vhodnější nejdříve do determinantu dosadit podezřelý bod a až pak ho začít vyčíslovat:

1. bod $[1, 1]$

   $$D = det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

   Jelikož je hodnota determinantu kladná, tak v bodě $[1, 1]$ je lokální extrém:

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6 > 0.$$

   V bodě $[1, 1]$ je tedy lokální minimum.

2. bod $[-1, -1]$

   $$D = det \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0.$$

   Jelikož je hodnota determinantu kladná, tak v bodě $[-1, -1]$ je lokální extrém:

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6 < 0.$$

   V bodě $[-1, -1]$ je tedy lokální maximum.

2 Tečna implicitně zadané funkce

Nyní se zaměříme na využití funkce dvou proměnných v teorii funkce jedné proměnné.
Implicitní funkce je funkce, kterou nelze zapsat ve tvaru $y = f(x)$, *ale je možno ji zapsat pomocí rovnice* $F(x,y) = 0$. *Jde například o rovnici kružnice, kterou implicitně zapíšeme jako* $x_2 + y^2 - 1 = 0$. *Lze ji sice vyjádřit i pomocí předpisu* $y = f(x)$, *ale je nutné ji rozdělit na dvě polokružnice:* $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, *čímž se jedná o dvě různé funkce.*
Pokud $F = F(x,y)$ *je funkce, jejíž parciální derivace jsou spojité v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nechť* $F(x_0, y_0) = 0$ *a* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Potom v okolí bodu $[x_0, y_0]$ *existuje funkce* $f = f(x)$ *taková, že rovnice* $F(x,y) = 0$ *vyjadřuje v okolí bodu* $[x_0, y_0]$ *graf funkce* f *(tj. křivku* $y = f(x)$*).*
Tato funkce f *je spojitá v okolí bodu* x_0 *a zároveň zde má i spojitou derivaci a platí:*

$$f'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)},$$

kde $f'(x_0)$ *je směrnice tečny ke grafu* $F(x,y)$ *v bodě* x_0.

2.1 Příklad

Určete rovnici tečny v bodě $[4,1]$ ke křivce vyjádřené implicitně rovnicí $\sqrt{x} + \sqrt{y} = xy - 1$. ([5])

Řešení:
Nejdříve ověříme, zda je bod $[4,1]$ prvkem zadané funkce:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} + \sqrt{1} &= 4 \cdot 1 - 1 \\ 2 + 1 &= 4 - 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Bod $[4,1]$ je bodem zadané funkce. Nyní si funkci $F(x,y)$ upravíme:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= xy - 1 \\ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} - xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

U takto upravené funkce zjistíme její parciální derivace podle x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - y$$

A podle y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} - x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} - x$$

Nyní určíme, jakých hodnot nabývají tyto parciální derivace v bodě $[4, 1]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(4,1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(4,1) &= \frac{1}{2} \cdot 1 - 4 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Směrnice tečny má tedy tvar:

$$k := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{6}{28} = -\frac{3}{14}$$

Nyní dostáváme rovnici tečny, kterou ještě upravíme:

$$\begin{aligned} t : (y-1) &= -\frac{3}{14} \cdot (x-4) \\ y - 1 &= -\frac{3}{14}x + \frac{12}{14} \\ y &= -\frac{3}{14}x + \frac{6}{7} + 1 \\ y &= -\frac{3}{14}x + \frac{13}{7} \end{aligned}$$

Získali jsme obecnou rovnici přímky, která je tečnou funkce $\sqrt{x}+\sqrt{y} = xy-1$ v bodě $[4, 1]$.

2.2 Příklad

Určete rovnici tečny v bodě $[1, -1]$ ke křivce vyjádřené implicitně rovnicí $x^4 + y^4 = 2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve ověříme, zda je bod $[1, -1]$ prvkem zadané funkce:

$$\begin{aligned} 1^4 + (-1)^4 &= 2 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Bod $[1, -1]$ je bodem zadané funkce. Nyní si funkci $F(x, y)$ upravíme:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 2 \\ x^4 + y^4 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

U takto upravené funkce zjistíme její parciální derivace podle x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3$$

A podle y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3$$

Nyní určíme, jakých hodnot nabývají tyto parciální derivace v bodě $[1, -1]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(1, -1) &= 4 \cdot 1 = 4 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1, -1) &= 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot -1 = -4 \end{aligned}$$

Směrnice tečny má tedy tvar:

$$k := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{4}{-4} = 1$$

Nyní dostáváme rovnici tečny, kterou ještě upravíme:

$$\begin{aligned} t : (y + 1) &= 1 \cdot (x - 1) \\ y + 1 &= x - 1 \\ y &= x - 2 \end{aligned}$$

Získali jsme obecnou rovnici přímky, která je tečnou funkce $x^4 + y^4 = 2$ v bodě $[1, -1]$.

2.3 Příklad

Určete rovnici tečny v bodě $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ke křivce vyjádřené implicitně rovnicí $\cos x + 2\sin y = 2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve ověříme, zda je bod $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ prvkem zadané funkce:

$$\begin{aligned} \cos 0 + 2\sin\frac{\pi}{6} &= 2 \\ 1 + 2\cdot\frac{1}{2} &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Bod $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ je bodem zadané funkce. Nyní si funkci $F(x, y)$ upravíme:

$$\begin{aligned} \cos x + 2\sin y &= 2 \\ \cos x + 2\sin y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

U takto upravené funkce zjistíme její parciální derivace podle x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin x$$

A podle y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\cos y$$

Nyní určíme, jakých hodnot nabývají tyto parciální derivace v bodě $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{6}\right) &= -\sin 0 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{6}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Směrnice tečny má tedy tvar:

$$k := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{0}{\sqrt{3}} = 0$$

Jelikož směrnice tečny vyšla rovna nule, tečna je rovnoběžná s osou x. Půjde tedy o konstantní přímku:

$$\begin{aligned} t: \left(y - \frac{\pi}{6}\right) &= 0(x-0) \\ y - \frac{\pi}{6} &= 0 \\ y &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Získali jsme obecnou rovnici přímky, která je tečnou funkce $\cos x + 2\sin y = 2$ v bodě $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

2.4 Příklad

Určete rovnici tečny v bodě $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ke křivce vyjádřené implicitně rovnicí $\cos(x^2) + \sin(xy) + 2\sin y = 1 + \sqrt{3}$. ([5])

Řešení:
Nejdříve ověříme, zda je bod $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ prvkem zadané funkce:

$$\begin{aligned} \cos 0 + \sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{3} &= 1 + \sqrt{3} \\ 1 + 0 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} &= 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} &= 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Bod $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ je bodem zadané funkce. Nyní si funkci $F(x, y)$ upravíme:

$$\begin{aligned} \cos(x^2) + \sin(xy) + 2\sin y &= 1 + \sqrt{3} \\ \cos(x^2) + \sin(xy) + 2\sin y - 1 - \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

U takto upravené funkce zjistíme její parciální derivace podle x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -[\sin(x^2)]\cdot 2x + (\cos xy)\cdot y = -2x\sin x^2 + y\cos xy$$

A podle y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\cdot\cos xy + 2\cos y$$

Nyní určíme, jakých hodnot nabývají tyto parciální derivace v bodě $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + \frac{\pi}{3} \cdot \cos 0 = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = 0 \cdot \cos 0 + 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Směrnice tečny má tedy tvar:

$$k := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{\pi}{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

Nyní dostáváme rovnici tečny, kterou ještě upravíme:

$$\begin{aligned} t: \left(y - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3}(x - 0) \\ y - \frac{\pi}{3} &= -\frac{\pi}{3}x \\ y &= -\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Získali jsme obecnou rovnici přímky, která je tečnou funkce $\cos(x^2) + \sin(xy) + 2\sin y = 1 + \sqrt{3}$ v bodě $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

2.5 Příklad

Určete rovnici tečny v bodě $[1, 1]$ ke křivce vyjádřené implicitně rovnicí $e^{2x+y} + e^{x+2y} = 2e^3$. ([5])

Řešení:
Nejdříve ověříme, zda je bod $[1, 1]$ prvkem zadané funkce:

$$\begin{aligned} e^{2\cdot 1+1} + e^{1+2\cdot 1} &= 2e^3 \\ e^3 + e^3 &= 2e^3 \\ 2e^3 &= 2e^3 \end{aligned}$$

Bod $[1, 1]$ je bodem zadané funkce. Nyní si funkci $F(x, y)$ upravíme:

$$\begin{aligned} e^{2x+y} + e^{x+2y} &= 2e^3 \\ e^{2x+y} + e^{x+2y} - 2e^3 &= 0 \end{aligned}$$

U takto upravené funkce zjistíme její parciální derivace podle x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{2x+y} \cdot 2 + e^{x+2y}$$

A podle y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{2x+y} + e^{x+2y} \cdot 2$$

Nyní určíme, jakých hodnot nabývají tyto parciální derivace v bodě $[1, 1]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 2e^3 + e^3 = 3e^3$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = e^3 + 2e^3 = 3e^3$$

Směrnice tečny má tedy tvar:

$$k := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3e^3}{3e^3} = -1$$

Nyní dostáváme rovnici tečny, kterou ještě upravíme:

$$\begin{aligned} t : (y-1) &= -1(x-1) \\ y-1 &= -x+1 \\ y &= -x+2 \end{aligned}$$

Získali jsme obecnou rovnici přímky, která je tečnou funkce $e^{2x+y} + e^{x+2y} = 2e^3$ v bodě $[1, 1]$.

3 Funkce 3 proměnných

Funkce 3 proměnných je předpis, který uspořádané trojici $[x, y, z]$ přiřazuje funkční hodnotu $F(x, y, z)$. Definičním oborem funkce $F(x, y)$ je podmnožina $\mathbb{R}^3$ a oborem hodnot je podmnožina $\mathbb{R}$. Více je tato problematika vysvětlena v [1].

3.1 Extrémy funkce 3 proměnných na dané množině metodou Jakobiánu

U funkcí 3 proměnných se omezíme pouze na určování extrémů funkcí Jakobiho metodou.
Mějme funkci $F(x, y, z)$ jako funkci proměnných x, y a z. Nechť existují funkce $g_1(x, y, z) = 0$ a $g_2(x, y, z) = 0$, které jsou definičním oborem dané funkce $F(x, y, z)$. Pak pro Jakobiho determinant platí:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

Po vyřešení rovnic, které vyjdou z determinantu dostáváme podezřelé body. Poté zjistíme funkční hodnoty funkce $F(x, y, z)$ v podezřelých bodech a na základě těchto hodnot rozhodneme o extrémech.

3.1.1 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x, y, z) = x - 2y + 2z$ na množině $g_1 : x^2 + y^2 = 17$ a $g_2 : y + z = 0$. ([5])

Řešení:
Množina g_1 je kružnice, tedy se jedná o množinu omezenou, odtud plyne, je-li omezená funkce g_1 s proměnnou y, pak musí být i funkce g_2 omezená. Potom determinant vypadá (k jeho výpočtu použijeme tzv. Sarrusovo pravi-

dlo o připsání prvních dvou sloupců determinantu):

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 2y + 4x + 4x = 8x + 2y = 0$$

Pro $y = -4x$.
Nyní tuto rovnici dosadíme do g_1:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 17 \\ x^2 + 16x^2 &= 17 \\ 17x^2 &= 17 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

A odtud a z $y = -4x$ dostáváme:

$$y = \mp 4$$

Odtud a z množiny g_2 dostáváme:

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ z &= -y \Rightarrow z = \pm 4 \end{aligned}$$

Získali jsme 2 podezřelé body: $[1, -4, 4]$ a $[-1, 4, -4]$. Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech.

$$F(1, -4, 4) = 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 17$$
$$F(-1, 4, -4) = -1 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = -17$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodě: $[-1, 4, -4]$, maxima v bodě: $[1, -4, 4]$.

3.1.2 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na množině $g_1 : x^2 + y^2 = 5$ a $g_2 : z^2 = 4$. ([5])

Řešení:
Množina g_1 je kružnice, tedy se jedná o množinu omezenou. Z množiny g_2 rovnou dostáváme souřadnici z všech podezřelých bodů: $z = \pm 2$. Odtud též plyne, že množina g_2 je omezená.
Potom determinant vypočteme pomocí Sarrusova pravidla:

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 4yz + 8xz = 0$$

Pro

$$\begin{aligned} 4yz + 8xz &= 0 \\ 4z(y + 2x) &= 0 \\ z &= 0 \vee y = -2x \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Nyní rovnici $y = -2x$ dosadíme do g_1:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 + (-2x)^2 &= 5 \\ x^2 + 4x^2 &= 5 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

A odtud a z $y = -2x$ dostáváme:

$$y = \mp 2$$

Získali jsme 4 podezřelé body: $[1,-2,2]$, $[1,-2,-2]$, $[-1,2,2]$ a $[-1,2,-2]$. Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech.

$$\begin{aligned} F(1,-2,2) &= 1+4+4 = 9 \\ F(1,-2,-2) &= 1+4-4 = 1 \\ F(-1,2,2) &= -1-4+4 = -1 \\ F(-1,2,-2) &= -1-4-4 = -9 \end{aligned}$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodě: $[-1,2,-2]$, maxima v bodě: $[1,-2,2]$.

3.1.3 Příklad

Metodou Jakobiánu urči extrémy funkce $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ na množině $g_1 : x+y-3z = -7$ a $g_2 : x-y+z = 3$. ([5])

Řešení:

Množina g_1 ani množina g_2 není omezená. Jedná se o obecné rovnice přímek v prostoru. Proto nejdříve ověříme limity v ∞ a v $-\infty$:

$$\lim_{[x,y,z]\to[\infty,\infty,\infty]} F(x,y,z) = \infty + \infty + \infty = \infty$$
$$\lim_{[x,y,z]\to[-\infty,-\infty,-\infty]} F(x,y,z) = \infty + \infty + \infty = \infty$$

Zjistili jsme podezřelé body v krajních bodech přímek. Nyní prověříme vnitřní část množiny. Použijeme Jakobiho determinant (k jeho výpočtu použijeme tzv. Sarrusovo pravidlo):

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 2x - 6y - 2z - 2z - 6x - 2y = -4x - 8y - 4z = -4(x+2y+z) = 0$$

Tato rovnost platí: $x = -z - 2y$.
Nyní tu rovnici dosadíme do množiny g_1 a do množiny g_2 a dostaneme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých y a z:

$$-z - 2y + y - 3z = -7 \tag{1}$$
$$-z - 2y - y + z = 3 \tag{2}$$

Řešením rovnice (2) je:

$$\begin{aligned} -z - 3y + z &= 3 \\ -3y &= 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Nyní dosadíme za $y = -1$ do rovnice (1):

$$\begin{aligned} -z - 2 \cdot (-1) + (-1) - 3z &= -7 \\ -4z + 1 &= -7 \\ 4z &= 8 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Nyní za $z = 2$ a za $y = -1$ dosadíme do rovnice $x = -z - 2y$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= -2 - 2 \cdot (-1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Získali jsme pouze jeden podezřelý bod, což nás upozorňuje na to, že množiny g_1 a g_2 nejsou omezené. Podezřelý bod má souřadnice: $[0, -1, 2]$.
Pro určení extrémů funkce vypočteme funkční hodnotu v podezřelém bodě a ještě musíme vzít v potaz limity v krajních bodech.

$$\begin{aligned} x \to \infty, y \to \infty, z \to \infty \Rightarrow F(x, y, z) &\to \infty \\ x \to -\infty, y \to -\infty, z \to -\infty \Rightarrow F(x, y, z) &\to \infty \\ F(0, -1, 2) &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Minima nabývá zadaná funkce v bodě: $[0, -1, 2]$, maxima pro: $x \to \infty, y \to \infty, z \to \infty$ a pro:$x \to -\infty, y \to -\infty, z \to -\infty$.

3.2 Lokální extrémy funkce 3 proměnných pomocí Sylvestrova pravidla

Jde o zjišťování lokálních extrémů funkce $F(x, y, z)$ v $\mathbb{R}^3$.
V prostoru $\mathbb{R}^3$ zůstává stejná terminologie jako v prostoru $\mathbb{R}^2$, tedy mluvíme o lokálních maximech a minimech a inflexnímu bodu říkáme sedlo.
K určení lokálních extrémů se využívá Sylvestrovo pravidlo:
Nechť je bod $[x, y, z]$ podezřelý z extrému. Tedy:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

Pak označme:

1. D_1*, pro které platí:*

$$D_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, z),$$

2. *determinant* D_2*, pro který platí:*

$$D_2 = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

3. *determinant* D_3*, pro který platí:*

$$D_3 = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Na základě znamének determinantů D_1 a D_2 a D_3 můžeme rozhodnou o lokálních extrémech. Platí následující:

1. $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0 \Rightarrow$ *je v bodě $[x, y, z]$ lokální minimum,*

2. $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0 \Rightarrow$ *je v bodě* $[x, y, z]$ *lokální maximum,*

3. $D_1 \in \mathbb{R}, D_2 < 0, D_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *je v bodě* $[x, y, z]$ *sedlo,*

4. $D_1 > 0, D_2 \in \mathbb{R}, D_3 < 0 \Rightarrow$ *je v bodě* $[x, y, z]$ *sedlo,*

5. $D_1 < 0, D_2 \in \mathbb{R}, D_3 > 0 \Rightarrow$ *je v bodě* $[x, y, z]$ *sedlo.*

Pokud nastane některá z možností, která není uvedená výše, nelze touto metodou o lokálních extrémech rozhodnout.

3.2.1 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz + 4x - 8y - 2z$. ([5])

Řešení:
Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2z + 4 = x - z + 2 = 0$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y - 8 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 4y - 8 &= 0 \\ 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z - 2x - 2 = -x + 2z - 1 = 0$$

Nyní jsme získali jednu souřadnici podezřelého bodu: $y = 2$ a dvě rovnice. Z těchto rovnic uděláme soustavu a sečteme je a dostaneme:

$$\begin{aligned} x - z + 2 - x + 2z - 1 &= 0 \\ z + 1 &= 0 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Nyní toto řešení dosadíme například do druhé rovnice soustavy a dostáváme:

$$\begin{aligned} -x - 2 - 1 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Získali jsme podezřelý bod $[-3, 2, -1]$.
Nyní bychom mohli pokročit k výpočtům determinantů D_1 a D_2 a D_3. Nejdříve si ale vypočítáme všechny parciální derivace, které budeme do determinantů dosazovat. Obecný tvar determinantů D_1 a D_2 a D_3 je uveden hned v úvodu kapitoly, proto je zde už dále nebudu uvádět, ale budu pracovat pouze s vyčíslenými determinanty.
Derivace druhých řádů mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x - 2z + 4) = 2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(4y - 8) = 4 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(4z - 2x - 2) = 4 \end{aligned}$$

Ještě vypočítáme smíšené parciální derivace. Hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, proto stačí počítat místo šesti derivací pouze tři:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2z + 4) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(2x - 2z + 4) = -2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(4y - 8) = 0 \end{aligned}$$

Nyní z těchto hodnot sestavíme determinanty D_1, D_2 a D_3:

$$D_3 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{matrix} = 32 - 16 = 16 > 0$$

$$D_2 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 > 0$$

$$D_1 = 2 > 0$$

Determinanty vyšly všechny kladné, můžeme na základě Sylvestrova pravidla rozhodnout. Jedná se o případ číslo 1, tedy v bodě $[-3, 2, -1]$ je lokální minimum.

3.2.2 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$. ([5])

Řešení:

Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2y + 4 &= 0 \\ 2y &= -4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 6 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2z - 6 &= 0 \\ 2z &= 6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Nyní jsme získali podezřelý bod $[-1,-2,3]$.

Nyní bychom mohli pokročit k výpočtům determinantů D_1 a D_2 a D_3. Nejdříve si ale vypočítáme všechny parciální derivace, které budeme do determinantů dosazovat. Obecný tvar determinantů D_1 a D_2 a D_3 je uveden

hned v úvodu kapitoly, proto je zde už dále nebudu uvádět, ale budu pracovat pouze s vyčíslenými determinanty.
Derivace druhých řádů mají tvar:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+2) = 2$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y+4) = 2$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(2z-6) = 2$$

Ještě vypočítáme smíšené parciální derivace. Hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, proto stačí počítat místo šesti derivací pouze tři:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+2) = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(2x+2) = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(2y+4) = 0$$

Nyní z těchto hodnot sestavíme determinanty D_1, D_2 a D_3:

$$D_3 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 8 > 0$$

$$D_2 = det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$
$$D_1 = 2 > 0$$

Determinanty vyšly všechny kladné, můžeme na základě Sylvestrova pravidla rozhodnout. Jedná se o případ číslo 1, tedy v bodě $[-1, -2, 3]$ je lokální minimum.

3.2.3 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y, z) = \ln |x \cdot y \cdot z|$. ([5])

Řešení:
Tento logaritmus je definován pouze pro $x \cdot y \cdot z \neq 0$, tedy $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$.

Nyní budeme hledat body podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{xyz} \cdot yz = \frac{yz}{xyz} = \frac{1}{x} \neq 0$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{xyz} \cdot xz = \frac{xz}{xyz} = \frac{1}{y} \neq 0$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{xyz} \cdot xy = \frac{xy}{xyz} = \frac{1}{z} \neq 0$$

Všechny tři parciální derivace jsou na $D(F)$ různé od nuly, proto jsme nezískali žádný podezřelý bod.

3.2.4 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy - 2z$. ([5])

Řešení:
Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ x^2 &= 2y \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 6x = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2y - 6x &= 0 \\ 2y &= 6x \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 2z - 2 &= 0 \\ 2z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Nyní jsme získali souřadnici $z = 1$ podezřelého bodu. Musíme ještě vyřešit následující rovnice:

$$x^2 = 2y$$

A

$$2y = 6x.$$

Druhou rovnici dosadíme do první a získáme:

$$\begin{aligned} x^2 &= 6x \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x-6) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $x = 0 \vee x = 6$. Potom pro y platí:

$$\begin{aligned} 2y &= 6x \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $y = 18 \vee y = 0$. Získáváme dva podezřelé body $[6, 18, 1]$ a $[0, 0, 1]$.
Nyní bychom mohli pokročit k výpočtům determinantů D_1 a D_2 a D_3. Nejdříve si ale vypočítáme všechny parciální derivace, které budeme do determinantů dosazovat. Obecný tvar determinantů D_1 a D_2 a D_3 je uveden hned v úvodu kapitoly, proto je zde už dále nebudu uvádět, ale budu pracovat pouze s vyčíslenými determinanty.
Derivace druhých řádů mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y) = 6x \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(2y - 6x) = 2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(2z - 2) = 2 \end{aligned}$$

Ještě vypočítáme smíšené parciální derivace. Hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, proto stačí počítat místo šesti derivací pouze tři:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6y) = -6$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - 6y) = 0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(2y - 6x) = 0$$

Nyní z těchto hodnot sestavíme determinanty D_1, D_2 a D_3 a pak do výsledků dosadíme souřadnice obou podezřelých bodů:

$$D_3 = det \begin{pmatrix} 6x & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 24x - 72$$

$$D_2 = det \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 12x - 36$$
$$D_1 = 6x$$

Pro podezřelé body vycházejí determinanty po vyčíslení následovně.

1. Bod $[6, 18, 1]$:

$$D_3 = 24x - 72 = 24 \cdot 6 - 72 = 144 - 72 = 72 > 0$$
$$D_2 = 12x - 36 = 12 \cdot 6 - 36 = 72 - 36 = 36 > 0$$
$$D_1 = 6x = 6 \cdot 6 = 36 > 0$$

   Všechny tři determinanty vyšly kladné, proto jde o případ první a v bodě $[6, 18, 1]$ je lokální minimum.

2. Bod $[0, 0, 1]$:

$$D_3 = 24x - 72 = -72 < 0$$
$$D_2 = 12x - 36 = -36 < 0$$
$$D_1 = 6x = 0$$

   Determinanty D_1 a D_2 vyšly záporné a D_1 vyšel roven nule, proto jde o případ třetí a v bodě $[0, 0, 1]$ je sedlo.

3.2.5 Příklad

Určete lokální extrémy funkce $F(x, y, z) = 6xz + 4y + 8z - 2x^3 - 2y^2 - z^2$. ([5])

Řešení:
Nejdříve musíme zjistit, které body jsou podezřelé z extrému. Pro určení podezřelých bodů potřebujeme zjistit, kde se parciální derivace funkce rovnají nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6z - 6x^2 = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 6z - 6x^2 &= 0 \\ x^2 &= z \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4 - 4y = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 4 - 4y &= 0 \\ 4y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 6x + 8 - 2z = 0$$

Pro:

$$\begin{aligned} 6x + 8 - 2z &= 0 \\ 2z &= 6x + 8 \\ z &= 3x + 4 \end{aligned}$$

Nyní jsme získali souřadnici $y = 1$ podezřelého bodu. Musíme ještě vyřešit následující rovnice:

$$x^2 = z$$

A

$$z = 3x + 4.$$

Druhou rovnici dosadíme do první a získáme:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x + 4 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x-4)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $x = 4 \vee x = -1$. Potom pro z platí:

$$z = 3x + 4.$$

Odtud dostáváme, že $z = 16 \vee z = 1$. Získáváme dva podezřelé body $[4, 1, 16]$ a $[-1, 1, 1]$.
Nyní bychom mohli pokročit k výpočtům determinantů D_1 a D_2 a D_3. Nejdříve si ale vypočítáme všechny parciální derivace, které budeme do determinantů dosazovat. Obecný tvar determinantů D_1 a D_2 a D_3 je uveden hned v úvodu kapitoly, proto je zde už dále nebudu uvádět, ale budu pracovat pouze s vyčíslenými determinanty.
Derivace druhých řádů mají tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6z - 6x^2) = -12x \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(4 - 4y) = -4 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(6x + 8 - 2z) = -2 \end{aligned}$$

Ještě vypočítáme smíšené parciální derivace. Hodnota smíšené parciální derivace nezávisí na tom, podle které proměnné derivujeme jako první, proto stačí počítat místo šesti derivací pouze tři:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6z - 6x^2) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(6z - 6x^2) = 6 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(4 - 4y) = 0 \end{aligned}$$

Nyní z těchto hodnot sestavíme determinanty D_1, D_2 a D_3 a pak do výsledků dosadíme souřadnice obou podezřelých bodů:

$$D_3 = det \begin{pmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -12x & 0 \\ 0 & -4 \\ 6 & 0 \end{matrix} = -96x + 144$$

$$D_2 = det\begin{pmatrix} -12x & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 48x$$
$$D_1 = -12x$$

Pro podezřelé body vycházejí determinanty po vyčíslení následovně.

1. Bod $[4, 1, 16]$:

$$\begin{aligned} D_3 = -96x + 144 = -96 \cdot 4 + 144 = -384 + 144 = -240 < 0 \\ D_2 = 48x = 48 \cdot 4 = 192 > 0 \\ D_1 = -12x = -12 \cdot 4 = -48 < 0 \end{aligned}$$

   První a třetí determinant vyšly záporně, druhý determinant je kladný, jde tedy o druhý případ a v bodě $[4, 1, 16]$ je lokální maximum.

2. Bod $[-1, 1, 1]$:

$$\begin{aligned} D_3 = -96x + 144 = -96 \cdot -1 + 144 = 96 + 144 = 240 > 0 \\ D_2 = 48x = 48 \cdot -1 = -48 < 0 \\ D_1 = -12x = -12 \cdot -1 = 12 > 0 \end{aligned}$$

   Determinanty D_1 a D_3 vyšly kladné a D_2 vyšel záporný, proto jde o případ třetí a v bodě $[-1, 1, 1]$ je sedlo.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů tak, aby mohla sloužit jako doplňující literatura k přednáškám, případně cvičením, studentům zejména pedagogických fakult, kteří se v rámci kurzu matematické analýzy zabývají extrémy funkcí více proměnných.

Při zpracování této práce jsem se snažil plně využít možností, které nabízí dnešní moderní technologie, například dynamický geometrický software GeoGebra, který je volně stažitelný, a proto je i snadno dostupný všem zájemcům o práci s ním. Tento software se stává i velkým pomocníkem při výuce matematika na základních a středních školách.

Tvorba této práce mě velice těšila a přál bych si, aby byla tato práce dobrým pomocníkem dalších studentů všech matematických oborů zabývajících aplikací extrémů funkcí více proměnných.

Literatura

[1] Henzler, J. a kolektiv: *Matematika pro ekonomy*, VŠE, Praha 2007. ISBN 978-80-245-1284-6

[2] Dĕmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1

[3] Kubešová, N., Cibulková, E.: *Matematika - přehled středoškolského učiva*, Petra Velanová, 2006. ISBN 80-86873-03-X

[4] Lomtatidze, L., Plch, R.: *Sázíme v LATEXu diplomovou práci z matematiky*, Přírodovědecká fakulta MU, 2003. ISBN 80-210-3228-6

[5] *Matematická analýza 5*, [online]
dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/ lsamkova/ma5.htm

[6] Okrajek, P.: *Sbírka příkladů z diferenciálního počtu funkcí dvou proměnných*, Pedagogická fakulta MU, 2009

[7] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1

[8] Rybička, J.: *LATEXpro začátečníky*, Konvoj, 2003. ISBN 80-7302-049-1