Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Tvorba papírových modelů

Vypracovala: Lucie Suchá
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Tvorba papírových modelů jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... …………………………

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu své bakalářské práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za ochotný přístup, předávání zkušeností a cenné metodické rady, které mi poskytl při konzultacích bakalářské práce.

Rovněž bych chtěla poděkovat mé rodině a příteli za podporu během mého studia.

Anotace práce

Tato bakalářská práce je zaměřena na popis a tvorbu pravidelných (Platónských) a polopravidelných (Archimedových) mnohostěnů. Kapitola Pravidelné mnohostěny zahrnuje Keplerův planetární model a dualitu mnohostěnů. Dále se práce zabývá dalšími vlastnostmi skládání papíru, jako je formát papíru řady A a B, Eulerovou větou o mnohostěnech a dalšími ukázkovými modely z papíru.

Annotation

This bachelor thesis focuses on the description and the creation of regular (Platonic) and semiregular (Archimedes) polyhedra. The Chapter Regular polyhedrons includes Kelper´s planetary model and duality of polyhedra. Furthermore, the thesis work deals with other properties of paper folding, such as paper size series A and B, Euler theorem on polyhedra and other exemplary models from paper.

Obsah

1 Úvod

Práce s papírem stále patří k nejoblíbenějším činnostem malých i velkých výtvarníků. Je to dáno tím, že materiálem je jen papír a ten máme stále po ruce. Dá se s ním dobře pracovat a zvládnou to i děti. Pro děti je velmi důležité, aby si tuto činnost oblíbily, protože díky ní rozvíjejí vlastní představivost.

Cílem této práce je studium a tvorba papírových modelů pravidelných a polopravidelných mnohostěnů.

Ve druhé kapitole se zabývám pravidelnými (Platónskými) mnohostěny. Jsou zde uvedeny informace ke každému mnohostěnu a přidány i vlastní obrázky, které jsem v rámci této bakalářské práce vytvořila. Dále je zde vysvětlena dualita u pravidelných mnostěnů a také planetární model od Johannese Keplera.

Třetí kapitola pojednává o polopravidelných (Archimédových) mnohostěnech, které jsou odvozeny od pravidelných mnohostěnů, o kterých se dozvíme více v předchozí kapitole. Tyto mnohostěny jsou také doplněny o vlastní obrázky

Ve čtvrté kapitole, která je členěna do třech podkapitol, se zmíním o vlastnostech skládání papíru, zejména řady A a řady B. Dále následuje podkapitola s názvem Eulerova věta o mnohostěnech, kde je proveden i důkaz této věty. Poslední podkapitola je dělena na další subkapitoly, kde je vysvětlena tvorba papírových modelů.

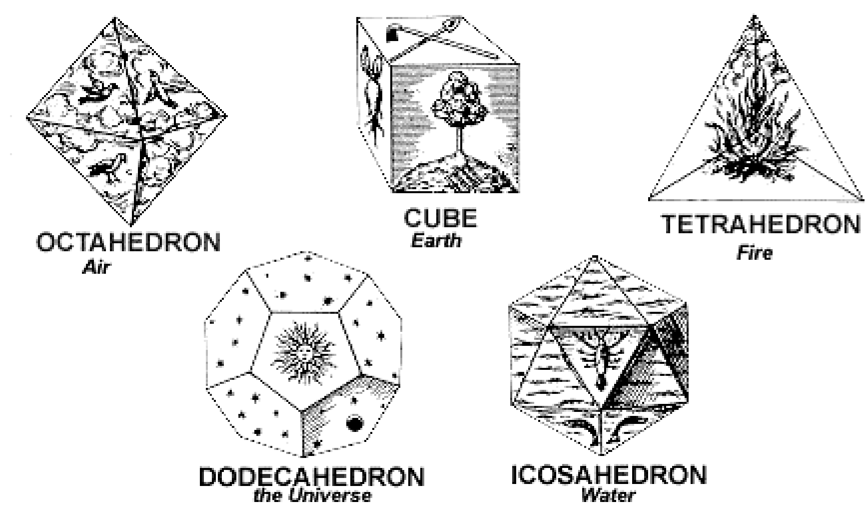
2 Pravidelné mnohostěny

Pravidelné mnohostěny jsou takové mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny shodnými pravidelnými mnohoúhelníky a všechny vrcholy jsou téhož typu (tj. v každém vrcholu se stýká tentýž počet hran).

Těmto tělesům lze vepsat i opsat kulovou plochu. Opsaná kulová plocha prochází všemi vrcholy, vepsaná se dotýká všech stěn v jejich těžištích. Obě kulové plochy mají tentýž střed.

Základní informace o počtu stěn, hran, vrcholů atd. jednotlivých těles jsou uvedeny u jednotlivých názvů mnohostěnů v závorce (s, v, h, m, n), kde s značí počet stěn, v počet vrcholů, h počet hran, m počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu a n počet stran jedné stěny (tedy jakými pravidelnými n-úhelníky jsou stěny tvořeny).

Vlastnosti těchto těles byly v minulosti opakovaně zkoumány. Často se jim říká platónská nebo Platónova tělesa podle řeského filosofa Platóna (427-347 př. n. l.), ačkoli byla známá již ve škole Pýthagorově a pravděpodobně i dříve. Podle Platónova učení je čtyřstěn symbolem ohně, krychle symbolem země, osmistěn sybolem vzduchu a dvacetistěn symbolem vody. Dvanáctistěn představuje „jsoucno“, vesmír, tzv. pátou esenci apod.



Obr. 1 Znázornění živlů platónskými tělesy [6]

Tato tělesa se objevují díky vysoké symetrii běžně v krystalografii, krystalochemii a molekulární fyzice a chemii. [1], [2]

2.1 Důkaz existence pravidelných mnohostěnů

V této kapitole bude dokázáno, že pravidelných mnohostěnů existuje právě pět, a to pravidelný čtyřstěn (tetraedr), pravidelný šestistěn (krychle, hexaedr), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr). Důkaz se bude zabývat zkoumáním stěn a vrcholů, jinak řečeno, kolik mnohoúhelníků se vyskytuje ve vrcholech mnohostěnu.

Rovnostranný trojúhelník - alespoň 3 ve vrcholu a maximálně 5

3…**pravidelný čtyřstěn**

4…**pravidelný osmistěn**

5…**pravidelný dvacetistěn**

Když budeme mít 2 trojúhelníky a pokusíme se je spojit, těleso nám nevznikne a máme stále model ve 2D. Přidáním ještě jednoho trojúhelníku nám vznikne trojrozměrný objekt, přidáme trojúhelník jako základnu a vznikne nám pravidelný čtyřstěn. Se čtyřmi trojúhelníky položenými k sobě složíme pravidelný osmistěn a s pěti trojúhelníky máme pravidelný dvacetistěn. Přidáním šestého trojúhelníku se obrazec uzavře do dvojrozměrného šestiúhelníku, není tedy možné přidat další trojrozměrné objekty. Vnitřní úhel u trojúhelníku je vždy 60°.

$\alpha = \frac{(n-2)*180°}{n}, kde\ n = 3$ (jedná se o pravidelný trojúhelník)

$$\alpha = \frac{(3-2)*180°}{3} = 60°$$

Čtverec – ve vrcholu mohou být jen 3

3…**pravidelný šestistěn**

Podobně jako u trojúhelníku je to i u čtverce. Dva čtverce nám dají model ve 2D, ale ne objekt, který potřebujeme. Tři čtverce nám dají náš hledaný pravidelný šestistěn a čtyři čtverce nám dají dohromady opět 2D model. Vnitřní úhel je roven 90°.

$\alpha = \frac{(n-2)*180°}{n}, kde\ n = 4$ (jedná se o pravidelný čtyřúhelník)

$$\alpha = \frac{(4-2)*180°}{4} = 90°$$

Pravidelný pětiúhelník – ve vrcholu mohou být pouze 3

3…**pravidelný dvanáctistěn**

Vyšetřování u pětiúhelníku je obdobné jako vyšetřování čtverce. Se třemi pětiúhelníky nám vznikne pravidelný dvanáctistěn. Pokud dáme čtyři pětiúhelníky k sobě, tak se budou navzájem překrývat. Vnitřní úhel u pravidelného pětiúhelníku je roven 108°.

$\alpha = \frac{(n-2)*180°}{n}, kde\ n = 5$ (jedná se o pravidelný pětiúhelník)

$$\alpha = \frac{(5-2)*180°}{5} = 108°$$

Když se podíváme ještě k šestiúhelníku, tak nejmenší počet (tedy 3) tvoří opět 2D model. Podobně tomu je u všech pravidelných úhelníků s počtem větším než 5.

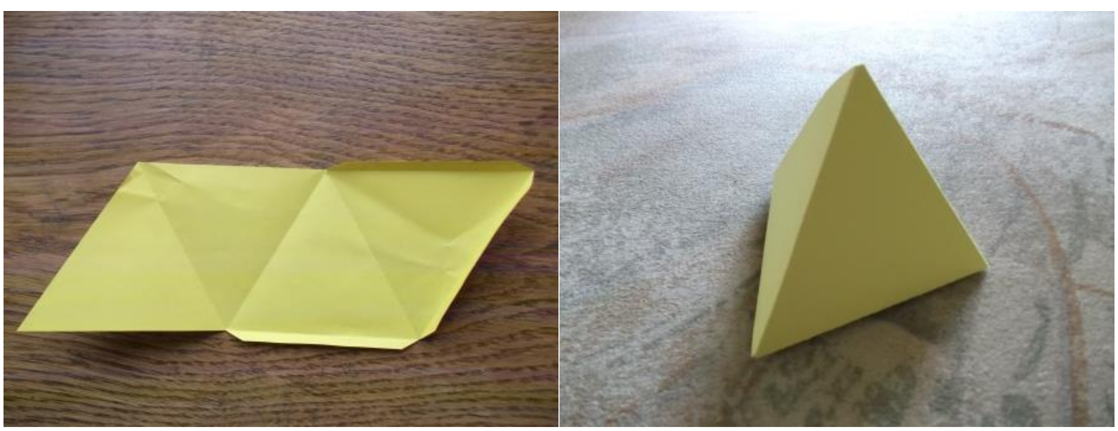
Důkaz, že Platónských těles existuje pouze pět a více jich být nemůže, máme dokázán.

2.2 Pravidelný čtyřstěn (4, 4, 6, 3, 3)

Pravidelný čtyřstěn nebo také tetraedr je tvořen čtyřmi stejnými rovnostrannými trojúhelníky. Skládá se ze čtyř stěn, čtyř vrcholů a šesti hran. K vrcholům a hranám se můžeme dostat i početně. Vezmeme počet stěn a vynásobíme ho číslem 3 (protože se jedná o trojúhelníkové stěny), vyjde nám číslo 12 a to vydělíme číslem 3 (protože ve vrcholech jsou tři trojúhelníky) a získáme počet vrcholů. K hranám dojdeme podobně, jen budeme dělit číslem 2 (protože jedna hrana je ve dvou stěnách) a získáme počet hran. Dále má dvanáct úhlů hranových a každý úhel má velikost 60°. Se čtyřstěnem se běžně potkáme v matematice ve stereometrii. Čtyřstěn lze také popsat jako pravidelný trojboký jehlan, jehož podstavou je trojúhelník se shodnými stěnami. Pravidelný čtyřstěn je základním tvarem chemie, neboť umožňuje nejlépe rozmístit do prostoru čtyři vazby do vrcholů čtyřstěnu z jeho těžiště. Příkladem je struktura vody a amoniaku.

$$4 * 3 = 12 \rightarrow \frac{12}{3} = 4\ vrcholy$$

$$4 * 3 = 12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6\ hran$$



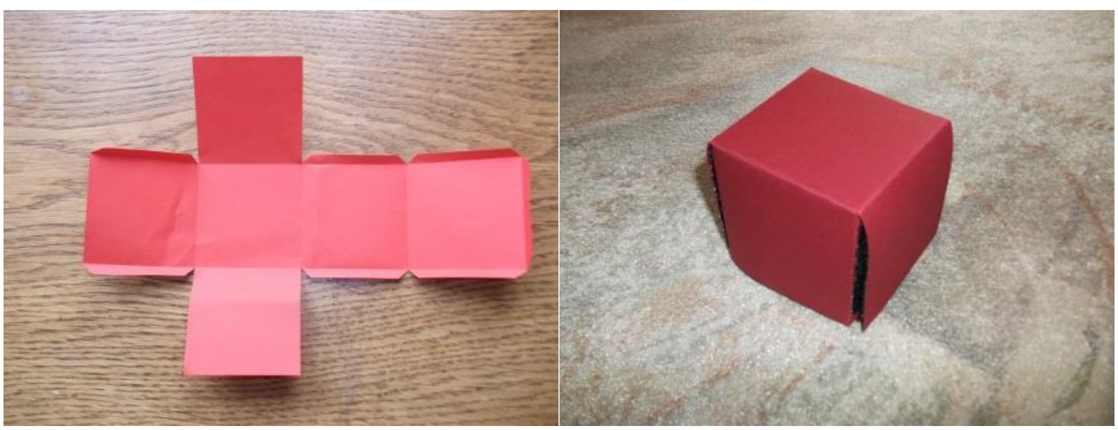
Obr. 2 A) Síť čtyřstěnu B) Model čtyřstěnu

2.3 Pravidelný šestistěn (6, 8, 12, 3, 4)

Pravidelný šestistěn nebo také hexaedr a krychle je trojrozměrné těleso, jehož stěny tvoří šest stejných čtverců. Tento mnohostěn známe všichni, neboť se mu také lidově říká kostka. Používá se jako důležitá součást mnoha společenských i hazardních her. Početně se dostaneme k počtu vrcholů tak, že vezmeme počet stěn a vynásobíme ho číslem 4 (protože se jedná o čtvercové stěny), poté to vydělíme číslem 3 (protože se vyskytují ve vrcholech vždy tři čtverce) a dostaneme počet vrcholů. Hrany spočteme obdobně, jen budeme dělit číslem 2 (protože jedna hrana se vyskytuje ve dvou stěnách) a dojdu k počtu hran. Šestistěn má osm rohů (vrcholů) a dvanáct hran.

$$6 * 4 = 24 \rightarrow \frac{24}{3} = 8\ vrchol\text{ů}$$

$$6 * 4 = 24 \rightarrow \frac{24}{2} = 12\ hran$$



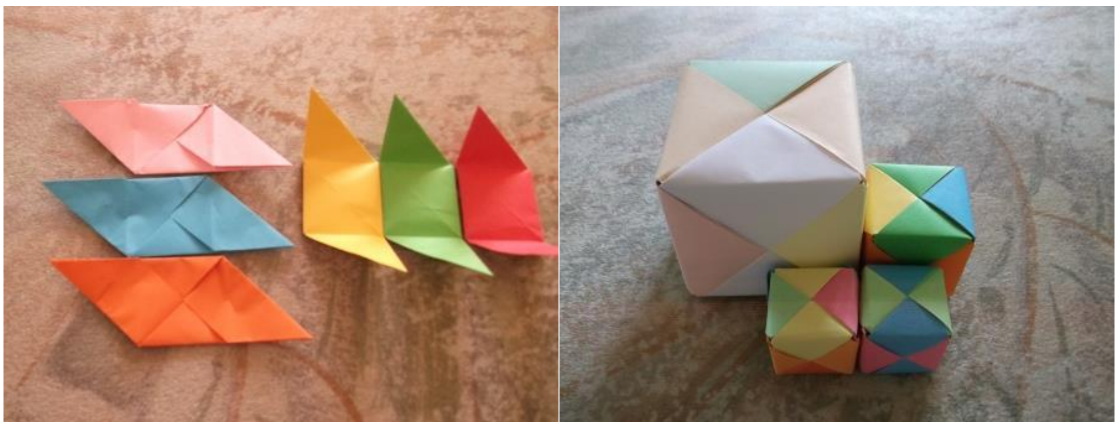
Obr. 3 A) Síť šestistěnu B) Model šestistěnu

2.3.1 Sonobova krychle

Sonobova krychle slouží k vytvoření modulárních origami. Popularita těchto origami je způsobena jejich jednoduchostí a rychlostí skládání.

Původ krychle je neznámý. Je to přisuzován tvůrcům Toshie Takahama a Mitsunobu Sonobe, kteří spolu publikovali několik knih dohromady a byli členové origami skupiny.

Krychle je složena ze šesti stejných čtvercových papírů. Skládáním papíru dojdeme k finálním dílkům, viz. Obr. 4 A. Tyto dílky postupně zasouváme do sebe a vznikne nám naše Sonobova krychle. [3]



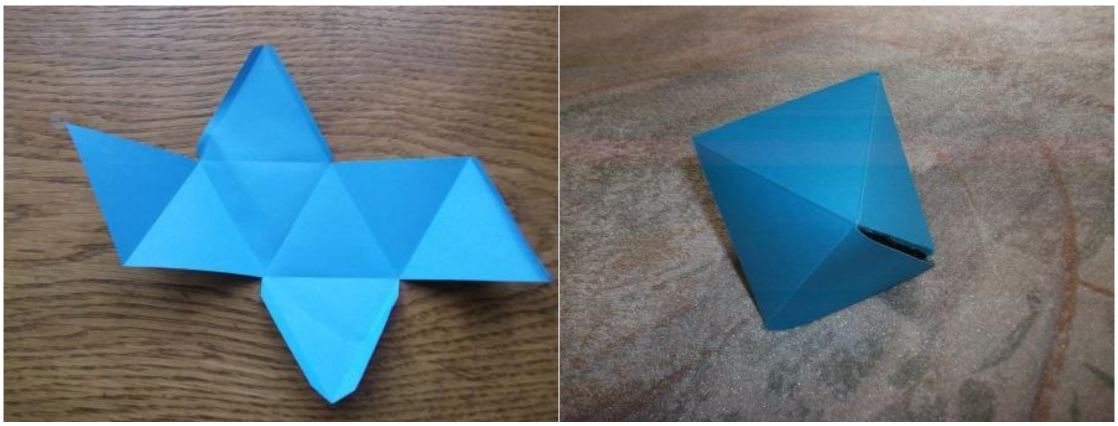
Obr. 4 A) Finální díly B) Hotové kostky

2.4 Pravidelný osmistěn (8, 6, 12, 4, 3)

Pravidelný osmistěn nebo také oktaedr je trojrozměrné těleso v prostoru, jehož stěny tvoří osm stejných rovnostranných trojúhelníků. I u osmistěnu se dají početně nalézt vrcholy a hrany. Vezmeme počet stěn a vynásobíme ho číslem 3 (protože osmistěn má trojúhelníkové stěny), výsledné číslo vydělíme číslem 4 a získáme počet vrcholů. Hrany získáme obdobně, jen při dělení použijeme číslo 2 (protože jedna hrana se vyskytuje ve dvou stěnách) a dojdeme k počtu hran. Dále můžeme u osmistěnu nalézt šest vrcholů a dvanáct hran.

$$8 * 3 = 24 \rightarrow \frac{24}{4} = 6\ vrcholů$$

$$8 * 3 = 24 \rightarrow \frac{24}{2} = 12\ hran$$



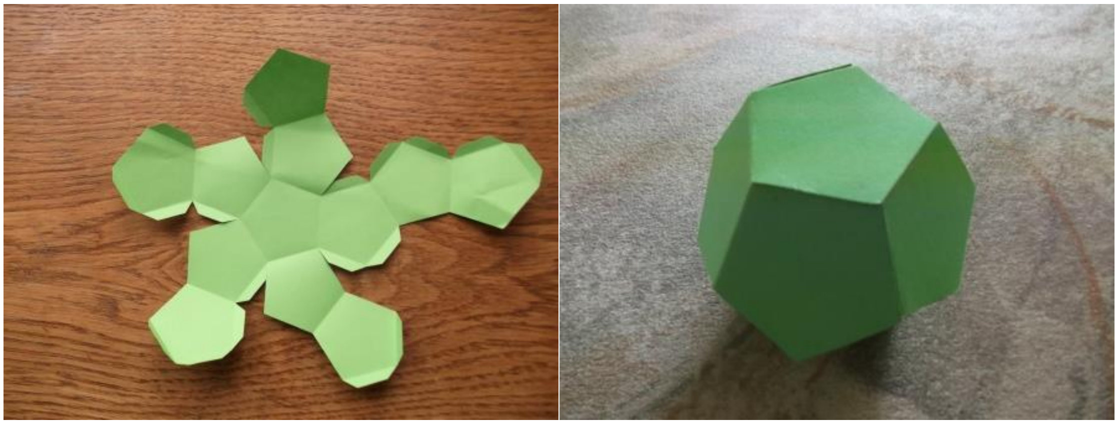
Obr. 5 A) Síť osmistěnu *B) Model osmistěnu*

2.5 Pravidelný dvanáctistěn (12, 20, 30, 3, 5)

Pravidelný dvanáctistěn nebo také dodekaedr je trojrozměrné těleso v prostoru, jehož stěny tvoří dvanáct stejných pravidelných pětiúhelníků. Když počet stěn vynásobíme číslem 5 (jedná se o pětiúhelníkové stěny) a následně vydělíme číslem 3 (protože ve vrcholech se vyskytují 3 pětiúhelníky), získáme počet vrcholů. Počet hran zjistíme tak, že opět vezmeme počet stěn a vynásobíme ho číslem 5, následně vydělíme číslem 2 (protože jedna hrana se vyskytuje ve dvou stěnách). Dvanáctistěn má 20 vrcholů a 30 hran.

$$12 * 5 = 60 \rightarrow \frac{60}{3} = 20\ vrcholů$$

$$12 * 5 = 60 \rightarrow \frac{60}{2} = 30\ hran$$



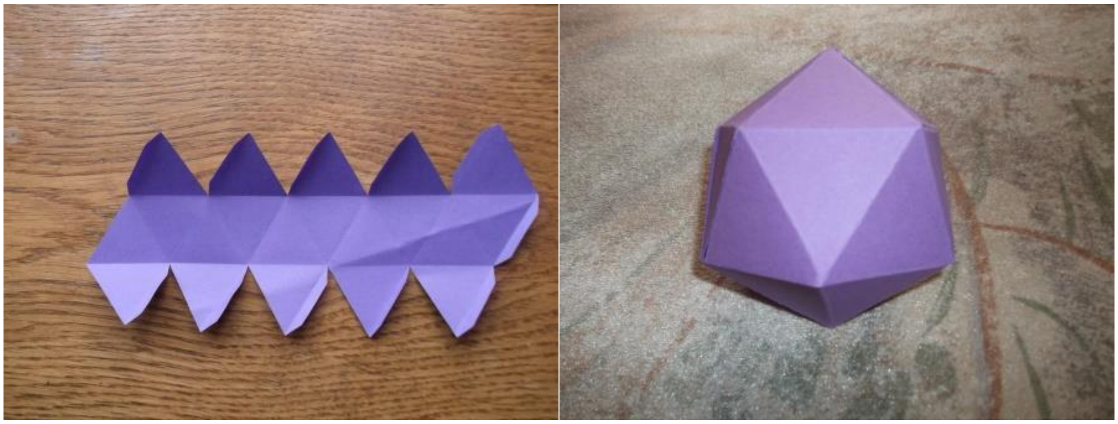
Obr. 6 A) Síť dvanáctistěnu *B) Model dvnáctistěnu*

2.6 Pravidelný dvacetistěn (20, 12, 30, 5, 3)

Pravidelný dvacetistěn nebo také ikosaedr patří také mezi trojrozměrná tělesa v prostoru, jeho stěny tvoří dvacet stejných rovnostranných trojúhelníků. Vezmeme počet stěn, vynásobíme je číslem 3 (protože se jedná o trojúhelníky) a výsledné číslo vydělíme číslem 5 (protože ve vrcholech je pět trojúhelníků), dojdeme k počtu vrcholů. K počtu hran dojdeme zase obdobně jako u vrcholů, mějme tedy výsledné číslo 60 a vydělíme ho číslem 2 (protože jedna hrana se vyskytuje ve dvou stěnách). Dvacetistěn má dvanáct vrcholů a třicet hran.

$$20 * 3 = 60 \rightarrow \frac{60}{5} = 12\ vrcholů$$

$$20 * 3 = 60 \rightarrow \frac{60}{2} = 30\ hran$$

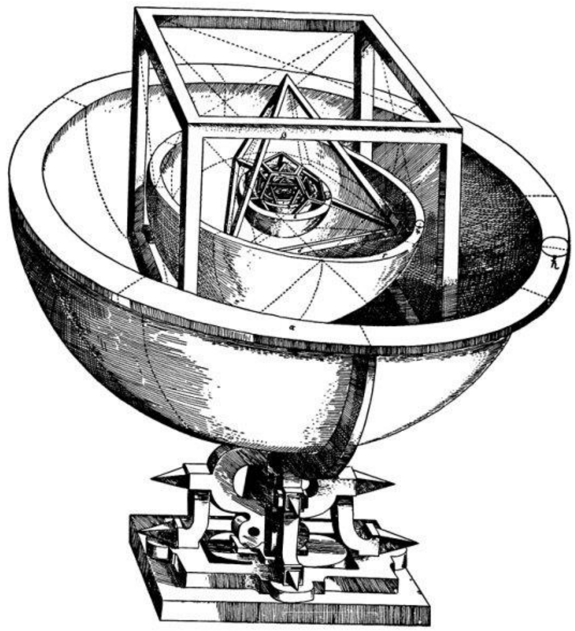


Obr. 7 A) Síť dvacetistěnu B) Model dvacetistěnu

2.7 Planetární model

Na konci 16. století použil tyto mnohostěny matematik a astronom Johannes Kepler (1571-1630) jako základ pro svůj planetární model (Obr. 8). Tvrdil, že se planety sluneční soustavy pohybují po planetárních sférách (po kulových plochách, které jsou vepsány nebo opsány pravidelným mnohostěnům), mezi které jsou vsunuty pravidelné mnohostěny. Slunce je umístěno ve společném středu sfér. Mezi sférami Merkuru a Venuše je pravidelný osmistěn, mezi sférami Venuše a Země pravidelný dvacetistěn, mezi sférami Země a Marsu pravidelný dvanástistěn, mezi sférami Marsu a Jupiteru pravidelný čtyřstěn a mezi sférami Jupiteru a Saturnu pravidelný šestistěn (další planety v té době nebyly známé).

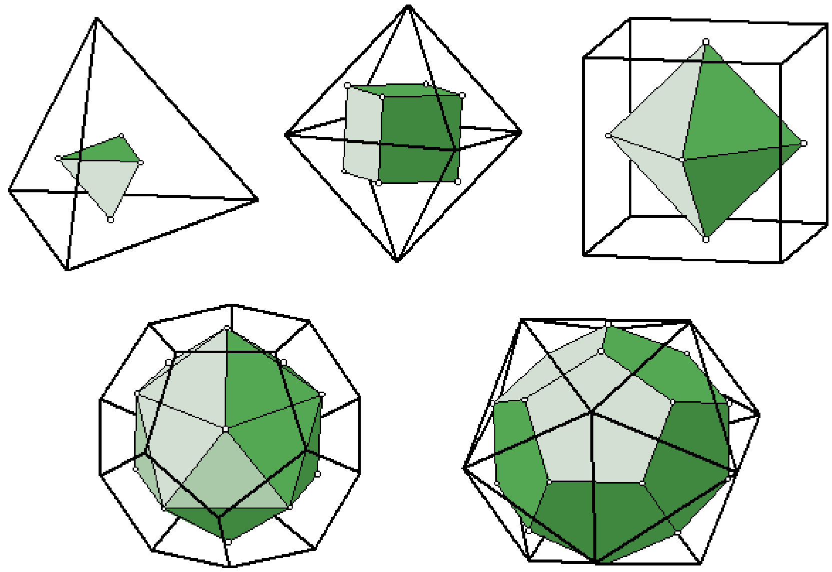
Tímto planetární model vysvětlil záhadu vzdálenosti planet Sluneční soustavy. Později však bylo zjištěno, že vzájemná vzdálenost kulových ploch neodpovídá skutečným vzdálenostem od Slunce, proto byla tato teorie vyvrácena. Jeho teorie je označována za mylnou, ale Johannes Kepler byl však jedním z prvních vědců, kteří trvali na geometrickém vysvětlení nebeských jevů. Dnes kolem Slunce obíhají ještě další dvě planety Uran a Neptun. [1]



Obr. 8 Keplerův planetární model [7]

2.8 Dualita

V souvislosti s pravidelnými mnohostěny se často hovoří o tzv. dualitě těles. Dvě tělesa jsou duální, lze-li je navzájem (při vhodném poměru délek hran) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn tělesa druhého. Je tedy nutné, aby počet vrcholů jednoho tělesa byl stejný jako počet stěn druhého tělesa (a naopak). Dva sousední vrcholy vepsaného tělesa (tj. vrcholy spojené hranou) leží ve středech sousedních stěn opsaného tělesa (tj. ve stěnách, které mají společnou hranu). Podle tohoto pravidla lze vepsat osmistěn do krychle (a naopak), dvanáctistěn do dvacetistěnu (a naopak) a čtyřstěn do čtyřstěnu. Krychle a osmistěn jsou tedy (stejně jako dvanáctistěn a dvacetistěn) tělesa duální, čtyřstěn je duální sám se sebou. [1]



Obr. 9 Dualita těles [8]

3 Polopravidelné mnohostěny

Polopravidelnými mnohostěny nazýváme konvexní tělesa, jejichž stěny jsou tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří typů a v jejichž vrcholech se stýkají tytéž stěny (ve stejném pořadí). Takových mnohostěnů existuje nekonečně mnoho.

Významnou skupinou polopravidelných mnohostěnů jsou Archimédova (někdy též archimédovská) tělesa. Těmito tělesy se budeme věnovat v této kapitole. Nazýváme tak třináct polopravidelných mnohostěnů, které objevil řecký matematik a fyzik Archimédes ze Syrákús (287-212 př. n. l.). Tato tělesa vznikají vhodným ořezáním hran nebo vrcholů pravidelných (Platónských) mnohostěnů. Podle toho, ze kterého tělesa je lze vytvořit, jsou odvozeny i jejich názvy, které jsou ve většině případů uváděny v angličtině, do češtiny se nepřekládají (až na výjimky a ty jsou uvedeny u jednotlivých kapitol v závorce za anglickým názvem) nebo se v české verzi nepoužívají.

U každého mnohostěnu jsou v závorce $(s, h, v, t_x + t_y)$ vypsány jeho základní vlastnosti, kde s značí počet stěn, h počet hran, v počet vrcholů a součet $t_x + t_y$ udává, jaké mnohoúhelníky tvoří povrch tělesa (uvedeme si například součet $4_3 + 4_6$ což značí, že povrch tělesa je tvořen čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky a čtyřmi pravidelnými šestiúhelníky; v případě součtu tří čísel je povrch tvořen třemi typy mnohoúhelníků).

K Archimédovým mnohostěnům můžeme najít duální tzv. Katalánova tělesa pojmenovaná podle Eugéne Catalana (1814-194), který je v roce 1865 jako první podrobně popsal. Tato tělesa nemůžeme zařadit mezi polopravidelné mnohostěny. Za zajímavost stojí zmínit, že některá Katalánova tělesa nejsou konvexní, zatímco všechny polopravidelné mnohostěny konvexní jsou.

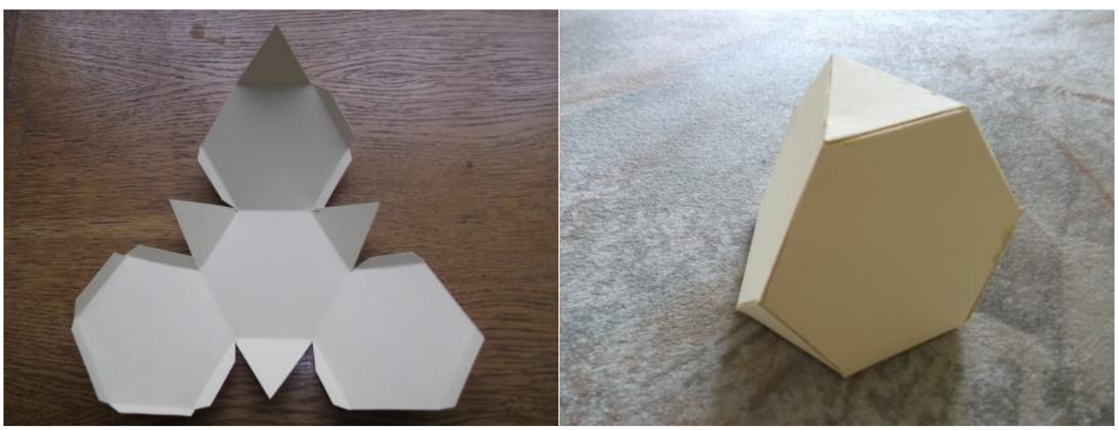
Dalšími polopravidelnými mnohostěny jsou speciální hranoly a tzv. antihranoly. Budeme uvažovat kolmý pravidelný n-boký hranol s výškou, jejíž délka se rovná délce podstavné hrany, získáme polopravidelné těleso, jehož stěnami jsou dva shodné pravidelné n-úhelníky (podstavy) a n čtverců (boční stěny). Antihranoly (též někdy tzv. hranolce) získáme, otočíme-li jednu podstavu kolmého pravidelného n-bokého hranolu okolo jejího středu o úhel $180°/n$ a přidáme-li další „boční“ hrany tak, abychom na bocích tělesa získali rovnostranné trojúhelníky (je třeba patřičně upravit i výšku původního hranolu). Víceboké antihranoly nám mohou připomínat dětský bubínek. Díky tomu, že za *n* můžeme uvažovat libovolné přirozené číslo větší než dva, je hranolů i antihranolů nekonečně mnoho.

Archimédovských těles je 13 (nesmíme za ně považovat platónská tělesa ani hranoly a antihranoly) a největší z nich má 92 stěn. Každé archimédovské těleso lze reprezentovat kombinací pravidelných mnohoúhelníků kolem jednoho vrcholu. Tímto lze matematicky dokázat, že žádné další archimedovské těleso neexistuje. [1], [2], [9]

3.1 Archimédova tělesa

3.1.1 Truncated tetrahedron (komolý čtyřstěn) (8, 18, 12, 43 + 46)

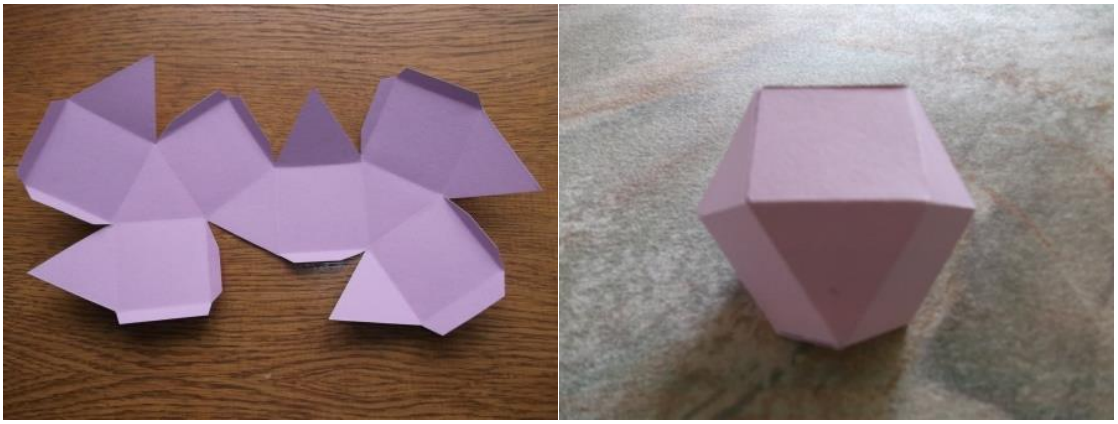
Komolý čtyřstěn vytvoříme z pravidelných mnohostěnů pomocí pravidelného čtyřstěnu. Komolý čtyřstěn má 8 stěn z toho jsou 4 trojúhelníky a 4 šestiúhelníky, dále 18 hran a 12 vrcholů.



Obr. 10 A) Síť komolého čtyřstěnu B) Model komolého čtyřstěnu

3.1.2 Cuboctahedron (kubooktaedr) (14, 24, 12, $8_3 + 6_4$)

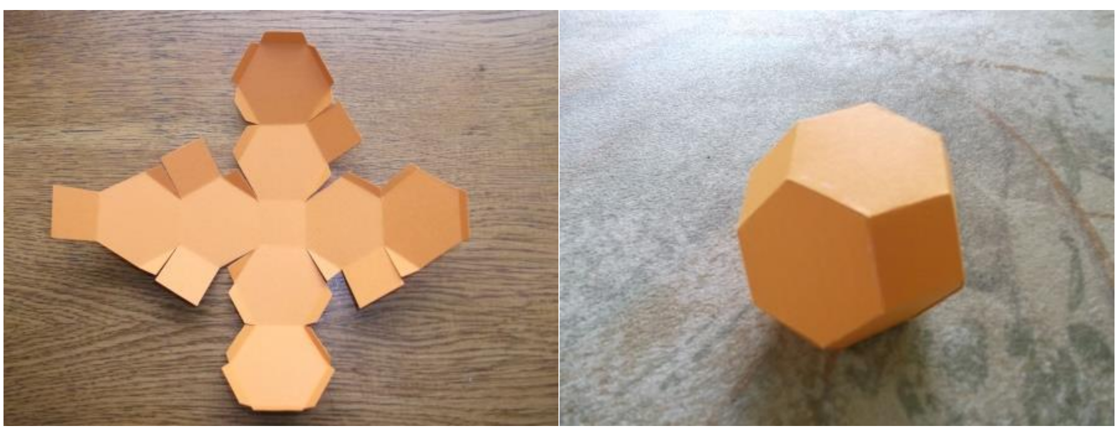
Kubooktaedr vzniká odřezáním vrcholů krychle nebo pravidelného osmistěnu (cube – krychle, octahedron – osmistěn). V obou případech stačí sestrojit střední příčky (tj. spojnice středů sousedních stran) ve všech stěnách. Tyto střední příčky jsou hranami hledaného kubooktaedru. Ve stručnosti lze říci, že kubooktaedr získáme odřezáním všech vrcholů pravidelného osmistěnu nebo krychle v polovině délek příslušných hran. Kubooktaedr se skládá ze 14 stěn – 8 trojúhelníků a 6 čtverců, 24 hran a 12 vrcholů.



Obr. 11 A) Síť kubooktaedru B) Model kubooktaedru

3.1.3 Truncated octahedron (komolý osmistěn) (14, 36, 24, $6_4 + 8_6$)

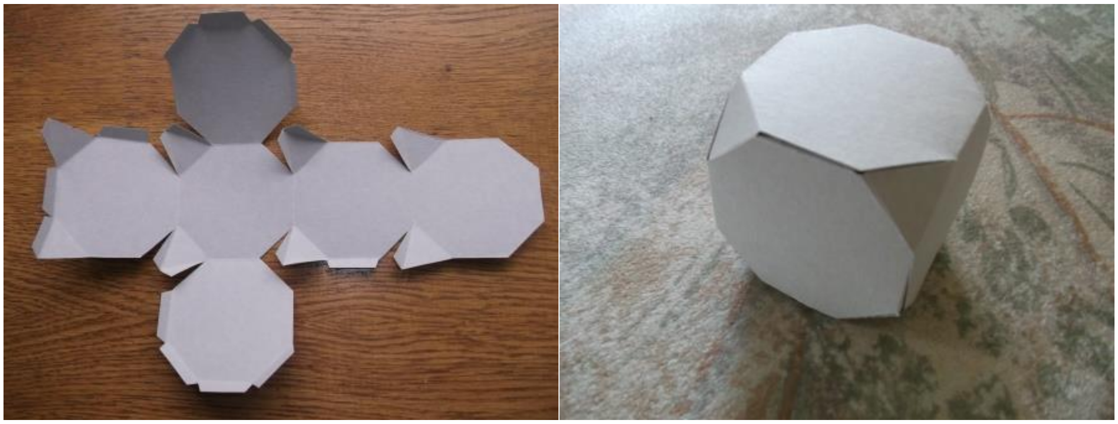
Komolý osmistěn vytvoříme z pravidelného osmistěnu. Komolý osmistěn lze vytvořit z 14 stěn – 6 čtverců a 8 šestiúhelníků, 36 hran a 24 vrcholů.



Obr. 12 A) Síť komolého osmistěnu B) Model komolého osmistěnu

3.1.4 Truncated hexahedron (komolý šestistěn) (14, 36, 24, $8_3 + 6_8$)

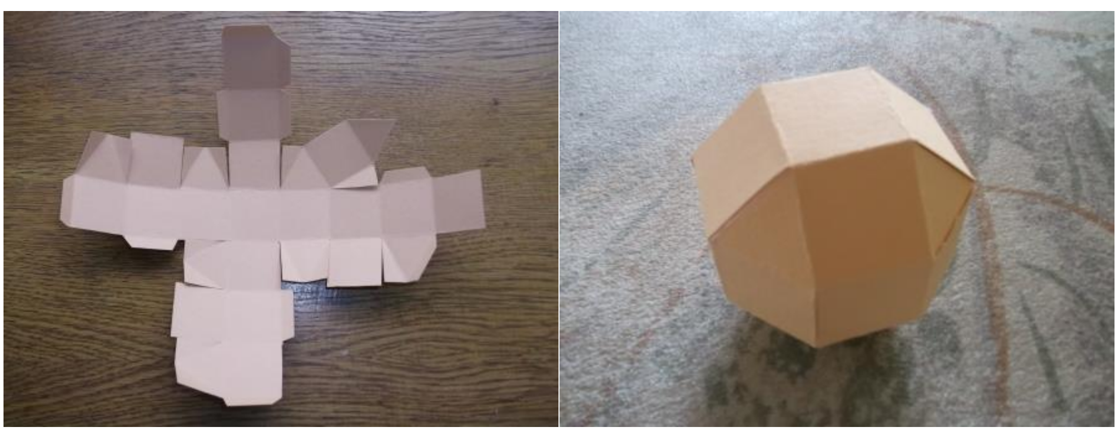
Komolý šestistěn získáme pomocí krychle. Komolý šestistěn má 14 stěn – 8 trojúhelníkových a 6 osmiúhelníkových, dále 36 hran a 24 vrcholů.



Obr. 13 A) Síť komolého šestistěnu B) Model komolého šestistěnu

3.1.5 Rhombicuboctahedron (26, 48, 24, $8_3 + 18_4$)

Rhombicuboctahedron získáme složitějším ořezáním krychle nebo pravidelného osmistěnu. Tento mnohostěn se skládá z 26 stěn – 8 trojúhelníkových a 18 čtverců, 48 hran a 24 vrcholů.



Obr. 14 A) Síť rhombicuboctahedronu B) Model rhombicuboctahedronu

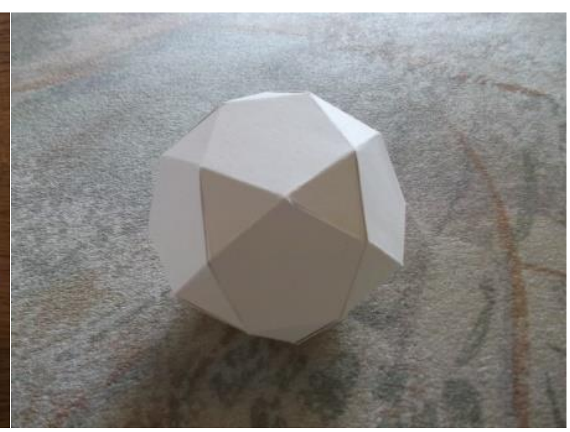
3.1.6 Truncated cuboctahedron (komolý kubooktaedr) (26, 72, 48, 12_4 + 8_6 + 6_8)

Komolý kubooktaedr získáme take složitějším ořezáním krychle nebo pravidelného osmistěnu. Komolý kubooktaedr je složen z 26 stěn – 12 čtverců, 8 šestiúhelníků a 6 osmiúhelníků, 72 hran a 48 vrcholů.

Obr. 15 A) Síť komolého kubooktaedru *B)Model komolého kubooktaedru*

3.1.7 Icosidodecahedron (32, 60, 30, 20_3 + 12_5)

Icosidodecahedron vzniká podobně jako cuboctahedron, jen je odřezán z pravidelného dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu. Icosidodecahedron se skládá z 32 stěn – 20 trojúhelníků a 12 pětiúhelníků, pak 60 hran a 30 vrcholů.



Obr. 16 A) Síť icosidodecahedronu *B) Model icosidodecahedronu*

3.1.8 Truncated icosahedron (komolý dvacetistěn) (32, 90, 60, $12_5 + 20_6$)

Komolý dvacetistěn patří mezi nejzajímavější a také nejspíše nejpoužívanější Archimédova tělesa. Jak už název napovídá, získáme toto těleso ořezáním pravidelného dvacetistěnu. Je zapotřebí odříznout každý vrchol dvacetistěnu v jedné třetině délky příslušných hran vedoucích do daného vrcholu. Z trojúhelníkových stěn dvactistěnu tak vzniknou pravidelné šestiúhelníky (je jich stále dvacet) a místo dvanácti vrcholů zůstane dvanáct pětiúhelníkových stěn. Většina z nás zná toto těleso jako fotbalový míč. Komolý dvacetistěn má 32 stěn – 12 pětiúhelníkových a 20 šestiúhelníkových, 90 hran a 60 vrcholů.

Tento mnohostěn je také znám jako atomová bomba, která vybuchla na konci druhé světové války v Japonsku nad Nagasaki. V 80. letech se také chemikům podařilo vytvořit nejmenší fotbalový míč na světě v podobě sférické molekuly uhlíku s 60 atomy na vrcholech. Tyto takzvané „Buckovy balony“ (po Buckminsteru Fullerovi) mají skvělé fyzikální a chemické vlastnosti, které se zkoumají v různých aplikacích od maziv po léčbu AIDS.

U nejznámějšího polopravidelného mnohostěnu ukážu početně, jak se dostat k vrcholům a hranám. Nejprve vezmu pětiúhelníkové stěny. Vezmu jejich počet stěn, tedy dvanáct, a vynásobím ho číslem 5 (protože se jedná o pětiúhelníkové stěny). Výsledné číslo vydělíme číslem 2 (protože jedna stěna se vyskytuje ve dvou hranách) a získáme počet hran pětiúhelníku. K šestiúhelníkovým hranám se dostaneme obdobně. Nakonec sečtu počet hran pětiúhelníku a šestiúhelníku a dojdu k výslednému počtu hran. Následně provedu podobně výpočet vrcholů, jen dělím číslem 3 (protože ve vrcholu jsou tři stěny).

$$12 * 5 = 60 \rightarrow \frac{60}{2} = 30\ hran\ pětiúhelníku$$

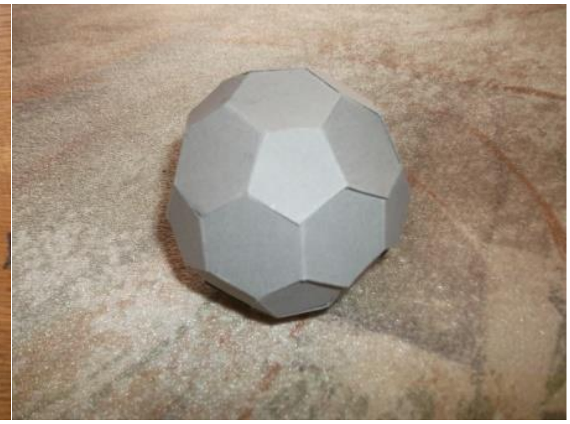
$$20 * 6 = 120 \rightarrow \frac{120}{2} = 60\ hran\ šestiúhelníku$$

$$30 + 60 = 90\ hran$$

$$12 * 5 = 60 \rightarrow \frac{60}{3} = 20\ vrcholů\ pětiúhelníku$$

$$20 * 6 = 120 \rightarrow \frac{120}{3} = 40\ vrcholů\ šestiúhelníku$$

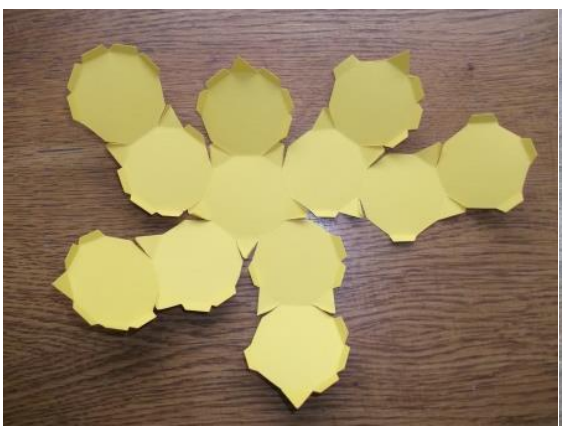
$$20 + 40 = 60\ vrcholů$$

Obr. 17 A) Síť komolého dvacetistěnu *B) Model komolého dvacetistěnu*

3.1.9 Truncated dodecahedron (komolý dvanáctistěn) (32, 90, 60, $20_3 + 12_{10}$)

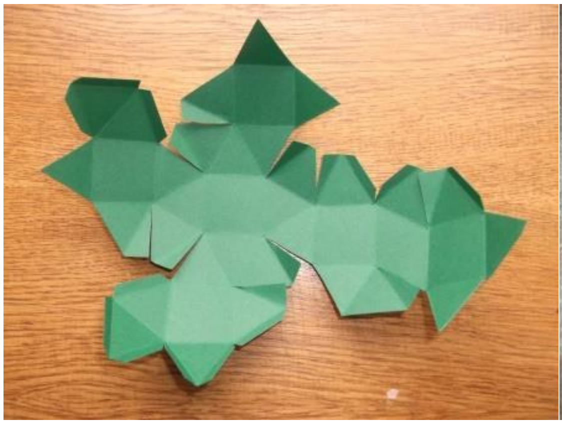
Komolý dvanáctistěn vytvoříme za pomoci pravidelného dvanáctistěnu. Mnohostěn se skládá z 32 stěn – 20 trojúhelníků a 12 desetiúhelníků, dále má 90 hran a 60 vrcholů.

Obr. 18 A) Síť komolého dvanáctistěnu *B) Model komolého dvanáctistěnu*

3.1.10 Snub hexadron (38, 60, 24, $32_3 + 6_4$)

Snub hexadron je poslední z mnohostěnů, který vzniká složitějším ořezáním krychle nebo pravidelného osmistěnu. Snub hexadron má 32 stěn trojúhelníkových a 6 čtvercových, což je celkem v součtu 38 stěn, 60 hran a 24 vrcholů.



Obr. 19 A) Síť snub hexahedronu *B) Model snub hexahedronu*

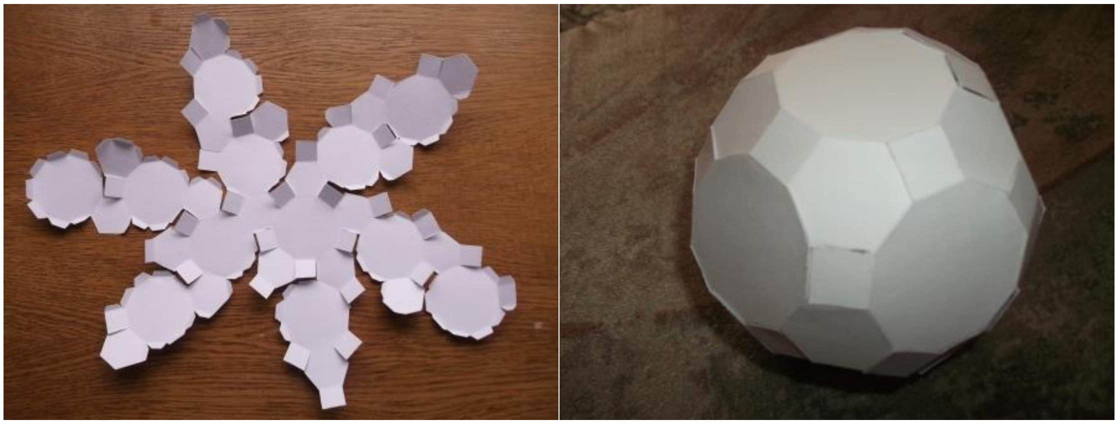
3.1.11 Rhombicosidodecahedron (62, 120, 60, $20_3 + 30_4 + 12_5$)

Rhombicosidodecahedron lze vytvořit pomocí pravidelného dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu. Tento mnohostěn má 62 stěn – 20 trojúhelníkových, 30 čtvercových a 12 pětiúhelníkových, dále 120 hran a 60 vrcholů.

Obr. 20 A) Síť rhombicosidodecahedronu *B) Model rhombicosidodecahedronu*

3.1.12 Truncated icosidodecahedron (komolý icosidodecahedron) (32, 180, 120, $30_4 + 20_6 + 12_{10}$)

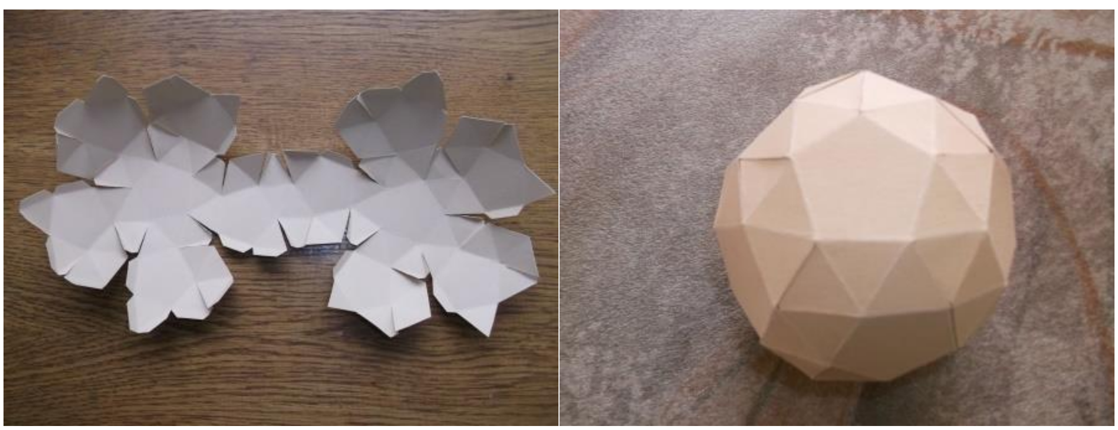
Komolý icosidodecahedron získáme složitějším ořezáním pravidelného dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu. Komolý icosidodecahedron se skládá z 32 stěn – 30 čtverců, 20 šestiúhelníků a 12 desetiúhelníků, nadále 180 hran a 120 vrcholů.



Obr. 21 A) Síť truncated icosidodecahedronu B) Model truncated icosidodecahedronu

3.1.13 Snub dodecahedron (92, 150, 60, $80_3 + 12_5$)

Snub dodecahedron je poslední mnohostěn, který lze vytvořit z pravidelného dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu. Skládá se z 92 stěn – 80 stěn má trojúhelníkových a 12 pětiúhelníkových, dále má 150 hran a 60 vrcholů.



Obr. 22 A) Síť snub dodecahedronu B) Model snub dodecahedronu

4 Další vlastnosti skládání papíru

4.1 Formát papíru

Nejzákladnější formáty papíru v Čechách i jinde ve světě (výjimku tvoří státy USA, Kanada, Mexiko a některé jihoamerické země) splňují mezinárodní standard ISO 216 (dříve znám jako DIN 476). Československo přijalo tento standard v roce 1953 a dodnes platí v Čechách norma „ČSN EN ISO 216“.

Poměr stran je označován jako „Brána harmonie“ a poměr délek stran je zachován při každém přeložení delší strany archu na polovinu. Vzájemný poměr stran je dán tak, aby po přepůlení papírů zůstal poměr stran zachován.

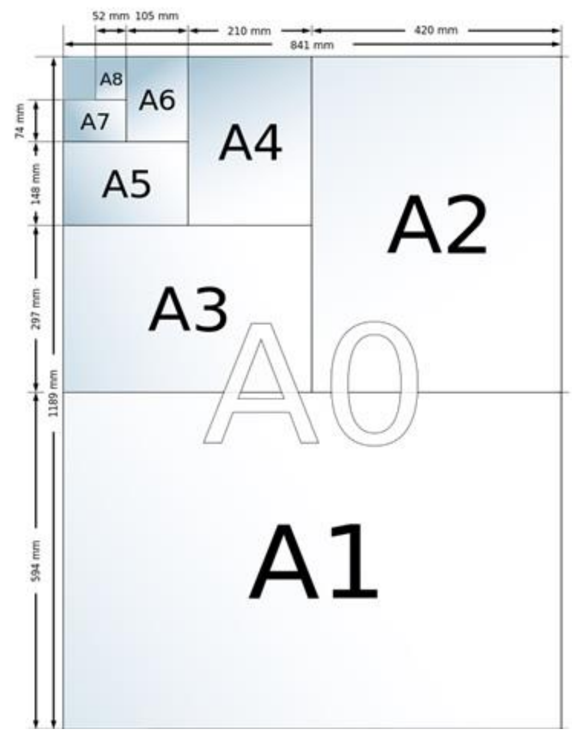
Mezi tři nejdůležitější formáty patří řady formátů A, B a C. Označení formátu je vždy z písmene a čísla. Řada A je základní, řada B je rozšiřující, kdy formát A nevyhovuje a řada C je navržena pro obálky. [4], [5]

4.1.1 Formát A

Řada A je dána plochou papíru 1 m^2 a poměrem velikostí stran 1: $\sqrt{2}$. Délky stran jsou udávány v milimetrech a zaokrouhleny na celé milimetry. Základní formát A0 má plochu 1 m^2. Další formáty vznikají přeložením delší strany na polovinu, kdy kratší strana je u dalšího formátu ta delší strana a delší strana předchozího formátu je o plovinu menší. Nejpoužívanější formát řady A je formát A4, který má rozměry 210 x 297 mm.

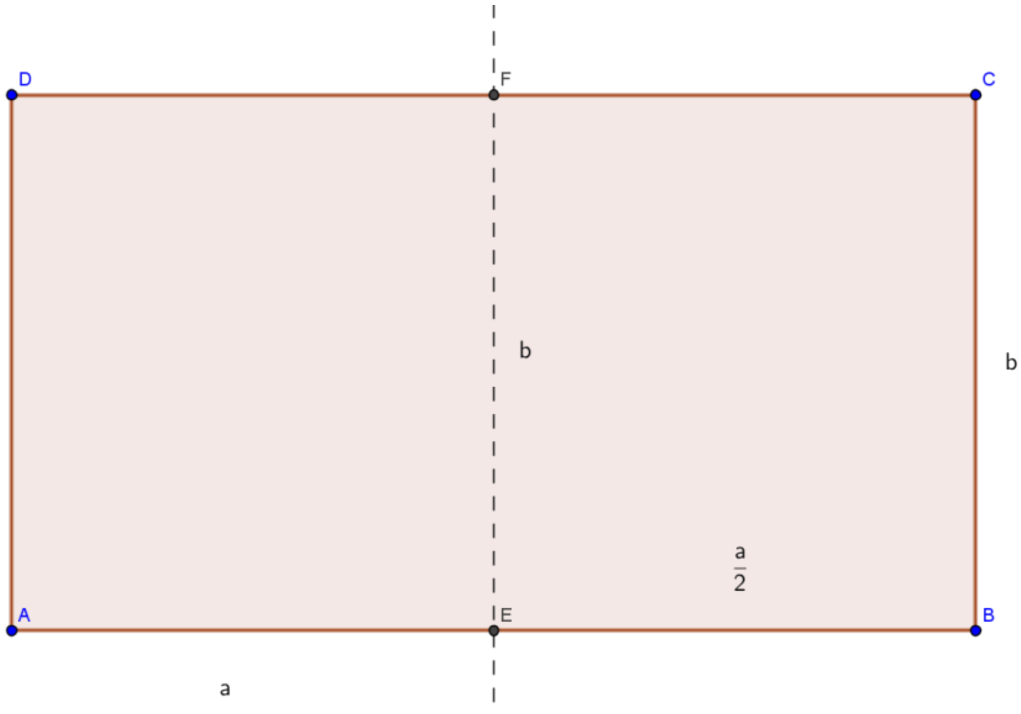
Pro nějaké formáty máme zažité názvy: A2 – arch, A3 – půlarch, A4 – čtvrtka, A5 – list, A6 – půllist a A7 čtvrtlist. [4], [5]

	Kratší x delší strana (v mm)
A0	841 x 1189
A1	594 x 841
A2	420 x 594
A3	297 x 420
A4	210 x 297
A5	148 x 210
A6	105 x 148
A7	74 x 105
A8	52 x 74
A9	37 x 52
A10	26 x 37



Obr. 23 Hodnoty a obrázek formátu A

Zde je dokázáno, že přeložením papíru na polovinu, dostaneme papír ve stejném poměru stran, jako byl původní nepřeložený papír.



Obr. 24 Podobnost obdélníků

Máme obdélník ABCD, kde delší strana je a a kratší b. Přeložením delší strany na polovinu dostaneme 2 stejné obdélníky AEFD a EBCF, kde delší strana je b a kratší je $\frac{a}{2}$. Chci porovnat podobnost obdélníku ABCD s podobností obdélníku EBCF a dokázat, že formát papíru A je v poměru 1: √2.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} <=> \frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$\underline{a = b\sqrt{2}}$$

Dosazení formátu A4 do předchozího vztahu a dokázání na vybraném příkladu, že důkaz platí.

$$\frac{297}{210} = \frac{210}{\frac{297}{2}} <=> \frac{297}{210} = \frac{2 * 210}{297}$$

$$a = 210 * \sqrt{2}$$

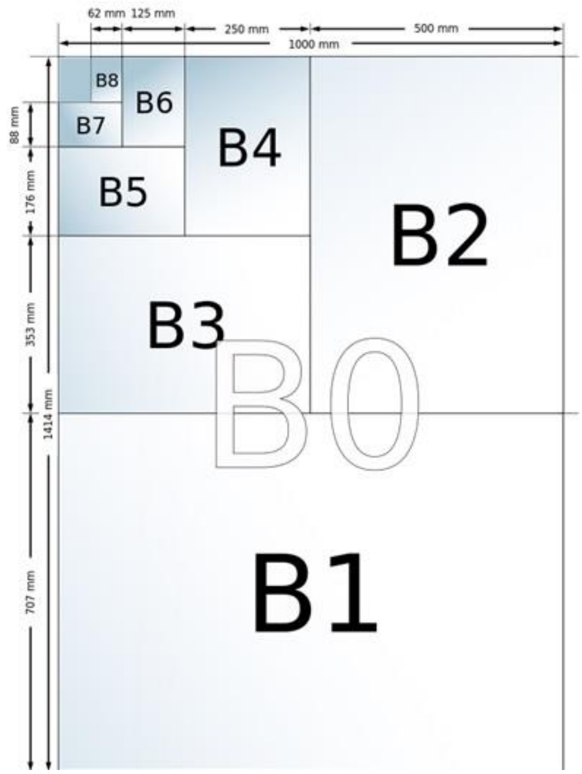
$$\underline{a = 297}$$

Když porovnáme námi vypočtený formát s tabulkouvou hodnotou, můžeme říci, že se jedná o přesný výpočet.

4.1.2 Formát B

Řada B je rozšiřující řada založená na formátu o straně dlouhé 1m. Šířka a výška formátu B je geometrickým středem mezi odpovídajícím A formátem a nejbližším vyšším formátem. Základním formátem je formát B0, který má obsah 1,414 m^2 (B0 = √2). Často používaný formát B4 má rozměry 250 x 353 mm. Tento formát je nejčastěji užíván v tisku. [4], [5]

	Kratší x delší strana (v mm)
B0	1000 x 1414
B1	707 x 1000
B2	500 x 707
B3	353 x 500
B4	250 x 353
B5	176 x 250
B6	125 x 176
B7	88 x 125
B8	62 x 88
B9	44 x 62
B10	31 x 44



Obr. 25 Hodnoty a obrázek formátu B

4.2 Eulerova věta o mnohostěnech

Eulerův vztah mnohostěnu je udáván za jednu z nejkrásnějších formulí v celé matematice a jeden z prvních velkých vzorců topologie – studia tvarů a jejich vzájemných vztahů.

Eulerova věta udává vztah mezi počtem vrcholů *(v)*, hran *(h)* a stěn *(s)* konvexního mnohostěnu:

$$v + s - h = 2. \tag{1}$$

Mnohostěn je konvexní, jestliže každá úsečka spojující jeho vnitřní body leží celá uvnitř tělesa. Věta může platit i pro některá nekonvexní tělesa.

Tento vzorec byl později zobecněn jednak pro studium sítí a grafů, ale i proto, aby pomohl matematikům porozumět široké škále tvarů s otvory a objektům ve vyšších dimenzích. [2]

4.2.1 Ověření vztahu pro známé mnohostěny

Tab. 1 Hodnoty pravidelných mnohostěnů

Název mnohostěnu	**Stěna *(s)***	**Vrchol *(v)***	**Hrana *(h)***
Čtyřstěn	4	4	6
Šestistěn	6	8	12
Osmistěn	8	6	12
Dvanáctistěn	12	20	30
Dvacetistěn	20	12	30

Zdroj: vlastní zpracování

Čtyřstěn: $4 + 4 - 6 = 2$

Dvacetistěn: $12 + 20 - 30 = 2$

Na dvou vybraných mnohostěnech je dokázáno, že Eulerova věta platí. Takto by šlo pokračovat i u dalších mnohostěnů. Nám stačí na ukázku čtyřstěn a dvacetistěn.

4.2.2 Důkaz Eulerovy věty

Nyní provedeme důkaz Eulerova vztahu (1), viz [10]. Předpokládejme, že máme konvexní mnohostěn, který obsahuje *s, v, h* a chceme dokázat, že tato věta platí.

Budu předpokládat, že daný konvexní mnohostěn obsahuje trojúhelníkové stěny v počtu s_3, čtyřúhelníkové stěny v počtu s_4 až *k*-úhelníkové stěny v počtu s_k, kde $k \geq 3$. Poté můžu napsat rovnici, kde počet stěn mnohostěnu je roven

$$s = s_3 + s_4 + \ldots + s_k = \sum_{n=3}^{k} s_n .$$

Dále zjistím, že počet hran mnohostěnu je

$$h = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \ldots + ks_k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{k} ns_n\right).$$

Abych tento zápis vysvětlila, zvolím si jako příklad mnohostěn, který má trojúhelníkové stěny. Trojúhelníková stěna má tři hrany a počet těchto stěn v mnohostěnu je s_3. Protože každá hrana je obsažena ve dvou stěnách, tak musíme celý výraz vydělit dvěma. Tímto způsobem získám první člen. K dalším členům, čtyřúhelníkovým až *k*-úhelníkovým stěnám, dojdu stejným způsobem. Sečtením všech členů získám výraz pro počet hran daného mnohostěnu.

Nyní zjistíme podobným způsobem vztah pro vrcholy. Máme daný mnohostěn, který má v_3 vrcholů, hrany tvoří trojhrany. Dále máme v_4 vrcholů a ty tvoří čtyřhrany a až v_k vrcholů, v nichž hrany tvoří *r*-hrany ($r \geq 3$). Následující vztah platí pro počet vrcholů a hran

$$v = v_3 + v_4 + \ldots + v_r,$$

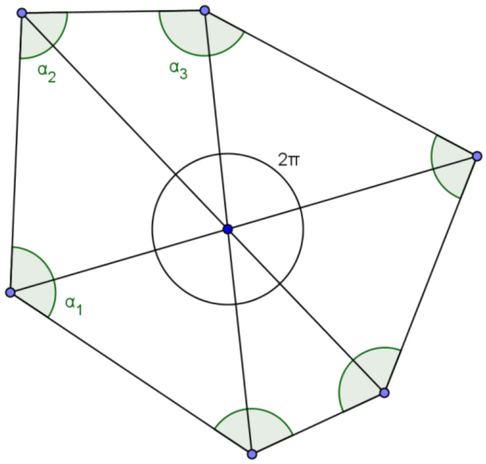
$$h = \frac{3}{2}v_3 + 2v_4 + \ldots + \frac{1}{2}rv_r.$$

Dále potřebuje vypočítat součet všech hranových úhlů. Jde o to, že musíme vypočítat součet vnitřních úhlů všech stěn mnohostěnu. Nejdříve jsme si zjistili, že součet vnitřních úhlů *n*-úhelníku je roven výrazu $2\ R\ (n - 2)$, viz. Obr. 26 (vychází z Descartovy věty, viz. poznámka), kde *R* je symbol pro pravý úhel. Poté je součet všech úhlů mnohostěnu roven

$$\sigma = s_3 2R(3-2) + s_4 2R(4-2) + \ldots + s_k 2R(k-2) = 2R[s_3 + 2s_4 + \ldots + s_k(k-2)]$$

a po přepsání dostaneme tento výraz

$$\sigma = 2R\left(\sum_{n=3}^{k} (n-2)s_n\right).$$



$$\sum = n * 180 - 2 * 180 \rightarrow \sum = 180 * (n - 2)$$

Obr. 26 Součet vnitřních úhlů n-úhelníku

Z výše uvedených vztahů pro s a h dostáváme výraz

$$2h - 2s = \left(\sum_{n=3}^{k} ns_n\right) - \left(\sum_{n=3}^{k} 2s_n\right)$$

a po upravení tohoto výrazu dostáváme následující výraz

$$2h - 2s = \sum_{n=3}^{k} (n-2)s_n.$$

Předchozí výraz dosadíme do výrazu pro σ a dostáváme

$$\sigma = 2\,R\,(2h - 2s).$$

Nyní porovnáme získaný výraz s Descartovou větou, která má tvar $\sigma = 4R(v-2)$ a získáváme následující rovnost

$$4\,R\,(v-2) = 4\,R\,(h-s).$$

Nakonec upravíme výraz a dojdeme k námi hledané Eulerově rovnici

$$s + v - h = 2.$$

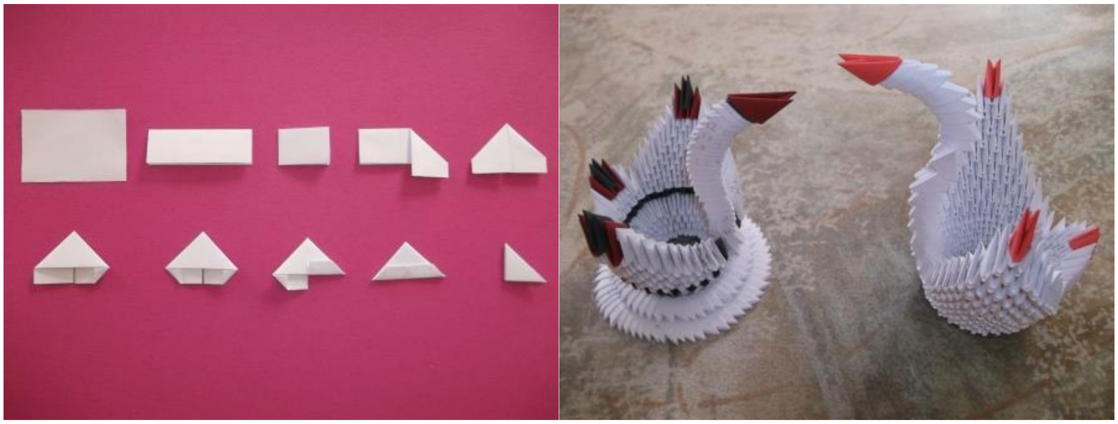
Platnost důkazu byla ověřena. Tento důkaz platí pro konvexní tělesa, která jsou předmětem této práce. Některá nekonvexní tělesa mohou splňovat také tento vztah. [10]

Poznámka - Descartova věta: U daného konvexního mnohostěnu je součet všech hranových úhlů (= úhel, sevřený dvěma hranami mnohostěnu se společným vrcholem) roven plnému úhlu (tj. 360°), vynásobenému počtem vrcholů, který jsme zmenšili o dvě. Označíme-li σ součet všech hranových úhlů, v počet vrcholů daného mnohostěnu a R pravý úhel (90°), pak platí $\sigma = 4\,R\,(v - 2)$. [10]

4.3 Další modely z papíru

4.3.1 3D origami

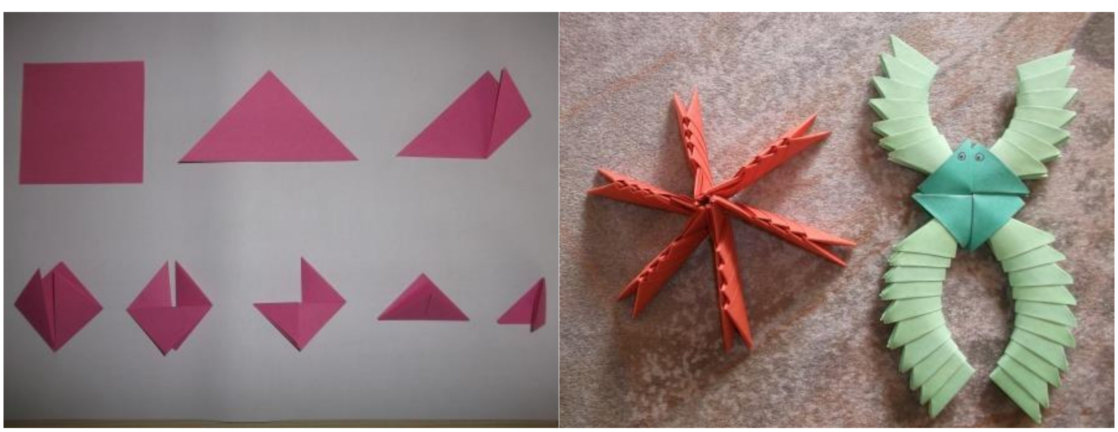
3D origami jsou velmi populární na webových stránkách, kde lze nalézt mnoho návodů na jejich skládání. Mým základem jsou papírky formátu A9, záleží na každém, jak chce mít modely velké (čím větší formát, tím jsou větší i modely). K nim se dostaneme postupným skládáním papíru A4. Tyto papírky se nadále skládají a ohýbají, abychom se dostali k základnímu dílku. Postup na tyto dílky nalezneme na Obr. 26 A.



Obr. 27 A) Postup skládání dílku *B) Hotové 3D origami*

4.3.2 Tangramy

Tato technika skládání na jedné straně velmi připomíná origami a zasouvání papírových modulů do sebe se zase podobá oblíbeným hlavolamům tangram, u nichž je důležitá zejména trpělivost. Tangramy je velice jednoduchá technika. Z papírových čtverců se poskládají trojúhelníky. Vzniknou tak výchozí dílky, které tvoří základ všech figurek a motivů, které se tak dají složit.



Obr. 28 A) Postup skládání dílku *B) Hotové tangramy*

4.3.3 Fleurogami

Všichni milovníci skládání papíru budou fleurogami určitě nadšeni. Technikou odvozenou od populárního origami poskládáme a slepíme nejprve okvětní lístky, z nichž pak sestavíme krásné květy. Už samotné květy jsou velice dekorativní a mají všestranné využití. Z více květů pak můžeme sestavit efektní a fascinující květinové koule, které určitě kdekoli upoutají pozornost. Jednotlivé květy se dají ještě kombinovat, proto i koule z nich vytvořené vypadají pokaždé jinak. Navíc máme možnost velkého množství způsobů, jak tyto dekorace barevně obměňovat a dále dozdobit.

Obr. 29 Hotové fleurogami

4.3.4 Kirigami

Japonský pojem kirigami znamená v doslovném překladu „vystřihování papíru“. I když vypadá popis této techniky zdánlivě jednoduše, výsledky jejího použití jsou okouzlující: pouhým stříháním a skládáním papíru vzniknou nádherná filigránová umělecká díla. Motivy a ornamenty zhotovené technikou kirigami se vyznačují nevyčerpatelným bohatstvím tvarů a mají všestranné použití.

Obr. 30 A) Příprava na kirigami B) Hotové kirigami

5 Závěry a doporučení

Hlavním cílem bakalářské práce byla tvorba a studium pravidelných a polopravidelných mnohostěnů.

Psaní této práce a tvorba modelů mě velmi bavila. Myslím, že tvorba modelů je velmi přínosná, jak pro děti, tak i pro dospělé. Jen si každý musí vybrat to, co ho bude bavit. Děti si při modelech trénují představivost a schopnost něco vytvářet, buď sami nebo s pomocí rodičů. O tom jsem se přesvědčila na akci „Den vědy pro každého“ v nákupním centru Géčko, kterou dne 28. 2. 2015 pořádala Jihočeská univerzita. Zde jsem dětem ukazovala, že i z papíru jdou udělat velmi pěkné modely a jak se dá strávit čas něčím zajímavým.

Myslím, že tvorba pravidelných mnohostěnů by se měla promítnout do výuky na základních školách. Děti by si nejdříve modely vyrobily a dále by se na nich snažily analyzovat jejich vlastnosti. Když dítě samo přijde na to, kolik má mnohostěn vrcholů, hran a stěn, určitě z toho bude mít větší radost, než když mu to bude jen ukázáno učitelem. Vše záleží na učiteli a jeho možnostech zpestření výuky.

Seznam použité literatury

[1] VORÁČOVÁ, Šárka a kol. Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná. Praha: Academia, 2012, 256 s.

[2] PICKOVER, Clifford A. Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky. Praha: Argo/Dokořán, 2012, 542 s.

[3] Sonobe. Wikipedia : the free encyclopedia [online]. [cit. 2015-03-17]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Sonobe>.

[4] Formát papíru. Wikipedie : Otevřená encyklopedie [online]. [cit. 2015-02-17]. Dostupné z www: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Form%C3%A1t_pap%C3%ADru>.

[5] Formáty papíru. Přepočet.cz [online]. [cit. 2015-02-17]. Dostupné z www: <http://www.prepocet.cz/papir/>.

[6] Five elements. Aether Theory [online]. [cit. 2014-07-14]. Dostupné z www: <http://www.aetherwavetheory.info/backup/Fyzika13/five_elements.gif>.

[7] Keplerova soustava [online]. [cit. 2014-07-14]. Dostupné z www: <http://www.converter.cz/fyzici/images/kepler-soustava.jpg>.

[8] Dualita těles [online]. [cit. 2014-07-14]. Dostupné z www: <http://nd06.jxs.cz/867/204/6ae4664b6c_94448197_o2.png>.

[9] KORCSOK, Pítr. Pravidelnost mnohostěnů [online], Matematický korespondenční seminář. Dostupné z WWW: <https://mks.mff.cuni.cz/library/Pravidelnost_mnohostenu_PK/Pravidelnost_mnohostenu_PK.pdf>.

[10] HORÁK, Stanislav. Mnohostěny. Praha: Mladá fronta, 1970, 83 s.

Přílohy

Příloha 1: Model pravidelného čtyřstěnu

Příloha 2: Model pravidelného šestistěnu

Příloha 3: Model pravidelného osmistěnu

Příloha 4: Model pravidelného dvanáctistěnu

Příloha 5: Model pravidelného dvacetistěnu

Příloha 6: Model komolého čtyřstěnu

Příloha 7: Model kubooktaedru

Příloha 8: Model komolého osmistěnu

Příloha 9: Model komolého šestistěnu

Příloha 10: Model rhombicuboctahedronu

Příloha 11: Model komolého kubooktaedru

Příloha 12: Model icosidodecahedronu

Příloha 13: Model komolého dvacetistěnu

Příloha 14: Model komolého dvanáctistěnu

Příloha 15: Model snub hexahedronu

Příloha 16: Model rhombicosidodecahedronu

Příloha 17: Model komolého icosidodecahedronu

Příloha 18: Model snub dodecahedronu