Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Historické matematické texty z pohledu současné výuky matematiky

Vypracoval: Bc. Tereza Suchopárová
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2014

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Historické matematické texty z pohledu současné výuky matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ………………………….

Tereza Suchopárová

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu své diplomové práce, Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D., za jeho odborné rady, inspiraci a trpělivost během psaní této práce.

ANOTACE

Tato diplomová práce se zabývá možností využití historických matematických textů v dnešní výuce matematiky. Teoretická část představuje historický kontext, v němž vznikaly původní texty, které se staly podkladem pro tuto práci. V praktické části jsou navrženy výukové materiály, které umožňují implementaci historických úloh do výuky.

ANNOTATION

This diploma thesis suggests some ideas how to use historical mathematical texts in today's mathematics teaching. The theoretical part introduces the historical context of original texts which have become the basis for this thesis. In the practical part, several ideas how to implement these texts are suggested, designed and tested.

OBSAH

1 ÚVOD

V poslední době stále častěji slýcháme, že úroveň matematických znalostí a dovedností českých žáků klesá, ačkoliv z Tiskové zprávy MŠMT z roku 2012 [23] vyplývá, že se při posledním šetření TIMMS (The Trends in International Mathematics and Science Study) a PIRLS (The *Progress in International Reading Literacy Study)* v roce 2011 čeští žáci mírně zlepšili [8]. Výsledky našich studentů základních škol však zdaleka nedosahují úrovně, jako například před 20 lety. V souvislosti s tím se snižují také nároky, které na žáky klademe [21]. Dostáváme se tak do pověstného začarovaného kruhu.

S podobnými tendencemi se setkávám také během své učitelské praxe. Téma této práci jsem si vybrala proto, že bych ráda navrhla takové výukové materiály, které by žáky vedly k přemýšlení při řešení netradičních úloh. V současné době totiž v hodinách matematiky není výjimkou výukový styl zaměřený na memorování algoritmů a řešení typologicky podobných úloh. Tento přístup u žáků nevyžaduje hlubší pochopení probírané látky, ale pouze zapamatování aplikaci naučeného postupu.

Inspirací pro vytváření nevšedních úloh pro tuto práci se staly historické knihy, které se nacházejí v Jihočeské vědecké knihovně, oddělení rukopisů a starých tisků v Klášteře Zlatá Koruna.

Jedním z těchto děl je kniha *Miscellanea Mathematica* z roku 1764 autora Jana Tesánka. Mimo jiných úloh se v této knize věnuje úlohám, které řešil již ve starém Řecku Archimédes ze Syrakus. Knihy těchto dvou autorů se staly podkladem pro předkládanou práci.

Cílem této diplomové práce bylo zpracovat historické materiály a navrhnout jejich implementaci do současného vzdělávání. Všechny vybrané úlohy spadají do oblasti geometrie. Počáteční část této práce je tedy věnována vývoji a významu vizualizace, jelikož právě vizuální podpora je důležitou součástí vytvořených výukových materiálů. Následuje kapitola zabývající se historickým kontextem, v němž vznikala výchozí literatura pro tuto diplomovou práci.

V praktické části jsou následně zadány a rozebrány jednotlivé úlohy. Jejich zpracování má několik forem: dynamické konstrukce v programu GeoGebra, animace důkazů v programu GeoGebra a pracovní listy. Dynamické soubory jsou součástí přílohy na CD ROM. Navíc jsou také volně dostupné na geogebratube.org. Pracovní listy jsou pevnou součástí práce. Závěrečnou částí je popis hodin matematiky, ve kterých byly některé pracovní listy využity. Tyto hodiny probíhaly v rámci výuky na ZŠ Matice školské.

2 VIZUALIZACE V MATEMATICE

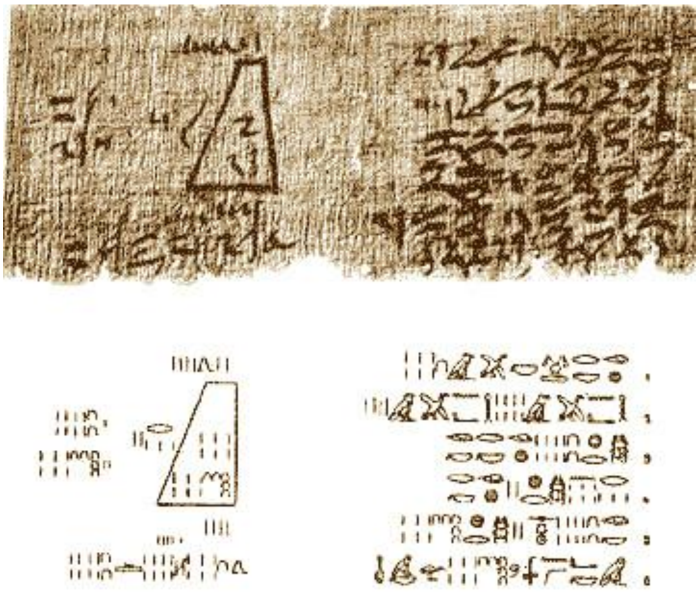
Matematika využívá tři základní výrazové prostředky. Jsou to jazyk přirozený, symbolický a vizuální. Jazykem přirozeným je myšlena běžná řeč, kterou užíváme při vysvětlování, popisování či zadávání matematických problémů. Jazyk symbolický pak zahrnuje znaménka, závorky, číslice, ale i symboly jako $\forall$, $f(x)$, v', $\in$, $\sum$, $\not\measuredangle$, apod [1].

Vizuálními reprezentacemi máme na mysli především grafy a geometrické konstrukce. Zahrnutí obrázku do matematického textu mělo v historii dva hlavní důvody. Tím prvním je, že vhodným náčrtkem lze nahradit zdlouhavé popisy či zadání (viz čínské přísloví – Obrázek 1), tím druhým pak je, že dobře zvolený nákres může napomoci obrazové představivosti a následnému usuzování a argumentaci, až ke konečnému řešení problému [1].

Obrázek 1 Čínské přísloví: „Obrázek vydá za 1000 slov.“ [16]

2.1 POČÁTKY VIZUALIZACE

Důkazy o tom, že už starověké texty obsahovaly vizuální podporu svého obsahu, nalézáme ve známém Moskevském papyru, který pochází z Egypta kolem roku 1850 př. n. l. Jeho součástí je totiž vedle popisů a symbolů také náčrt lichoběžníku (viz Obrázek 2, na str. 6). Na rozdíl od současnosti však byla funkce takovýchto nákresů pouze ilustrativní a jen doplňovala obsah textu samotného. Až později se začala funkce vizualizace měnit a postupně dospěla až do dnešní podoby [1].



Obrázek 2 Moskevský papyrus [17]

2.2 VIZUALIZACE V ŘECKÉ MATEMATICE

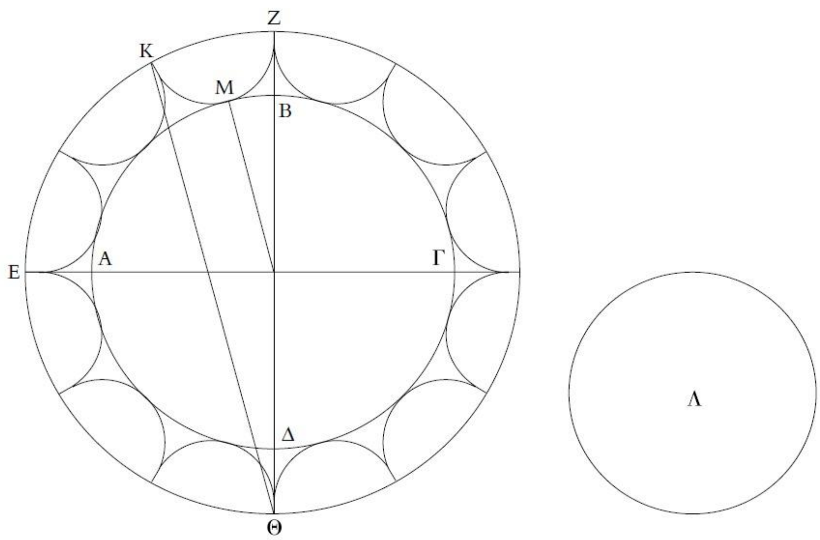
Jak uvádějí Netz a Noel v [15], řecká matematika byla vizuální věda. Jejím hlavním představitelem byl Archimédes ze Syrakus. Bylo to právě v antické matematice, kdy se funkce obrázku změnila z ilustrativní na informativní. Náčrtek se zde stává součástí jednotlivých tvrzení. Bez něj by nebyla vstupní informace kompletní.

Originálním zpracováním většiny tehdejších ilustrací si nemůžeme být jisti, jelikož nebyly dochovány. K dispozici však máme několik dalších historických zdrojů z dob mnohem pozdějších. Poté, co došlo při přírodních katastrofách či válkách ke zničení důležitých sídel i celých měst, včetně knihoven, byla díla velkých myslitelů přepisována, aby se už nestávalo, že jediná kopie bude zničena. Během staletí dalších a dalších přepisů a kopírování ovšem mohlo docházet k jistým úpravám, kterých se písaři mohli dopouštět vědomě či nevědomě. Množství nepatrných úprav nebo i chyb z nepozornosti pak mohlo vést k obrázku velice odlišnému od toho původního. Právě shodující se fragmenty z rozličných historických period nás však nechávají věřit, že tomu tak není a naše představa o antických nákresech je správná [15].

Role obrázků v řecké matematice byla od té dnešní poněkud odlišná. Odvozování různých vlastností i dokazování vztahů se řídilo přísnou logikou, kterou řečtí matematici bez zaváhání dodržovali. To bylo nezbytné, jelikož na své diagramy spoléhali natolik, že některé skutečnosti se již nemusely objevit v doplňujícím textu a jakýkoliv chybný úsudek vyvozený z nákresu by vedl k nekorektnímu postupu řešení. Řekové se ale ve svých postupech dokázali oprostit od skutečnosti, že v daném případě, který vidí před sebou na papyru, něco platí. S obrázkem ostroúhlého trojúhelníku nepracovali jako s ostroúhlým trojúhelníkem, ale jako s trojúhelníkem obecným. Funkce nákresů tedy spočívala v tom, že z nich matematici vycházeli, ale nespoléhali na to, co se zdá být pravdivým nebo naopak nepravdivým. Podstatné pro ně bylo, jaké vlastnosti v obecné konstrukci platí a proč [15].

Guzmán v [4] přirovnává roli náčrtku v řecké matematice ke stínu, který jen naznačuje skutečnou situaci. Konstrukce, kterou vidíme před sebou na papíře, není reálná, ale naše představa o ní ano a obrázek nám pomáhá s ní operovat.

Netz a Noel v [15] dále uvádějí, že také forma náčrtků byla značně odlišná. Například v díle samotného Archiméda se můžeme setkat s následujícím diagramem – Obrázek 3.



Obrázek 3 Archimédův diagram [15], s. 101

Jakkoliv se nám to může jevit nepravděpodobné, jednotlivé oblouky v mezikruží znázorňují strany mnohoúhelníku. Tento způsob znázornění je pro Archiméda dokonce typický. Nacházíme zde další důkaz, že náčrtek neplní funkci ilustrativní, ale že se jedná spíše o schematickou reprezentaci. K vidění jsou i další podobné situace a to i přesto, že byli Řekové schopni rýsovat velice přesné, ilustrativní obrázky. Proč tedy jejich náčrtky záměrně neodpovídají realitě [15]?

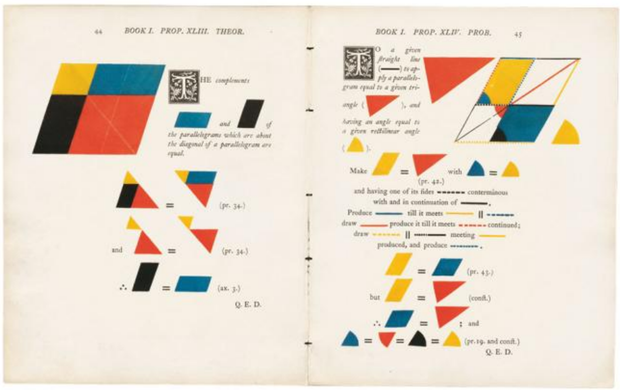
Důvod spočívá v již zmiňované skutečnosti, že bez správného zdůvodňování můžeme z obrázku vyvodit nesprávné závěry. A jelikož se Řekové ve svých úvahách takovýchto chyb nedopouštěli, nebylo pro ně důležité ani to, jestli jsou stranami mnohoúhelníku úsečky nebo oblouky. Důležité je, aby obrázek vyjadřoval topologické vlastnosti geometrických útvarů. Tím se stává nákres co nejobecnější a lze na jeho základě provádět geometrické důkazy [15].

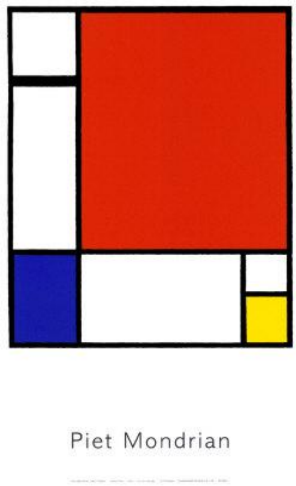
2.3 VIZUALIZACE V MODERNÍ MATEMATICE

Od doby antiky prošla vizualizace rozsáhlým vývojem. Zasloužil se o to například Albrecht Dürer, který přispěl novými způsoby znázorňování prostorových těles v rovině. Jeho práci posunul na vyšší úroveň přibližně o 100 let později Johannes Kepler. Jejich snaha, spolu se snahami dalších matematiků a geometrů o co nejpřesnější a nejpreciznější rovinná zobrazení dala vzniknout nové matematické disciplíně – deskriptivní geometrii [15].

Podle Guzmána v [4] kladli také další zakladatelé moderní matematiky důraz na vizuální podporu vědeckých prací. René Descartes ve svém díle *Regulae ad directionem ingenii* uvádí, že při práci s matematickým textem je nutné zapojit intelekt, paměť, představivost a smysly. Guzmán [4] dále uvádí, že to byly právě řecké nákresy v kombinaci s rozvinutou algebrou tehdejší doby, které dovedly Descarta k položení základů analytické geometrie. Později to byl Lagrange, který ve vzdělávání matematika přikládal velkou roli “fakultě pozorování” a také Gauss, který matematiku považoval za vědu oka.

O nový přístup k vizualizaci se ve své grafické interpretaci Eukleidových *Základů* z roku 1847 pokusil Oliver Byrne. V nákresech se zcela oprostil od pojmenovávání bodů, úseček a dalších objektů (viz Obrázek 4). Namísto toho užíval barvy, kterými znázorňoval, že dva prvky v obrázku jsou shodné. Ve své době se jeho metoda nesetkala s velkým úspěchem, z části kvůli nákladnosti barevného tisku. I přesto ale jeho dílo nezůstalo nepovšimnuté. O necelé století později se jeho obrázky a využíváním pouze základních barev inspirovali holandský malíř Piet Mondrian (viz Obrázek 5) i celé umělecké hnutí De Stijl [6].





Obrázek 4 Ukázka z knihy Olivera Byrneho [6]

Obrázek 5 Dílo Pieta Mondriana [19]

Ve dvacátém století byla vizualizace na ústupu. Tato situace souvisela především s rozvinutým formalizmem daného období. Na obrázky bylo nahlíženo se značnou nedůvěrou, částečně pod vlivem vzniku neeukleidovských geometrií, a intuitivní myšlení bylo potlačováno. Učebnice pro všechny stupně vzdělávání byly někdy psány jen s minimální nebo žádnou vizuální podporou. Obrázky byly považovány za nespolehlivý zdroj poznávání. Dnes je však situace odlišná a vizualizace si znovu získává své místo v matematice [4].

S vývojem moderních technologií zaznamenala vizualizace značný posun. Grafické kalkulačky a počítače nabízejí možnost interaktivního pojetí vizualizace. Ruku v ruce s tímto vývojem došlo i k vymezení nového odvětví matematiky – počítačové geometrie [1].

2.3.1 VIZUALIZACE PODPOROVANÁ POČÍTAČEM

Segenchuk v [20] rozlišuje vizualizaci dynamickou a vizualizaci statickou. Před nástupem moderních technologií jsme se mohli setkávat pouze s vizualizací statickou. Od nástupu počítačů se ale její role změnila a dnes zastává také funkci dynamickou. Tím, co tyto dvě formy od sebe rozlišuje, je změna grafického podnětu v čase.

Přínos dynamické geometrie je dnes předmětem mnoha výzkumů, z nichž ne všechny prokazují zlepšení výkonů studentů. Většina žáků i učitelů však dynamičnost geometrických programů oceňuje. Nespornou výhodou užití počítače je, že nám umožňuje v krátkém čase znázornit nepřeberné množství možností. Posunutím jediného bodu můžeme například změnit ostroúhlý trojúhelník na trojúhelník tupoúhlý namísto toho, abychom jej znovu rýsovali na tabuli, a zbývá nám tak více času na objevování, pozorování a ověřování vlastností.

Velkou výhodou je také široká nabídka programů zaměřených na dynamickou geometrii. Řada z nich je navíc dostupná jako freeware, tedy bezplatný software. Jedním z nich je program GeoGebra, který je v této práci využit k přípravě veškerých materiálů.

2.3.2 ROLE VIZUALIZACE V DNEŠNÍ VÝUCE MATEMATIKY

Jak uvádí Kuřina [12], některé pojmy na základní i střední škole se výrazně opírají o intuici vyvolanou geometrickým obrázkem. Jako příklad uvádí zavedení pojmu mnohoúhelník. Představa mnohoúhelníku je podle něj založena na intuitivně zřejmé skutečnosti, že lomená čára, která mnohoúhelník vyznačuje, dělí rovinu na vnitřní a vnější část. Podobných příkladů, které ukazují na význam vizuální podpory ve výuce matematiky, bychom našli jistě mnoho.

Segenchuk v [20] zdůrazňuje, že aby měla vizualizace žádoucí efekt, musí být založena na znalostech žáků. Jinými slovy nelze očekávat, že vizuální podpora pomůže žákům k objevení a pochopení vztahů a zákonitostí, pokud nemají dostatečné předchozí znalosti, které jsou pro porozumění nezbytné. Hiebert a Carpenter v [10] dodávají, že k porozumění dojde pouze tehdy, pokud prvek zapadne do již existující kognitivní sítě žáka. Pokud jsou tyto podmínky naplněny, je vizualizace velkým pomocníkem při vytváření a upevňování nových pojmů či vztahů.

V době počítačů, grafických kalkulátorů a interaktivních tabulí je již vyučování matematiky s vizuální podporou poměrně rozšířené. Čím dál větší počet učitelů začleňuje matematické softwary do hodin a učí s nimi pracovat i žáky samotné. V některých případech je sice stále postačující tabule a křída, v jiných je však dynamičnost geometrických programů nedocenitelná. Proto je dnes také práce s matematickými softwary nedílnou součástí vzdělávání budoucích učitelů matematiky.

3 OD TESÁNKA K ARCHIMÉDOVI

Spojení mezi těmito dvěma muži je na první pohled nejasné. Nahlédneme-li ale blíže do díla J. Tesánka, zjistíme, že se Archimédovými úlohami zabýval ve svých sbírkách. V knize *Miscellanea Mathematica* (1764), jejíž dochovaný výtisk se nachází v klášteře Zlatá Koruna, začlenil Tesánek dvacet pět tvrzení vybraných napříč Archimédovým dílem. Všechny příklady jsou velice zajímavé, avšak pro využití na základní ba i střední škole poněkud složité. Však se také jednalo o univerzitního profesora, který patrně své knihy využíval ve výuce. Svou povahou jsou ale vybrané úlohy podobné Archimédově *Knize lemmat*, která je pro mysl žáků středních a základních škol mnohem přístupnější. Na rozdíl od Tesánkových úloh se totiž lemmata zabývají vztahy v rovině a nikoliv v prostoru. Proto se tedy *Kniha lemmat* stala hlavním předmětem této práce a je pouze doplněna vybranými příklady z těch, které Tesánek od Archiméda převzal.

3.1 JAN TESÁNEK

Jan Tesánek, někdy také Ioannis či Joannes Tessanek, se narodil 9. prosince 1728 v Brandýse nad Labem a zemřel 22. června 1788 v Praze. Jeho jméno je vytesáno na zdech Národního muzea mezi 72 největšími muži Čech. Je považován za významného matematika, fyzika a astronoma, byl ale také filozofem a knězem. Někdy bývá Tesánek přezdíván český Newton, jak ho překřtil francouzský matematik, fyzik a astronom Joseph Louis de Lagrange. Přesto však víme o jeho životě poměrně málo a neznáme ani jeho podobu [5], [13].

Své znalosti nabyl během gymnaziálních studií a později také jako člen jezuitského řádu, jenž se v Českých zemích jako jediný zabýval systematickou výukou matematiky. Byl velkým obdivovatelem díla Isaaca Newtona, k jehož knihám *Isaaci Newtoni Libri I. principiorum mathematicorum philosophiae naturalis Sect. I–V exposita* (1769), *Betrachtungen über eine Stelle der allgmeinen Arithmetik Isaac Newtons* (1784), *Versuch über einige Stellen in Newtons Principiis* (1776) a *Algebraische Behandlung der XII. Section des I. Buches des grossen Werkes Newtons* (1777) vydal vlastní poznámky. Jeho životním dílem pak byla dvojdílná kniha

Philosophiae naturalis principia mathematica, auctore Isaaco Newtono, illustrata commentationibus potissimum Is. Tesanek et quibusdam in locis commentation ibus veterioribus clarissimorum Thom. Le Sueur et Fried. Jacquier, ex Gallicana Minorum familia Matheseos Professorum aliter propositis (1780 a 1785). Třetí část zůstala bohužel nedokončena [5], [11], [13]. Struik ([22], s. 141) dodává, že v tomto pražském vydání Newtonových *Principií* se pokusil vymezit některé základní termíny z analýzy, konkrétně zpřesnit pojem limitního přechodu.

Většinu života působil jako učitel na latinských školách i pražské univerzitě. Konec svého života však prožil v chudobě a nemocen v domě svého žáka Františka Josefa Gerstnera, průkopníka českého technického školství. Slova vyrytá na Tesánkově náhrobku odkazují na jeho celoživotní vazbu k Newtonovi: „Magni Newtoni Commentator“ – Komentátor velkého Newtona [5], [11], [13].

3.2 Archimédes ze Syrakus

Archimédes se narodil v roce 287 př. n. l. v Sicilském přístavu Syrakusy a zemřel tamtéž v roce 211 nebo 212 př. n. l. během punských válek, rukou římského vojáka. Za jeho poslední slova je považována slavná věta: „Neruš mi mé kruhy!“ [3].

Další pověst, která se o Archimédovi traduje, je kterak po objevení pozdějšího Archimédova zákona běžel po městě Syrakusy nahý a radostí nad svým zjištěním, volal: „Heuréka!“ Netz a Noel v [15]však tuto domněnku zpochybňují. Ve srovnání s jinými Archimédovými objevy je podle nich Archimédův zákon věc tak zřejmá, že jen těžko kvůli ní takto zuřivě oslavoval. Samotná událost by mohla být pravdivá, avšak v kontextu jiného, významnějšího objevu.

Neméně známá je také pověst, ve které Archimédes pomocí zrcadel a slunečních paprsků podpálil římskou loď. Také tato událost byla historiky zpochybňována, dokud v roce 2005 nebyl proveden podobný pokus, při kterém použili 100 zrcadel a model lodi jimi zapálili. Později byl pokus opakován se skutečnou lodí plující po vodě [3].

Archimédes je některými považován za umělce mezi matematiky a to převážně díky eleganci a kráse svých řešení. Tato úvaha není bezpředmětná, jelikož Archimédovi předci byli údajně z jedné strany astronomové a ze strany druhé umělci. Taková kombinace genů skutečně mohla vést ke zrození matematika a umělce v jedné osobě [15]. Mezi jeho nejznámější díla patří *O kouli a válci*, kde odvozuje vztah pro povrch a objem koule, *Měření kruhu*, kde aproximuje hodnotu π, *Kvadratura paraboly*, ve které zavádí výpočet pro obsah plochy mezi parabolou a sečnou, či *O konoidech a sféroidech* nebo *O spirálách*, kde se zabývá také studiem Archimédovy spirály [13].

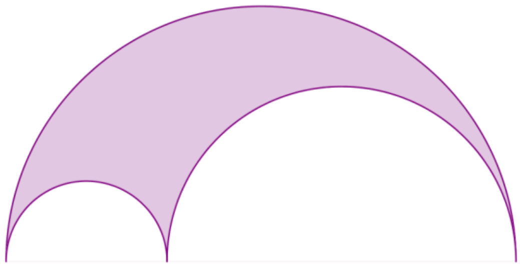
Během svého života vedl Archimédes aktivní korespondenci s dalšími matematiky své doby. Často jim zasílal své nejnovější objevy a zjištění, někdy však ve svých výpočtech dělal záměrně chyby a se zvědavostí očekával, jestli je druhá strana odhalí. Byl si totiž dobře vědom, že na světě není mysl, která by se mohla rovnat té jeho [15].

4 KNIHA LEMMAT

Kniha Lemmat patří mezi Archimédova méně známá a méně významná díla. Přesto má však čtenáři mnoho co nabídnout. Krása této knihy spočívá především v Archimédových důkazech. Ty jsou povětšinou založeny na elementárních znalostech a úvahách, které zdánlivě vedou kamkoliv jen ne k dokázání tvrzení. V samém závěru do sebe ale všechny myšlenky zapadnou a důkaz lemmatu je na světě.

Obsahem této knihy je patnáct lemmat – patnáct tvrzení o kružnici (půlkružnici). Asi nejznámější jsou lemmata vztahující se k arbelosu, útvaru sevřeném třemi půlkružnicemi, který Archimédes jako první takto pojmenoval. Slovo arbelos znamená v řečtině obuvnický nůž (viz Obrázek 6). Právě podle něj pojmenoval Archimédes studovaný tvar – viz Obrázek 7.

Obrázek 6 Obuvnický nůž [18]



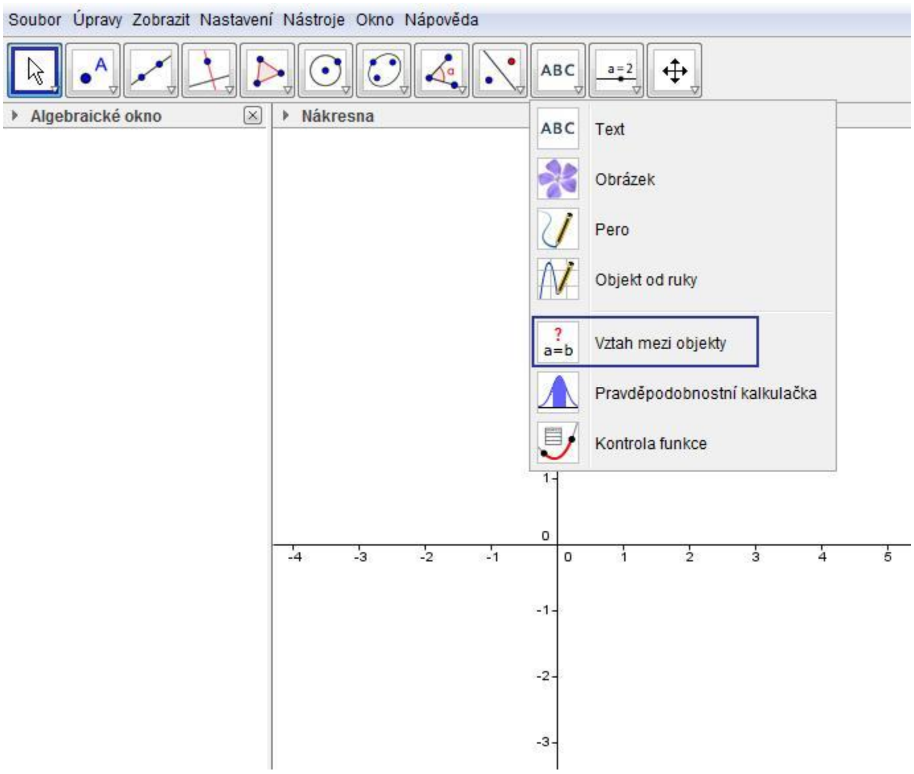
Obrázek 7 Arbelos

Podle McConnella v [14] se Archimédes věnoval studiu arbelosu pro vlastní zábavu a potěšení. Tomu lze velmi snadno uvěřit, neboť tento jednoduchý geometrický útvar v sobě skrývá řadu zajímavých vlastností a vztahů. Ty nejznámější se vztahují k jeho obvodu a obsahu.

4.1 FORMY ZPRACOVÁNÍ

Kniha lemmat je výchozí literaturou pro tuto práci. V následující části jsou jednotlivá lemmata podrobněji rozpracována a je navrženo jejich zařazení do výuky. Jako součást zadání každého lemmatu jsou uvedeny *znalosti potřebné ke konstrukci, znalosti potřebné k důkazu, forma výukového materiálu, procvičované znalosti, zařazení do výuky* a případně *nabyté znalosti*. Tak si může každý učitel zvolit, kdy a jakým způsobem využít určité tvrzení ve výuce.

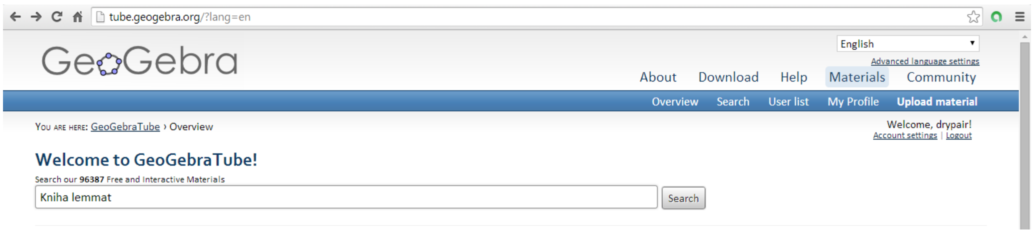
Jednotlivá tvrzení jsou zpracována několika způsoby podle toho, jaké jsou jejich možnosti pro zařazení do výuky. Všechna lemmata jsou ilustrována obrázky vytvořenými v programu GeoGebra, v němž je vždy provedena i konstrukce. V příslušném souboru lze provést verifikaci jednotlivých lemmat, což je také ilustrováno v každém zadání. Verifikace je provedena dvěma způsoby. První je užitím nástroje Vztah mezi objekty (názorně Obrázek 8), který je součástí základní sady nástrojů programu.



Obrázek 8 Vztah mezi objekty

Druhý způsob verifikace je proveden užitím dynamického textu, který se mění v závislosti na aktuálních hodnotách. Můžeme tedy dokazované vztahy ověřit pro různé hodnoty, které dostáváme, pokud pohybujeme body v konstrukci. Zde je třeba brát v potaz skutečnost, že program vše řeší numericky a zobrazované údaje jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa. Proto někdy dochází k nepřesnostem v řádu setin.

Všechny GeoGebra soubory lze najít v podobě GeoGebra Book na internetových stránkách geogebratube.com. Do pole hledat/search zadáme Kniha lemmat (viz Obrázek 9), která se následně objeví ve výsledcích hledání, jak je naznačeno v níže uvedených obrázcích. V této složce jsou nahrány všechny konstrukce i krokované důkazy. Všechny soubory jsou volně stažitelné.

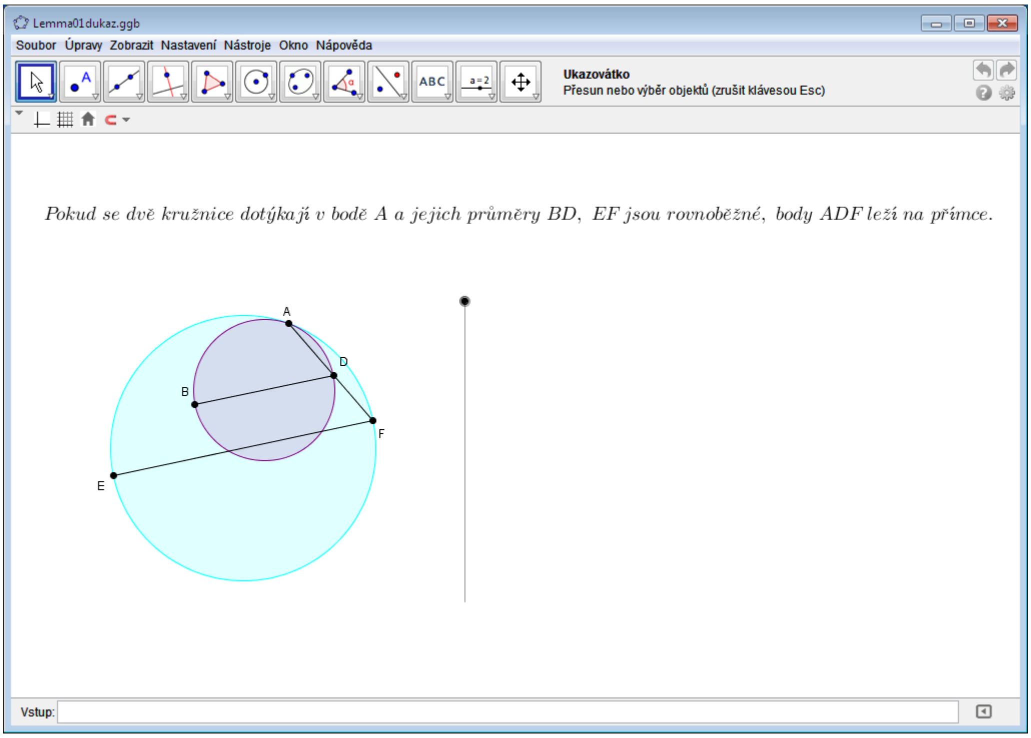


Obrázek 9 Vyhledávání na GeoGebra Tube [9]

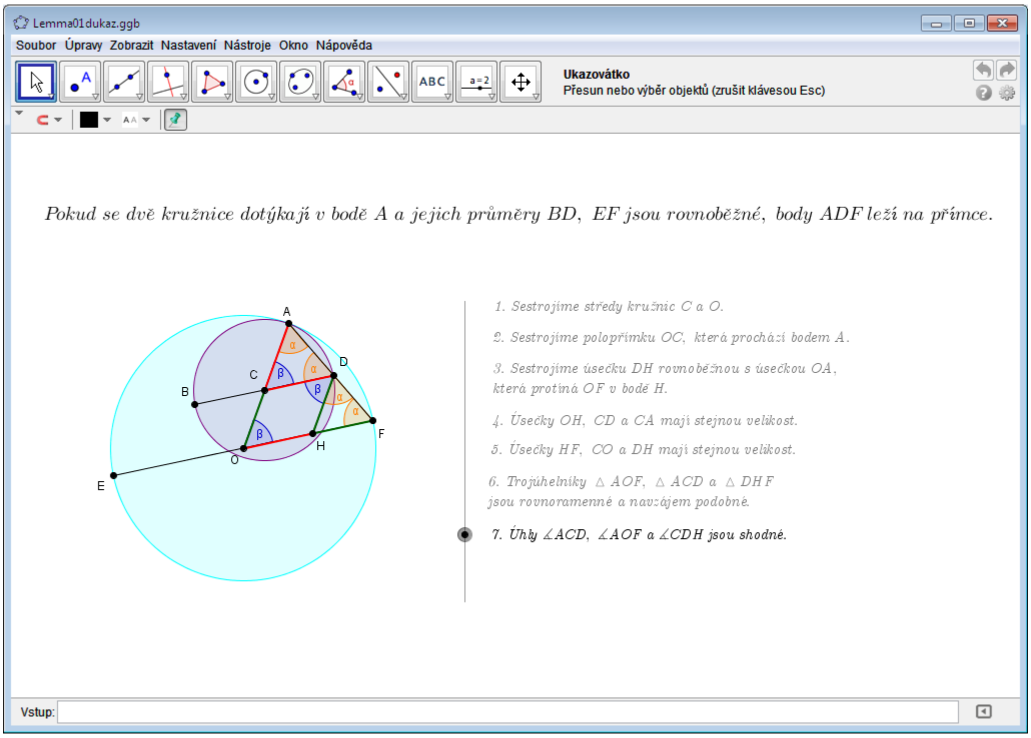
K některým lemmatům a vybraným tvrzením z Tesánkovy sbírky jsou dále vytvořeny pracovní listy včetně řešení. V těchto pracovních listech jsou žáci návodnými otázkami vedeni k důkazu příslušného tvrzení. Ke každému listu je uvedeno také jeho řešení. Pracovní listy jsou zařazeny v kapitole 6 této práce.

Ke dvanácti lemmatům jsou v programu GeoGebra vytvořeny soubory s krokovanou animací důkazu. Po otevření souboru se zobrazí pouze zadání úlohy, výchozí konstrukce a posuvník – viz Obrázek 10 na str. 18.

Pohybem posuvníku se odkrývají jednotlivé kroky důkazu, vždy spolu s příslušným komentářem. V pravé části okna je to posloupnost tvrzení, která odpovídá Archimédovým postupům při dokazování. Aktuální text má vždy černou barvu, předchozí kroky zůstávají viditelné, avšak pouze šedou barvou. V původním textu není mezi jednotlivými kroky vysvětlena úvaha, která vede od jednoho k druhému. Proto je pro usnadnění důkaz oproti originálu rozšířen o animaci v levé části okna. Ve výchozí konstrukci se postupně objevují různé vlastnosti a pomocné konstrukce, které naznačují, proč jednotlivé kroky platí.



Obrázek 10 Důkaz v programu GeoGebra



Obrázek 11 Důkaz v programu GeoGebra (kroky)

4.1.1 ZAŘAZENÍ DO VÝUKY

Každá forma zpracování daných lemmat má ve výuce jiné místo. Konstrukci v programu GeoGebra lze využít pro verifikaci jednotlivých tvrzení a také jako motivační část hodiny, kterou lze zařadit před samotným dokazováním. Dynamičnost konstrukcí navíc umožňuje žákům pozorovat vlastnosti a vztahy a také snáze porozumět zadání jednotlivých úloh. Žákům lze předložit již hotovou konstrukci, stejně tak si ji ale mohou sestrojit sami podle zadání. Další možností je také zadání pouze konstrukce bez dokazovaného tvrzení. To se mohou žáci s využitím dynamické geometrie pokusit sami objevit. Jejich motivace k jeho následnému dokázání se tak může zvýšit. Pokud má každý žák možnost pracovat samostatně, může práci přizpůsobit svému vlastnímu tempu a schopnostem. Ne každá škola samozřejmě nabízí takové možnosti. Minimálním nutným vybavením pro práci s dynamickými materiály je projektor napojený na počítač či interaktivní tabule.

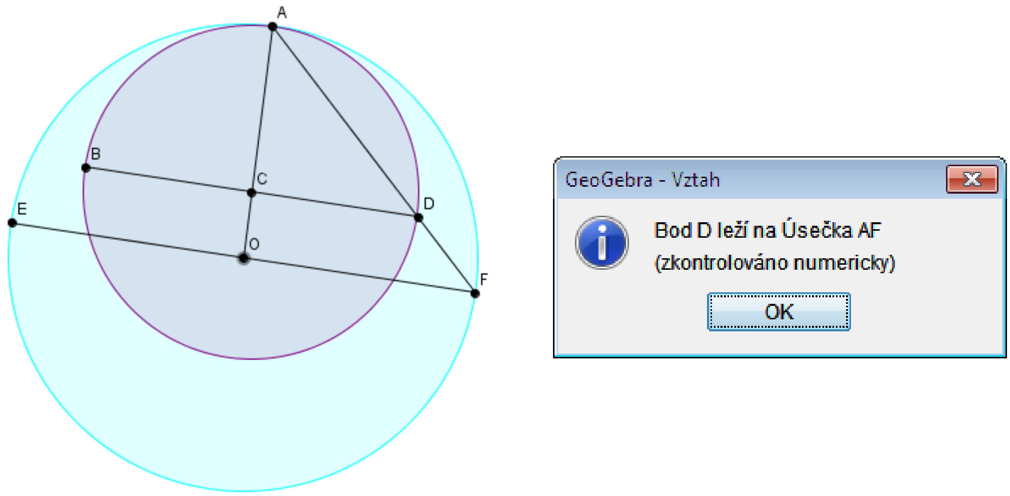
Pracovní listy slouží převážně k procvičení a aplikaci znalostí nabytých při běžných hodinách matematiky, avšak v úlohách, které jsou pro žáky neobvyklé. Většina listů totiž pracuje s jednotlivými důkazy, což je oblast matematiky, se kterou se žáci setkávají jen minimálně a v takovéto formě prakticky vůbec. Povaha některých lemmat ale přímo vybízí k tomu, aby byla žákům předložena k řešení. V pracovních listech jsou proto připraveny takové úkoly a otázky, které mají žáky dovést k důkazům příslušných tvrzení. I zde je na volbě učitele, zda nechá žáky pracovat samostatně nebo je nutné s některými kroky třídě pomoci a postupy objasnit.

Krokované konstrukce důkazů jsou sice z větší části využitelné až na střední škole, ale jejich přínos pro matematické myšlení žáků může být veliký. V každém kroku musí žáci použít své znalosti, aby odůvodnili dílčí tvrzení. Významně se zde tedy rozvíjí jejich schopnost argumentace a aplikování znalostí při řešení problému. Tento typ výukových materiálů lze opět využít jak pro samostatnou práci žáků, tak kolektivně v celé třídě.

Jednotlivá lemmata jsou systematicky rozebrána a ilustrována v následující části práce.

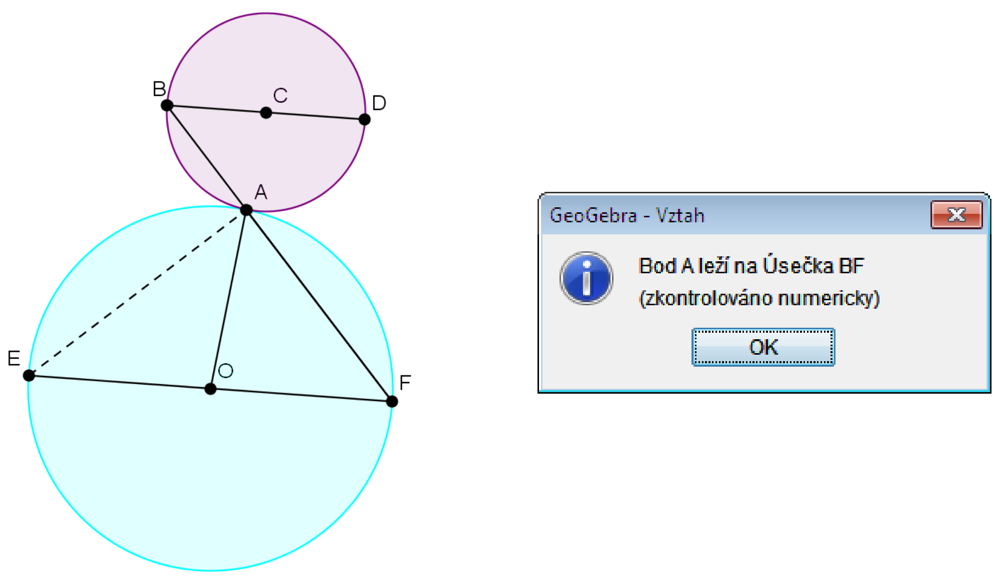
4.2 LEMMA 1

Pokud se dvě kružnice dotýkají v bodě A a jejich průměry BD, EF jsou rovnoběžné, body A, D, F leží na přímce.



Obrázek 12 Lemma 1 (verifikace – kružnice uvnitř)

Tento vztah platí také, pokud jedna kružnice leží vně druhé kružnice.



Obrázek 13 Lemma 1 (verifikace – kružnice vně)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce přímky, úsečky, rovnoběžky, dvou kružnic, které mají právě jeden společný bod.

Znalosti potřebné k důkazu: střídavé úhly, vlastnosti úhlů v trojúhelníku – součet vnitřních úhlů, vlastnosti úhlů v rovnoběžníku, podobnost trojúhelníků.

Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma01.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma01dukaz.ggb).

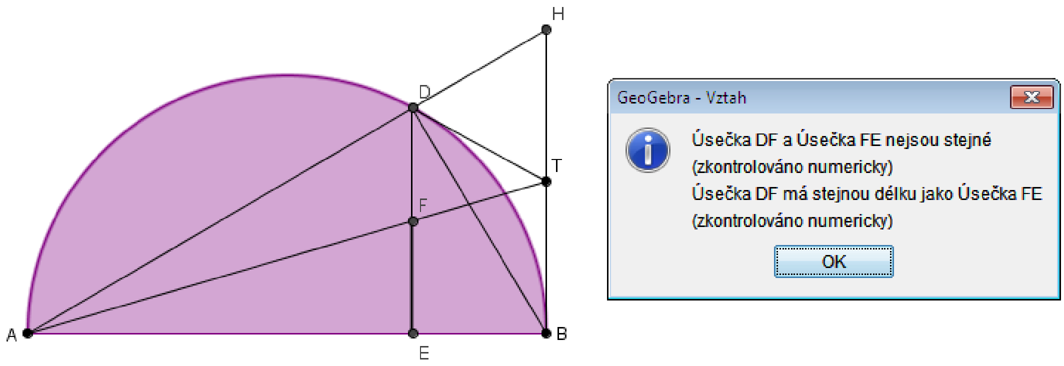
Procvičované znalosti: dvojice úhlů, úhly v trojúhelníku, podobnost trojúhelníků.

Zařazení do výuky: 8.–9. ročník.

Poznámka: Důkaz lze na střední škole provést také užitím stejnolehlosti. Střed stejnolehlosti je v obou případech v bodě dotyku kružnic.

4.3 LEMMA 2

Mějme půlkružnici nad průměrem AB s tečnami v bodě B a libovolném bodě půlkružnice D, které se protínají v bodě T. Pokud sestrojíme DE kolmo na AB a pokud se AT a DE protne v bodě F, $|DF| = |FE|$.



Obrázek 14 Lemma 2 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, tečna v bodě; přímka, kolmice bodem.

Znalosti potřebné k důkazu: tečna z bodu ke kružnici, Thaletova kružnice, podobnost trojúhelníků.

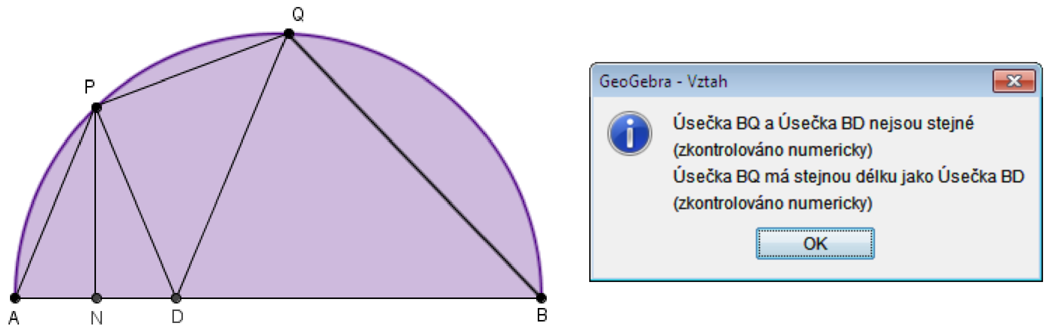
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma02.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma02dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: Thaletova kružnice, podobnost trojúhelníků.

Zařazení do výuky: 8.–9. ročník.

4.4 LEMMA 3

Mějme libovolný bod P na půlkružnici nad průměrem AB a úsečku PN kolmou na AB. Sestrojíme bod D na AB tak, že $|AD| = |ND|$. *Pokud dále sestrojíme oblouk PQ o délce oblouku PA a spojíme body B a Q, úsečky BQ a BD jsou shodné.*



Obrázek 15 Lemma 3 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, kolmice bodem, přenesení oblouku dané délky.

Znalosti potřebné k důkazu: vlastnosti úhlů v rovnoramenném trojúhelníku, vlastnosti úhlů v tětivovém čtyřúhelníku.

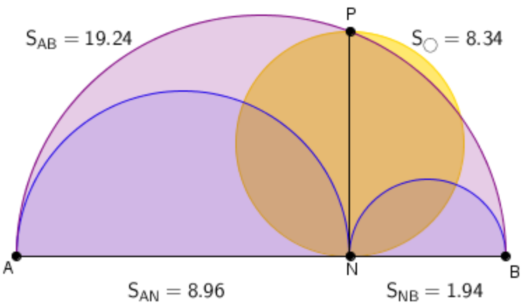
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma03.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma03dukaz.ggb), pracovní list *Rovnoramenné trojúhelníky v půlkružnici*

Procvičované znalosti: úhly v trojúhelníku a čtyřúhelníku.

Zařazení do výuky: 7.–9. ročník.

4.5 Lemma 4

Mějme půlkružnici nad průměrem AB a libovolný bod N na AB. Nad AN a NB sestrojíme opět dvě půlkružnice. Část vytyčenou třemi oblouky nazýval Archimédes arbelos = obuvnický nůž. Obsah této části je roven obsahu kružnice nad průměrem PN, kde PN je kolmice na AB z bodu N, která protíná původní půlkružnici v bodě P.



$$S_{\widehat{AB}} - (S_{\widehat{AN}} + S_{\widehat{NB}}) \stackrel{?}{=} S_{\bigcirc}$$

$$19.24 - (1.94 + 8.96) = 8.34$$

Obrázek 16 Lemma 4 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, půlkružnice s daným průměrem – střed úsečky, kolmice bodem.

Znalosti potřebné k důkazu: Pythagorova věta, úpravy výrazů včetně součtových vzorců, obsah kruhu, obsah obdélníku a trojúhelníku, (Eukleidovy věty – řešení pro SŠ).

Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma04.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma04dukaz.ggb), pracovní list *Tajemství arbelosu.*

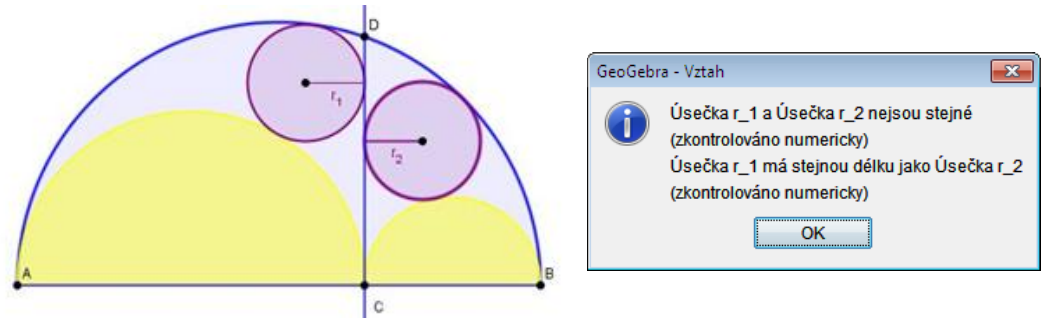
Procvičované znalosti: operace s výrazy, Pythagorova věta, (Eukleidovy věty).

Nabyté znalosti: zobecnění Pythagorovy věty.

Zařazení do výuky: 9. ročník (pracovní list), SŠ (důkaz v programu GeoGebra).

4.6 LEMMA 5

Mějme půlkružnici nad průměrem AB a libovolný bod C na AB. Sestrojíme kolmici CD na AB, která protne půlkružnici v bodě D. Nad AC a CB sestrojíme další dvě půlkružnice. Pokud nyní sestrojíme dvě kružnice vepsané, z nichž jedna se bude dotýkat úsečky CD a oblouků nad AC a AB a druhá kružnice úsečky CD a oblouků nad CB a AB, takto sestrojené kružnice jsou shodné.



Obrázek 17 Lemma 5 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, půlkružnice s daným průměrem – střed úsečky, kolmice, kružnice dané třemi body.

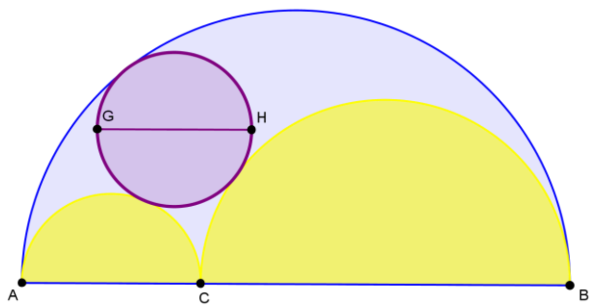
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma05.ggb)

Procvičované znalosti: Apolloniovy úlohy.

Zařazení do výuky: SŠ, VŠ.

4.7 LEMMA 6

Mějme půlkružnici nad průměrem AB. Bod C zvolíme na AB tak, aby $|AC|:|CB|$*bylo 3 : 2 nebo v jiném předem určeném poměru. Půlkružnici nad AB vepíšeme půlkružnice nad AC a CB. Sestrojíme kružnici vepsanou, která má s každým ze tří oblouků jeden bod dotyku. V jakém poměru je průměr kružnice vepsané a původní půlkružnice*$|GH| : |AB|$*?*



Obrázek 18 Lemma 6 (verifikace)

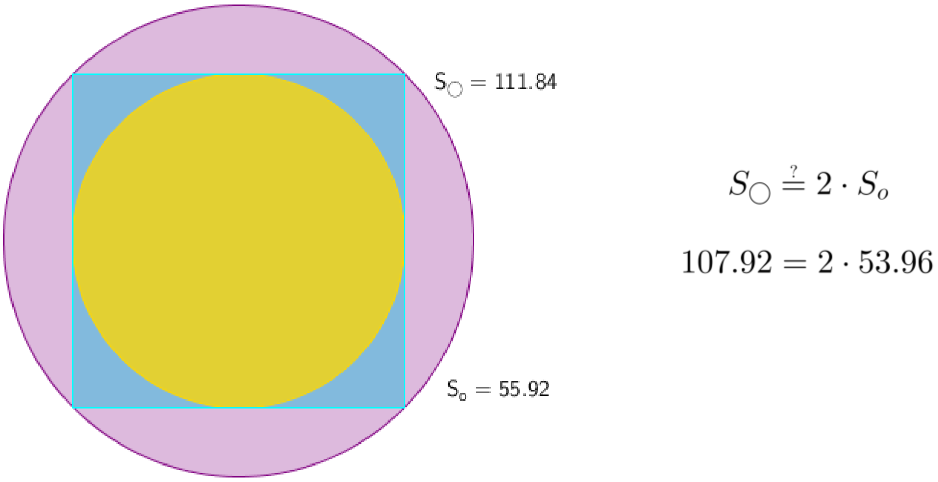
Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, půlkružnice s daným průměrem – střed úsečky, elipsy dané dvěma ohnisky a jedním bodem, kružnice dané třemi body.

Procvičované znalosti: Apolloniovy úlohy.

Zařazení do výuky: SŠ, VŠ.

4.8 LEMMA 7

Mějme kružnici opsanou a vepsanou čtverci. Obsahy jimi vymezených kruhů jsou potom v poměru 2 : 1.



Obrázek 19 Lemma 7 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce čtverce, kružnice opsaná a vepsaná čtverci.

Znalosti potřebné k důkazu: vlastnosti čtverce – délka strany, délka úhlopříčky (Pythagorova věta), obsah kruhu.

Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma07.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma07dukaz.ggb), pracovní list *Kolem dokola.*

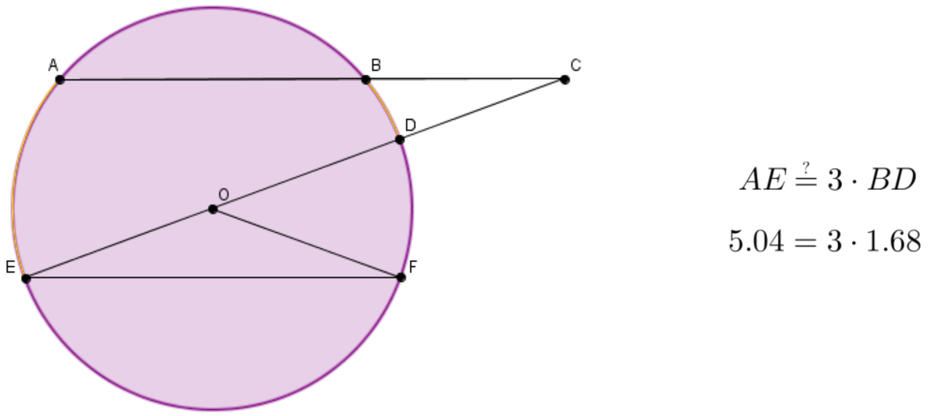
Procvičované znalosti: Pythagorova věta, obsah kruhu, úpravy výrazů.

Zařazení do výuky: 8.–9. ročník.

Poznámka: Úlohu lze rozšířit i do prostoru. Povrch koule opsané krychli je trojnásobkem povrchu vepsané koule.

4.9 LEMMA 8

Mějme libovolnou sečnu AB kružnice se středem v bodě O. Sečnu prodloužíme k bodu C tak, že BC je rovna poloměru kružnice. Sestrojíme polopřímku CO, která protne kružnici v bodech D a E. Oblouky AE a BD jsou nyní v poměru 3 : 1.



Obrázek 20 Lemma 8 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, sečny, polopřímky bodem, rovnoběžky.

Znalosti potřebné k důkazu: úhly v trojúhelníku, dvojice úhlů.

Nabyté znalosti: Archimédova metoda trisekce úhlu.

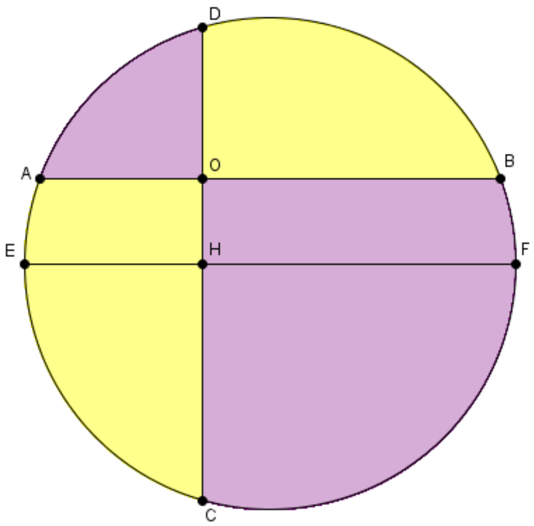
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma08.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma08dukaz.ggb), pracovní list *Trisekce úhlu aneb rozděl úhel na třetiny.*

Procvičované znalosti: vedlejší úhly, vrcholové úhly, střídavé úhly.

Zařazení do výuky: 6.–7. ročník pro zadané velikosti úhlu; 8.–9. ročník obecně.

4.10 LEMMA 9

Mějme kružnici a dvě tětivy AB, CD které jsou navzájem kolmé a jejich průsečík neleží ve středu kružnice. Potom oblouk AD + CB = oblouk AC + oblouk DB.



$$\widehat{AD} + \widehat{CB} \stackrel{?}{=} \widehat{AC} + \widehat{DB}$$

$$4.69 + 11.02 = 8.23 + 7.48$$

Obrázek 21 Lemma 9 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, tětivy, navzájem kolmých úseček.

Znalosti potřebné k důkazu: shodnost geometrických útvarů – osová souměrnost, shodné oblouky na kružnici.

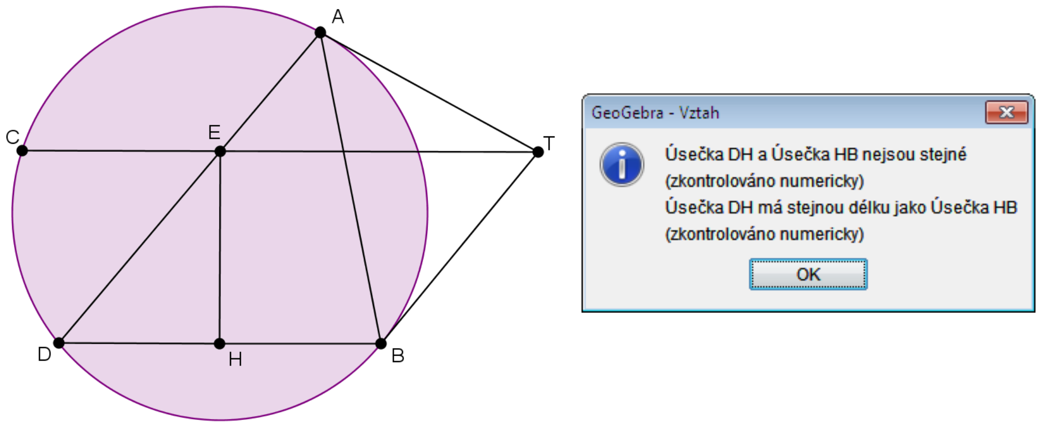
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma09.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma09dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: osová souměrnost, vlastnosti kružnice – shodnost oblouků.

Zařazení do výuky: 6.–9. ročník.

4.11 LEMMA 10

Z bodu T veďme ke kružnici tečny TA a TB a sečnu TC. Dále mějme tětivu BD rovnoběžnou s TC. Průsečík AD a TC označíme E. Sestrojíme-li nyní kolmici EH na úsečku BD, bod H je středem BD.



Obrázek 22 Lemma 10 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, tečny v bodě (tečny z bodu), sečny (z bodu), rovnoběžné a kolmé přímky.

Znalosti potřebné k důkazu: obvodový úhel, úsekový úhel, podobnost trojúhelníků.

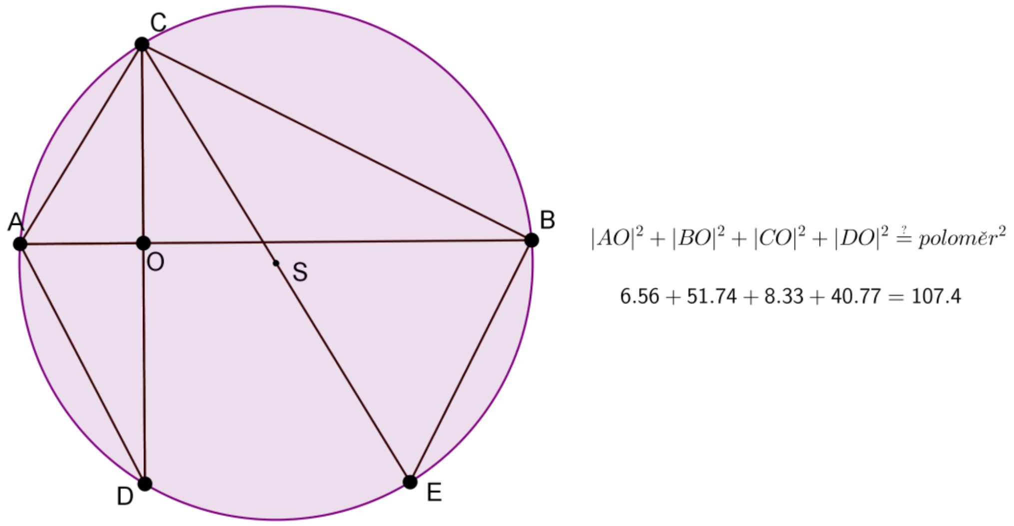
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma10.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma10dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: obvodový úhel, podobnost trojúhelníků.

Zařazení do výuky: SŠ.

4.12 LEMMA 11

Mějme kružnici a dvě tětivy AB, CD které jsou navzájem kolmé a jejich průsečík O neleží ve středu kružnice. Potom platí, že $|AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 + |DO|^2 = poloměr^2$.



Obrázek 23 Lemma 11 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, sečny, kolmice na úsečku.

Znalosti potřebné k důkazu: obvodový úhel, podobnost trojúhelníků Pythagorova věta.

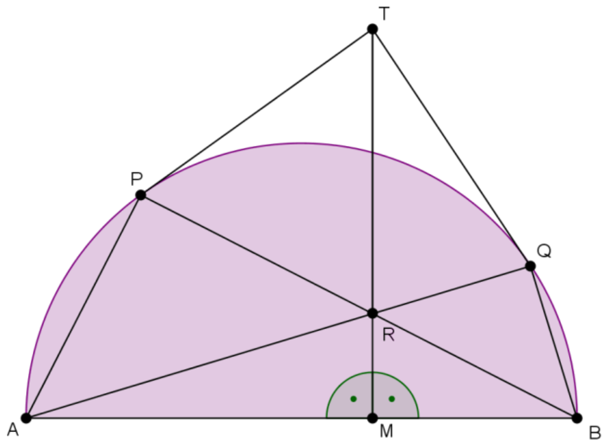
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma11.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma11dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: vlastnosti obvodového úhlu, Pythagorova věta.

Zařazení do výuky: SŠ.

4.13 LEMMA 12

Mějme půlkružnici nad průměrem AB a tečny TP, TQ z libovolného bodu T. Sestrojíme-li průsečík R polopřímek AQ a BP, TR je kolmá na AB.



Obrázek 24 Lemma 12 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, polopřímky, tečny v bodě (tečny z bodu).

Znalosti potřebné k důkazu: úsekový úhel, dvojice úhlů, vlastnosti tětivového čtyřúhelníku.

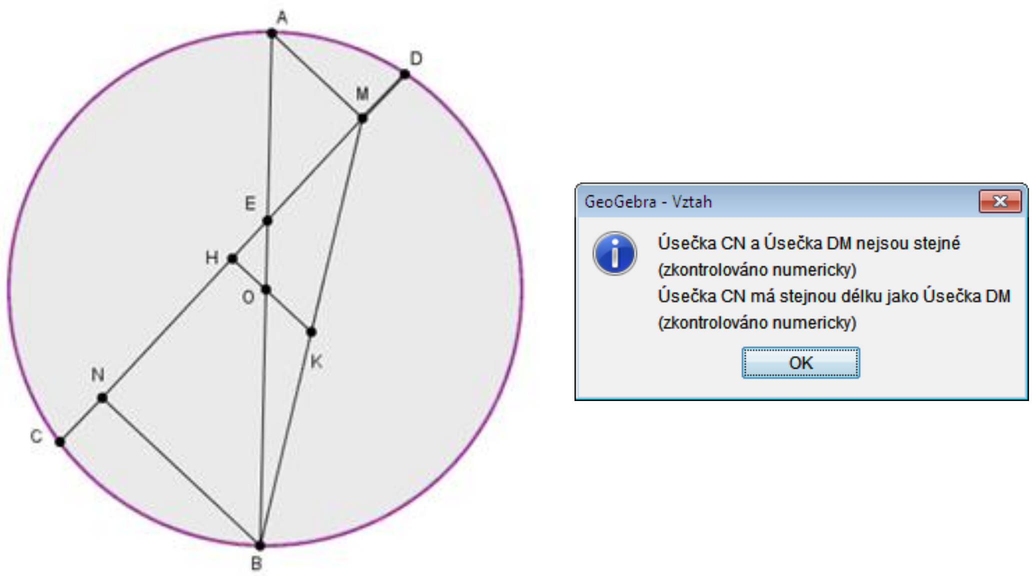
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma12.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma12dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: dvojice úhlů, podobnost trojúhelníků, vlastnosti čtyřúhelníků.

Zařazení do výuky: SŠ.

4.14 LEMMA 13

Mějme kružnici s průměrem AB a tětivu CD. Průsečík AB a CD označíme E. Pokud k tětivě CD sestrojíme kolmice AM a BN, potom $|CN| = |DM|$.



Obrázek 25 Lemma 13 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, tětivy, kolmice bodem.

Znalosti potřebné k důkazu: podobnost trojúhelníků, vlastnosti středních příček v trojúhelníku.

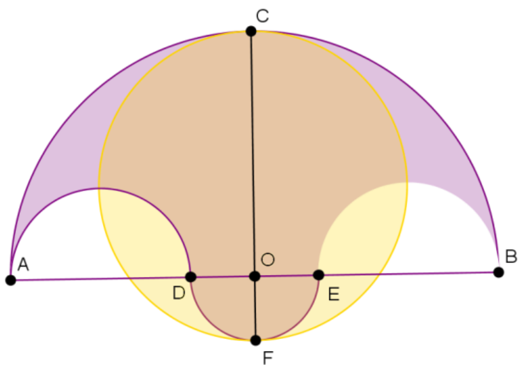
Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma13.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma13dukaz.ggb).

Procvičované znalosti: shodnost úseček, vlastnosti rovnoběžek.

Zařazení do výuky: 8.–9. ročník.

4.15 LEMMA 14

Mějme půlkružnici ABC nad průměrem AB. Na AB sestrojíme postupně body D a E tak, že $|AD| = |BE|$*. Nad průměry AD a BE sestrojíme půlkružnice směrem k bodu C a na opačnou stranu sestrojíme půlkružnici nad průměrem DE. Střed AB nazveme O a vedeme jím kolmici na AB, která protíná oblouk nad AB v bodě C a oblouk nad DE v bodě F. Obsah plochy vymezené všemi půlkružnicemi, kterou Archimédes nazýval salion, odpovídá obsahu kružnice s průměrem CF.*



$$S_{AB} + S_{CD} - (S_{AC} + S_{DB}) \stackrel{?}{=} S_{\bigcirc}$$

$$25.77 + 1.76 - (3.51 + 3.51) = 20.51$$

Obrázek 26 Lemma 14 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce půlkružnice, půlkružnice s daným průměrem, úsečky dané délky, kolmice bodem.

Znalosti potřebné k důkazu: součtové vzorce, zobecněná Pythagorova věta, Eukleidovy Základy II, Tvrzení 10[1].

Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma14.ggb), důkaz v programu GeoGebra (Lemma14dukaz.ggb).

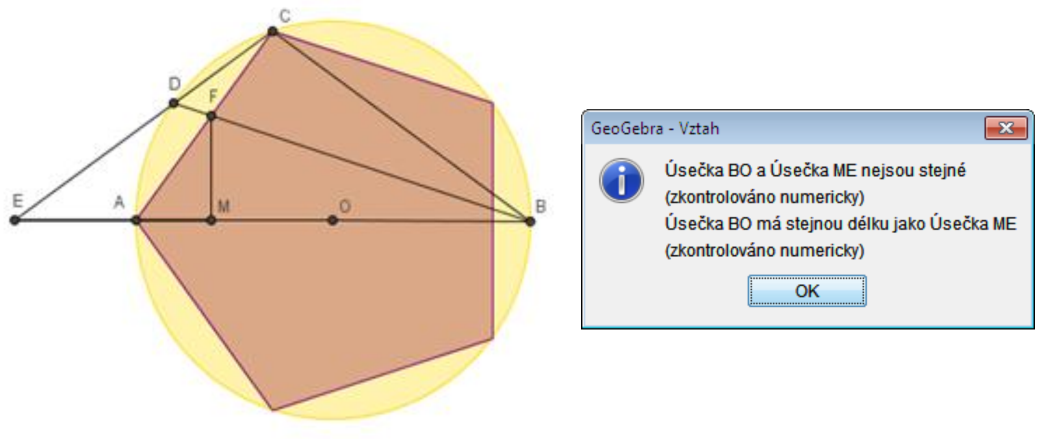
Procvičované znalosti: zobecnění Pythagorovy věty, úpravy výrazů.

Zařazení do výuky: SŠ.

[1] Eukleides ([7], 90), Tvrzení 10: *„Když se úsečka rozpůlí a připojí se k ní v přímém směru jiná, čtverce z celé s připojenou a z připojené jsou celkem dvakrát větší nežli čtverec z půlky se čtvercem z půlky a připojené v jedno vzatých.“*

4.16 LEMMA 15

Mějme kružnici s průměrem AB a stranu AC vepsaného, pravidelného pětiúhelníku. Sestrojíme bod D, který je středem oblouku nad AC. Sestrojíme bod E jako průsečík polopřímek CD a BA a bod F jako průsečík úseček AC a DB. Sestrojíme-li nyní úsečku FM kolmou na AB, EM je poloměr kružnice.



Obrázek 27 Lemma 15 (verifikace)

Znalosti potřebné ke konstrukci: konstrukce kružnice, polopřímky, kolmice bodem, pětiúhelníku vepsaného kružnici, osy úsečky – střed oblouku.

Forma výukového materiálu: verifikace v programu GeoGebra (Lemma15.ggb).

Zařazení do výuky: SŠ.

5 VYBRANÁ TVRZENÍ Z DÍLA J. TESÁNKA

Tvrzení 6

Povrch koule je roven čtyřnásobku největší z jejích kružnic.

Tvrzení 8

Obsah pláště válce opsaného kouli je roven jejímu povrchu.

Tvrzení 11

Kužel vepsaný polokouli má poloviční objem.

Znalosti potřebné k důkazům: obsah kruhu, objem krychle, síť tělesa

Forma výukového materiálu: pracovní list Archimédův náhrobek, soubor v programu GeoGebra (objemy.ggb)

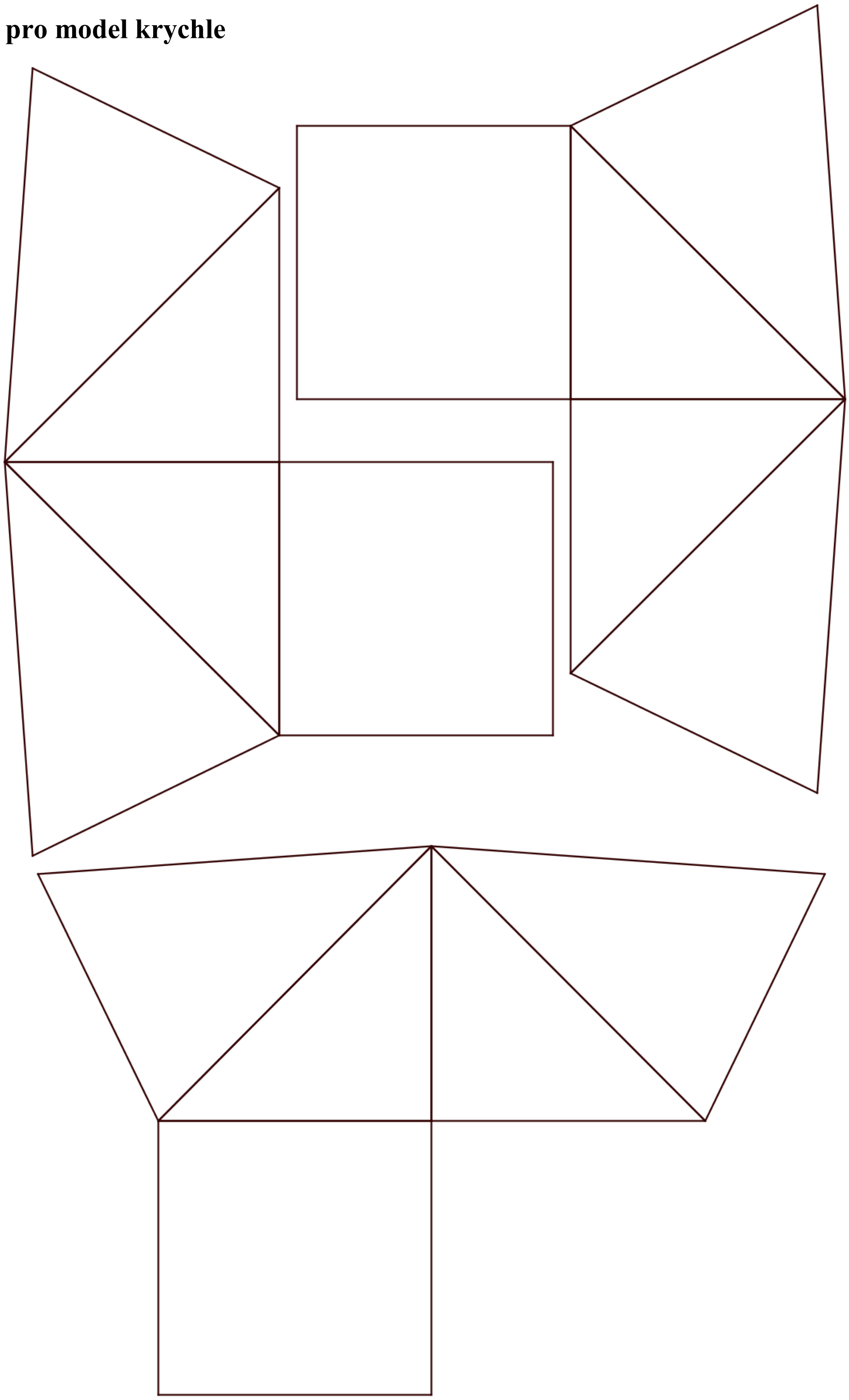
Procvičované znalosti: úpravy výrazů, vzorce pro obsah kruhu a objem hranolu

Nabyté znalosti: vzorce pro povrch a objem válce, objem jehlanu, objem kužele, povrch a objem koule

Pomůcky: tenisový míček, čtvrtka, rozkládací model krychle

Zařazení do výuky: 9. ročník

Síť pro model krychle



6 Pracovní listy pro ZŠ

Na základě uvedených tvrzení z Tesánkovy knihy a vybraných lemmat jsou zpracovány následující pracovní listy. Doporučení, v jakém ročníku pracovní listy zařadit a požadované předchozí znalosti, jsou uvedena u příslušných lemmat. Součástí listů je také jejich řešení. Časová dotace je plánována vždy na jednu vyučovací hodinu s výjimkou pracovního listu *Archimédův náhrobek*, na který jsou potřeba nejméně tři hodiny.

Seznam pracovních listů:

Rovnoramenné trojúhelníky v půlkružnici (Lemma 3)

Tajemství arbelosu (Lemma 4)

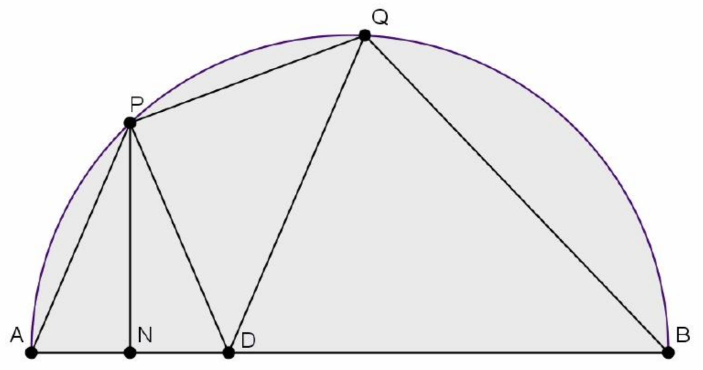
Kolem dokola (Lemma 7)

Trisekce úhlu aneb rozděl úhel na třetiny (Lemma 8)

Archimédův náhrobek (Tvrzení 6, Tvrzení 8, Tvrzení 11)

Rovnoramenné trojúhelníky v půlkružnici

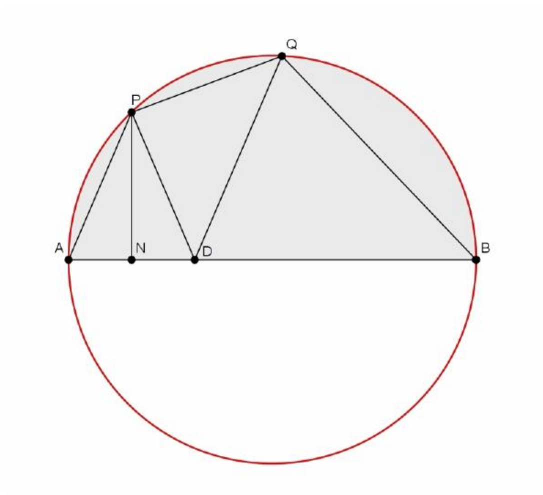
Tvrzení: *Mějme libovolný bod P na půlkružnici nad průměrem AB a úsečku PN kolmou na AB. Sestrojíme bod D na AB tak, že AN = ND. Pokud dále sestrojíme oblouk PQ o délce oblouku PA a spojíme body B a Q, úsečky BQ a BD jsou shodné.*



1. V obrázku vždy vyznač stejnou barvou shodné objekty (úsečky, úhly, …). Svá tvrzení zdůvodni.

Vlastnost (shodné objekty)	Zdůvodnění

2. Ze zadání plyne, že čtyřúhelníku _ABQP_ lze opsat kružnici. Takový čtyřúhelník nazýváme tětivový. V takovém čtyřúhelníku platí, že součet protějších úhlů je 180°. Označ tyto dvojice opět stejnou barvou.



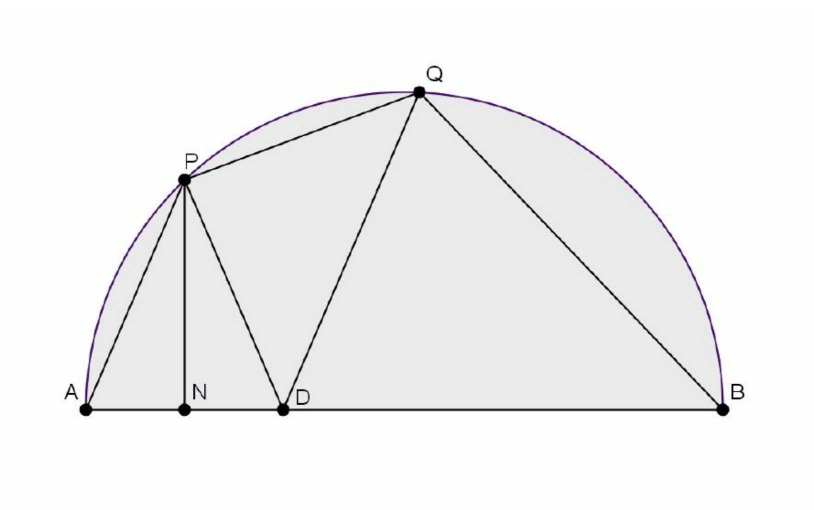
3. $\sphericalangle PAD + \sphericalangle PQB$ je tedy 180°. Vyjádři velikost úhlů $\sphericalangle QDB$ a $\sphericalangle BQD$. Co pro tyto úhly platí?

4. Co z toho vyplývá pro úsečky _DB_, _QB_?

Vlastnost	Zdůvodnění

Rovnoramenné trojúhelníky v půlkružnici – řešení

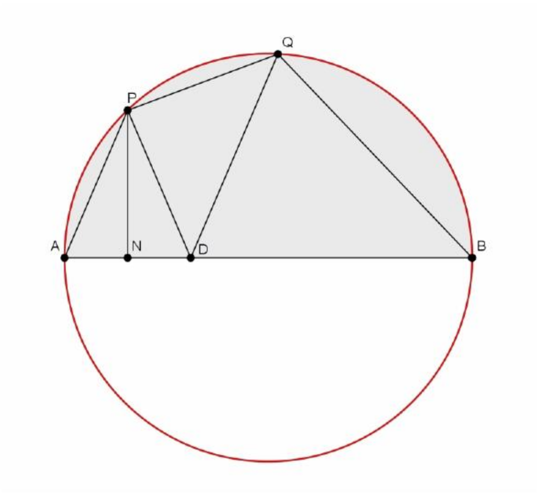
Tvrzení: *Mějme libovolný bod P na půlkružnici nad průměrem AB a úsečku PN kolmou na AB. Sestrojíme bod D na AB tak, že AN = ND. Pokud dále sestrojíme oblouk PQ o délce oblouku PA a spojíme body B a Q, úsečky BQ a BD jsou shodné.*



1. V obrázku vždy vyznač stejnou barvou shodné objekty (úsečky, úhly, …). Svá tvrzení zdůvodni.

Vlastnost (shodné objekty)	Zdůvodnění
$\|AP\|=\|PQ\|$	Oblouky nad *AP* a *PQ* jsou shodné.
$\|AP\|=\|PD\|$	Trojúhelník *ADP* je rovnoramenný.
$\measuredangle PAD = \measuredangle ADP$	Trojúhelník *ADP* je rovnoramenný.
$\measuredangle PDQ = \measuredangle PQD$	Trojúhelník *PDQ* je rovnoramenný.

2. Ze zadání plyne, že čtyřúhelníku _ABQP_ lze opsat kružnici. Takový čtyřúhelník nazýváme tětivový. V takovém čtyřúhelníku platí, že součet protějších úhlů je 180°. Označ tyto dvojice opět stejnou barvou.



3. $\sphericalangle PAD + \sphericalangle PQB$ je tedy 180°. Vyjádři velikost úhlů $\sphericalangle QDB$ a $\sphericalangle BQD$. Co pro tyto úhly platí?

$\sphericalangle PAD + \sphericalangle PQB = 180°$, $\sphericalangle PAD = \sphericalangle ADP$ a $\sphericalangle ADP + \sphericalangle PDB = 180°$, proto $\sphericalangle PDB = \sphericalangle PQB$.

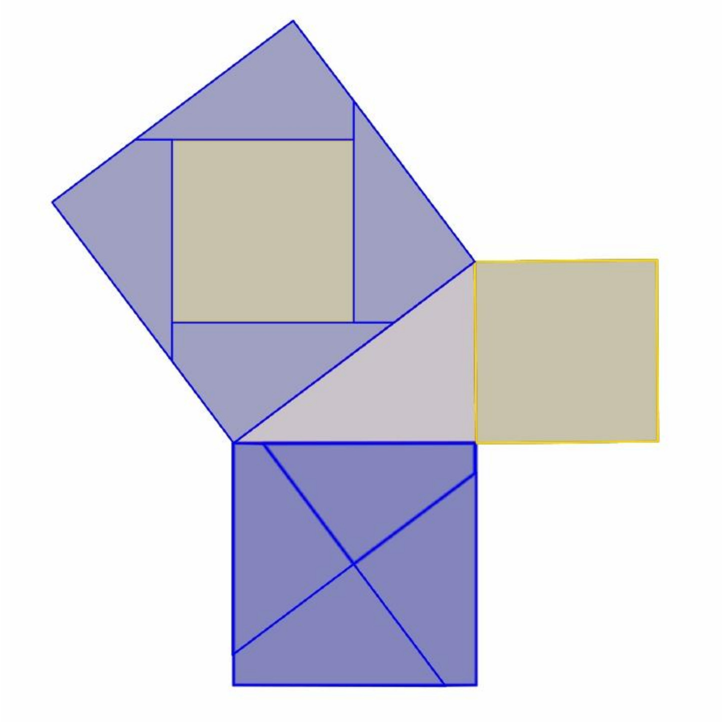
Zároveň $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle PQD$ a proto i $\boldsymbol{\sphericalangle BQD = \sphericalangle QDB}$.

4. Co z toho vyplývá pro úsečky _DB_, _QB_?

Vlastnost	Zdůvodnění
$\lvert DB \rvert = \lvert QB \rvert$	Trojúhelník QDB je rovnoramenný

Tajemství arbelosu

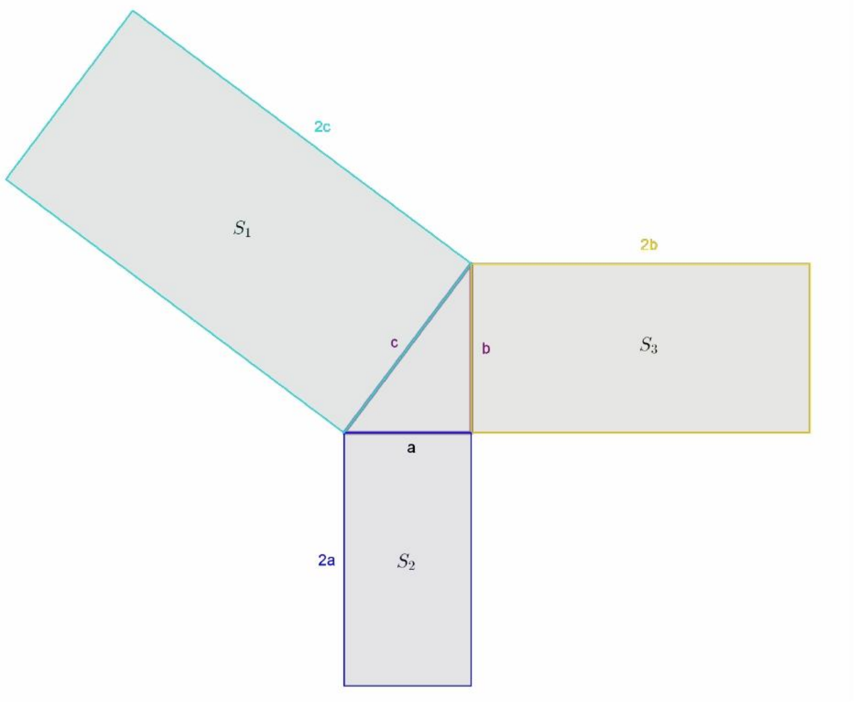
1. Uvedený obrázek znázorňuje princip Pythagorovy věty. Zapiš její plné znění.



Pythagorova věta:

2. Pokud nebudeme nad stranami trojúhelníka sestrojovat čtverce ale jiné útvary, bude tento vztah platit pořád? Ověř to pro následující obrázky.

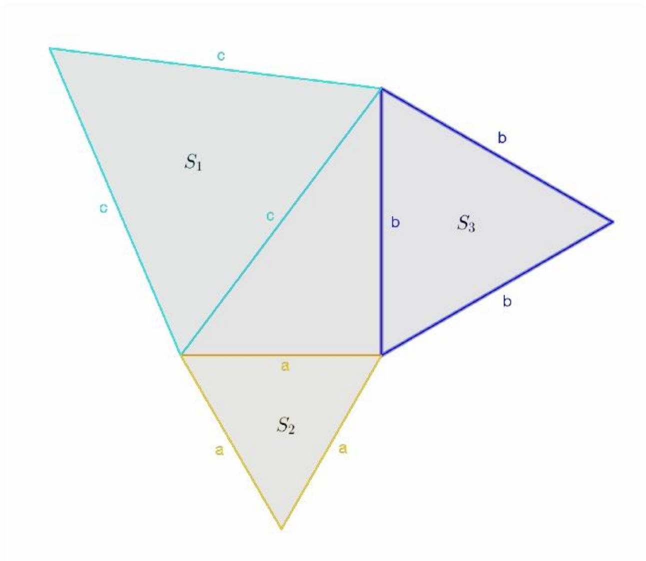
I.



S_1 = S_2 = S_3 =

Zapiš vztah mezi S_1, S_2, S_3.

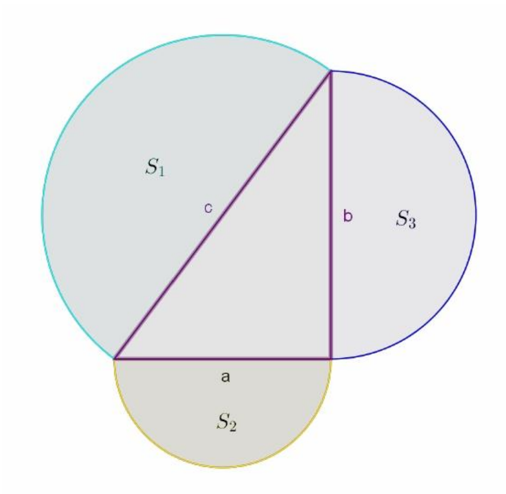
II.



S_1 = S_2 = S_3 =

Zapiš vztah mezi S_1, S_2, S_3.

III.

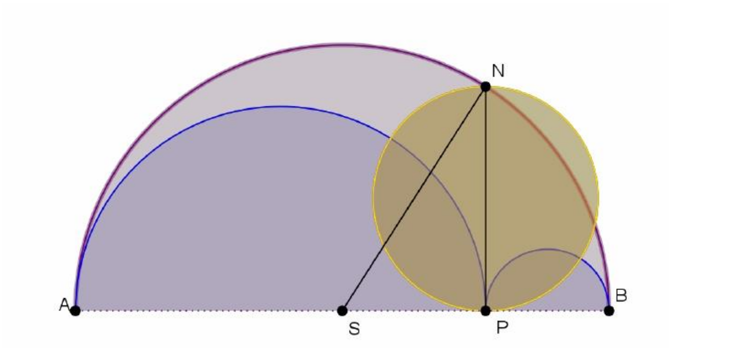


S_1 = **S_2 =** **S_3 =**

Zapiš vztah mezi S_1, S_2, S_3.

3. **Pythagorova věta tedy neplatí jen pro čtverce, ale i pro jakékoliv jiné, navzájem podobné útvary sestrojené nad jednotlivými stranami pravoúhlého trojúhelníku. Nyní můžeš dokázat následující Archimédovo tvrzení:**

Tvrzeni: *Mějme půlkružnici nad průměrem AB a libovolný bod P na AB. Nad AP a PB sestrojíme opět dvě půlkružnice. Část vytyčenou třemi oblouky nazýval Archimédes arbelos = obuvnický nůž. Obsah této části je roven obsahu kružnice nad průměrem PN, kde PN je kolmice na AB z bodu P, která protíná původní půlkružnici v bodě N.*



4. **Označ průměr největší půlkružnice *d* a průměry zbylých dvou půlkružnic postupně *a* a *d-a*. Bod *S* je střed největší z půlkružnic. Jaká je velikost úseček *SP* a *SN*? Vyjádři velikosti pomocí *a* a *d*.**

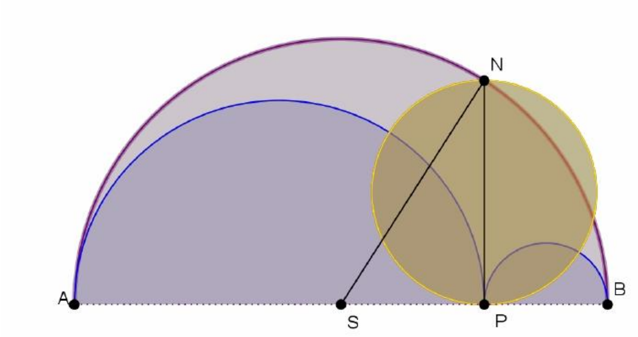
   $|SP| =$

   $|SN| =$

5. **Trojúhelník *SPN* je pravoúhlý. Jaká je tedy velikost úsečky *PN*?**

   $|PN| =$

6. Nyní můžeme dokázat, že obsah arbelosu je roven obsahu kružnice s průměrem *PN*. Stejně jako u Pythagorovy věty zde platí, že pokud bude dokazovaný vztah platit pro obsahy čtverců, bude platit i pro půlkružnice.



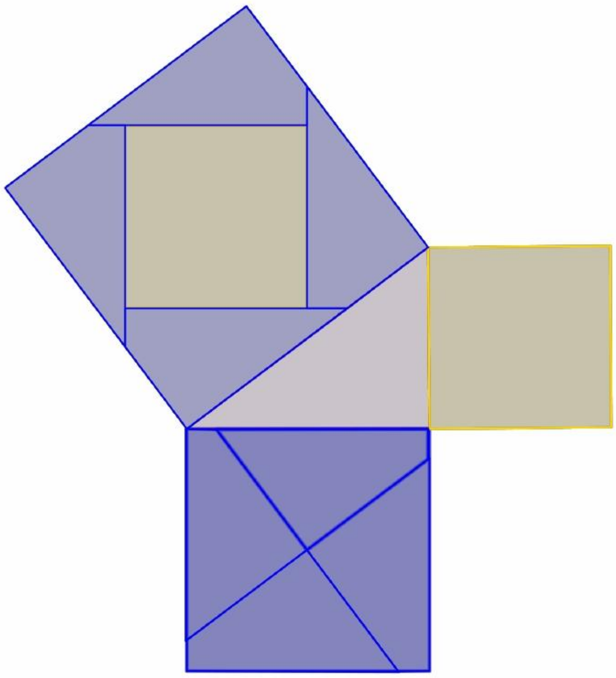
$S_{kružnice} = 2 \cdot S_{\underset{PN}{\frown}} \approx 2 \cdot S_{\underset{PN}{\square}} =$

$S_{arbelos} = S_{\underset{AB}{\frown}} - S_{\underset{AP}{\frown}} - S_{\underset{PB}{\frown}} \approx S_{\underset{AB}{\square}} - S_{\underset{AP}{\square}} - S_{\underset{PB}{\square}} =$

7. Na závěr vyjádři vztah pro obvod arbelosu. V jakém poměru je délka horního okraje ku délce dolního okraje arbelosu?

Tajemství arbelosu – řešení

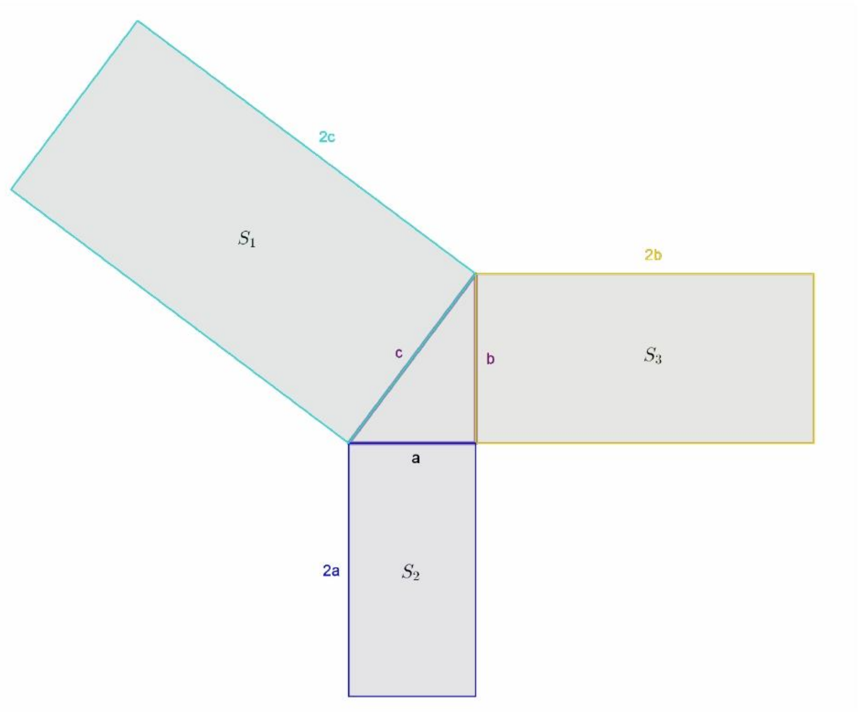
1. Uvedený obrázek znázorňuje princip Pythagorovy věty. Zapiš její plné znění.



Pythagorova věta: V pravoúhlém trojúhelníku platí, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami je roven obsahu čtverce nad přeponou.

2. **Pokud nebudeme nad stranami trojúhelníka sestrojovat čtverce ale jiné útvary, bude tento vztah platit pořád? Ověř to pro následující obrázky.**

I.



$S_1 = 2 \cdot c^2$ $S_2 = 2 \cdot a^2$ $S_3 = 2 \cdot b^2$

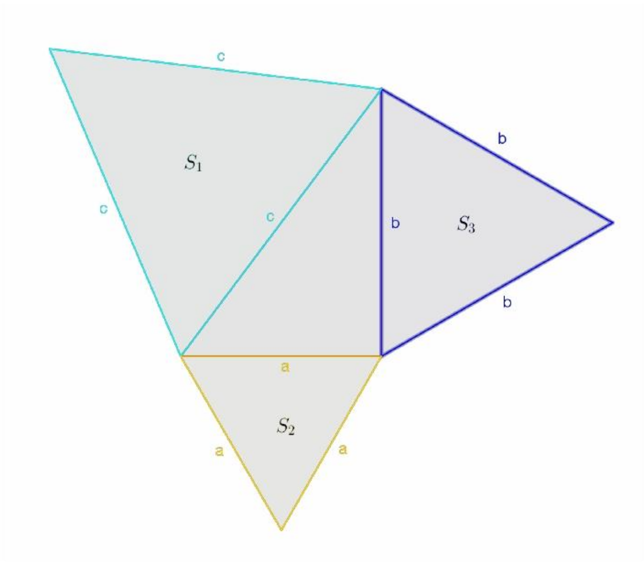
$$S_1 \stackrel{?}{=} S_2 + S_3$$

$$2 \cdot c^2 \stackrel{?}{=} 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$$

$$2 \cdot c^2 \stackrel{?}{=} 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

$$c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$$

II.



$S_1 = \frac{c}{2} \cdot v_c$ $\quad$ $v_c = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$ $\quad$ $S_1 = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2$

$S_2 = \frac{a}{2} \cdot v_a$ $\quad$ $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ $\quad$ $S_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

$S_3 = \frac{b}{2} \cdot v_b$ $\quad$ $v_b = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$ $\quad$ $S_3 = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2$

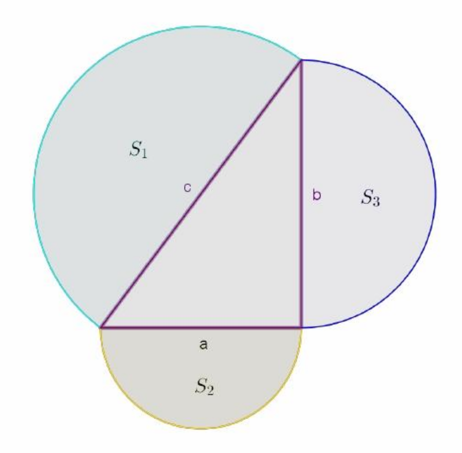
$$S_1 \stackrel{?}{=} S_2 + S_3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (a^2 + b^2)$$

$$c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$$

III.



$S_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}$ $S_2 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}$ $S_3 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}$

$$S_1 \overset{?}{=} S_2 + S_3$$

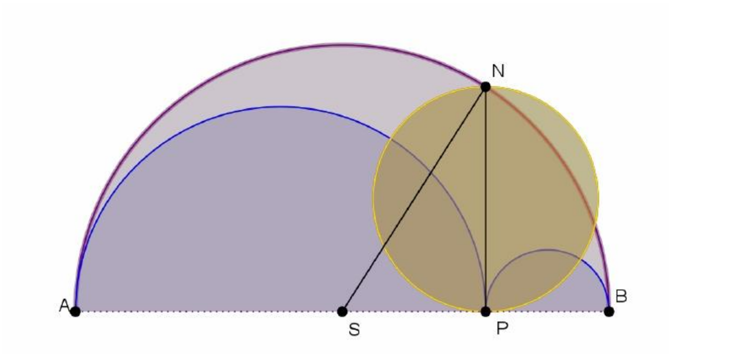
$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} \overset{?}{=} \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot c^2 \overset{?}{=} \frac{\pi}{2} \cdot (a^2 + b^2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3. Pythagorova věta tedy neplatí jen pro čtverce, ale i pro jakékoliv jiné, navzájem podobné útvary sestrojené nad jednotlivými stranami pravoúhlého trojúhelníku. Nyní můžeš dokázat následující Archimédovo tvrzení:

Tvrzeni: *Mějme půlkružnici nad průměrem AB a libovolný bod P na AB. Nad AP a PB sestrojíme opět dvě půlkružnice. Část vytyčenou třemi oblouky nazýval Archimédes arbelos = obuvnický nůž. Obsah této části je roven obsahu kružnice nad průměrem PN, kde PN je kolmice na AB z bodu P, která protíná původní půlkružnici v bodě N.*



4. Označ průměr největší půlkružnice *d* a průměry zbylých dvou půlkružnic postupně *a* a *d-a*. Bod *S* je střed největší z půlkružnic. Jaká je velikost úseček *SP* a *SN*? Vyjádři velikosti pomocí *a* a *d*.

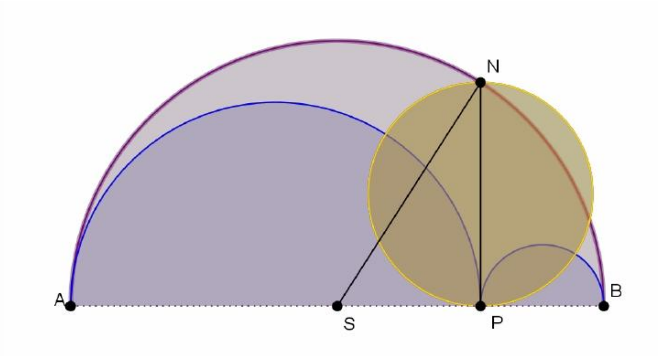
$$|SP| = a - \frac{d}{2}$$

$$|SN| = \frac{d}{2}$$

5. Trojúhelník *SPN* je pravoúhlý. Jaká je tedy velikost úsečky *PN*?

$$|PN| = \sqrt{-a^2 + a \cdot d}$$

6. **Nyní můžeme dokázat, že obsah arbelosu je roven obsahu kružnice s průměrem *PN*. Stejně jako u Pythagorovy věty zde platí, že pokud bude dokazovaný vztah platit pro obsahy čtverců, bude platit i pro půlkružnice.**



$$S_{kružnice} = 2 \cdot S_{\overset{\frown}{PN}} \approx 2 \cdot S_{\overset{\square}{PN}} = \boldsymbol{2 \cdot (-a^2 + a \cdot d)}$$

$$S_{arbelos} = S_{\overset{\frown}{AB}} - S_{\overset{\frown}{AP}} - S_{\overset{\frown}{PB}} \approx S_{\overset{\square}{AB}} - S_{\overset{\square}{AP}} - S_{\overset{\square}{PB}} = d^2 - a^2 - (d-a)^2$$
$$= \boldsymbol{2 \cdot (-a^2 + a \cdot d)}$$

$$\boldsymbol{S_{kružnice} = S_{arbelos}}$$

7. **Na závěr vyjádři vztah pro obvod arbelosu. V jakém poměru je délka horního okraje ku délce dolního okraje arbelosu?**

$$\boldsymbol{o_{\overset{\frown}{AB}} = \pi \cdot d}$$

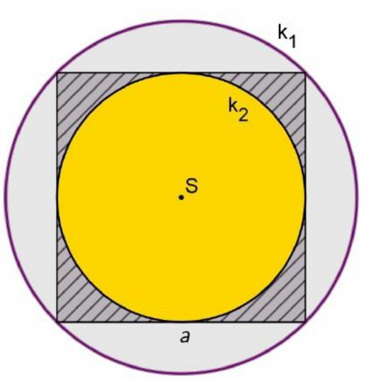
$$\boldsymbol{o_{\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PB}} = \pi \cdot a + \pi \cdot (d - a) = \pi \cdot (a + d - a) = \pi \cdot d}$$

$$\boldsymbol{o_{\overset{\frown}{AB}} = o_{\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PB}}}$$

$$\boldsymbol{o_{arbelos} = 2 \cdot \pi \cdot d}$$

Kolem dokola

***Tvrzení**: Mějme kružnici opsanou a vepsanou čtverci. Obsahy jimi vymezených kruhů jsou potom v poměru 2:1.*



1. **Jaký je poloměr kružnic vzhledem ke straně čtverce? Vyjádři poloměry pomocí strany čtverce *a*.**

r_1=
r_2=

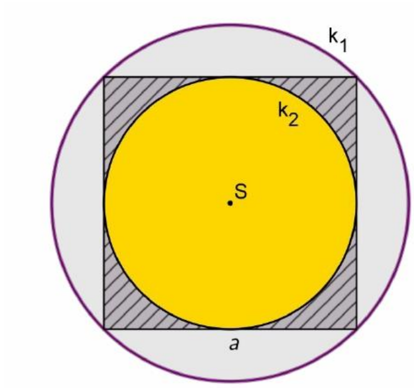
2. **Vyjádři obsahy obou kruhů. V jakém jsou poměru?**

S_1 =
S_2 =

S_1 : S_2=

Kolem dokola - řešení

Tvrzení: *Mějme kružnici opsanou a vepsanou čtverci. Obsahy jimi vymezených kruhů jsou potom v poměru 2:1.*



1. Jaký je poloměr kružnic vzhledem ke straně čtverce? Vyjádři poloměry pomocí strany čtverce *a*.

$r_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$
$r_2 = \dfrac{a}{2}$

2. Vyjádři obsahy obou kruhů. V jakém jsou poměru?

$S_1 = \dfrac{\pi \cdot a^2}{2}$
$S_2 = \dfrac{\pi \cdot a^2}{4}$
$S_1 : S_2 = 2:1$

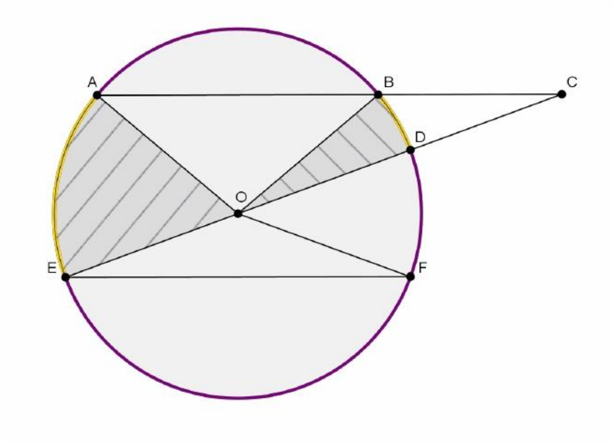
Trisekce úhlu aneb rozděl úhel na třetiny

I. Narýsuj libovolný úhel α a rozděl ho na dvě stejné části.

II. Narýsuj libovolný úhel β a rozděl ho na tři stejné části

Rozdělit libovolný úhel na tří stejné části jen za pomoci pravítka a kružítka nelze. Přesto lidé i dnes hledají různé jiné způsoby, jak trisekci provést. Archimédes například objevil metodu pro trisekci úhlu, ke které potřebuje kromě kružítka a pravítka jen proužek papíru. Jeho metoda je založena na principu následující úlohy.

Tvrzení: *Mějme libovolnou sečnu AB kružnice se středem v bodě O. Sečnu prodloužíme k bodu C tak, že BC je rovna poloměru kružnice. Sestrojíme polopřímku CO, která protne kružnici v bodech D a E. Z bodu E sestrojíme rovnoběžku EF, která protne kružnici v bodě F. Oblouk AE má trojnásobně větší délku než oblou BD.*



1. **Pokud má být oblouk *AE* trojnásobkem *BD* a oba oblouky leží na stejné kružnici, co platí pro velikosti úhlů ∡ *AOE* a ∡ *BOD*?**

2. **Vyznač v obrázku červeně všechny úsečky, jejichž délka je rovna poloměru kružnice.**

3. **Úhel ∡ *BOD* označ zeleně a pojmenuj α. Které další úhly mají stejnou velikost? Označ je také α.**

4. Vyjádři velikost úhlu ∡ *EOF* pomocí úhlu *α*?

∡ ***EOF*** **=**

5. Body *E, O, D* leží na přímce a velikost ∡ *EOF* již známe. Jaká je velikost ∡ *FOD*?

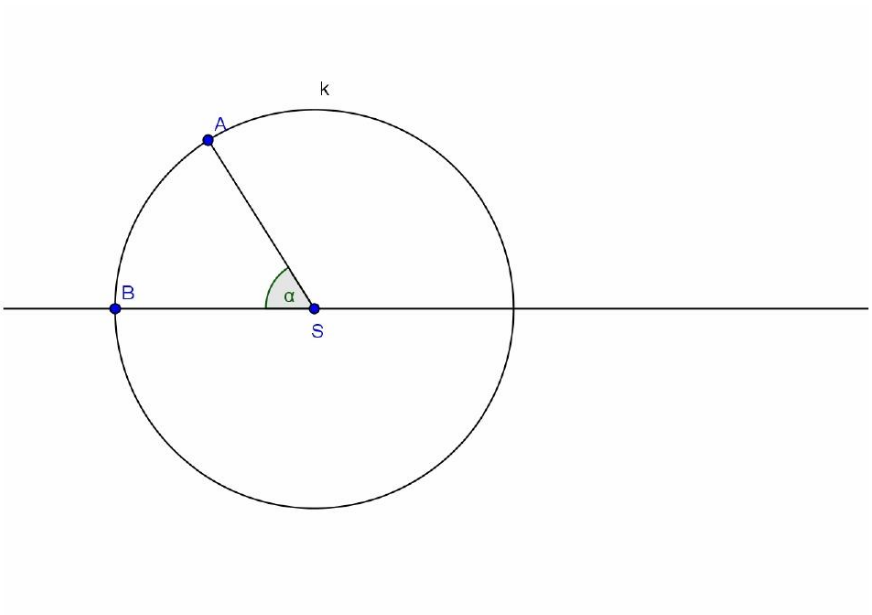
∡ ***FOD*** **=**

6. Úhel ∡ *AOE* je shodný s ∡ *BOF*. Jaká je velikost ∡*AOE*?

∡ ***AOE*** **=**

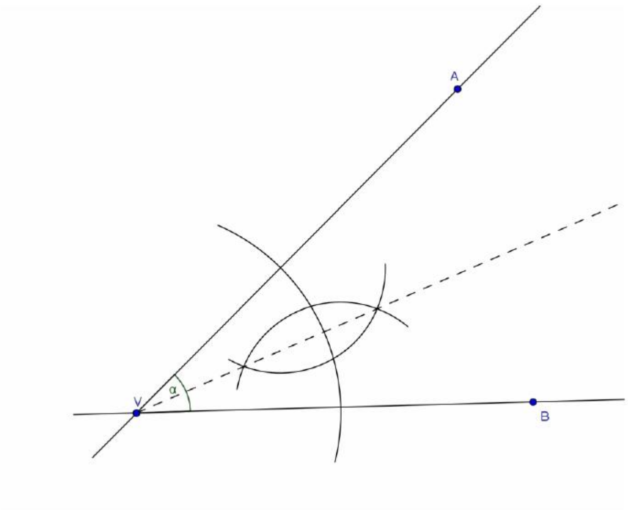
7. Zapiš znovu velikosti úhlů ∡ *AOE* a ∡ *BOD*. Co pro ně platí? Co vyplývá pro oblouky *AE* a *BD*?

8. Nyní se pokus sestrojit úhel třikrát menší než úhel *α* jen pomocí pravítka a proužku papíru, na který si naneseš poloměr kružnice *k*.



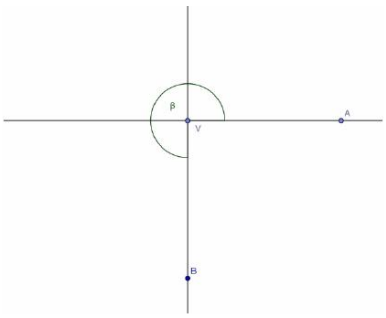
Trisekce úhlu aneb rozděl úhel na třetiny – řešení

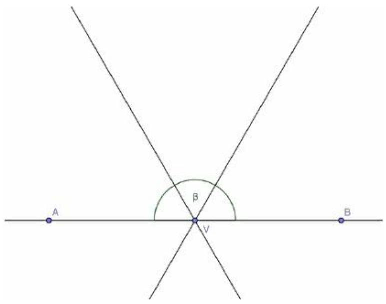
I. Narýsuj libovolný úhel α a rozděl ho na dvě stejné části.



II. Narýsuj libovolný úhel β a rozděl ho na tři stejné části

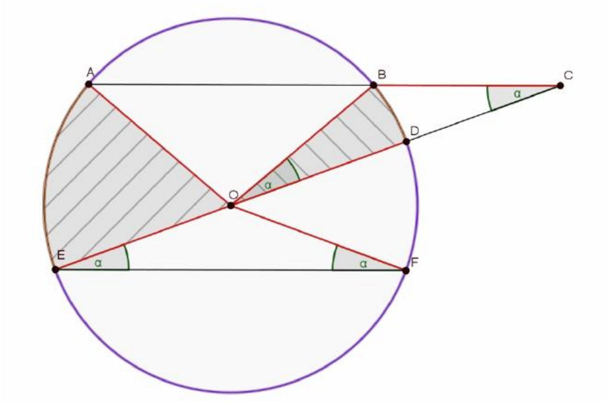
Řešitelné jen pro některé konkrétní velikosti, například 270°, 180°.





Rozdělit libovolný úhel na tří stejné části jen za pomoci pravítka a kružítka nelze. Přesto lidé i dnes hledají různé jiné způsoby, jak trisekci provést. Archimédes například objevil metodu pro trisekci úhlu, ke které potřebuje kromě kružítka a pravítka jen proužek papíru. Jeho metoda je založena na principu následující úlohy.

Tvrzení: *Mějme libovolnou sečnu AB kružnice se středem v bodě O. Sečnu prodloužíme k bodu C tak, že BC je rovna poloměru kružnice. Sestrojíme polopřímku CO, která protne kružnici v bodech D a E. Z bodu E sestrojíme rovnoběžku EF, která protne kružnici v bodě F. Oblouk AE má trojnásobně větší délku než oblou BD.*



1. **Pokud má být oblouk *AE* trojnásobkem *BD* a oba oblouky leží na stejné kružnici, co platí pro velikosti úhlů ∡ *AOE* a ∡ *BOD*?**

Úhel ∡ AOE je trojnásobkem úhlu ∡BOD.

2. **Vyznač v obrázku červeně všechny úsečky, jejichž délka je rovna poloměru kružnice.**

3. **Úhel ∡ *BOD* označ zeleně a pojmenuj *α*. Které další úhly mají stejnou velikost? Označ je také *α*.**

4. Vyjádři velikost úhlu $\measuredangle$ *EOF* pomocí úhlu *α*?

$\measuredangle EOF = 180° - 2 \cdot \alpha$

5. Body *E, O, D* leží na přímce a velikost $\measuredangle$ *EOF* již známe. Jaká je velikost $\measuredangle$*FOD*?

$\measuredangle FOD = 2 \cdot \alpha$

6. Úhel $\measuredangle$ *AOE* je shodný s $\measuredangle$ *BOF*. Jaká je velikost $\measuredangle$*AOE*?

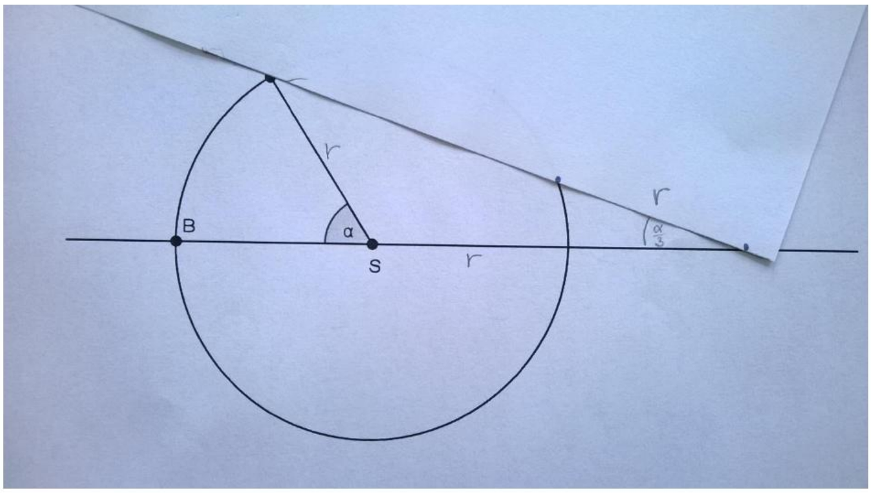
$\measuredangle AOE = 3 \cdot \alpha$

7. Zapiš znovu velikosti úhlů $\measuredangle$ *AOE* a $\measuredangle$ *BOD*. Co pro ně platí? Co vyplývá pro oblouky *AE* a *BD*?

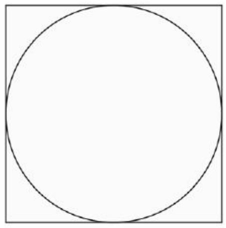
$$\measuredangle AOE = 3 \cdot \measuredangle BOD$$

$$AE = 3 \cdot BD$$

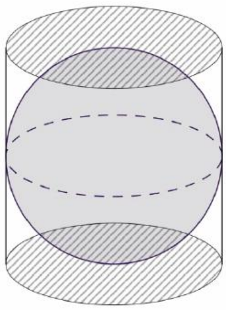
8. Nyní se pokus sestrojit úhel třikrát menší než úhel α jen pomocí pravítka a proužku papíru, na který si naneseš poloměr kružnice *k*.



Archimédův náhrobek



Na obrázku výše vidíme na první pohled čtverec opsaný kružnici. Pro Archiméda ale představoval něco jiného. Byl pro něj dokonce tak důležitý, že si ho nechal vytesat na náhrobní kámen a tento obrazec se tak stal jeho symbolem. Co pro něj tedy představoval?



Jedná se o válec opsaný kouli. Jak takový válec vůbec sestrojit?

1. **Tenisový míč má průměr přibližně 65 mm. Jaké budou nejmenší možné rozměry válcové krabičky, do níž se tenisový míč vejde?**

průměr podstavy =

výška válce =

2. Vypočítej výšku pláště d a délku pláště l. Zaokrouhli nahoru na celé milimetry. Narýsuj síť a válec sestroj. Kolik budeš potřebovat papíru na tuto síť?

Náčrtek sítě:

Rozměry pláště:

Obsah sítě:

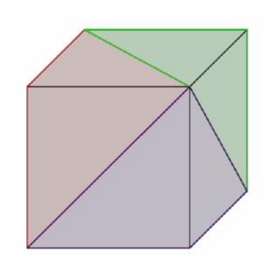
3. Síť vystřihni a vyrob krabičku. Nezapomeň na záložky pro slepení. Ověř, zda se míček do krabičky vejde.

Pro tuto kouli i jí vepsaný válec platí několik zajímavých vlastností, které objevil právě Archimédes. Jedna z nich se týká objemů těchto těles.

4. Objem válce o průměru podstavy *d* i výšce *d* vypočítáme snadno. Vznikne naskládáním *d* kruhových podstav na sebe. Jaký je tedy vztah pro objem válce?

Objem válce =

5. Pro odvození objemu koule potřebujeme znát vztah pro objem kužele. Ten můžeme zjistit ze vztahu pro objem jehlanu. K tomu nám může být nápomocný následující model krychle.



Krychli můžeme rozříznout na 3 shodné jehlany s čtvercovou podstavou. Jaký je tedy objem jednotlivých jehlanů, je-li délka hrany krychle a?

Objem jehlanu =

6. Stejným způsobem můžeme rozdělit také jakýkoliv hranol. Jaký bude objem jehlanu s podstavou o rozměrech *a* a *b*, který vznikne při rozřezání kvádru o rozměrech *a, b, c*?

Objem jehlanu =

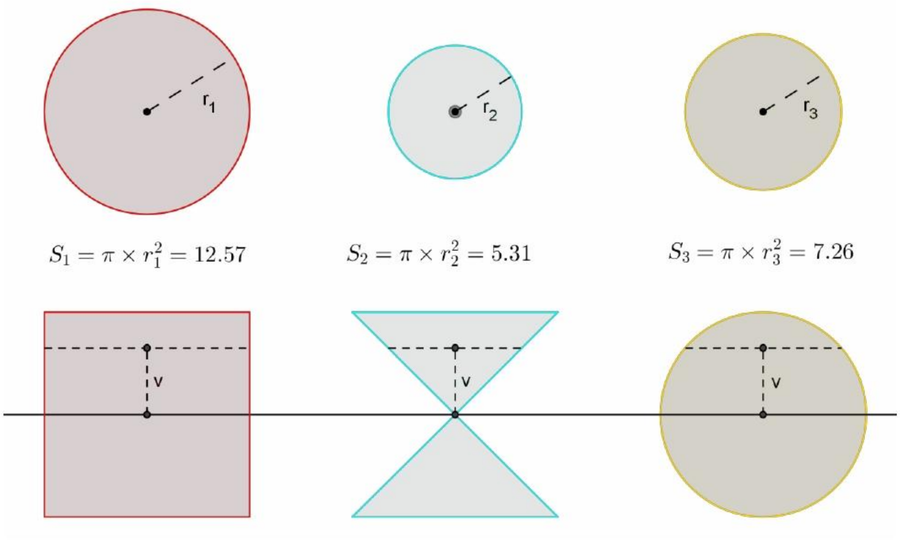
7. Dále můžeme tento vztah zobecnit pro jakýkoliv jehlan s libovolnou podstavou a výškou. Jak vypočítáme objem takového jehlanu?

Objem jehlanu =

8. **Nyní můžeme snadno odvodit vzorec pro objem kužele. Hlavní myšlenku představil opět Archimédes. Stačí si kužel představit jako jehlan, jehož podstavu tvoří mnohoúhelník s nekonečně mnoho stranami - kruh. Jak můžeme tedy vypočítat jeho objem?**

Objem kužele =

9. **V připraveném souboru v programu GeoGebra jsou znázorněna následující tělesa o stejné výšce i poloměru podstavy: válec, kužel a koule. Zároveň jsou zobrazeny řezy jednotlivých těles a jejich obsahy. Pohybuj modrým bodem V a pozoruj, jaký vztah mezi jednotlivými obsahy platí. Zapiš tento vztah.**



10. Pokud tento vztah platí pro všechna *v*, musí platit i pro objemy těles. Dokážeš tedy vyjádřit objem koule?

Objem koule =

11. Nyní můžeš objevit stejný vztah jako před více než 2200 lety Archimédes. Jakou část objemu válce zabírá jemu vepsaná koule?

12. Jakou část objemu polokoule zabírá jí vepsaný kužel?

Další vlastnost, kterou Archimédes objevil, se týká povrchu koule a obsahu pláště válce, který je kouli opsaný. Nejprve ale opět musíme zjistit, jak povrchy vypočítat. Vztah pro povrch válce jsme již objevili při projektování sítě krabičky. Nyní se zaměříme na povrch koule. Využijeme k tomu opět tenisový míček.

13. Plášť tenisového míčku je asi 0,25 cm silný. Jaký je objem vzduchu uvnitř míčku? Jaký je objem pláště míčku?

[1]

14. Pokud by byla šířka pláště velmi malá, byl by objem pláště téměř shodný s povrchem míčku. Pro lepší představu budeme nyní pracovat s větším tělesem a to s vodojemem. Poloměr vodojemu *r* = 6 m. Budeme jej natírat tenkou vrstvou barvy *p* = 0,1 mm. Kolik barvy spotřebujeme?

[1] http://www.realsimple.com/home-organizing/new-uses-for-old-things/new-uses-for-penny-cd-case-00000000028566/page3.html

15. **Objem spotřebované barvy jsme vypočítali jako rozdíl natřeného a nenatřeného vodojemu.**

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r+p)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \boldsymbol{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p + 4 \cdot \pi \cdot r \cdot p^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot p^3}$$

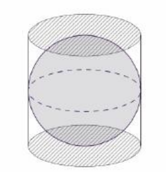
16. **Dva členy této rovnice můžeme zanedbat, jelikož je jejich hodnota téměř 0. Které to jsou? Škrtni je červenou barvou.**

17. **Zároveň si můžeme vrstvu nátěru představit jako *p* vrstev povrchu koule. Dostáváme tedy již upravený vztah:**

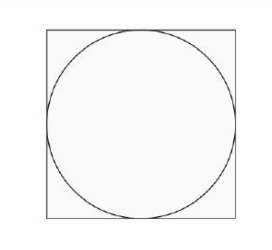
$$\boldsymbol{S \cdot p = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p}$$

18. **Na závěr stačí obě strany rovnice vydělit šířkou barevné vrstvy *p* a získáme vztah pro výpočet povrchu koule. Zapiš tento vzorec.**

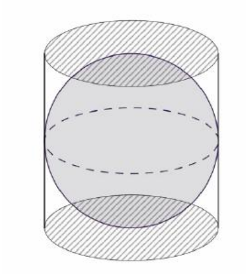
19. **Nyní znáš vše potřebné, abys stejně jako Archimédes objevil vztah mezi povrchem koule a pláštěm válce, který je této kouli opsaný. Dokážeš to?**
Svůj závěr ověř pro tenisový míček a vyrobenou krabičku.



Archimédův náhrobek – řešení



Na obrázku výše vidíme na první pohled čtverec opsaný kružnici. Pro Archiméda ale představoval něco jiného. Byl pro něj dokonce tak důležitý, že si ho nechal vytesat na náhrobní kámen a tento obrazec se tak stal jeho symbolem. Co pro něj tedy představoval?



Jedná se o válec opsaný kouli. Jak takový válec vůbec sestrojit?

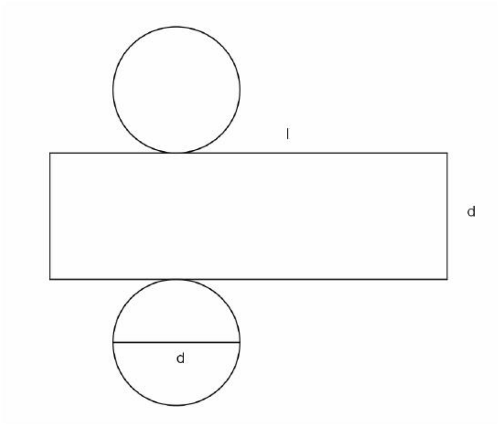
1. **Tenisový míč má průměr přibližně 65 mm. Jaké budou nejmenší možné rozměry válcové krabičky, do níž se tenisový míč vejde?**

průměr podstavy = $65\ \mathbf{mm}$

výška válce = $65\ \mathbf{mm}$

2. **Vypočítej výšku pláště *d* a délku pláště *l*. Zaokrouhli nahoru na celé milimetry. Narýsuj síť a válec sestroj. Kolik budeš potřebovat papíru na tuto síť?**

Náčrtek sítě:



$$\boldsymbol{Rozměry\ pláště = l \cdot d = \pi \cdot d \cdot d = \pi \cdot d^2 = 132,73\ cm^2}$$

$$\boldsymbol{Obsah\ sítě = l \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 132,73 + 66,36 \doteq 200 cm^2}$$

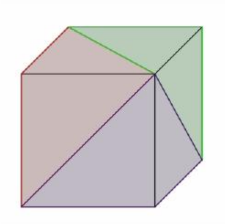
3. **Síť vystřihni a vyrob krabičku. Nezapomeň na záložky pro slepení. Ověř, zda se míček do krabičky vejde.**

Pro kouli i jí vepsaný válec platí několik zajímavých vlastností, které objevil právě Archimédes. Jedna z nich se týká objemů těchto těles.

4. Objem válce o průměru podstavy *d* i výšce *d* vypočítáme snadno. Vznikne naskládáním *d* kruhových podstav na sebe. Jaký je tedy vztah pro objem válce?

$$\boldsymbol{Objem\ válce = d \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = d \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r^3}$$

5. Pro odvození objemu koule potřebujeme znát vztah pro objem kužele. Ten můžeme zjistit ze vztahu pro objem jehlanu. K tomu nám může být nápomocný následující model krychle.



Krychli můžeme rozříznout na 3 shodné jehlany s čtvercovou podstavou. Jaký je tedy objem jednotlivých jehlanů, je-li délka hrany krychle *a*?

$$\boldsymbol{Objem\ jehlanu = \frac{1}{3} \cdot a^3}$$

6. Stejným způsobem můžeme rozdělit také jakýkoliv hranol. Jaký bude objem jehlanu s podstavou o rozměrech *a* a *b* a výškou *c*, který vznikne při rozřezání kvádru o rozměrech *a, b, c*?

$$\boldsymbol{Objem\ jehlanu = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c}$$

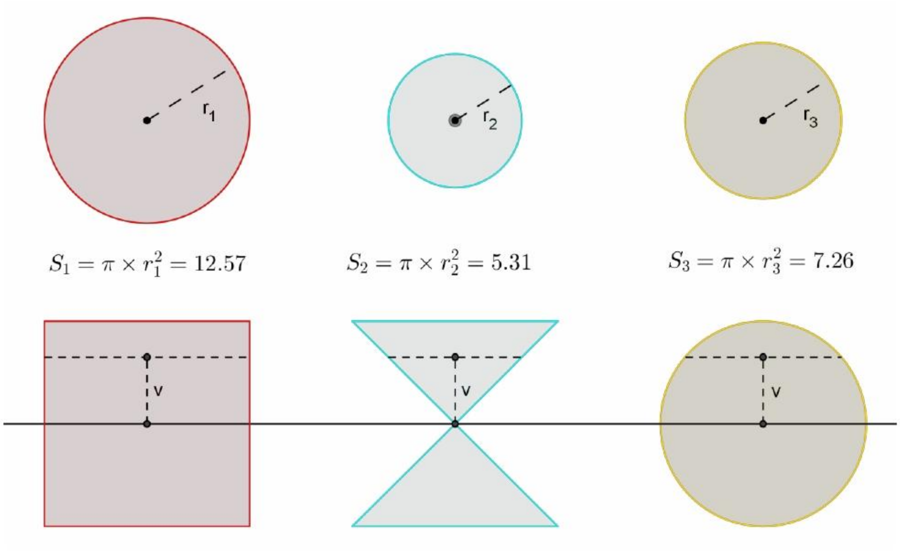
7. Dále můžeme tento vztah zobecnit pro jakýkoliv jehlan s libovolnou podstavou a výškou. Jak vypočítáme objem takového jehlanu?

$$\boldsymbol{Objem\ kužele = \frac{1}{3} \cdot S_{podstava} \cdot výška}$$

8. **Nyní můžeme snadno odvodit vzorec pro objem kužele. Hlavní myšlenku představil opět Archimédes. Stačí si kužel představit jako jehlan, jehož podstavu tvoří mnohoúhelník s nekonečně mnoho stranami - kruh. Jak můžeme tedy vypočítat jeho objem?**

$$\boldsymbol{Objem\ kužele} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r^2} \cdot \boldsymbol{v}$$

9. **V připraveném souboru v programu GeoGebra jsou znázorněna následující tělesa o stejné výšce i poloměru podstavy: válec, dvojitý kužel a koule. Zároveň jsou zobrazeny řezy jednotlivých těles a jejich obsahy. Pohybuj modrým bodem V a pozoruj, jaký vztah mezi jednotlivými obsahy platí. Zapiš tento vztah.**



Vztah pro obsahy: $\boldsymbol{S_1 - S_2 = S_3}$

10. Pokud tento vztah platí pro všechna *v*, musí platit i pro objemy těles. Dokážeš tedy vyjádřit objem koule?

$$V_{koule} = V_{válec} - V_{kužely} = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

11. Nyní můžeš objevit stejný vztah jako před více než 2200 lety Archimédes. Jakou část objemu válce zabírá jemu vepsaná koule?

$V_{koule} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $V_{válec} = 2 \cdot \pi \cdot r^3$ $V_{koule} = \frac{2}{3} \cdot V_{válec}$

12. Jakou část objemu polokoule zabírá jí vepsaný kužel?

$V_{polokoule} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $V_{kužel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $V_{polokoule} = 2 \cdot V_{kužel}$

Další vlastnost, kterou Archimédes objevil, se týká povrchu koule a obsahu pláště válce, který je kouli opsaný. Nejprve ale opět musíme zjistit, jak povrchy vypočítat. Vztah pro povrch válce jsme již objevili při projektování sítě krabičky. Nyní se zaměříme na povrch koule. Využijeme k tomu opět tenisový míček.

13. Plášť tenisového míčku je asi 0,25 cm silný. Jaký je objem vzduchu uvnitř míčku? Jaký je objem pláště míčku?

[1]

$$V_{míč} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3.25^3 = 143,79\ cm^3$$

$$V_{vzduch} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 113,09\ cm^3$$

$$V_{plášť} = V_{míč} - V_{vzduch} = 143,79 - 113,09 = 30,7\ cm^3$$

14. Pokud by byla šířka pláště velmi malá, byl by objem pláště téměř shodný s povrchem míčku. Pro lepší představu budeme nyní pracovat s větším tělesem a to s vodojemem. Poloměr vodojemu *r* = 6 m. Budeme jej natírat tenkou vrstvou barvy *p* = 0,1 mm. Kolik barvy spotřebujeme?

$$V_{barva} = V_{natřený\ vodojem} - V_{nenatřený\ vodojem} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 60,02^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 60^3 = 905\ l$$

[1] http://www.realsimple.com/home-organizing/new-uses-for-old-things/new-uses-for-penny-cd-case-00000000028566/page3.html

Objem spotřebované barvy jsme vypočítali jako rozdíl natřeného a nenatřeného vodojemu.

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r + p)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p + 4 \cdot \pi \cdot r \cdot p^2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot p^3}$$

15. Dva členy této rovnice můžeme zanedbat, jelikož je jejich hodnota téměř 0. Které to jsou? Škrtni je červenou barvou.

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p + \cancel{4 \cdot \pi \cdot r \cdot p^2} + \cancel{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot p^3}$$

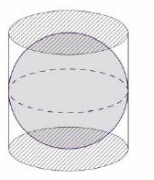
16. Zároveň si můžeme vrstvu nátěru představit jako *p* vrstev povrchu koule. Dostáváme tedy již upravený vztah:

$$S \cdot p = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot p$$

17. Na závěr stačí obě strany rovnice vydělit šířkou barevné vrstvy *p* a získáme vztah pro výpočet povrchu koule. Zapiš tento vzorec.

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

18. Nyní znáš vše potřebné, abys stejně jako Archimédes objevil vztah mezi povrchem koule a pláštěm válce, který je této kouli opsaný. Dokážeš to?
Svůj závěr ověř pro tenisový míček a vyrobenou krabičku.



$$\boldsymbol{S_{plášť} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$\boldsymbol{S_{plášť} = S_{koule}}$$

6.1 ZKUŠENOSTI Z VÝUKY

6.1.1 TRISEKCE ÚHLU ANEB ROZDĚL ÚHEL NA TŘETINY

Tento pracovní list byl zkoušen ve dvou třídách. Nejprve v 7. a následně v 6. ročníku. V první skupině se vyskytlo hned několik problémů. Tím největším bylo pravděpodobně operování s výrazy, se kterými se žáci zatím nikdy nesetkali. Proto pro ně bylo nanejvýš obtížné vyjadřovat velikosti úhlů pomocí neznámé α. Tyto úkoly nebyli schopni samostatně řešit.

Velké množství žáků mělo problém také s označením všech úseček, jejichž délka je rovna poloměru kružnice. Nejproblematičtější pro ně byla překvapivě úsečka BC, jejíž velikost je jasně uvedena v zadání úlohy. To mohlo být způsobeno nízkou úrovní matematické gramotnosti žáků v dané třídě nebo tím, že žáci nevěnovali zadání dostatečnou pozornost.

Na rozdíl od 6. třídy ale nebylo pro tyto žáky těžké objevit rovnoramenné trojúhelníky ani dopočítat chybějící úhel v trojúhelníku či úhel vedlejší, pokud by však byla velikost úhlu α zadána. Pro žáky obou ročníků bylo ale náročné objevit, že také úhel $\measuredangle OEF$ má velikost α. Velikost úhlu $\measuredangle OFE$ již určili snadno.

V návaznosti na tyto obtíže byl pracovní list i plán hodiny pro následující třídu přepracován. Tentokrát nebyl postup konstrukce žákům pouze zadán k přečtení. Také mohli na interaktivní tabuli sledovat krok za krokem konstrukci v programu GeoGebra. To se ukázalo býti velmi nápomocným, jelikož tentokrát neměli problémy s určením velikosti úsečky BC.

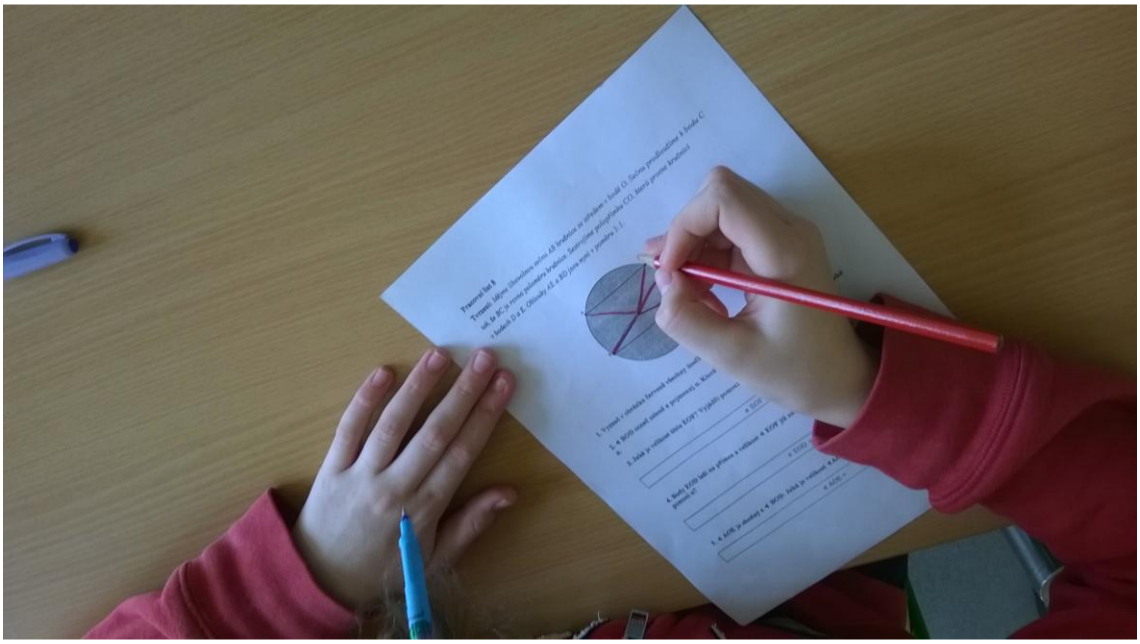
Abychom se vyhnuli problémům při operacích s úhlem α, měli tentokrát žáci zadány různé konkrétní velikosti, pro které zadané tvrzení ověřovali. Na konci hodiny pak dokázali rozhodnout, že tento důkaz bude platit pro každou možnou velikost úhlu α.

Pro některé žáky bylo obtížné úhly velikosti α vůbec objevit a to nejen v případě úhlu $\measuredangle OEF$, ale i těch ostatních. Možnou příčinou může být fakt, že úhly byly pro tuto třídu poměrně nová látka. Žáci tedy ještě neměli dostatečnou zkušenost, aby vedlejší a střídavé úhly hledali a rozpoznali, pokud to nemají přímo zadáno. Pro tyto žáky by mohlo být nápomocné proložit úsečky *AC*, *CE* a *EF* přímkou, která by se v případě potřeby zobrazila v konstrukci na interaktivní tabuli.

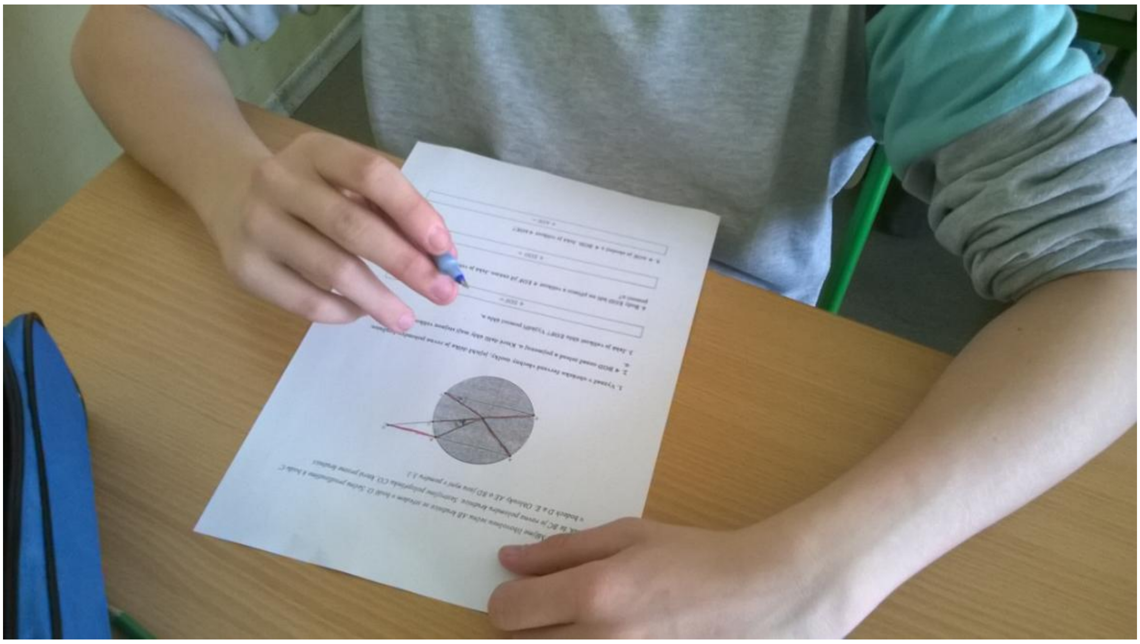
I přes tyto obtíže, které u některých žáků během řešení úlohy vyvstaly, dokázala přibližně třetina třídy vyřešit celý pracovní list bez jakékoliv nápomoci a zbytku třídy stačilo pomoci s označením úhlů α, případně je upozornit na vzniklé trojúhelníky, především na ΔEFO. Sami už potom přišli na to, že je potřeba použít pravidlo o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku a úspěšně jej použili.

Závěrečný úkol hodiny, tedy objevení Archimédovy metody trisekce úhlu se však bohužel nikomu nepodařilo splnit. Někteří žáci ale nebyli se svými řešeními daleko od toho správného. Jednalo se však většinou o metodu pokus-omyl, než o to, že by se pokusili využít objevených vlastností. Zajímavé ale byly některé pokusy o trisekci v úvodní části hodiny. Hned několik žáků rozdělilo na tři části úhel o velikosti 180°, tedy úhel, pro který je úloha řešitelná jen pomocí pravítka a kružítka. Našli se ale také žáci, kteří bez váhání použili k vyřešení úlohy úhloměr.

Snad nejdůležitější zkušenost z těchto hodin je ale ta, že žáci měli velký zájem úkoly vyřešit a také se jim to, byť s menší dopomocí, dařilo úspěšně zvládnout. Jejich aktivita v porovnání s běžnými hodinami byla o poznání větší a to i u žáků, kteří jindy nespolupracují. S podobnými aktivitami a ani s vlastními důkazy se totiž ještě nikdy nesetkali.

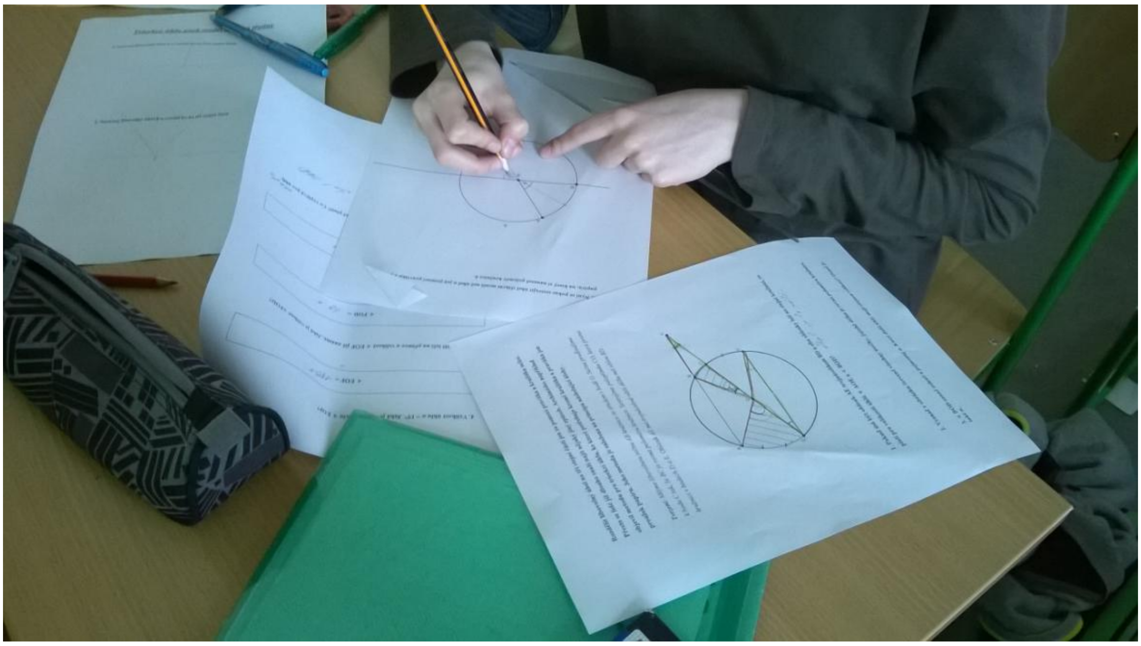


Obrázek 28 Práce na pracovním listu



Obrázek 29 Vyplňování pracovního listu

Obrázek 30 Nanášení poloměru kružnice a proužek papíru

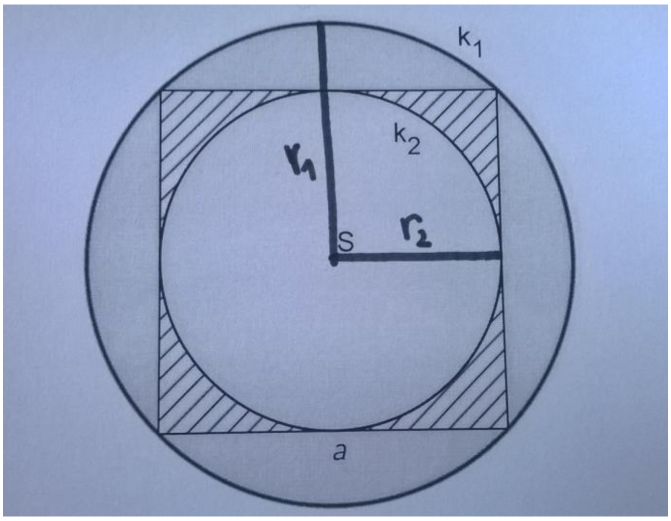


Obrázek 31 Pokus žáka o trisekci úhlu

6.1.2 KOLEM DOKOLA

Tento pracovní list byl zkoušen v 8. a 9. ročníku. Ani jedna z učeben nebyla vybavena počítačem, proto nebylo možné využít jako motivační fázi hodiny soubor v programu GeoGebra. Museli jsme tedy přejít rovnou k zadání pracovního listu. V obou třídách se bohužel u žáků vyskytly poměrně zásadní nedostatky, které jim zabránily v úspěšném řešení úloh.

V osmém ročníku bylo největším problémem již zjišťování poloměrů kružnic. Většina žáků přišla na poloměr kružnice vepsané, ale poloměr kružnice opsané pro ně bylo těžké odhalit. Často to bylo způsobeno tím, že si jej do obrázku nevhodně vyznačili, viz Obrázek 32.

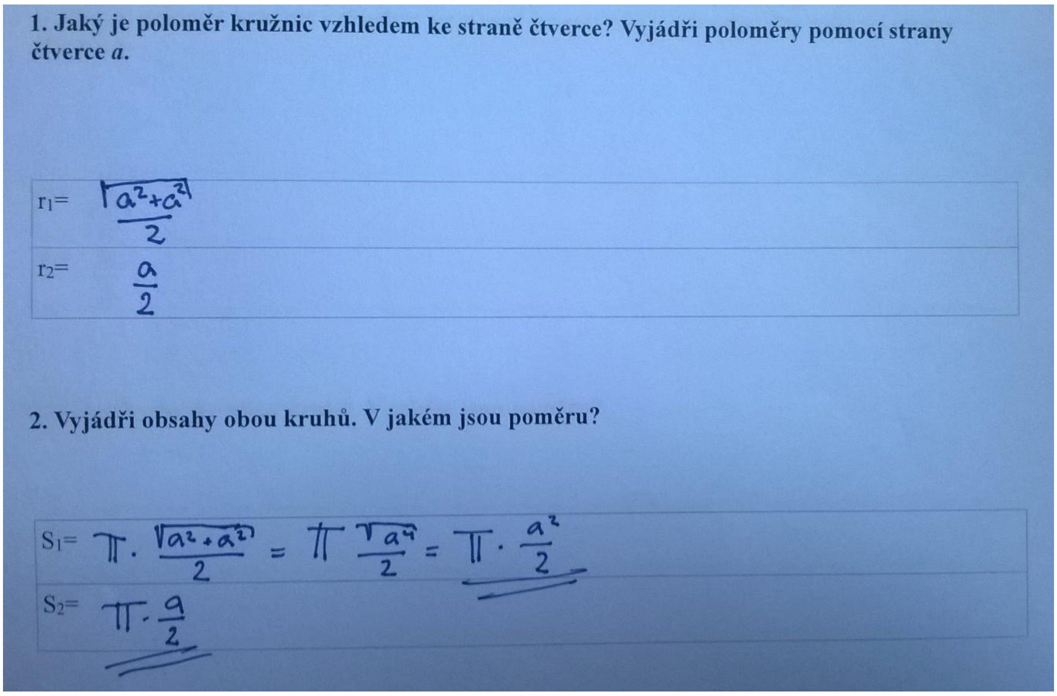


Obrázek 32 Vyznačení poloměrů

Pokud už byli žáci schopní určit poloměr jako polovinu úhlopříčky, byl pro ně problém jej vyjádřit. Uvědomili si sice, že musí použít Pythagorovu větu, ale nedokázali ji aplikovat na rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\frac{a}{2}$. Převážná část si pouze zapsala vztah $a^2 + b^2 = c^2$. Ti, kteří dokázali do vztahu dosadit, však stejně nedošli k výsledu. Obsah kruhů pak již počítali s chybnými údaji.

Tyto elementární nedostatky v matematických dovednostech žáků byly hlavní příčinou jejich neúspěchu při řešení. Nebýt toho, bylo pro ně řešení pracovního listu zajímavé a neobvyklé. Jejich snaha o vyřešení úloh byla oproti jiným hodinám znatelně větší. V závěru hodiny jsme si tedy alespoň na tabuli ukázali řešení a žáci si pracovní listy dovyplnili. Nakonec sami uznali, že úlohy nebyly složité a výsledek je zajímavý.

V devátém ročníku byl průběh srovnatelný, jen problém, na který žáci narazili, byl jiné povahy. Přibližně 80 % žáků chybovalo ve snad ještě základnější činnosti – v úpravách mocnin. Při výpočtu obsahu kružnice opsané pak uvedli, že $a^2 + a^2 = a^4$, jak je vidět v Obrázku 33. Po této chybě tedy nemohli dojít ke správnému řešení.



Obrázek 33 Chybné řešení

7 ZÁVĚR

Náplní této práce bylo vytvořit na základě historických textů výukové materiály, které by žáky vedly k přemýšlení a uvažování a zlepšily jejich matematické znalosti nebo alespoň zpestřily rutinní hodiny matematiky. Výsledkem je ucelený soubor pracovních listů a dynamických materiálů, které lze v hodinách využívat pravidelně a v jejich plném rozsahu nebo jen příležitostně jako doplňkové materiály. Všechny dynamické materiály jsou dostupné na webové stránce http://www.geogebratube.org/material/show/id/135598.

Vybrané pracovní listy byly zadány v hodinách matematiky na druhém stupni ZŠ. Během těchto hodin se ukázalo, že s řešením zadaných úloh mají žáci velký problém, přestože pracovní listy svou obtížností nijak nepřevyšovaly úroveň učiva, které žáci již probírali.

Mezinárodní testy jako TIMSS (The Trends in International Mathematics and Science Study), PISA (The Programme for International Student Assessment) či PIRLS (The *Progress in International Reading Literacy Study)* v posledních letech prokazují spíše klesající tendenci u výkonů našich žáků. V souladu s tímto zjištěním proběhly také vyučovací hodiny, ve kterých byly testovány pracovní listy vytvořené v rámci této práce. Žáci během práce s pracovními listy nebyli schopni aplikovat své znalosti. Úkoly, které měli tentokrát řešit, pro ně byly nestandardní a nedokázali si s nimi poradit. Testování však probíhalo na malém vzorku, vždy dvě třídy, a nelze je tedy generalizovat

Soubor vytvořených materiálů považuji za vhodný prostředek k procvičování znalostí a vědomostí žáků na základních i středních školách. Povaha zpracovaných pracovních listů i dynamických animací žáky často poprvé seznamuje s dokazováním matematického tvrzení.

8 POUŽITÁ LITERATURA

[1] ALSINA, Claudi, NELSEN Roger, B. *Math made visual: creating images for understanding mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America. 2006, xv, 173 s. ISBN 08-838-5746-4.

[2] Archimedes. *Encyclopædia Britannica* [online]. [cit. 2014-04-16]. Dostupné z: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/32808/Archimedes.

[3] Archimedes. *Ancient Greece* [online]. [cit. 2014-04-16]. Dostupné z: http://www.ancientgreece.com/s/People/Archimedes/.

[4] DE GUZMÁN, Miguel. THE ROLE OF VISUALIZATION In the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. [online]. [cit. 2014-05-14]. Dostupné z: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf.

[5] *Dvaasedmdesát jmen české historie: Jan Tesánek*. 2009 [online]. [cit. 2014-05-14]. Dostupné z: http://www.ceskatelevize.cz/porady/10169539755-dvaasedmdesat-jmen-ceske-historie/209572232200006-jan-tesanek/.

[6] ECOB, Alexander. Oliver Byrne's element of Euclid 1847. *Eye Magazine* [online]. 2012 [cit. 2014-03-05]. Dostupné z: http://www.eyemagazine.com/feature/article/taught-from-a-new-angle.

[7] EUKLEIDES. *Základy. Knihy I. -IV.: Kniha II.* Druhé opravené vydání. Nymburk: OPS, 2008. ISBN 978-80-903773-7-0.

[8] FŘETEK, Tomáš. Opravdu se čeští žáci v testech zlepšují?. [online]. [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://fertek.blog.respekt.ihned.cz/c1-58960280-opravdu-se-cesti-zaci-v-testech-zlepsuji.

[9] GeoGebra Tube. [online]. [cit. 2014-06-16]. Dostupné z: http://tube.geogebra.org/.

[10] HIELBERT, James, CARPENTER Thomas, P.. Learning and Teaching with Understanding. In: *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*. 1992.

[11] Jan Tesánek. [online]. [cit. 2014-05-14]. Dostupné z: http://inserv.math.muni.cz/biografie/jan_tesanek.html.

[12] KUŘINA, František. Umění vidět v matematice. Praha: SPN, 1990.

[13] Magni Newtoni Commentator. *Hospodářské noviny* [online]. 2002 [cit. 2014-05-15]. Dostupné z: http://hn.ihned.cz/c1-10660360-magni-newtoni-commentator.

[14] MCCONNELL, Micki. *Arbelos of Archimedes* [online]. 2008 [cit. 2014-05-14]. Dostupné z: http://scimath.unl.edu/MIM/files/MATExamFiles/McConnell_MATpaper_FINAL.pdf.

[15] NETZ, Reviel, NOEL, William. *The Archimedes codex: revealing the secret of the world's greatest palimpsest*. London: Phoenix, 2008, viii, 305 s. ISBN 978-075-3823-729.

[16] Obrázek: Čínské přísloví. [cit. 2014-05-14]. Dostupné z: http://www.phrases.org.uk/images/picture-is-worth-a-thousand-words.jpg.

[17] Obrázek: Moskevský papyrus. [cit. 2014-06-16]. Dostupné z: http://www.egypte-antique.info/images/geometrie-egypte2.jpg.

[18] Obrázek: Obuvnický nůž. [cit. 2014-06-16]. Dostupné z: http://mathforum.org/mathimages/imgUpload/thumb/Shoemakers_Knife.jpg/400px-Shoemakers_Knife.jpg.

[19] Obrázek: Piet Mondrian. Dostupné z: http://pietmondrian.co.uk/Piet%20Mondrian%20Sans%20Titre.jpg. [cit. 2014-06-16].

[20] SEGENCHUK, Steven. The Role of Visualization in Education. [online]. [cit. 2014-05-18]. Dostupné z: http://web.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs563/talks/education/IEindex.html.

[21] Směřování českého školství. [online]. [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.inflow.cz/printpdf/11998.

[22] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie.

[23] Výsledky mezinárodních šetření PIRLS 2011 a TIMSS 2011. [online]. [cit. 2014-06-20]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Projekty-ESF/Zverejneni-vysledku-mezinarodnich-setreni-PIRLS-20/Tisk_zprava-TIMSS-a-PIRLS.pdf