Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka řešených úloh pro 2. stupeň ZŠ zaměřená na problematiku funkcí

Vypracoval: Tamara Karlovská
Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka řešených úloh pro 2. stupeň ZŠ zaměřenou na problematiku funkcí jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě – v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných pedagogickou fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 29. 4. 2015 ________________________

Poděkování

Chtěla bych poděkovat paní RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady, odborný dohled a čas, který mi věnovala. Ráda bych také poděkovala paní doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za pomoc s didaktickou stránkou práce a za poskytnutí podkladových materiálů.

Anotace

Cílem bakalářské práce je sestavit sbírku řešených úloh pro základní školu z oblasti funkcí. Práce bude zaměřena na celou problematiku funkcí na 2. stupni základní školy, tedy od zadání funkcí, grafů funkcí a vlastností funkcí, přes probírané typy funkcí (lineární funkce a přímá úměra, kvadratické funkce, nepřímá úměra). V práci se také zaměříme na grafické řešení soustav rovnic. Grafické vyjádření řešených úloh bude vytvořeno v matematickém programu Geogebra.

Annotation

The aim of the bachelor thesis is to create an exercise book for primary schools in the field of mathematical functions. The paper serves for understanding of the whole topic of functions of a real variable at upper primary education including assignment of functions, graphs of functions and theoretical properties. Moreover, the thesis deals with single types of taught mathematical functions including linear functions, direct proportion, quadratic functions and indirect proportion. Furthermore, the paper is focused on graphical solutions of systems of equations using the mathematics software Geogebra.

Obsah

Úvod

Při výběru tématu bakalářské práce jsem se snažila o to, aby se alespoň část této práce dala použít jako učební pomůcka, nejen pro mne či jiné vyučující, ale pokud možno také pro žáky základních škol. Proto jsem si vybrala téma s didaktickým zaměřením, tedy sbírku řešených úloh pro 2. stupeň ZŠ zaměřenou na problematiku funkcí. V práci bude navázáno na kurikulum 1. stupně základní školy v zaměření na práci s daty a grafickou stránku matematiky. Budu se snažit o rozebrání postupu řešení úloh s občasným naznačením i jiných způsobů řešení jednoho příkladu. Má práce nemá sloužit jako výkladová část, ale pro rozebrání postupů řešení příkladů na základě již probraného učiva. Grafické vyjádření řešených úloh bude vytvořeno v matematickém programu Geogebra.

Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol, ty jsou pak dále členěny do podkapitol. Kapitola 7. ročník je rozdělena na přímou úměrnost a nepřímou úměrnost. Do každé podkapitoly je zařazeno několik vzorově řešených příkladů týkajících se dané problematiky. Kapitola 9. ročník je členěna na podkapitoly funkce, zadání funkce, lineární funkce, kvadratická funkce, nepřímá úměrnost a bonusovou podkapitolu grafické řešení soustav rovnic. I v této kapitole se setkáme s různými typy příkladů a s jejich možným řešením.

1. Sedmý ročník

V rámci kapitoly Sedmý ročník se zaměříme na přímou a nepřímou úměrnost a s nimi související příklady. Jelikož vycházíme ze standardů matematiky, budeme se nejprve snažit zaměřit na příklady, ve kterých půjde o vytvoření rovnice, tabulky a grafu přímé a nepřímé úměrnosti na základě textu úlohy. Dále se zaměříme na příklady, ve kterých z rovnice, tabulky, textu úlohy či grafu určíme přímou a nepřímou úměrnost.

V této práci se budeme zaměřovat na základní a co možná nejnázornější příklady, které se k tomuto tématu objevují. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu jsou učebnice pro základní školy - Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 7. ročník ZŠ a Rosecká, Z., Čuhajová, V.: Aritmetika: učebnice pro 7. ročník.

1.1 Přímá úměrnost

Přímá úměrnost je taková *závislost* proměnné *y* na proměnné *x*, pro kterou platí:

kolikrát se zvětší hodnota proměnné *x*, *tolikrát se zvětší* hodnota *y*,

kolikrát se zmenší hodnota proměnné *x*, *tolikrát se zmenší* hodnota *y*.

Hodnoty proměnné *x* a *y* se mění *ve stejném poměru*.

Proměnná *y* je *přímo úměrná* proměnné *x*. $([4], s. 28)$

Přímá úměrnost se dá vyjádřit vzorcem $\boldsymbol{y = k \cdot x}$; kladné číslo k, tedy $k > 0$ se nazývá ***koeficient přímé úměrnosti***. Grafem přímé úměrnosti je ***přímka*** *procházející počátkem*. $([4], s. 42)$

Příklad 1: Doplň tabulky tak, aby zapsaná závislost *y* na *x* byla přímá úměrnost. (vlastní zadání)

a)

Tabulka 1.1:

x	1	2	5	8	12
y	6				

b)

Tabulka 1.2:

x	1	4	10	25	50
y			70		

Řešení:

a)

Tabulka 1.1:

x	1	2	5	8	12
y	6	12	30	48	72

Jak víme z definice přímé úměrnosti, kolikrát se zvětší hodnota proměnné x, tolikrát se zvětší hodnota proměnné y. Pokud se tedy hodnota x zdvojnásobí, musí se zdvojnásobit i hodnota y. Tedy $2 \cdot 6 = 12$. Stejný postup je třeba aplikovat pro všechny hodnoty x. Výsledkem je tedy $1 \cdot 6 = 6;\ 2 \cdot 6 = 12;\ 5 \cdot 6 = 30;\ 8 \cdot 6 = 48;\ 12 \cdot 6 = 72$.

b)

Tabulka 1.2:

x	1	4	10	25	50
y	7	28	70	175	350

Opět je potřeba použít definici přímé úměrnosti. Přestože v tomto příkladu nemáme danou hodnotu pro x = 1, můžeme si tuto hodnotu snadno vypočítat. Známe-li hodnotu pro 10x = 70, můžeme vypočítat hodnotu pro jedno x. Platí tedy $70 : 10 = 7$. Z hodnoty pro jedno x poté dopočítáme tabulku stejným způsobem jako v bodě a).

Příklad 2: Rozhodni, zda je závislost *y* na *x* uvedená v tabulce přímá úměrnost. Své rozhodnutí odůvodni. (vlastní zadání)

a)

Tabulka 1.3:

x	0,5	2	3	5
y	2	8	12	20

b)

Tabulka 1.4:

x	1	4	6	9
y	8	32	48	72

Řešení:

a) Vycházíme-li z definice přímé úměrnosti, je dobré si stanovit vzorec, který bude platit pro libovolnou dvojici čísel $[x, y]$, a poté dosazením do tohoto vzorce vyzkoušet, zda platí pro všechny dvojice čísel $[x, y]$ zadané tabulkou.
V našem případě si vezmeme první dvojici čísel $[0{,}5; 2]$ a dosadíme do obecného vzorce pro přímou úměrnost. Tedy do vzorce: $y = k \cdot x$. Po dosazení dostaneme výraz $2 = k \cdot 0{,}5$. Hledáme tedy takové číslo k, kterým je třeba vynásobit číslo 0,5,

abychom dostali číslo 2. Úvahou a odhadem dojdeme k tomu, že k se musí rovnat číslu 4, z čehož vyplývá náš vztah pro přímou úměrnost ve tvaru $y = 4 \cdot x$.

Dále vyzkoušíme, zda tato rovnice platí pro všechny tabulkou zadané dvojice čísel. Po dosazení dojdeme k tomu, že tento vztah vyhovuje pro všechny zadané dvojice čísel, a to následujícím způsobem: $8 = 4 \cdot 2; 12 = 4 \cdot 3;\ 20 = 4 \cdot 5$.

Na základě výpočtů jsme došli k tomu, že pro všechna čísla z tabulky vyhovuje vztah pro přímou úměrnost $y = 4 \cdot x$, platí tedy, že se jedná o přímou úměrnost.

b) I ve druhém případě vycházíme z definice přímé úměrnosti. Opět si je třeba stanovit vztah, který bude platit pro libovolnou dvojici čísel $[x, y]$, a poté dosazením do tohoto vztahu vyzkoušet, zda platí pro všechny dvojice čísel $[x, y]$ zadané tabulkou.

V tomto případě známe první dvojici čísel $[1,8]$ a dosadíme-li tato čísla do obecného vztahu pro přímou úměrnost, tedy do vzorce: $y = k \cdot x$, po dosazení dostaneme výraz 8= $k\ \cdot 1$. Opět hledáme takové číslo k, kterým je třeba vynásobit číslo 0,5, abychom dostali číslo 2. Úvahou a odhadem dojdeme k tomu, že k se musí rovnat číslu 4, z čehož vyplývá náš vztah pro přímou úměrnost ve tvaru $y = 8 \cdot x$.

Poté ověříme, zda tato rovnice platí pro všechny tabulkou zadané dvojice čísel. Po dosazení dojdeme k tomu, že vztah vyhovuje pro všechny zadané dvojice čísel, a to následujícím způsobem: $32 = 8 \cdot 4; 48 = 8 \cdot 6;\ 72 = 8 \cdot 9$.

Stejně jako v bodě a) jsme došli k tomu, že pro všechna čísla z tabulky vyhovuje vztah pro přímou úměrnost $y = 8 \cdot x$, platí tedy, že se jedná o přímou úměrnost.

Příklad 3: Prodavačka v obchodě prodává jeden kilogram jablek za 8 korun, jeden kilogram mrkve za 15 korun a jeden kilogram banánů za 22 korun. Sestavte tabulku, která pomůže prodavačce při prodeji (minimálně pro prvních deset kilogramů) a pokus se sestrojit graf pro jednotlivé druhy ovoce a zeleniny. (vlastní zadání)

Řešení:

Jak víme ze zadání, kilogram jablek je prodáván za 8 korun, tabulka pro cenu jablek se ve druhém řádku bude skládat z násobků čísla 8. Pokud bychom chtěli vyjádřit vztah přímé úměrnosti pro tuto úlohu, jednalo by se o $y = 8 \cdot x$. Tabulka pro výsledné hodnoty tedy bude vypadat následovně:

Tabulka 1.5:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

Jak víme ze zadání, kilogram mrkve je prodáván za 15 korun, tabulka pro cenu mrkve se ve druhém řádku bude skládat z násobků čísla 15. Pokud bychom chtěli vyjádřit vztah přímé úměrnosti pro tuto úlohu, jednalo by se o $y = 15 \cdot x$. Tabulka pro výsledné hodnoty tedy bude vypadat následovně:

Tabulka 1.6:

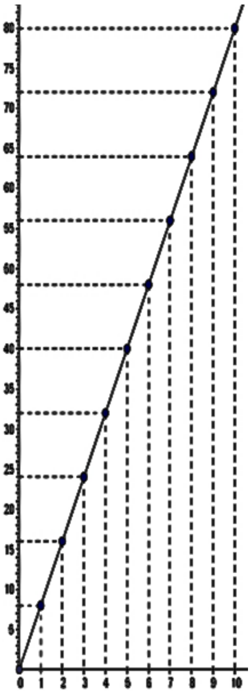
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

Víme-li ze zadání, že kilogram banánů se prodává za 22 korun, tabulka pro cenu banánů se ve druhém řádku bude skládat z násobků čísla 22. Pokud bychom chtěli vyjádřit vztah přímé úměrnosti pro tuto úlohu, jednalo by se o $y = 22 \cdot x$. Tabulka pro výsledné hodnoty tedy bude vypadat následovně:

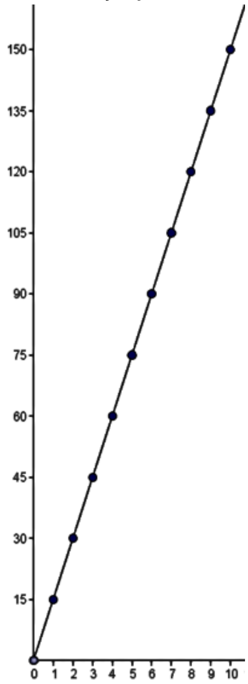
Tabulka 1.7:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220

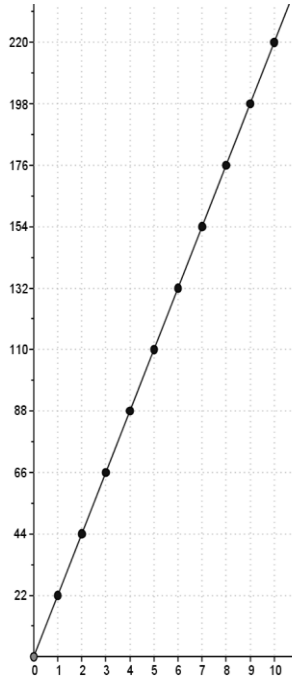
Graf 1.3: $f\colon y = 8 \cdot x$



Graf 1.2: $f\colon y = 15 \cdot x$



Graf 1.1: $f\colon y = 22 \cdot x$



Příklad 4: Jeden kilogram vážených pomerančů stojí 21 korun; 1,38 kg stejných pomerančů v balíčku je za 31,90 Kč. Které pomeranče jsou dražší – vážené, či balené? Napovíme: Vypočítejte, kolik by stálo 1,38 kg vážených pomerančů. $([4], s. 32)$

Řešení:

1 kg volných pomerančů……… 21 Kč

1,38 kg balíček pomerančů…… 31,90 Kč

1,38 kg volných pomerančů…… ?

Jako první si u slovní úlohy musíme napsat přehledný zápis, až poté se můžeme začít snažit úlohu vypočítat.

$$\begin{array}{r} 1{,}38 \\ \cdot\, 21 \\ \hline 138 \\ 276 \\ \hline 28{,}98 \end{array}$$

Cenu za 1,38 kg volných pomerančů vypočítáme tak, že vynásobíme cenu za 1 kg volných pomerančů požadovanou váhou, v našem případě tedy 1,38 kg. Vynásobením těchto dvou čísel dostaneme požadovaný výsledek.

Na závěr nezapomeneme na slovní odpověď!

Odpověď: 1,38 kg volných pomerančů by stálo 28,98 Kč, znamená to tedy, že balené pomeranče jsou dražší než pomeranče volné.

Příklad 5: Přímá úměrnost je dána tabulkou:

Tabulka 1.8:

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

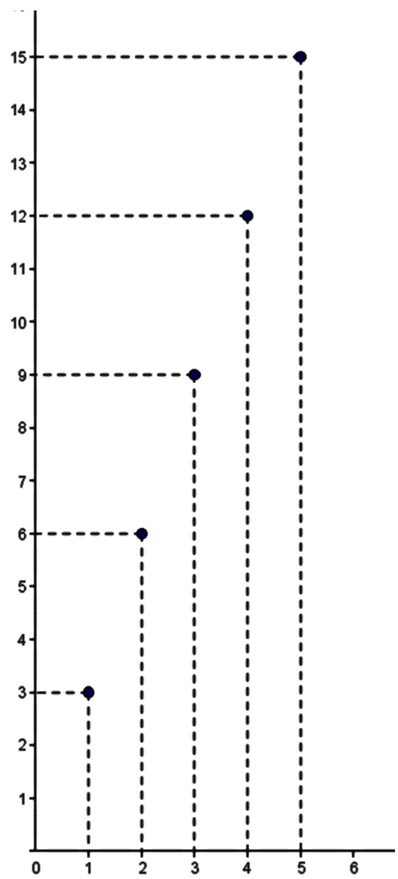
a) Zapiš vztah pro tuto přímou úměrnost.

b) Sestroj její graf v pravoúhlé soustavě souřadnic *Oxy*. ($[6], s. 54$)

<u>Řešení:</u>

Při hledání vztahu, který nám vyjadřuje přímou úměrnost danou naší tabulkou, musíme vycházet ze základního tvaru vztahu pro přímou úměrnost, a to $y = k \cdot x$. Dosadíme-li do tohoto vztahu libovolnou dvojici hodnot $[x, y]$, dojdeme k vyjádření neznámé a. Dosadíme-li například dvojici čísel $[2,6]$, pak dojdeme ke vztahu $6 = k \cdot 2$. Hledáme tedy číslo, kterým vynásobíme číslo 2, a vyjde nám číslo šest. Výsledkem tedy je, že k se musí rovnat číslu 3 a tím dojdeme ke vztahu $\boldsymbol{y = 3 \cdot x}$.

Graf 1.4: $f: y = 3 \cdot x$



Příklad 6: Za hodinu je v truhlářské dílně vyrobeno 5 židlí. Sestroj tabulku, která zobrazí přímou úměrnost výroby židlí za 2, 3, 4, …. 12 hodin. Kolik židlí je vyrobeno za 10 hodin? ($[6], s. 55$)

Řešení:

Sestavíme si dvouřádkovou tabulku, v první řádku budou znázorněny hodnoty *x*, tedy počet hodin (1, 2, …, 12 hodin), ve druhém řádku budou vypočteny hodnoty *y*, tedy počty židlí podle počtu hodin práce.

Tabulka 1.9:

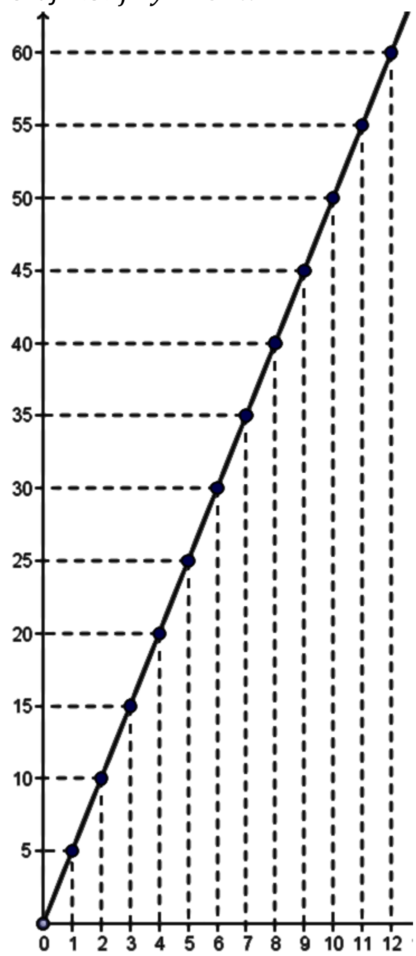
x (počet hodin)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (počet židlí)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

Do druhého řádku tabulky tedy zapíšeme počty vyrobených židlí za daný počet hodin. Jak vyplývá ze zadání této úlohy, za každou hodinu je v truhlářské dílně vyrobeno 5 židlí. Ve výsledné tabulce se nám tedy objeví násobky čísla 5.

Navíc si můžeme tuto úlohu znázornit také graficky. Na grafu je vidět přímá úměrnost asi nejlépe, vzniklými body lze proložit přímka, či polopřímka.

Z tabulky i grafu vidíme, že v truhlářské dílně je za 10 hodin vyrobeno 50 židlí.

Graf 1.5: $f: y = 5 \cdot x$



1.2 Nepřímá úměrnost

Nepřímá úměra je taková *závislost* proměnné *y* na proměnné *x*, pro kterou platí:

kolikrát se zvětší hodnota *x*, *tolikrát se zmenší* hodnota *y*,

kolikrát se zmenší hodnota *x*, *tolikrát se zvětší* hodnota *y*.

Hodnoty proměnné *x* a *y* se mění *v převrácených poměrech*.

Proměnná *y* je *nepřímo úměrná* proměnné *x*. ($[4], s. 34$)

Nepřímá úměrnost se dá vyjádřit vzorcem $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$; kladné číslo $\boldsymbol{k}$, tedy $k > 0$ se nazývá ***koeficient nepřímé úměrnosti***. Všechny body grafu nepřímé úměrnosti leží na křivce, která se jmenuje ***hyperbola***. ($[4], s. 45$)

Příklad 1: Tři stejně výkonná čerpadla vyčerpají vodu ze zatopené stavební jámy za 7 hodin. Za kolik hodin by vyčerpalo vodu z jámy pět stejně výkonných čerpadel? ($[4], s. 36$)

Řešení:

3 čerpadla………. 7 hodin

5 čerpadel………. x hodin

Úlohu budeme řešit pomocí trojčlenky. Můžeme si do zápisu dokreslit pomocné šipky. Ty nám pomohou sestavit rovnost poměrů. Ty poté převedeme do zlomků. Zlomky pak upravíme, až se dostaneme k výsledku.

$x : 7 = 3 : 5$

$\frac{x}{7} = \frac{3}{5}$

$x = 7 \cdot \frac{3}{5}$

$x = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5} = 4\ hodiny\ 12\ minut$

Odpověď: Pět čerpadel by vyčerpalo vodu z jámy za 4 hodiny a 12 minut.

Příklad 2: Zaměstnanci zahradnické firmy vysazují v parku 90 okrasných keřů. První den pracovalo 5 zaměstnanců devět a půl hodiny a vysázeli polovinu keřů. Druhý den přišlo 7 zaměstnanců a vysázeli zbytek keřů; pracovali stejným tempem. Jak dlouho jim trvala výsadba druhý den? ($[4], s. 36$)

Řešení:

1. den… 45 keřů……… 5 zaměstnanců……… 9,5 hodiny

2. den… 45 keřů……… 7 zaměstnanců……… x hodin

$x : 9{,}5 = 5 : 7$

$\frac{x}{9{,}5} = \frac{5}{7}$

$x = 9{,}5 \cdot \frac{5}{7}$

$x = \frac{47{,}5}{7} = \frac{95}{14} = 6\frac{11}{14} \doteq 6\ hodin\ 47\ minut$

Úlohu budeme řešit stejným způsobem jako předešlý příklad, pomocí trojčlenky.

Odpověď: Výsadba druhý den trvala 7 zaměstnancům 6 hodin a 47 minut.

Příklad 3: Sklizeň okurek bude 6 pracovníkům trvat 18 dní. $([6], s. 65)$

a) Vyjádřete závislosti počtu dnů sklizně na počtu pracovníků tabulkou.
b) Znázorněte graficky.

Řešení:

a) V této úloze máme za úkol vytvořit tabulku, která nám zobrazí závislost počtu dnů sklizně na počtu pracovníků. Neznáme-li hodnotu pro jednoho pracovníka, je třeba si tuto hodnotu dopočítat. Podle zadání platí, že 6 pracovníků bude okurky sklízet 18 dnů. Znamená to, že jeden pracovník bude stejné množství okurek sklízet 6krát déle.

6 pracovníků………. 18 dní

1 pracovník…………… x dní

$x : 18 = 6 : 1$

$\frac{x}{18} = \frac{6}{1}$

$x = 18 \cdot 6 = 108$

I tuto úlohu budeme řešit stejným způsobem jako předešlé příklady, pomocí trojčlenky.

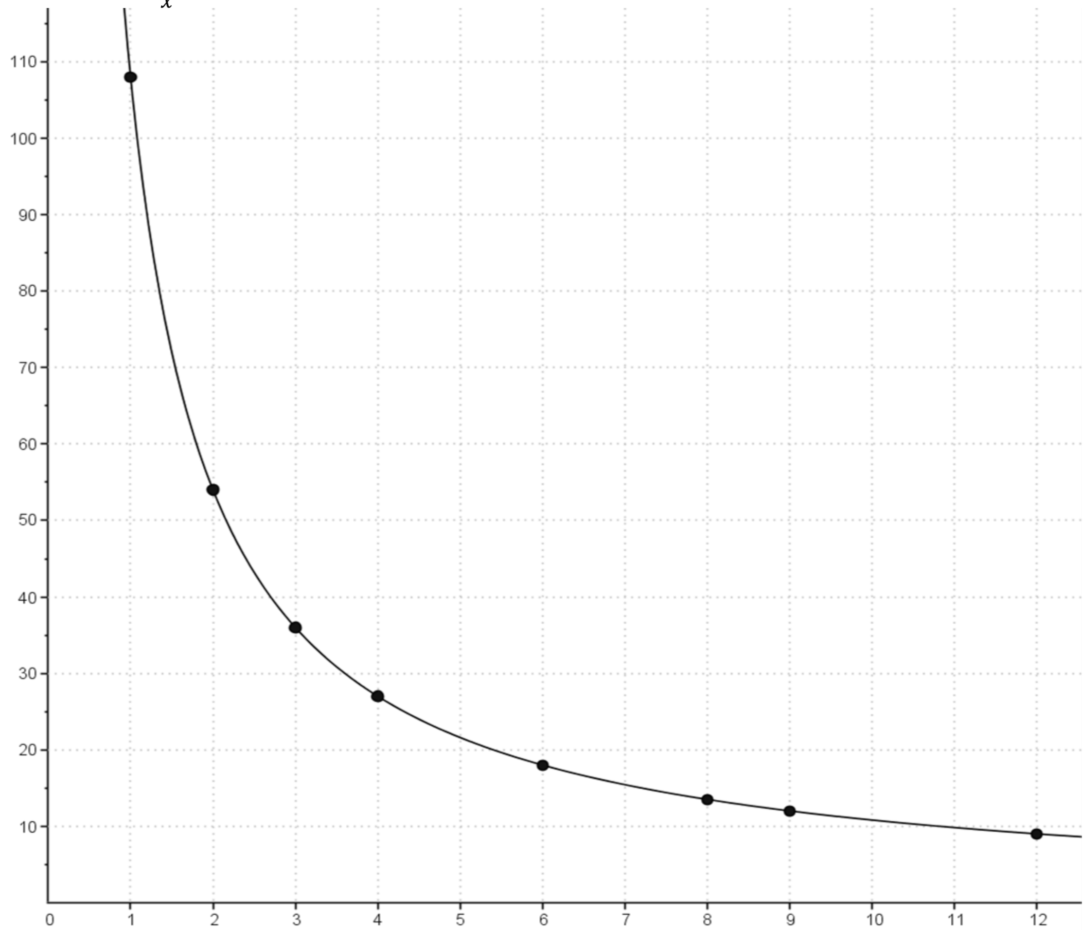
Výsledkem je, že jeden pracovník bude okurky sklízet 108 dní. Od tohoto výsledku vypočítáme stejným způsobem, kolik dní bude sklizeň okurek trvat 2, 3, 4, 8, 9, 12 pracovníkům.

Tabulka 1.10:

x (počet pracovníků)	6	1	2	3	4	8	9	12
y (počet dnů)	18	108	54	36	27	13,5	12	9

b)

Graf 1.6: $f: y = \frac{108}{x}$



Příklad 4: Sestroj graf nepřímé úměrnosti s koeficientem *k* = 4; $1 \leq x \leq 10$. $([1], s. 90)$

Řešení:

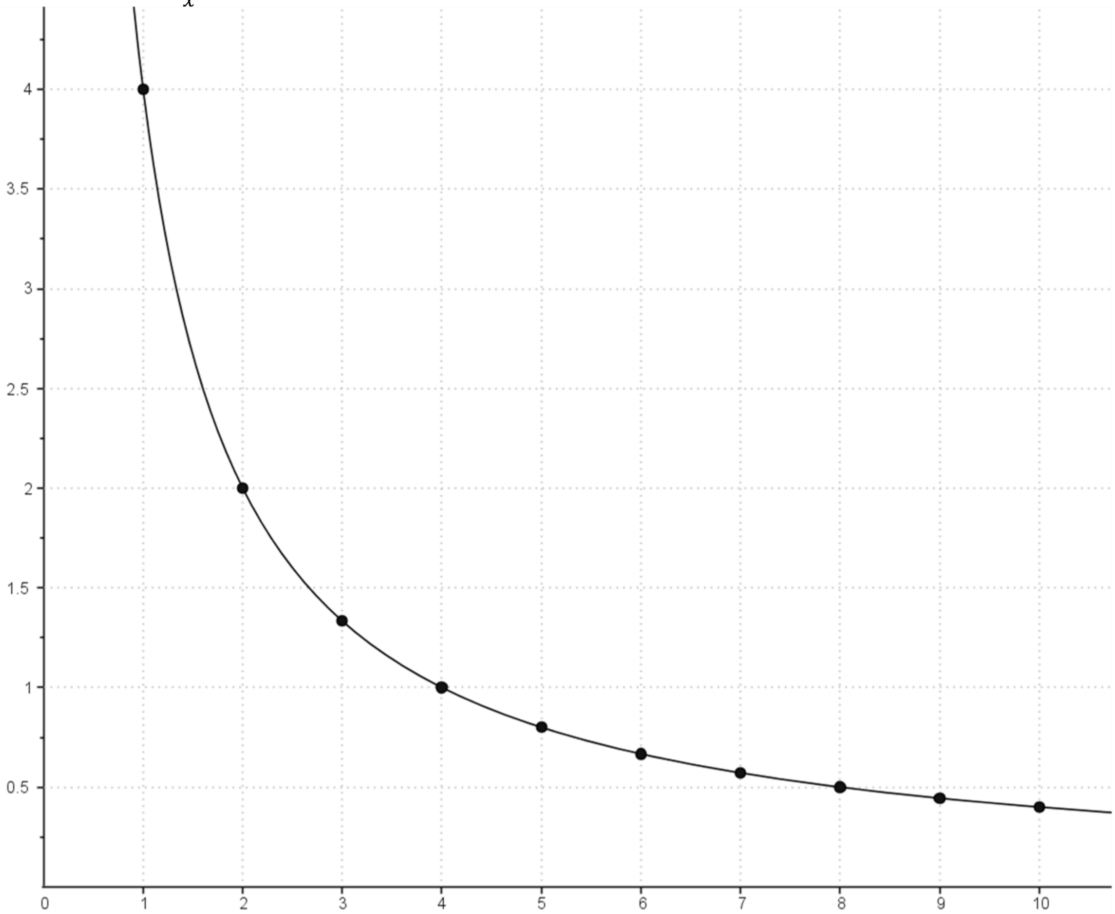
Vezmeme-li základní vztah pro nepřímou úměrnost $y = \frac{k}{x}$ a dosadíme za *k* = 4, dostaneme $y = \frac{4}{x}$, sestavíme si tabulku pro všechna přirozená čísla od jedné do deseti.

Tabulka 1.11:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Poté zaneseme vypočítané body do grafu a proložíme zmíněnými body křivku, část hyperboly.

Graf 1.7: $f: y = \frac{4}{x}$



2. Devátý ročník

V rámci kapitoly Devátý ročník se zaměříme na zavedení funkcí do matematiky základní školy a s nimi související příklady. Tato kapitola se tak bude dělit na několik podkapitol, zaměříme se na zadání funkce, definiční obor funkce, vlastnosti funkce (rostoucí, klesající, konstantní funkce) či na konstrukci grafu funkce. Jelikož vycházíme ze standardů matematiky, budeme se nejprve zaměřovat na příklady, ve kterých půjde o poznání funkční závislosti na základě textu úlohy, tabulky, grafu či rovnice. Dále se zaměříme na příklady, ve kterých na základě rovnice či tabulky funkční závislosti vytvoříme graf.

Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu jsou učebnice pro základní školy - Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 9. ročník ZŠ – funkce, podobnost, goniometrické funkce a Rosecká, Z.: Algebra: učebnice pro 9. ročník. Jelikož je velká část kapitoly postavena právě na poslední ze zmiňovaných učebnic, setkáme se v řešení i s pojmy interval, množina bodů a budeme s nimi pracovat, ač se mnohdy jedná o kurikulum 1. ročníku střední školy.

2.1 Funkce a její definiční obor

Funkce f je předpis, který každému číslu ***x*** z nějaké množiny ***přiřazuje právě jedno číslo y***. Proměnné ***x*** říkáme ***nezávisle proměnná***, proměnné ***y*** říkáme ***závisle proměnná***. Množinu všech hodnot nezávisle proměnné ***x*** nazýváme ***definiční obor funkce f*** a značíme ji ***D(f)***. Množinu všech hodnot závisle proměnné *y* nazýváme ***obor hodnot funkce f*** a značíme ji ***H(f).*** [2]

2.1.1 Zadání funkce

Funkce vyjadřujeme: ([7], $s.75$)

a) rovnicí (vzorcem): se zadaným definičním oborem *D(f)*

b) tabulkou: ke zvoleným hodnotám proměnné x jsou přiřazeny funkční hodnoty y

c) grafem: grafem funkce je množina všech bodů $[x; y]$, kde $x \in \boldsymbol{D}(f)$ a $y \in \boldsymbol{H}(f)$

Příklad 1: Urči, zda je tabulkou zadána funkce, pokud ano, urči její definiční obor. (vlastní zadání)

a) *Tabulka 2.1:*

x	-3	2	-1	4	1	2	4	-2	5
y	5	2	8	3	0	4	-1	8	-4

b) *Tabulka 2.2:*

x	0	2	-4	5	3	-1	-3	1	-5
y	2	5	3	1	8	4	0	7	-1

Řešení:

a) *Tabulka 2.1:*

x	-3	2	-1	4	1	2	4	-2	5
y	5	2	8	3	0	4	-1	8	-4

Jak vidíme při důkladném pohledu na zadanou tabulku, k hodnotě x = 2 jsou přiřazeny dvě hodnoty proměnné y (y = 2, y = 4), stejně tak k hodnotě x = 4 jsou přiřazeny dvě různé hodnoty proměnné y (y = 3, y = -1). Jak vyplývá ze základní definice funkce, pokud je k jedné hodnotě x přiřazena více než jedna hodnota y, nejedná se tedy o funkci.

b) *Tabulka 2.2:*

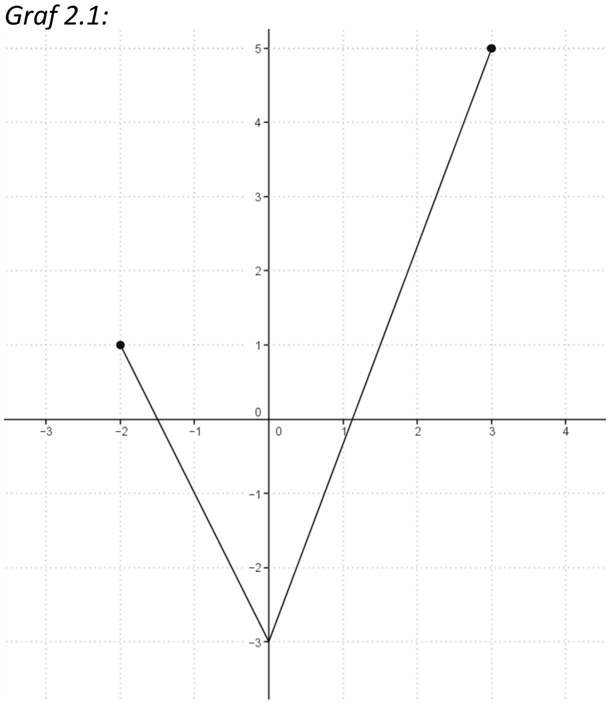
x	0	2	-4	5	3	-1	-3	1	-5
y	2	5	3	1	8	4	0	7	-1

Jak vidíme při důkladném pohledu na zadanou tabulku, ke každé hodnotě *x* je přiřazena právě jedna hodnota *y* a jak vyplývá ze základní definice funkce, pokud je ke každé hodnotě proměnné *x* přiřazena právě jedna hodnota *y*, jedná se o funkci. Definiční obor funkce jsou všechny hodnoty proměnné x. $D(f) = \{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$.

Příklad 2: Urči, zda je grafem zadána funkce, pokud ano, urči:

a) definiční obor
b) obor hodnot
c) zapište hodnotu funkce přiřazenou číslu -1, 0 a 3. ($[5], s. 13$)

Graf 2.1:



Řešení:

a) Hodnoty $D(f)$ budeme hledat na ose x. Ze zadaného grafu vidíme, že funkce jím zadaná přiřazuje hodnoty y pouze proměnným x z intervalu $\langle -2; 3 \rangle$. Můžeme to zapsat několika způsoby, například $D(f) = \langle -2; 3 \rangle$ nebo $-2 \leq x \leq 3$.

b) Hodnoty $H(f)$ budeme hledat na ose y. Ze zadaného grafu vidíme, že proměnné y nabývají pouze hodnot z intervalu $\langle -3; 5 \rangle$. Můžeme to zapsat několika způsoby, například $H(f) = \langle -3; 5 \rangle$ nebo $-3 \leq x \leq 5$.

c) Ze zadaného grafu vidíme, že k proměnné $x = -1$ je přiřazena hodnota $y = -1$. Bodem grafu je tedy bod o souřadnicích $[-1; -1]$. Dále vidíme, že k proměnné $x = 0$ je přiřazena hodnota $y = -3$. Bodem grafu je tedy bod o souřadnicích $[0; -3]$. Poslední hledaný bod grafu má souřadnici $x = 3$. K této hodnotě je přiřazena hodnota $y = 5$. Bodem grafu je tedy bod o souřadnicích $[3; 5]$.

2.2 Lineární funkce

Lineární funkce je funkce daná vzorcem $\boldsymbol{y = kx + q}$, kde *k* a *q* jsou libovolná čísla; její definiční obor tvoří všechna čísla, tedy $x \in \boldsymbol{R}$. Grafem lineární funkce je **přímka**. $([5], s. 18)$

2.2.1 Konstantní funkce

Lineární funkce, která je dána vzorcem $\boldsymbol{y = q}$, se nazývá konstantní funkce. Platí, že pro všechny hodnoty proměnné *x* je hodnota proměnné *y* konstantní (stejná). Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. $([5], s. 20)$

2.2.2 Rostoucí funkce

Rostoucí funkce je funkce, pro kterou platí: *zvětšují-li* se hodnoty proměnné *x*, *zvětšují* se hodnoty funkce.

Platí-li pro lineární funkci ve tvaru $y = kx + q$, že $k > 0$ pak říkáme, že funkce je rostoucí. $([5], s. 23, 24)$

2.2.3 Klesající funkce

Klesající funkce je funkce, pro kterou platí: *zvětšují-li* se hodnoty proměnné *x*, *zmenšují* se hodnoty funkce.

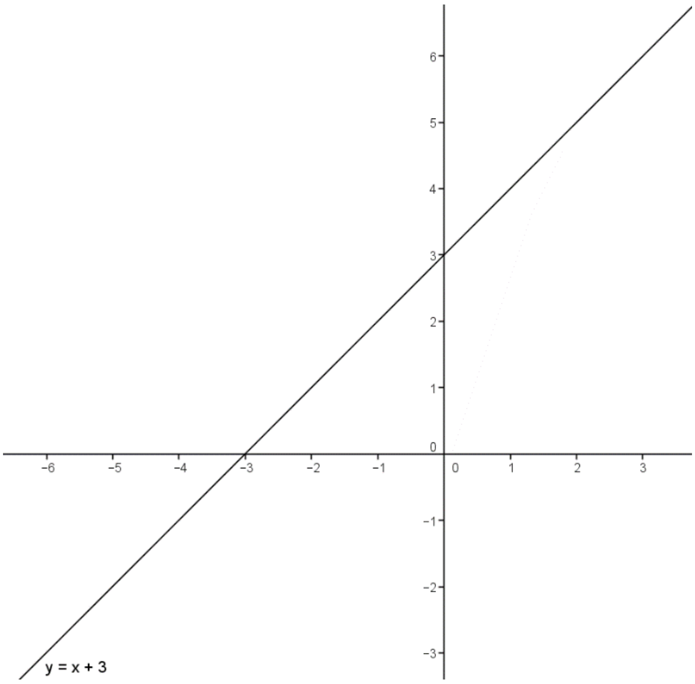
Platí-li pro lineární funkci ve tvaru $y = kx + q$, že $k < 0$, pak říkáme, že funkce je klesající. $([5], s. 23, 24)$

Příklad 1: Sestrojte graf lineární funkce a určete, zda jde o rostoucí, klesající, či konstantní funkci. $([5], s. 19)$

a) $y = x + 3$
b) $y = 3x - 1$
c) $y = -2x + 3$

Řešení:

Graf 2.2: $f: y = x + 3$



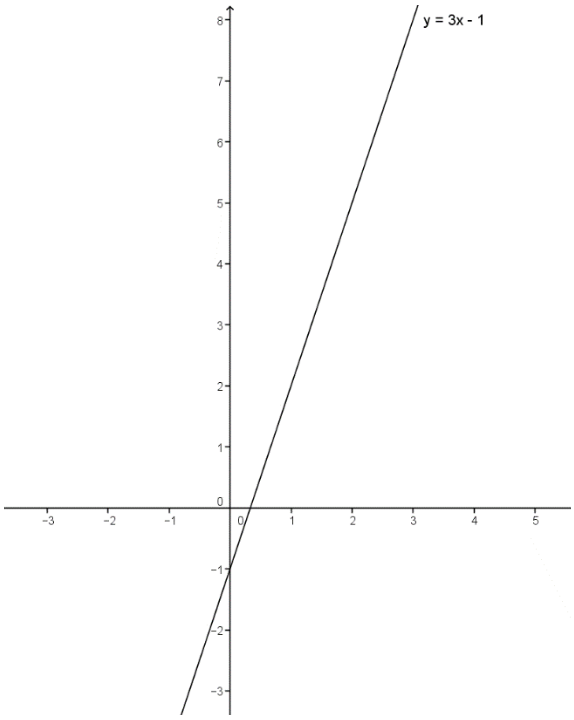
a) Jak ze základních údajů o lineárních funkcích víme, grafem lineární funkce je přímka a pro sestrojení grafu lineární funkce (přímky) potřebujeme znát dva body tohoto grafu.

Nejjednodušším způsobem vypočtení dvou bodů je výpočet průsečíků s osami. Je tedy třeba dosadit nulu nejprve za neznámou x a poté i za y. Do vztahu $y = x + 3$, tedy nejprve dosadíme nulu za x. Vyjde nám tak vztah $y = 0 + 3 = 3$, tím získáme první průsečík $[0; 3]$. Poté dosadíme nulu za neznámou y. Dostaneme tedy výraz $0 = x + 3$, když převedeme neznámou na jednu stranu a známé hodnoty na druhou, dostaneme vztah $x = -3$, tím získáme druhý průsečík $[-3; 0]$. Těmito dvěma zjištěnými body vedeme přímku, která je grafem hledané funkce.

V další části se zaměříme na to, zda je funkce rostoucí, klesající, či konstantní. Vezmeme-li v úvahu, že máme zadaný vztah $y = x + 3$, můžeme tento vzorec lineární funkce rozebrat a dostaneme se k tomu, že $k = 1$ a $q = 3$. Z již zavedených a známých vztahů víme, že pokud $k > 0$, což pro tento vztah platí, jde o funkci rostoucí.

b) I ve druhém případě budeme postupovat obdobně, opět budeme potřebovat dva body funkce, kterými proložíme přímku. Opět se pokusíme najít průsečíky s osami. Budeme dosazovat nuly za neznámé, nejprve za neznámou x a poté i za y. Do vztahu $y = 3x - 1$, tedy nejprve dosadíme nulu za x. Vyjde nám tak vztah $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$, tím získáme první průsečík $[0; -1]$. Poté dosadíme nulu za neznámou y. Dostaneme tedy výraz $0 = 3x - 1$, když převedeme neznámou na jednu stranu a známé hodnoty na druhou, dostaneme vztah $3x = 1$, poté stačí obě strany vydělit třemi. Vyjde nám tedy $x = \frac{1}{3}$, tím získáme druhý průsečík $\left[\frac{1}{3}; 0\right]$. Jelikož je pro přesnost většinou lepší mít celá čísla, můžeme místo dosazení nuly za y, dosadit za x například číslo jedna. $y = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$. Dostaneme tak bod o souřadnicích $[1; 2]$. A poté těmito dvěma body vedeme přímku grafu lineární funkce $y = 3x - 1$.

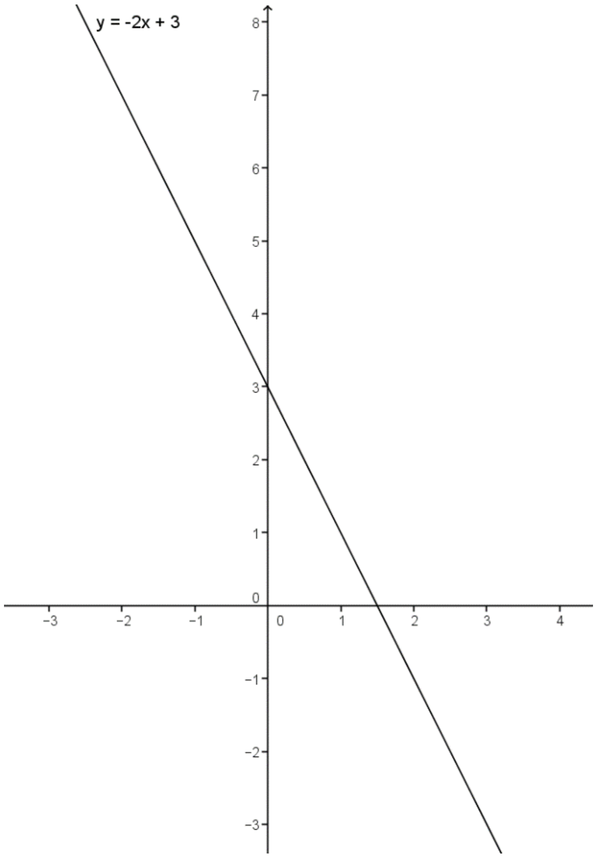
Graf 2.3: g: $y = 3x - 1$



V další části se zaměříme na to, zda je funkce rostoucí, klesající, či konstantní. Vezmeme-li v úvahu, že máme zadaný vztah $y = 3x - 1$, můžeme tento vzorec lineární funkce rozebrat a dostaneme se k tomu, že $k = 3$ a $q = -1$. Z již zavedených a známých vztahů víme, že pokud $k > 0$, což pro tento vztah platí, jde o funkci rostoucí.

c) I ve třetím případě budeme postupovat obdobně, opět budeme potřebovat dva body funkce, kterými proložíme přímku. Znovu dosadíme nulu za neznámou x a poté dosadíme za x například číslo jedna. Do vztahu $y = -2x + 3$ tedy nejprve dosadíme nulu za x. Vyjde nám tak vztah $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$, tím získáme první průsečík $[0; 3]$. Poté dosadíme již předem zvolenou jedničku za neznámou x. Dostaneme tedy výraz $y = -2 \cdot 1 + 3 = -2 + 3 = 1$, dostaneme rovnost $y = 1$, tím získáme druhý průsečík $[1; 1]$. A poté těmito dvěma body vedeme přímku grafu lineární funkce $y = -2x + 3$.

Graf 2.4: $f: y = -2x + 3$



I v této části se zaměříme na to, zda je funkce rostoucí, klesající, či konstantní. Vezmeme-li v úvahu, že máme zadaný vztah $y = -2x + 3$, můžeme tento vzorec lineární funkce rozebrat a dostaneme se k tomu, že $k = -2$ a $q = 3$. Z již známých vztahů víme, že pokud je $k < 0$, což pro tento vztah platí, jde o funkci klesající.

Příklad 2: Plynárenská společnost účtuje rodině Novákových za každý krychlový metr plynu 5,17 Kč a navíc stálý měsíční poplatek 9,30 Kč. ($[5], s. 20$)

a) Vyjádři vztahem závislost celkové měsíční platby za plyn (v Kč) na objemu odebraného plynu (v m^3) a sestav tabulku vyjadřující spotřebu rodiny Novákových (do 20 m^3).
b) Nakresli pro Novákovy graf funkce vyjadřující tuto závislost; vycházej z toho, že nejvyšší měsíční odběr plynu je v jejich domácnosti 20 m^3.

Řešení:

a) Obecný tvar vztahu je $y = k \cdot x + q$. Dosadíme tedy do tohoto obecného vztahu pro nás známé hodnoty. Vezmeme-li si ze zadání číselné údaje, po krátkém zhodnocení dojdeme k tomu, že cena za 1 m^3 je 5,17 Kč a že tuto hodnotu budeme měnit podle počtu krychlových metrů. Dosadíme tedy částku 5,17 Kč za neznámou k a za proměnnou x budeme dosazovat spotřebovaný počet krychlových metrů plynu. Poté se zaměříme na stálý měsíční poplatek 9,30 Kč, tento poplatek je stálý, tedy ať je spotřeba jakákoliv, měsíční poplatek se nemění. Do vztahu tedy dosadíme měsíční poplatek za neznámou q. Výsledkem tedy bude $y = 5{,}17 \cdot x + 9{,}30$.

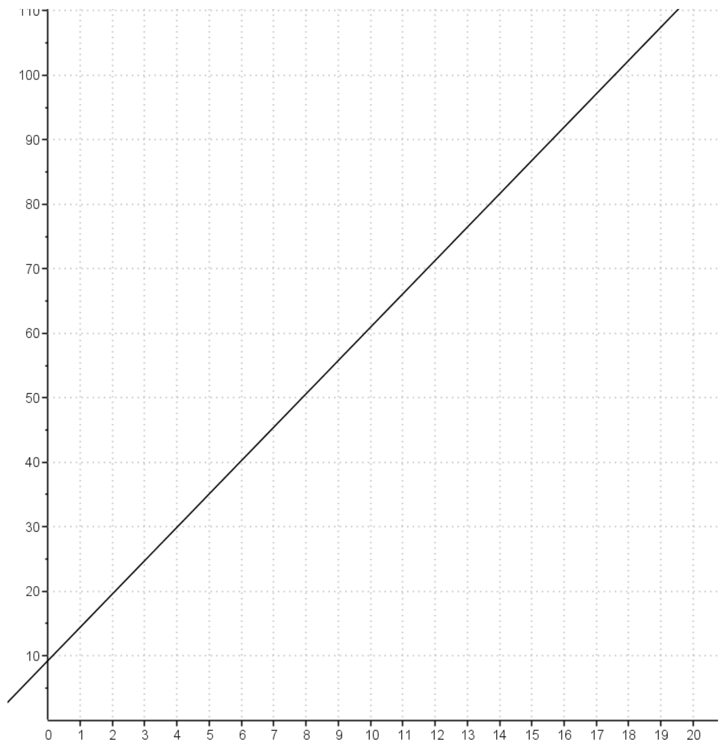
Tabulka 2.3:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	14,47	19,64	24,81	29,98	35,15	40,32	45,49	50,66	55,83	61

Tabulka 2.4:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	66,17	71,34	76,51	81,68	86,85	92,02	97,19	102,36	107,53	112,7

b) *Graf 2.5:* $f: y = 5{,}17 \cdot x + 9{,}30$



Příklad 3: Rozhodni, zda bod $B = [6; 5]$ je bodem grafu lineární funkce. $([7], s. 82)$

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = 3x - 1$

c) $y = x - 1$

d) $y = x + 5$

<u>Řešení:</u>

a) Zda bod B je bodem grafu zjistíme jednoduchým dosazením do zadaného vztahu. Dosazujeme za proměnnou x, a poté porovnáme výsledek s hodnotou proměnné y bodu B. Dosadíme-li za proměnnou x číslo 6, dostaneme výraz $y = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2$, $y = 3 + 2 = 5$. Výsledek porovnáme s y-ovou souřadnicí bodu B, $y_B = 5$. Hodnota y po dosazení $x_B = 6$ je rovna číslu 5, což se rovná y-ové souřadnici bodu B. Bod B je bodem grafu lineární funkce $y = \frac{1}{2}x + 2$.

b) I v tomto případě budeme zjišťovat, zda bod B je bodem grafu. Zjistíme to jednoduchým dosazením do zadaného vztahu. Opět dosazujeme za proměnnou x, a poté porovnáme výsledek s hodnotou proměnné y bodu B. Dosadíme-li za proměnnou x číslo 6, dostaneme výraz $y = 3 \cdot 6 - 1$, $y = 18 - 1 = 17$. Výsledek porovnáme s y-ovou souřadnicí bodu B, $y_B = 5$. Hodnota y po dosazení $x_B = 6$ je rovna číslu 17, což se nerovná y-ové souřadnici bodu B. Bod B není bodem grafu lineární funkce $y = 3x - 1$.

c) Opět dosazujeme číslo 6 za proměnnou x, a poté porovnáme výsledek s hodnotou proměnné y bodu B. Po dosazení dostaneme výraz $y = 1 \cdot 6 - 1$, $y = 6 - 1 = 5$. Výsledek porovnáme s y-ovou souřadnicí bodu B, $y_B = 5$. Hodnota y po dosazení $x_B = 6$ je rovna číslu 5, což se rovná y-ové souřadnici bodu B. Bod B je bodem grafu lineární funkce $y = x - 1$.

d) I v posledním bodě budeme zjišťovat, zda bod B je bodem grafu. Opět dosazujeme za proměnnou x, a poté porovnáme výsledek s hodnotou proměnné y bodu B. Dosadíme-li za proměnnou x číslo 6, dostaneme výraz $y = 1 \cdot 6 + 5$, $y = 11$. Výsledek porovnáme s y-ovou souřadnicí bodu B, $y_B = 5$. Hodnota y po dosazení

$x_B = 6$ je rovna číslu 11, což se nerovná y-ové souřadnici bodu B. Bod B není bodem grafu lineární funkce $y = x + 5$.

Příklad 4: Určete definiční obory a obory hodnot zadaných funkcí. (vlastní zadání)

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 4x - 3$

Řešení:

a) Pro všechny lineární funkce zadané vzorcem či rovnicí bez dalších podmínek platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla, tedy $D(f) = R$. Pokud se zaměříme na obor hodnot lineární funkce, je postup podobný. Můžeme-li dosadit za proměnnou x libovolné reálné číslo, pak i obor hodnot této funkce budou všechna reálná čísla, tedy $H(f) = R$.

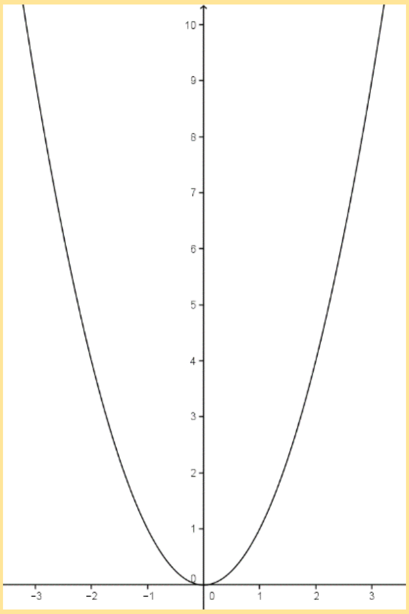
b) I ve druhém bodě platí totéž co v bodě a). Pro všechny lineární funkce zadané vzorcem či rovnicí bez dalších podmínek platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla, tedy $D(f) = R$. Pokud se zaměříme na obor hodnot lineární funkce, je postup podobný. Můžeme-li dosadit za proměnnou x libovolné reálné číslo, pak i obor hodnot této funkce budou všechna reálná čísla, tedy $H(f) = R$.

2.3 Kvadratické funkce

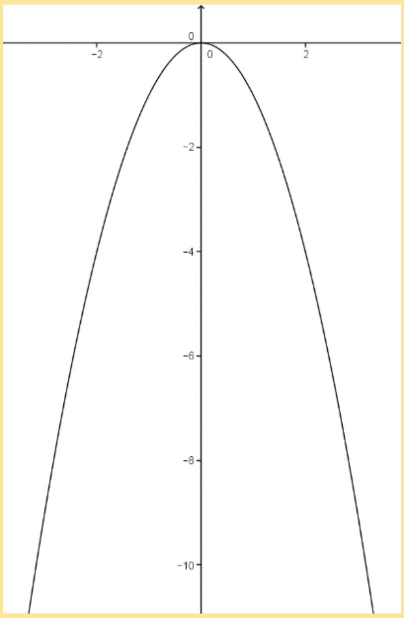
Funkce, jejíž definiční obor tvoří všechna čísla a která je dána vzorcem $\boldsymbol{y = kx^2}$, kde *a* je číslo různé od nuly, se nazývá **kvadratická funkce**. Grafem kvadratické funkce se nazývá **parabola**.

Pro každé číslo $\boldsymbol{k \neq 0}$ prochází graf kvadratické funkce $\boldsymbol{y = kx^2}$ počátkem soustavy souřadnic *Oxy* a je osově souměrný podle osy y.

k > 0



k < 0



Obor hodnot tvoří všechna čísla

větší nebo rovna nule.

menší nebo rovna nule. ([5], $s.$ 32, 33)

Kvadratická funkce může být zadaná také vzorcem ve tvaru $\boldsymbol{y = kx^2 + q}$, kde $k \neq 0$. Graf funkce $\boldsymbol{y = kx^2 + q}$ dostaneme, když graf funkce $\boldsymbol{y = kx^2}$ posuneme o $|q|$ jednotek vzhledem k ose $\boldsymbol{x}$,

- je-li $q > 0$, „nahoru“
- je-li $q < 0$, „dolů“. ([7], $s.$ 90)

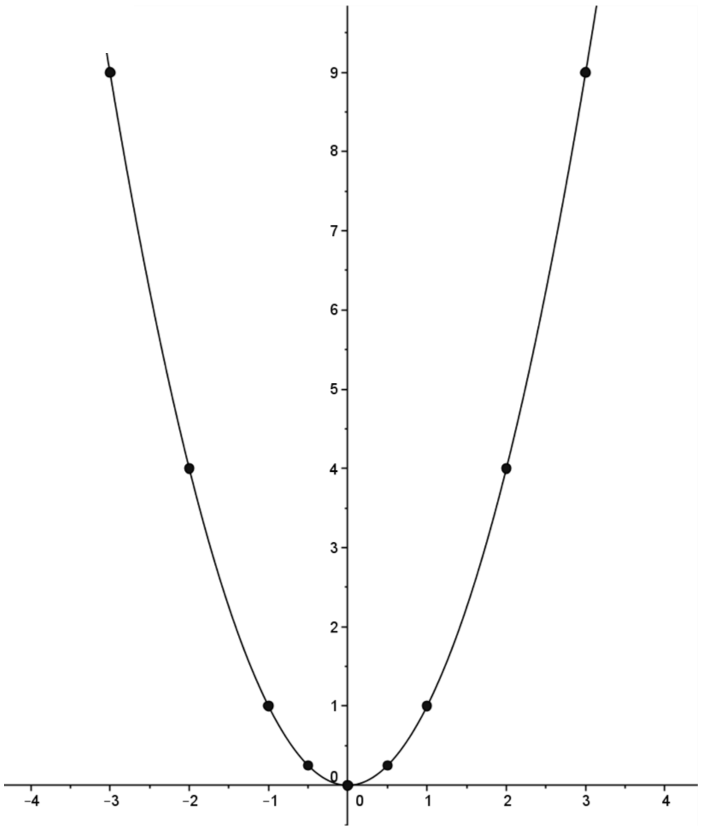
Příklad 1: Sestrojte graf kvadratické funkce $y = x^2$, sestavte tabulku, pro $x \in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. $([7], s. 89)$

Řešení:
Tabulku sestavíme dosazováním hodnot x do vztahu $y = x^2$, výsledky zapisujeme do druhého řádku tabulky. Na základě vypočítaných bodů sestavíme graf, do grafu zakreslíme body a jimi pak vedeme křivku. Grafem kvadratické funkce je parabola.

Tabulka 2.5:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Graf 2.6: $y = x^2$



Příklad 2: Zkoumejte vlastnosti kvadratické funkce. Porovnejte následující funkce: $f: y = 5x^2, g: y = -5x^2$. $([3], s. 73)$

a) Jak se liší jejich předpisy?
b) Sestrojte grafy obou funkcí a porovnejte je.
c) Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.
d) Jsou tyto funkce rostoucí nebo klesající.
e) Doplňte tabulky.

Tabulka 2.6: $f: y = 5x^2$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y							

Tabulka 2.7: $g: y = -5x^2$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y							

<u>Řešení:</u>

a) Již na první pohled se předpisy liší znaménkem, znamená to tedy, že se budou lišit také grafy ve své orientaci. Parabola $y = 5x^2$ nabývá kladných hodnot, parabola $y = -5x^2$ nabývá záporných hodnot.
b) Jak už bylo řečeno v bodě a), parabola funkce $y = 5x^2$ nabývá kladných hodnot a bude tak orientovaná svými rameny „nahoru“, parabola $y = -5x^2$ nabývá záporných hodnot a bude tak orientovaná svými rameny „dolů“.
c) Definiční obor všech kvadratických funkcí jsou všechna reálná čísla, pro obě funkce tedy platí $D(f) = R$. Jak už bylo řečeno v předchozích bodech, parabola funkce $y = 5x^2$ nabývá kladných hodnot a obor hodnot této funkce je tedy $H(f) = \langle 0; +\infty)$. Podobně potom platí, že když parabola $y = -5x^2$ nabývá záporných hodnot, potom pro obor hodnot této funkce platí $H(f) = (-\infty; 0\rangle$.
d) Kvadratické funkce nejsou na celém svém definičním oboru jen rostoucí, či jen klesající, jde ovšem definiční obor rozdělit a rozhodnout, na jaké jeho části je funkce rostoucí a na jaké je klesající. Vezmeme-li funkci $y = 5x^2$, víme, že definiční obor jsou všechna reálná čísla. Klesající je však funkce pouze na části grafu, a to na intervalu $D(f) = (-\infty; 0\rangle$. Rostoucí je pak funkce ve zbylé části grafu, a to na intervalu

$D(f) = \langle 0; +\infty)$. Pokud se zaměříme na funkci $y = -5x^2$, znovu jsou definičním oborem všechna reálná čísla. Rostoucí je funkce pouze na části grafu, a to na intervalu $D(f) = (-\infty; 0\rangle$. Klesající je pak funkce ve zbylé části grafu, a to na intervalu $D(f) = \langle 0; +\infty)$.

e)

Tabulka 2.6: $f: y = 5x^2$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	80	20	5	0	5	20	80

Tabulka 2.7: $g: y = -5x^2$

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-80	-20	-5	0	-5	-20	-80

Příklad 3: Rozhodni, které z bodů $A = [0; 0], B = [2; 8], C = [-2; 10], D = [-0,1; 0,25], E = [0,1; 0,025]$ patří do grafu kvadratické funkce $y = 2,5x^2$. $([5], s. 32)$

Řešení:

Abychom mohli rozhodnou, zda je zadaný bod bodem grafu kvadratické funkce, je třeba tento bod dosadit do zadaného předpisu (vzorce) kvadratické funkce. Můžeme dosadit hodnotu proměnné x a poté výsledek porovnat s y-ovou souřadnicí zadaného bodu, nebo můžeme dosadit obě hodnoty do výrazu a rozhodnout, zda se levá a pravá strana rovnají či nikoliv.

Bod A: Dosadíme-li do předpisu $y = 2,5x^2$ x-ovou souřadnici bodu A, tedy nulu, dostaneme výraz $y = 2,5 \cdot 0^2 = 0$. Porovnáme výslednou hodnotu s y-ovou hodnotou bodu A a dostáváme rovnost $0 = 0$.

Bod B: Pokud u bodu B zvolíme druhý možný postup, do předpisu $y = 2,5x^2$ dosadíme souřadnice bodu B, tedy $B = [2; 8]$. Dostaneme se tedy k výrazu $8 = 2,5 \cdot 2^2$, umocněním ve výrazu dostaneme $8 = 2,5 \cdot 4$ a násobením dostáváme nerovnost $8 \neq 10$. Z toho vyplývá, že bod B není bodem grafu kvadratické funkce s předpisem $y = 2,5x^2$.

Bod C: Pokud i u bodu C zvolíme druhý možný postup, do předpisu $y = 2{,}5x^2$ dosadíme souřadnice bodu C, tedy $C = [-2; 10]$. Dostaneme se tedy k výrazu $10 = 2{,}5 \cdot (-2)^2$, umocněním ve výrazu dostaneme $10 = 2{,}5 \cdot 4$ a násobením dostáváme rovnost $10 = 10$. Z toho vyplývá, že bod C je bodem grafu kvadratické funkce s předpisem $y = 2{,}5x^2$.

Bod D: Pokud se zase vrátíme k prvnímu postupu, dosadíme do předpisu $y = 2{,}5x^2$ x-ovou souřadnici bodu D, tedy $x_D = -0{,}1$, dostaneme výraz $y = 2{,}5 \cdot (-0{,}1)^2 = 2{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}025$. Porovnáme výslednou hodnotu s y-ovou hodnotou bodu D a dostáváme nerovnost $0{,}25 \neq 0{,}025$.

Bod E: Pokud znovu použijeme první typ řešení, dosadíme do předpisu $y = 2{,}5x^2$ x-ovou souřadnici bodu E, tedy $x_E = 0{,}1$, dostaneme výraz $y = 2{,}5 \cdot 0{,}1^2 = 2{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}025$. Porovnáme výslednou hodnotu s y-ovou hodnotou bodu D a dostáváme rovnost $0{,}025 = 0{,}025$.

Příklad 4: Určete definiční obory a obory hodnot zadaných funkcí. (vlastní zadání)

a) $y = x^2$

b) $y = 3x^2 + 2$

c) $y = -5x^2$

<u>Řešení:</u>

a) Pro všechny kvadratické funkce zadané vzorce či rovnicí bez dalších podmínek platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla, teda $D(f) = R$. Pokud se chceme zaměřit na obor hodnot kvadratické funkce, musíme se zaměřit na to, zda ve vzorci $y = ax^2$ je hodnota koeficientu a větší, či menší než nula. V našem zadání je $a = 1$, což je větší než nula. Obor hodnot této funkce jsou tedy všechna čísla větší nebo rovna nule, jinými slovy $H(f) = \langle 0; +\infty)$, či $y \geq 0$.

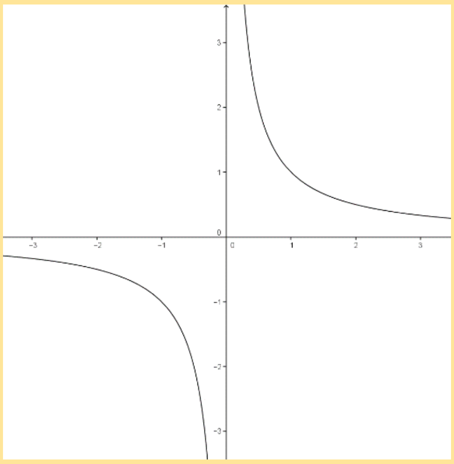
b) V tomto bodě platí totéž, co v bodě a). Pro všechny kvadratické funkce zadané vzorce, či rovnicí bez dalších podmínek platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla, teda $D(f) = R$. Pokud se chceme zaměřit na obor hodnot kvadratické funkce, musíme se zaměřit na to, zda ve vzorci $y = ax^2 + q$ je hodnota koeficientu a větší, či menší než nula. V našem zadání je $a = 3$, což je větší než nula, půjde tedy o kladná čísla. Obor hodnot této funkce ovšem ovlivňuje také koeficient q, posouvá vrchol paraboly do bodu o souřadnicích $V = [0; 2]$. Obor hodnot jsou tedy všechna čísla větší nebo rovna dvěma, jinými slovy $H(f) = \langle 2; +\infty)$, či $y \geq 2$.

c) I v tomto bodě se budeme řídit stejným postupem. Pro všechny kvadratické funkce zadané vzorce či rovnicí bez dalších podmínek platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla, tedy $D(f) = R$. Pokud se chceme zaměřit na obor hodnot kvadratické funkce, musíme se zaměřit na to, zda ve vzorci $y = ax^2$ je hodnota koeficientu a větší, či menší než nula. V našem zadání je $a = -5$, což je menší než nula. Obor hodnot této funkce jsou tedy všechna čísla menší nebo rovna nule, jinými slovy $H(f) = (-\infty; 0\rangle$, či $y \leq 0$.

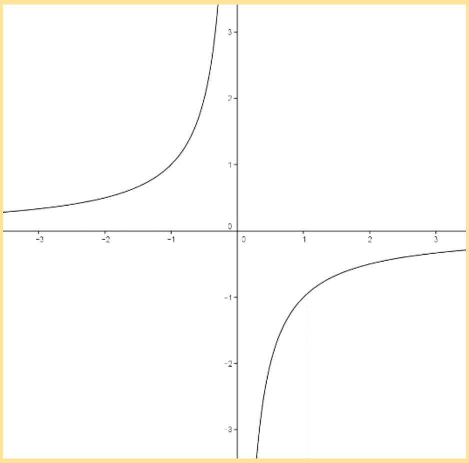
2.4 *Nepřímá úměrnost*

Nepřímá úměrnost je funkce vyjádřená vzorcem $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, kde $\boldsymbol{k}$ je libovolné číslo různé od nuly. Graf nepřímé úměrnosti, jejíž definiční obor tvoří všechna čísla různá od nuly, je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic a nazývá se ***hyperbola***.

$k > 0$



$k < 0$



Obor hodnot tvoří všechna čísla různá od nuly. $([5], s. 37)$

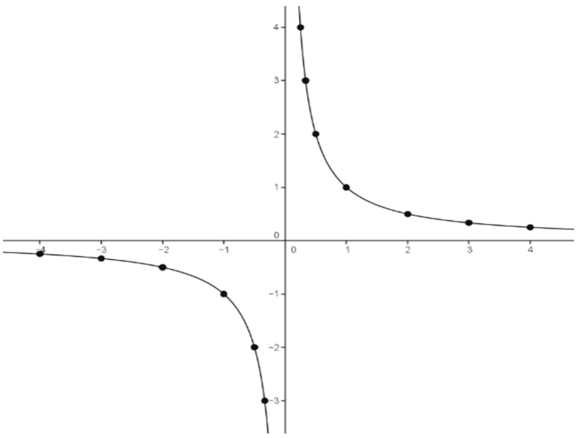
Příklad 1: Nakreslete graf funkce $y = \frac{1}{x}$, jejíž definiční obor tvoří čísla $-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4$. Nejdříve si sestavte tabulku, v níž zapíšete do prvního řádku všechna čísla definičního oboru a do druhého řádku přiřazené hodnoty funkce. $([5], s. 36)$

<u>Řešení:</u>

Tabulka 2.8:

X	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
Y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Graf 2.7: $f: y = \frac{1}{x}$



Příklad 2: Urči definiční obor a obor hodnot pro zadané funkce: (vlastní zadání)

a) $y = \frac{3}{x}$

b) $y = -\frac{2}{x}$

Řešení:

a) Pro všechny funkce nepřímé úměrnosti platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla bez hodnoty x, pro kterou hodnota výrazu neexistuje (jmenovatel roven nule). V našem případě tedy $x \neq 0$. Vyplývá z toho tedy, že definičním oborem pro funkci $y = \frac{3}{x}$ jsou všechna reálná čísla bez nuly. Jinak řečeno $D(f) = R\backslash\{0\}$ nebo $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Stejným způsobem pro všechny funkce nepřímé úměrnosti platí, že jejich oborem hodnot jsou všechna reálná čísla bez nuly. Vyplývá z toho tedy, že i pro funkci $y = \frac{3}{x}$ jsou oborem hodnot všechna reálná čísla bez nuly. Jinak řečeno $H(f) = R\backslash\{0\}$ nebo $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) Pro všechny funkce nepřímé úměrnosti (kladné i záporné) platí, že jejich definičním oborem jsou všechna reálná čísla bez hodnoty x, pro kterou hodnota výrazu neexistuje (jmenovatel roven nule). V našem případě tedy $x \neq 0$. Vyplývá z toho tedy, že definičním oborem pro funkci $y = -\frac{2}{x}$ jsou všechna reálná čísla bez nuly. Jinak řečeno $D(f) = R\backslash\{0\}$ nebo $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Stejným způsobem pro všechny funkce nepřímé úměrnosti platí, že jejich oborem hodnot jsou všechna reálná čísla bez nuly. Vyplývá z toho tedy, že i pro funkci $y = -\frac{2}{x}$ jsou oborem hodnot všechna reálná čísla bez nuly. Jinak řečeno $H(f) = R\backslash\{0\}$ nebo $H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Příklad 3: Zásoba sena na statku vystačí pro 12 koní na 1 den. Na jak dlouho vystačí pro 1 koně, na jak dlouho pro 2 koně (3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 koní)? ($[7], s. 91$)

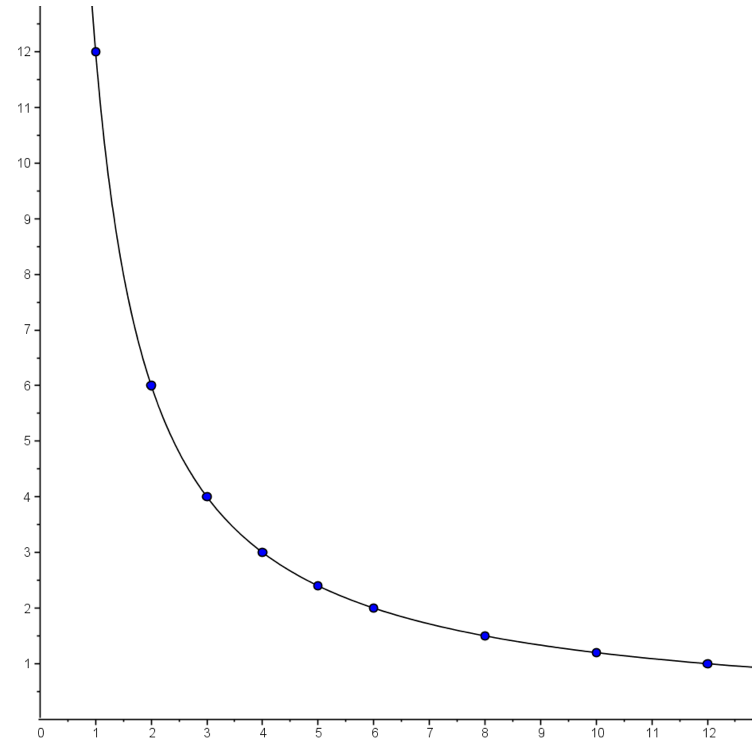
Řešení:

Počet dní, na které zásoba sena vystačí, závisí na počtu krmených koní. Proměnná x zastupuje počet koní, proměnná y je zástupce počtu dní, na které vystačí zásoba sena. Zvolené proměnné na sobě závisí nepřímo úměrně, kolikrát se zmenší počet koní na statku, tolikrát se zvětší doba, po kterou budou zásoby sena. Z toho nám vyplývá předpis nepřímé úměrnosti $y = \frac{12}{x}, (x \neq 0)$. Výpočty zapíšeme pro přehlednost do tabulky.

Tabulka 2.9:

x	1	2	3	4	5	6	8	10	12
y	12	6	4	3	2,4	2	1,5	1,2	1

Graf 2.8: $f: y = \frac{12}{x}$



Příklad 4: Zapiš vzorcem nepřímou úměrnost, do jejíhož grafu patří bod $A = [3; -4]$. $([5], s. 38)$

<u>Řešení:</u>

Vzorec nepřímé úměrnosti vypočteme tak, že do obecného vzorce dosadíme souřadnice bod A a dopočítáme koeficient nepřímé úměrnosti k. Do obecného vzorce $y = \frac{k}{x}$ dosadíme bod $A = [3; -4]$, dostaneme tedy tvar $-4 = \frac{k}{3}$, tento výraz vynásobíme číslem 3 a vyjde nám $k = -12$. Z toho vyplývá vzorec pro nepřímou úměrnost obsahující zadaný bod $y = -\frac{12}{x}$.

2.5 Grafické řešení soustavy rovnic

K řešení soustavy rovnic lze kromě početních metod použít i grafickou metodu řešení soustavy rovnic. *Nevýhodou* je, že se tato metoda dá aplikovat pouze na soustavu *dvou lineárních rovnic o dvou neznámých* a v některých případech jistá *nepřesnost výsledku* (lze přesně dopočítat).

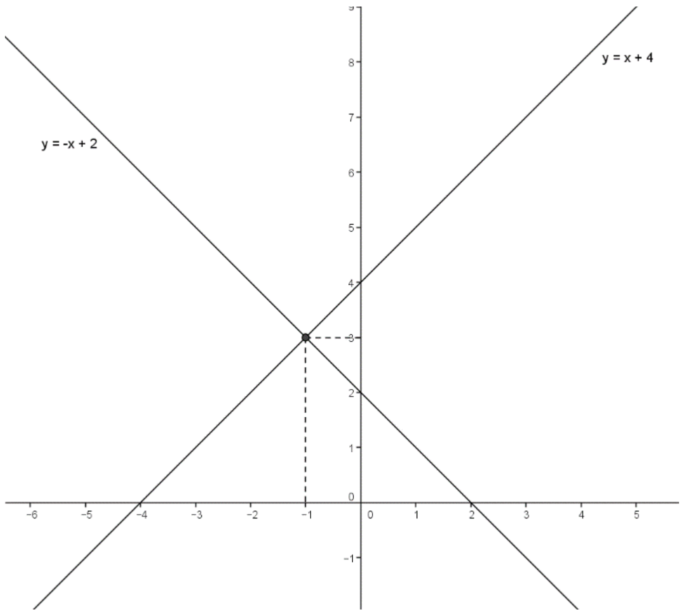
Příklad 1: Řeš graficky tyto soustavy rovnic. ($[5], s. 29$; $[7], s. 86$)

a) $y = x + 4$
$\quad y = -x + 2$

Řešení:

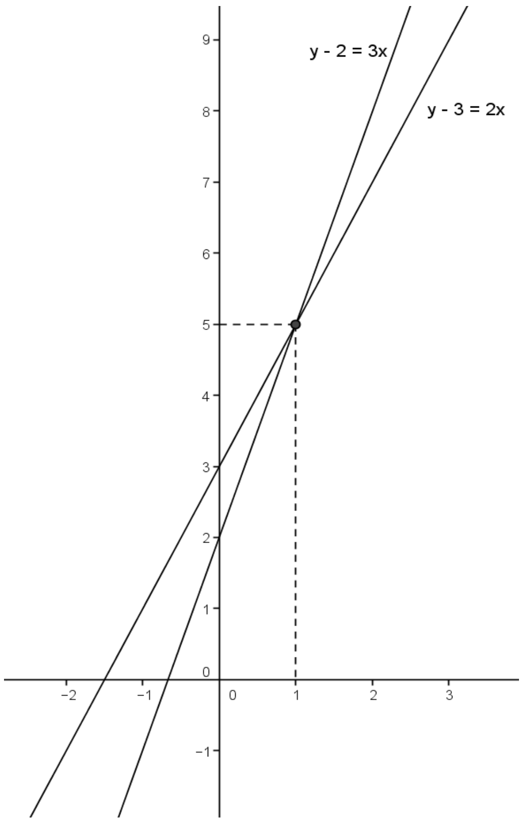
Soustavu rovnic $y = x + 4$, $y = -x + 2$ řešíme tak, že do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. Ze vzniklého grafu vyčteme, že průsečík má souřadnice $P = [-1,3]$.

Graf 2.9: $f: y = x + 4, g: y = -x + 2$



b) $y - 3 = 2x$
$y - 2 = 3x$

Graf 2.10: $f: y - 3 = 2x, g: y - 2 = 3x$

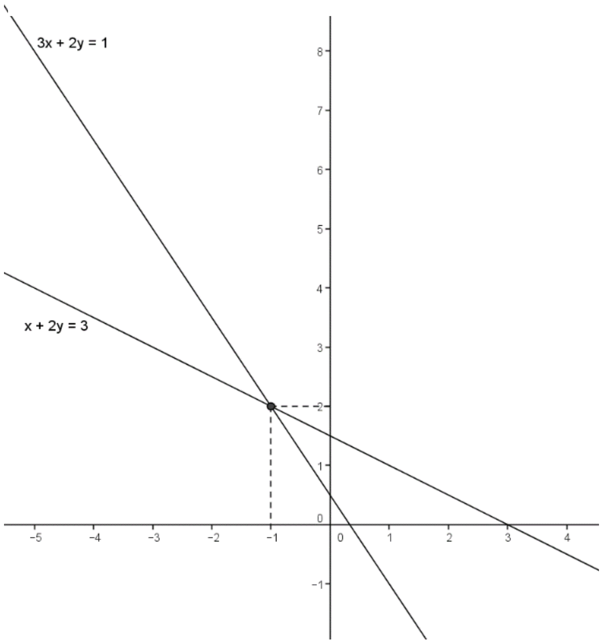


Řešení:

Soustavu rovnic $y - 3 = 2x$, $y - 2 = 3x$ řešíme tak, že nejprve vyjádříme z rovnic neznámou y. Vyjde nám tedy soustava ve tvaru $y = 2x + 3$, $y = 3x + 2$, poté do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. Ze vzniklého grafu vyčteme, že průsečík má souřadnice $P = [1,5]$.

c) $x + 2y = 3$
$3x + 2y = 1$

Graf 2.11: $f: x + 2y = 3, g: 3x + 2y = 1$

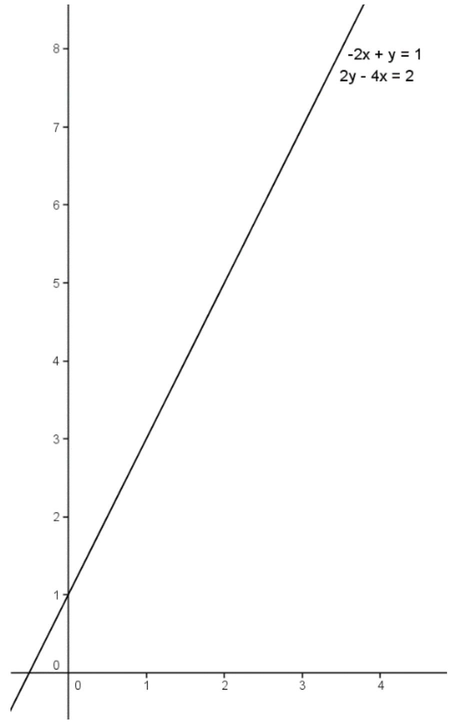


Řešení:

Soustavu rovnic $x + 2y = 3$, $3x + 2y = 1$ řešíme tak, že nejprve vyjádříme z rovnic neznámou y. Vyjde nám tedy soustava ve tvaru $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, poté do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. Ze vzniklého grafu vyčteme, že průsečík má souřadnice $P = [-1,2]$.

d) $-2x + y = 1$
$2y - 4x = 2$

Graf 2.12: $f\colon -2x + y = 1, g\colon 2y - 4x = 2$

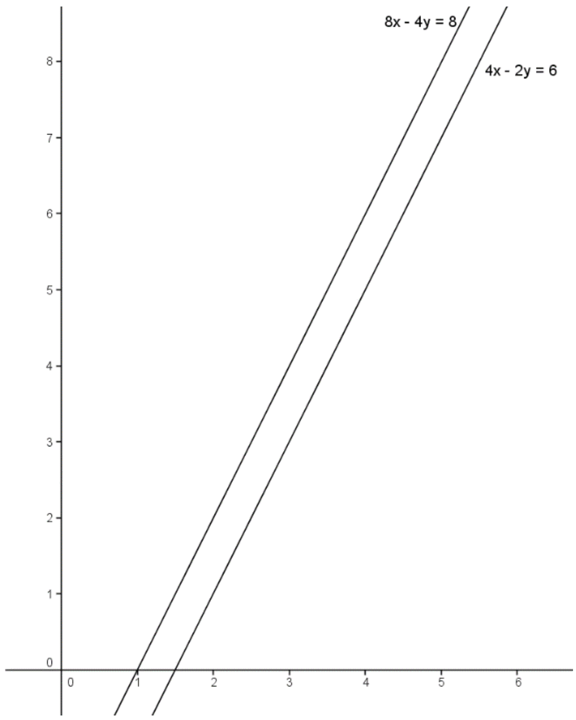


Řešení:

Soustavu rovnic $-2x + y = 1,\ 2y - 4x = 2$ opět řešíme vyjádřením neznámé y z rovnice. Vyjde nám tedy soustava ve tvaru $y = 2x + 1,\ y = 2x + 1$, poté do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. V tomto případě se jedná o rovnoběžné totožné přímky a to znamená, že zadaná soustava souřadnic má nekonečně mnoho řešení.

e) $4x - 2y = 6$
$8x - 4y = 8$

Graf 2.13: $f\colon 4x - 2y = 6, g\colon 8x - 4y = 8$



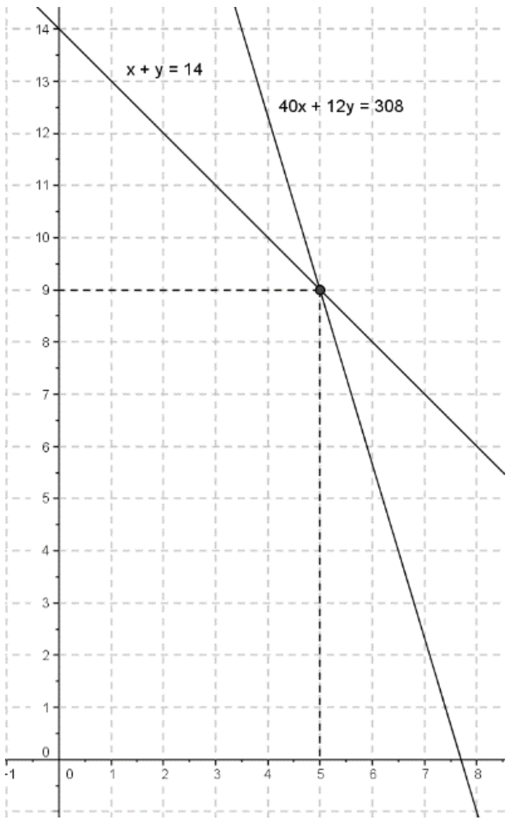
Řešení:

Soustavu rovnic $4x - 2y = 6$, $8x - 4y = 8$ opět řešíme vyjádřením neznámé y z rovnice. Vyjde nám tedy soustava ve tvaru $y = 2x - 3,\ y = 2x - 2$, poté do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. V tomto případě se jedná o rovnoběžné přímky bez průsečíku a to znamená, že zadaná soustava souřadnic nemá řešení.

Příklad 2: Za vstupné na výstavu bylo zaplaceno celkem 308 Kč. Lístek pro dospělé byl za 40 Kč, pro děti za 12 Kč. Na výstavu šlo společně 14 účastníků. Kolik to bylo dospělých a kolik dětí? $([7], s. 53)$

<u>Řešení:</u>

Graf 2.14: $f: x + y = 14, g: 40x + 12y = 308$



Nejprve si ze zadání musíme vytvořit soustavu rovnic. Neznámou x označíme počet dospělých a neznámou y označíme počet dětí. První rovnice bude ve tvaru $40x + 12y = 308$, tedy cena jednoho lístku krát počet dospělých plus cena dětského lístku krát počet dětí je rovno 308 Kč. Druhá rovnice bude ve tvaru $x + y = 14$, součet počtu lístků pro dospělé a počet lístků pro děti je roven 14.

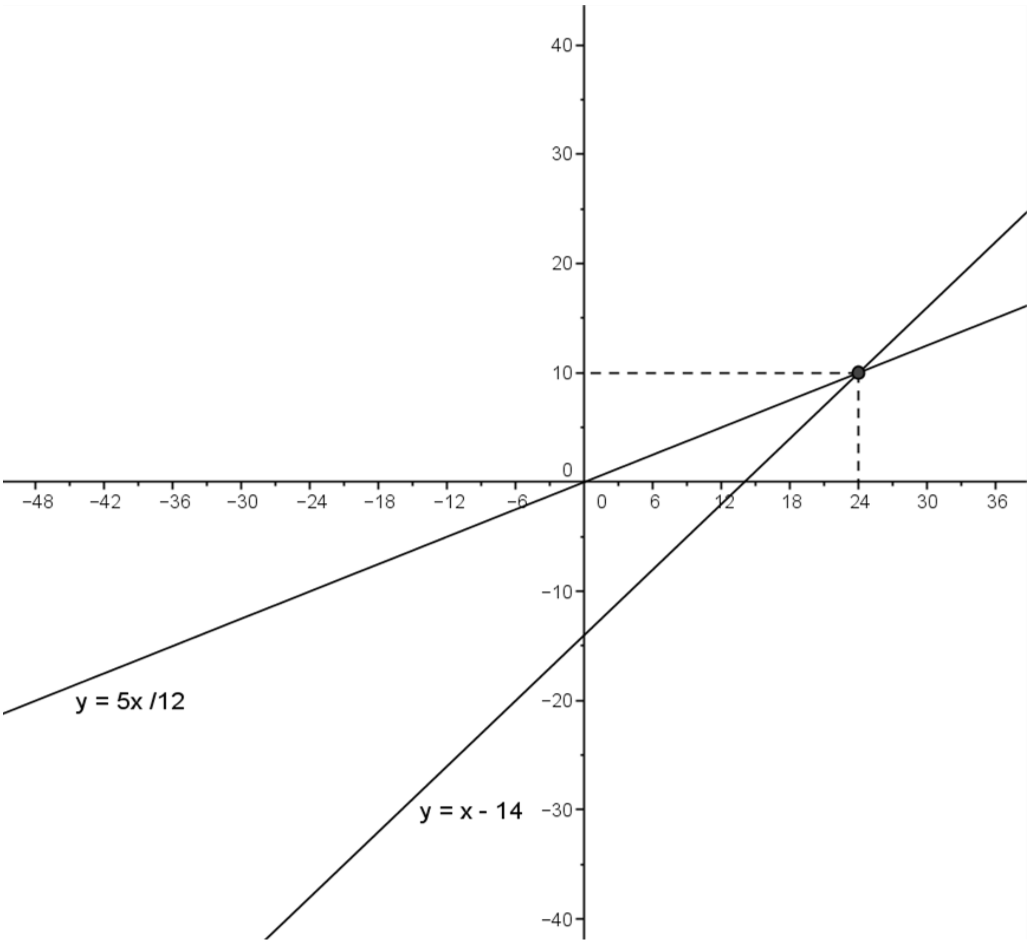
Soustavu rovnic $40x + 12y = 308$, $x + y = 14$ řešíme tak, že nejprve vyjádříme z rovnic neznámou y. Vyjde nám tedy soustava ve tvaru $y = -\frac{10}{3}x + \frac{77}{10}$, $y = -x + 14$, poté do soustavy souřadnic narýsujeme přímky rovnic (lineárních funkcí) a jejich průsečík je řešením této soustavy. Ze vzniklého grafu vyčteme, že průsečík má souřadnice $P = [5{,}9]$. Znamená to, že na výstavu šlo 5 dospělých a 9 dětí.

Příklad 3: Jedna čokoláda je o 14 Kč dražší než sešit. Pět čokolád stojí stejně jako 12 sešitů. Kolik korun stojí čokoláda, kolik sešit? ($[7], s. 53$)

<u>Řešení:</u>

Nejprve si musíme sestavit soustavu rovnic. Máme-li v zadání, že jedna čokoláda je o 14 Kč dražší než sešit, znamená to, že pokud si cenu jedné čokolády označíme neznámou x a cenu jednoho sešitu neznámou y, pak dostaneme rovnici $x = y + 14$. Dále je zadáno, že pět čokolád stojí stejně jako 12 sešitů, z toho vyplývá, že $5x = 12y$. Dostali jsme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pokud si z první rovnice vyjádříme neznámou y, vyjde nám rovnice, $y = x - 14$. I z druhé rovnice si vypočítáme neznámou y. Dostaneme výraz $y = \frac{5}{12}x$. Tam, kde se přímky v grafu protnou, je řešení soustavy. Z našeho grafu vyplývá, že $x = 24$ a $y = 10$. Znamená to tedy, že jedna čokoláda stojí 24 Kč a jeden sešit stojí 10 Kč.

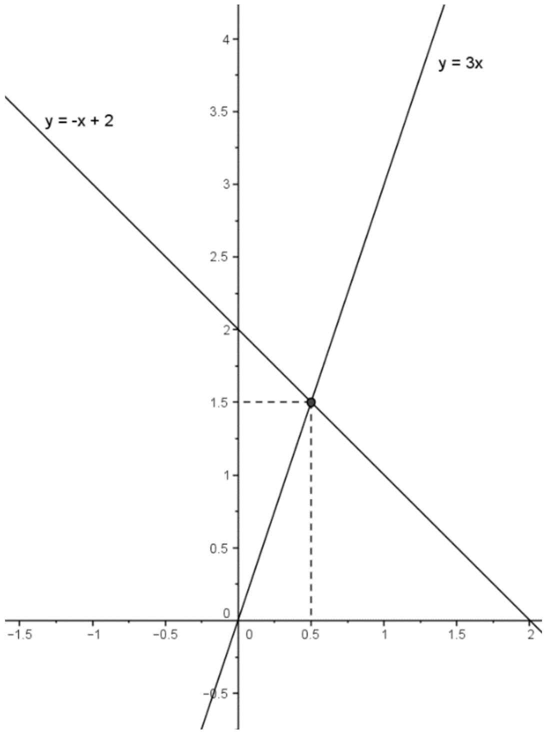
Graf 2.15: $f: y = x - 14, g: y = \frac{5}{2}x$



Příklad 4: Urči z grafů lineárních funkcí $y = 3x$ a $y = -x + 2$ všechna x, pro která platí: $([5], s. 27)$

a) $3x = -x + 2$
b) $3x \leq -x + 2$
c) $3x < -x + 2$
d) $3x \geq -x + 2$

Graf 2.16: $f: y = 3x, g: y = -x + 2$



Řešení:

Nejprve si ze zadaných funkcí vytvoříme graf.

a) Z grafu vidíme, že přímky se protínají v bodě o souřadnicích $[0{,}5; 1{,}5]$.
b) Nerovnice ve tvaru $3x \leq -x + 2$ znamená, že hledáme interval, ve kterém část přímky funkce $y = 3x$ leží pod přímkou $y = -x + 2$ nebo ji protíná. Jinými slovy funkce $y = 3x$ nabývá nižších hodnot než funkce $y = -x + 2$ nebo se sobě funkce rovnají. Z grafu vidíme, že je to interval, kdy platí, že $x \leq 0{,}5$. Jinými slovy jde o interval od $-\infty$ do 0,5 nebo $x \in (-\infty; 0{,}5\rangle$.
c) Nerovnice ve tvaru $3x < -x + 2$ znamená, že hledáme interval, ve kterém část přímky funkce $y = 3x$ leží pod přímkou $y = -x + 2$ a nemají žádný společný bod. Jinými slovy funkce $y = 3x$ nabývá nižších hodnot než funkce $y = -x + 2$. Z grafu vidíme, že je to interval, kdy platí, že $x < 0{,}5$. Jinými slovy jde o interval od $-\infty$ do 0,5 nebo $x \in (-\infty; 0{,}5)$.
d) V posledním bodě máme nerovnice ve tvaru $3x \geq -x + 2$, což znamená, že hledáme interval, ve kterém část přímky funkce $y = 3x$ leží nad přímkou $y = -x + 2$ nebo ji protíná. Jinými slovy funkce $y = 3x$ nabývá vetších hodnot než funkce $y = -x + 2$ nebo se sobě funkce rovnají. Z grafu vidíme, že je to interval, kdy platí, že $x \geq 0{,}5$. Jinými slovy jde o interval od 0,5 do $+\infty$ nebo $x \in \langle 0{,}5; +\infty)$.

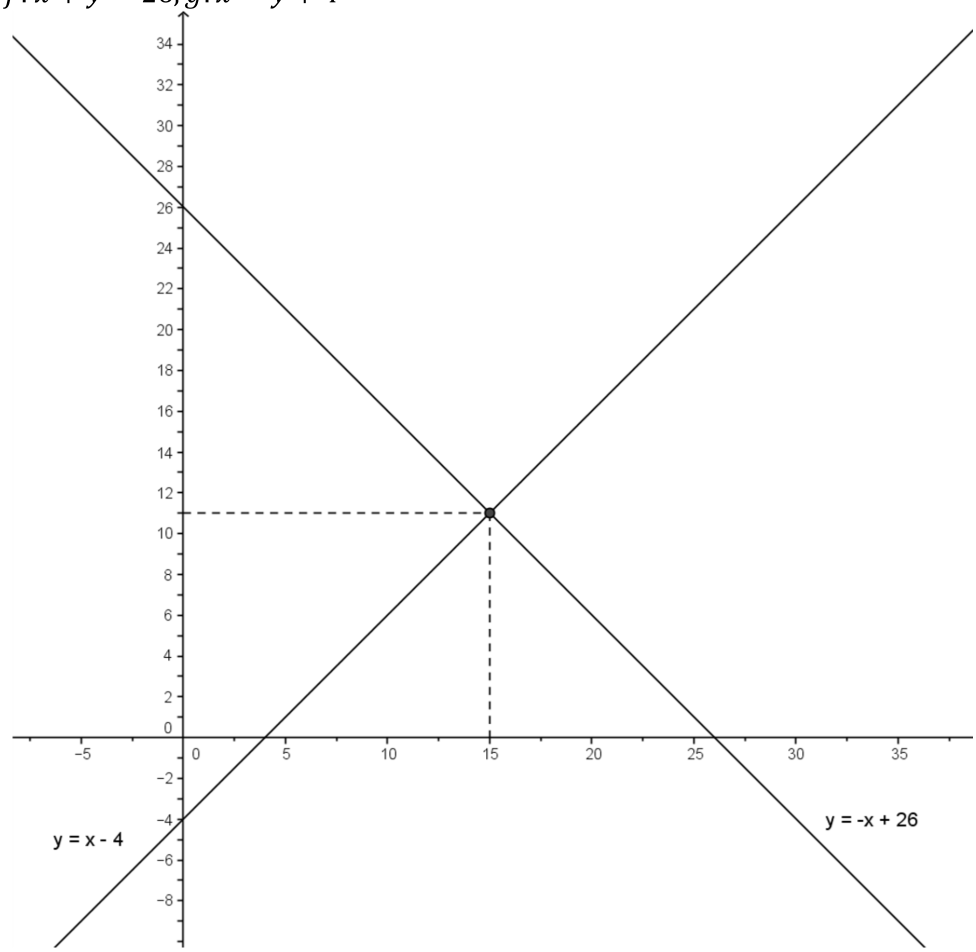
Příklad 5: Do třídy chodí 26 žáků. Dívek je o 4 více než chlapců. Kolik dívek a kolik chlapců chodí do třídy? (vlastní zadání)

Řešení:

Opět si rozebereme zadání slovní úlohy, počet dívek ve třídě si označíme neznámou x a počet chlapců se označí neznámou y. První rovnice bude mít tvar, počet dívek plus počet chlapců je rovno 26 žáků ve třídě, tedy $x + y = 26$. Druhá rovnice vznikne z věty v zadání, dívek je o 4 více než chlapců. Jinými slovy počet dívek je roven počtu chlapců zvětšeného o čtyři, tedy $x = y + 4$. Znovu si funkce zakreslíme do grafu.

Z grafu vidíme, že $x = 15$ a $y = 11$, tedy ve třídě je 15 dívek a 11 chlapců.

Graf 2.17: $f: x + y = 26, g: x = y + 4$



Závěr

Cílem mé práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů pro 2. stupeň základní školy zaměřenou na problematiku funkcí tak, aby byla pokud možno srozumitelná i žákům, kteří se danou problematiku právě snaží pochopit a naučit. Snažila jsem se o co největší názornost pomocí grafů vytvořených v programu Geogebra.

V každé kapitole jsem se snažila vybrat základní a nejčastěji se objevující příklady různých typů a ukázat jejich řešení jedním, či více způsoby. Inspiraci a vzorové příklady jsem čerpala z učebnic pro základní školy či víceletá gymnázia, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Především z učebnic nakladatelství Nová škola a Prometheus.

Psaní této práce bylo ze začátku obtížnější, než jsem si původně myslela. Neznalost didaktiky matematiky se z počátku jevila jako problém, postupem času se mi povedlo didaktiku alespoň trochu zvládnout. Největší přínos vidím v tom, že bylo třeba se vcítit do žáka 7. či 9. ročníku základní školy a snažit se podat danou problematiku slovy a termíny, které žák daného ročníku zná a dokáže s nimi pracovat. Jsem ráda, že jsem se mohla hlouběji zabývat nejen tímto tématem, ale také jeho didaktickou stránkou.

Literatura a zdroje

Učebnice:

[1] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 7 – učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia - aritmetika*. Plzeň: Fraus, 2008, 1. vyd., 80 s. ISBN 978-80-7238-679-6.

[2] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia - algebra*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 112 s. ISBN 978-80-7238-689-5.

[3] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia – pracovní sešit*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 80 s. ISBN 978-80-7238-690-1.

[4] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 7. ročník základní školy - poměr, přímá a nepřímá úměra, procenta*. 1. vydání. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 1998, 84 s. ISBN 978-80-7196-423-0.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika [2] pro 9. ročník základní školy – funkce, podobnost, goniometrické funkce*. 1. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 2000, 88 s. ISBN 80-7196-194-9.

[6] ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 7. ročník*. Ilustrace Jiří Růžička. Brno: Nová škola, 1998, 86 s. ISBN 80-85607-74-3.

[7] ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000, 111 s. ISBN 80-7289-024-7.

[8] ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000, 111 s. ISBN 80-7289-020-4.

Sbírky úloh a další materiály:

- KINDL, Karel. *Matematika: přehled učiva základní školy*. 3. dopl. vyd. Praha: SPN, 1980, 406 s. Knižnice všeobecného vzdělání.
- DYTRYCH, Martin, Irena DOBIASOVÁ a Libuše LIVŇANSKÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro nižší ročníky víceletých gymnázií a pro 2. stupeň základních škol: početní úlohy*. 2. vyd. Praha: Fortuna, 2001, 247 s. ISBN 80-7168-766-9.
- DYTRYCH, Martin, Irena DOBIASOVÁ a Libuše LIVŇANSKÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro nižší ročníky víceletých gymnázií a pro 2. stupeň základních škol: geometrie a funkce*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2001, 239 s. ISBN 80-7168-784-7.
- EISLER, Jaroslav. *Matematika 6-9 pro vyšší stupeň ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií*. 2. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2004, 172 s. ISBN 80-7200-917-6.
- LARGE, Tori. *Barevná matematika: in-cyclopedia: [pro starší žáky a pro středoškoláky]*. 1. vyd. Praha: Albatros, 2005, 153 s. Albatros In. ISBN 80-00-01576-5.
- Program Geogebra: https://www.geogebra.org/