Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka problémových úloh z matematiky

Vypracovala: Dagmar Melicharová
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice, 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka problémových úloh z matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 2015 ………………………

Poděkování

Tímto bych velmi ráda poděkovala panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, velkou dávku trpělivosti, ochotu a cenné připomínky, které mi v průběhu zpracování mé bakalářské práce věnoval.

Anotace

Hlavní náplní této bakalářské práce je rešerše internetových portálů a učebnic nabízejících problémové úlohy z matematiky a vytvoření vlastní sbírky problémových úloh pro 2. stupeň základní školy. Příklady ve sbírce úloh z matematiky jsou utříděny do čtyř kapitol podle ročníku, pro který jsou určeny. Každý příklad obsahuje jedno nebo více řešení a je doprovázen obrázkem.

Klíčová slova

RVP ZV, problémové úlohy, analýza učebnic, sbírka úloh

Abstract

The main content of this bachelor thesis is to make research of internet portals and textbooks that offers problem tasks from mathematics and to create a collection of problem tasks for lower secondary school. Tasks in the collection from mathematics are categorized to four chapters according to the class for which they are determined. Every task contains one or more solutions and is accompanied by picture.

Keywords

RVP ZV, problem tasks, analysis textbooks, collection of tasks

Obsah

Úvod ... 6

1 *Problémové úlohy – pojem* ... 7

2 *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* ... 10

2.1 Matematika a její aplikace ... 11

3 *Analýza učebnic matematiky pro 2. stupeň ZŠ* ... 13

3.1 Učebnice nakladatelství Prometheus ... 13

3.2 Učebnice nakladatelství Fraus ... 15

4 *Problémové úlohy na internetu* ... 17

4.1 Internetové portály ... 17

4.1.1 Matematika pro všechny ... 17

4.1.2 NRICH ... 19

4.1.3 A+ Click ... 20

4.2 Matematické soutěže ... 21

4.2.1 Matematický klokan ... 21

4.2.2 Matematická olympiáda ... 22

4.3 Problems of the week ... 23

4.3.1 CEMC ... 23

4.3.2 The Math Forum ... 24

5 *Sbírka problémových úloh z matematiky* ... 26

5.1 Šestý ročník ... 26

5.1.1 Pyramida ... 26

5.1.2 Duhový plot ... 27

5.1.3 Trojúhelník s T- čkem ... 28

5.1.4 Šestiúhelníky ... 29

5.1.5 Koberce ... 30

5.2 Sedmý ročník ... 32

5.2.1 Čokoláda ... 32

5.2.2 Sousedé ... 33

5.2.3 Na farmě ... 35

5.2.4 Rozvoz pizzy ... 36

5.2.5 Bazén ... 37

5.3 Osmý ročník ... 39
5.3.1 Meruňky ... 39
5.3.2 Zelený hrnek ... 40
5.3.3 Dřevěné kuličky ... 41
5.3.4 Rozhledna ... 42
5.3.5 Konev ... 43
5.4 Devátý ročník ... 44
5.4.1 Peníze v bance ... 44
5.4.2 Sušenky ... 45
5.4.3 Ovocný sad ... 46
5.4.4 Čaj ... 47
5.4.5 Svíčky ... 49
Závěr ... 50
Seznam použité literatury ... 51
Seznam obrázků ... 52

Úvod

V této bakalářské práci se věnuji nestandardním aplikačním úlohám, které jsou důležitou součástí matematického vzdělávání. Hlavním cílem je vytvořit sbírku problémových úloh z matematiky, která bude moci sloužit jako podpora výuky matematiky na 2. stupni základní školy.

Toto téma jsem si vybrala především proto, že mě problémové úlohy již od základní školy velmi zajímaly. Už tehdy jsem si všimla skutečnosti, že na základní škole se problémovým úlohám věnuje velmi málo času a pozornosti. Sama jsem se s nimi setkávala jen v podobě soutěží, jako je například Matematický klokan. Dalším důvodem mého výběru je vytvoření sbírky problémových úloh, kterou budu moci využívat ve své budoucí učitelské praxi.

V první kapitole vysvětluji, co to je „problémová úloha“. Při definování problémové úlohy se opírám o knihu *Hrozny problémů ve školské matematice [1],* kde Jan Kopka rozděluje matematický problém do tří kategorií – cvičení, úlohy a zkoumání. Zde popisuji všechny kategorie se zaměřením na problémové úlohy.

Druhá kapitola se zabývá Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV) a jeho pohledem na problémové úlohy. V první části této kapitoly se věnuji převážně klíčovým kompetencím v základním vzdělávání a zaměřuji se na kompetenci k řešení problémů. V podkapitole Matematika a její aplikace popisuji, co obsahuje výuka matematiky na základní škole a jakou pozici v ní mají problémové úlohy.

Ve třetí kapitole jsem provedla analýzu dostupných učebnic pro 2. stupeň základních škol z hlediska problémových úloh. Konkrétně jsem hodnotila učebnice nakladatelství Prometheus a Fraus. Analýzu jsem doplnila o ukázky příkladů.

Čtvrtá kapitola se věnuje internetovým portálům, které se zabývají problémovými úlohami. Vybrala jsem sedm portálů, které zde podrobně rozeberu.

Pátá kapitola je samotnou sbírkou problémových úloh z matematiky. Úlohy jsou rozděleny do čtyř podkapitol podle jednotlivých ročníků 2. stupně základní školy.

1 Problémové úlohy – pojem

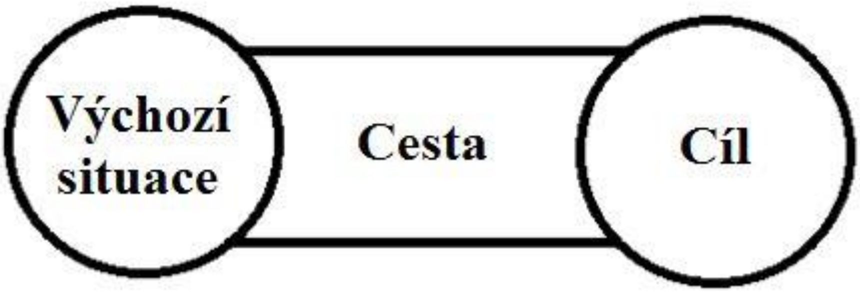
Dříve než se začneme zabývat problémovými úlohami, je potřeba si vysvětlit, co to problémová úloha je a jak ji můžeme definovat.

RVP ZV popisuje nestandardní aplikační úlohy a problémy jako takové úlohy, jejichž řešení není plně závislé na znalostech školské matematiky, ale do značné míry vyžadují uplatnění logického myšlení. [2]

Jan Kopka ve své knize *Hrozny problémů ve školské matematice [1]* vysvětluje matematické problémy na základě tří složek tvořících problém:

1. Výchozí situace = zadání problému obsahující informace či údaje
2. Cíl = informace o tom, čeho by měl řešitel dosáhnout
3. Cesta = postup jak se dostat od výchozí situace k cíli

Grafické znázornění matematického problému dle Kopky ([1], str. 14) viz Obr. 1.



Obr. 1 – Matematický problém

Na základě tohoto grafického znázornění matematického problému rozděluje Jan Kopka problémy na následující tři kategorie.

1. **Cvičení (rutinní problémy)**

Problémy nazýváme cvičení, jestliže známe přesně výchozí situaci, máme zadán cíl a je nám známa i cesta. Máme tedy k dispozici všechny složky matematického problému. Příkladem rutinního problému může být, jestliže žák umí řešit soustavy dvou rovnic a my mu k vyřešení zadáme konkrétní soustavu rovnic.[1]

Grafické znázornění cvičení dle Kopky ([1], str. 15) je uvedeno na Obr. 2

Obr. 2 – Cvičení

2. **Úlohy (nerutinní problémy)**

Matematické problémy nazýváme problémové úlohy právě tehdy, když je přesně známa výchozí situace a je přesně zadán i cíl. Rozdílem od cvičení je skutečnost, že neznáme cestu, jak se k cíli dopracovat. Příkladem nerutinního problému může být, když žákovi zadáme konkrétní číselnou řadu a budeme požadovat doplnění následujících čísel. [1]

Grafické znázornění úlohy dle Kopky ([1], str. 15) je uvedeno na Obr. 3.

Obr. 3 – Úlohy

3. Zkoumání

O matematickém zkoumání hovoříme, jestliže je nám známa pouze výchozí situace. Cíl není upřesněn nebo není znám vůbec a cesta je zcela neznámá. Příkladem matematického zkoumání může být zadání Pascalova trojúhelníku s nekonkrétním požadavkem „Zkoumejte tento trojúhelník“. [1]

Grafické znázornění zkoumání dle Kopky ([1], str. 16) je uvedeno na Obr. 4.

Obr. 4 - Zkoumání

V této bakalářské práci se zaměřuji pouze na 2. kategorii matematických problémů, tedy na problémové úlohy. Ovšem při výběru problémových úloh můžeme snadno narazit na překážku. „*Někdy je těžké určit, zda pro určitého žáka je zadaný problém rutinní či nikoliv. Dostatečným procvičováním postupně přechází určitý druh problémů z kategorie nerutinních do kategorie rutinních problémů. Navíc, v danou chvíli může být určitý problém pro některé žáky třídy rutinní a pro jiné nerutinní.*

Problém: *Na výlet na konci školního roku jelo 25 dětí. 3/5 z nich byla děvčata. Kolik bylo na výletě děvčat a kolik chlapců?*

Tento problém bychom mohli zadat žákům brzy po tom, co je naučíme pracovat se zlomky. Výchozí situace je dána, cíl je také dán, ale cesta, jak se dostat k cíli, může být pro některé žáky známa, zatímco pro jiné nikoliv. Proto může být tento problém pro některé žáky rutinní a pro jiné nikoliv.“ ([1], s. 16)

Do sbírky úloh jsem se snažila vybírat pečlivě takové problémy, které jsou (podle mého názoru) pro cílovou skupinu žáků úlohami, nikoli cvičeními. Bohužel nemohu zaručit, že pro některé žáky nemohou úlohy působit jako cvičení.

2 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Dle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) je cílem základního vzdělávání pomoci žákům utvářet a postupně rozvíjet klíčové kompetence a tím jim poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání zaměřeného především na praktické jednání a situace z běžného života. [2] „*Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti*.“([2], s. 11)

Osvojování klíčových kompetencí je dlouhodobý a složitý proces, který nás provází od předškolního vzdělávání v průběhu celého života. Klíčové kompetence se navzájem různými způsoby prolínají, nejsou součástí konkrétního vyučovaného předmětu a je možné je získat jen jako výsledek celkového procesu vzdělávání. K utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tedy směřuje veškerý vzdělávací obsah a činnosti, které ve škole probíhají. [2]

„*V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány: kompetence k učení; kompetence k řešení problémů; kompetence komunikativní; kompetence sociální a personální; kompetence občanské; kompetence pracovní.*“ ([2], s. 11)

Je zřejmé, že šestinu z klíčových kompetencí tvoří právě kompetence k řešení problémů. Tuto klíčovou kompetenci si žáci utváří a rozvíjí (mimo jiné) řešením matematických problémových úloh, proto se touto kompetencí budu zabývat podrobněji. RVP ZV stanovuje, jaké úrovně kompetencí k řešení problémů by měl žák na konci základního vzdělávání dosáhnout. Vzhledem k důležitosti všech bodů cituji:

„*Na konci základního vzdělávání žák:*

- *vnímá nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpozná a pochopí problém, přemýšlí o nesrovnalostech a jejich příčinách, promyslí a naplánuje způsob řešení problémů a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností*
- *vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému*

- *samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy*
- *ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů*
- *kritický myslí, činí uvážlivá rozhodnutí, je schopen je obhájit, uvědomuje si zodpovědnost za svá rozhodnutí a výsledky svých činů zhodnotí"*

  ([2], s. 12)

2.1 Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace klade důraz na porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům v matematice a pochopení vztahů mezi nimi. Je založena na aktivních činnostech s matematickými objekty a na užití matematiky v reálných situacích. Umožňuje žákům získat matematickou gramotnost, která hraje nezastupitelnou roli v praktickém životě.

Obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 2. stupni základní školy se dělí na čtyři tematické okruhy: číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a v prostoru, nestandardní aplikační úlohy a problémy. Dále se zaměřím pouze na nestandardní aplikační úlohy, které také nazýváme problémové úlohy.

Problémové úlohy by měly provázet výuku matematiky v průběhu celého základního vzdělávání a měly by prolínat všemi tematickými okruhy. Řešení problémových úloh vede žáka k rozvoji kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a ke srozumitelné a věcné argumentaci. Dále rozvíjí schopnost žáků spolupracovat na řešení problémových úloh a situací z běžného života a následně využít získaného řešení v praxi. Během řešení nestandardních aplikačních úloh se žáci učí pochopit a analyzovat daný problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty a řešit optimalizační úlohy. Také tím poznávají možnosti matematiky a skutečnosti, že k výsledku je možné dospět různými způsoby. [2]

Na konci 2. stupně základní školy žák využívá logické myšlení a kombinační úsudek při řešení problémových úloh a snaží se nalézt různá řešení zadaných či zkoumaných situací. Také je schopen řešit problémové úlohy zaměřené na prostorovou představivost a dokáže propojit a aplikovat znalosti a dovednosti z různých vzdělávacích oblastí. Učivo tohoto vzdělávacího okruhu by mělo dle RVP ZV obsahovat především číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie a logické a netradiční geometrické úlohy. [2]

3 Analýza učebnic matematiky pro 2. stupeň ZŠ

V České republice se můžeme setkat s mnoha typy učebnic pro výuku matematiky na 2. stupni základní školy. K dispozici jsou učebnice nakladatelství Fraus, Prometheus, Fortuna, SPN, Nová škola, Prodos a dalších. Díky tomu mají základní školy možnost výběru. Většina nových učebnic je již svým obsahem přizpůsobena požadavkům aktuálního RVP ZV, ale ve výuce matematiky se často setkáme i se staršími učebnicemi, které tyto požadavky nesplňují.

3.1 Učebnice nakladatelství Prometheus

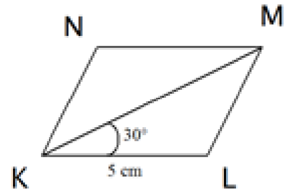
Na 2. stupni základních škol se nejčastěji setkáváme s učebnicemi od nakladatelství Prometheus, které zpracovali doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc. a doc. RNDr. Jiří Kadleček, CSc. Na většině základních škol, kde se tyto učebnice používají, se setkáme s 1. vydáním, které vyšlo postupně během let 1997–2001. Přestože tato sada učebnic má již své 2. vydání z roku 2010, které by mělo více odpovídat požadavkům aktuálního RVP ZV, zatím se na většině škol ještě nevyužívá. Vzhledem k této skutečnosti jsem se rozhodla zaměřit na starší vydání.

Celkem je v nakladatelství Prometheus vydáno 16 učebnic matematiky pro žáky 2. stupně základní školy. Pro každý ročník jsou to vždy tři díly učebnice a jeden díl sbírky úloh nebo pracovního sešitu.

Z hlediska problémových úloh tyto učebnice nesplňují požadavky aktuálního RVP ZV. Obsahují sice mnoho příkladů a slovních úloh, ale jde o takové úlohy, které jsou pro žáky spíše cvičeními, protože žáci znají cestu k řešení dané úlohy. Problémové úlohy v průřezu učebnicemi můžeme najít pod označením „*Pro přemýšlivé*“, ovšem u tohoto označení se podle mého názoru objevují spíše složitější rutinní problémy. Na problémové úlohy jsem narazila až v kapitolách „*Souhrnná cvičení*“, které najdeme v každé učebnici dvě, jednu v polovině a jednu na konci. Tyto kapitoly obsahují úlohy na procvičení probraného učiva, ale především jde o složitější úlohy z praktického života, kde musí žáci využívat kromě matematických znalostí i své logické myšlení, aby došli k řešení. Pro ukázku jsem vybrala několik příkladů.

Jako první příklad jsem vybrala právě úlohu pro přemýšlivé pro žáky 7. ročníku, která podle mého názoru je pro žáky spíše cvičením, jelikož se nachází v kapitole o konstrukci rovnoběžníků a žáci ještě díky nápovědě přesně vědí, jak úlohu řešit.

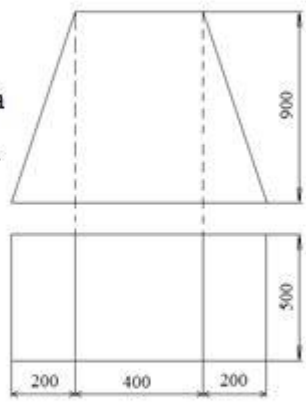
Pro přemýšlivé. Sestroj kosočtverec KLMN podle zadání v náčrtku.
Napovíme: Vypočítej velikosti vnitřních úhlů kosočtverce.



Obr. 5 – První příklad – Prometheus ([3], str. 49)

Druhou ukázku jsem zvolila ze stejné učebnice jako tu předchozí, ovšem ze souhrnných cvičení. Tato úloha je v učebnici zařazená do kontextu více úloh s jedním příběhem z praktického života. Jsou zde nutné znalosti matematické, ale také logická úvaha a prostorová představivost. Osobně tento příklad považuji za problémovou úlohu.

Podstavec pod sochu
„Potřebuji pevný dřevěný podstavec," říká zákazník.
„Tady jsem Vám nakreslil pohled zepředu a pohled shora délky jsou v milimetrech."
„Máme ten podstavec udělat dutý, nebo z plného dřeva?"
„Raději z plného dřeva. Kolik by asi vážil?"
Počítej s Lukášem hmotnost podstavce.
Napovíme: $1 m^3$ dřeva má hmotnost přibližně 600kg.



Obr. 6 – Druhý příklad – Prometheus ([3], str. 80)

3.2 Učebnice nakladatelství Fraus

Dostala jsem k dispozici i novější (vydané 2007 – 2010) učebnice pro 2. stupeň základní školy, a proto jsem se rozhodla je také zhodnotit z hlediska nestandardních aplikačních úloh. Konkrétně se jedná o učebnice nakladatelství Fraus. Autory těchto učebnic jsou RNDr. Helena Binterová, Ph.D., doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc. a prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc. Tyto učebnice by měly být zpracovány v souladu s RVP ZV.

Pro každý ročník 2. Stupně základní školy jsou připraveny od nakladatelství Fraus dvě učebnice a dva pracovní sešity. Pro každý ročník jsou to tedy 4 knihy. Součástí této sady učebnic jsou také příručky učitele, a to zvlášť pro každý ročník.

Podle mého názoru mají tyto učebnice velkou výhodu v tom, že žáky na první pohled zaujmou tím, že obsahují hodně ilustrací a fotografií z běžného života. Když se podíváme blíže na nestandardní aplikační úlohy, zjistíme, že i v této oblasti jsou učebnice velmi dobře vybavené. Autoři se o přítomnosti nestandardních aplikačních úloh v učebnicích vyjadřují takto: „*V učebnici jsou zařazeny v samostatné kapitole A ještě něco navíc, dále pak ve všech kapitolách učebnice jako úlohy s označením zamysli se, hledání souvislostí, pro chytré hlavy, v pracovním sešitě jsou zařazeny jako doplňující úlohy (kombinatorika, pravděpodobnost a úlohy s logickou úvahou, nestandardní úlohy), práce s anglickým textem*“ ([1], s. 94). V každém dílu učebnice je 3–8 stran věnovaných právě kapitole s názvem „*A ještě něco navíc*“, která je vždy plná nestandardních aplikačních úloh. Navíc další problémové úlohy najdeme ve všech kapitolách učebnic i v pracovních sešitech.

Za hlavní nevýhodu těchto učebnic považuji, že řešení úloh se nenachází v učebnicích, ale pouze v příručkách pro učitele. V tomto případě může nastat problém v situaci, kdy si žák řeší úlohy sám mimo školní výuku a nemůže si zkontrolovat své řešení.

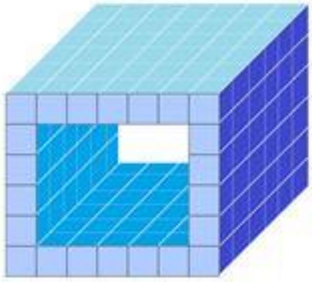
Pro představu, jakým způsobem jsou zpracované problémové úlohy v těchto učebnicích, jsem opět vybrala několik konkrétních příkladů.

První úlohu jsem vybrala z učebnice geometrie pro 6. Ročník. Tato úloha je v učebnici označena obrázkem, který znamená „pro chytré hlavy“. Podle toho víme, že se jedná o problémovou úlohu.

Z kolika krychliček je slepeno těleso na obrázku?

Vypočitej objem tohoto tělesa v m^3, jestliže objem krychličky je 27 dm^3.

Vypočitej povrch tohoto tělesa v dm^2.

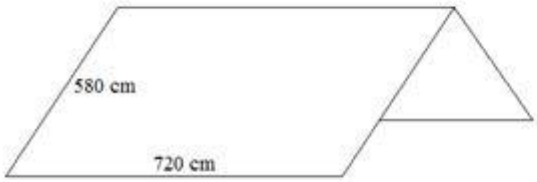


Kolik stěn krychliček natřeme lepidlem při slepováni takového tělesa? (Natiráme pouze jednu ze dvou slepovaných stěn). Jak veliká je plocha (v dm^2), kterou musite lepidlem natřit?

Obr. 7 – První přikalad – Fraus ([4], str.74)

Jako druhý příklad jsem vybrala úlohu z kapitoly „A ještě něco navíc“ z téže učebnice. Jedná se o problémovou úlohu na téma mnohoúhelníků a hranolů. Některé úlohy jsou označeny podle obtížnosti jednou až třemi kytičkami. V tomto konkrétním příkladu jsou jedna a dvě kytičky, jak můžeme vidět na Obr. 8.

Střechu na obrázku je třeba pokrýt hlinikovým plechem o tloušťce 1,2mm. Plech se prodává v tabulich o šířkách 92 cm, 127 cm nebo 245cm. Délka tabule je 300 cm. Cena za jeden metr čtvereční je 2725 Kč.



Vypočitej plochu střechy.

Urči minimálni cenu plechu potřebného na pokryti střechy (pokud by nebyl žádný odpad).

*Které typy tabuli je třeba objednat a jak je na střechu položit, aby cena byla co nej-nižši?
**Urči hmotnost hlinikové střechy (1 dm^3 hliniku váži 2,3kg).

Obr. 8 – Druhý příklad – Fraus ([4], str.81)

4 Problémové úlohy na internetu

Na internetových portálech můžeme najít celou řadu problémových úloh z matematiky různých obtížností i témat. Na českých internetových portálech bohužel narazíme na problémové úlohy jen zřídka. Z toho důvodu jsem se zabývala spíše zahraničními zdroji, kterých je o mnoho více. Ale i mezi českými zdroji objevíme problémové úlohy, například v podobě archivů matematických soutěží, jako je Matematický klokan nebo Matematická olympiáda. Mezi zahraničními portály se často setkáme s takovými, které se zabývají výhradně problémovými úlohami a jejich řešením. Velmi rozšířené jsou i portály nabízející problémové úlohy jako tzv. problems of the week. Zde je ovšem nutná znalost anglického jazyka. V následujících kapitolách se budu věnovat vybraným českým i zahraničním internetovým portálům.

4.1 Internetové portály

V této kapitole se budu zabývat několika vybranými internetovými portály, které se zabývají problémovými úlohami. Z velkého množství portálů jsem vybrala pro ukázku jeden český a dva zahraniční.

4.1.1 Matematika pro všechny

http://home.pf.jcu.cz/~math4all

Matematika pro všechny je webová stránka projektu Jednoty českých matematiků a fyziků a Společnosti učitelů matematiky. Tento projekt věnuje pozornost především žákům základních a středních škol, kteří dosahují v matematice slabších výsledků. Také je zaměřen na žáky s poruchami učení, jako je dyskalkulie či dysgrafie. [5]

Úlohy na internetovém portálu Matematika pro všechny jsou zaměřené na problémy z běžného života a propojují matematiku s ostatními oblastmi vzdělávání. Snaží se zaujmout žáky všech věkových kategorií svou tematikou či možnostmi řešení např. pomocí matematického softwaru, internetu nebo také interaktivní tabule. Úlohy jsou pro lepší přehlednost členěné podle stupně žáků a dále dle svého tematického zaměření. U každé úlohy můžeme najít předpokládanou dobu řešení, doporučené prostředí, obtížnost, potřebnost techniky a vhodnou metodu práce.[5]

Obr. 9 – Ukázka webové stránky Matematika pro všechny [5]

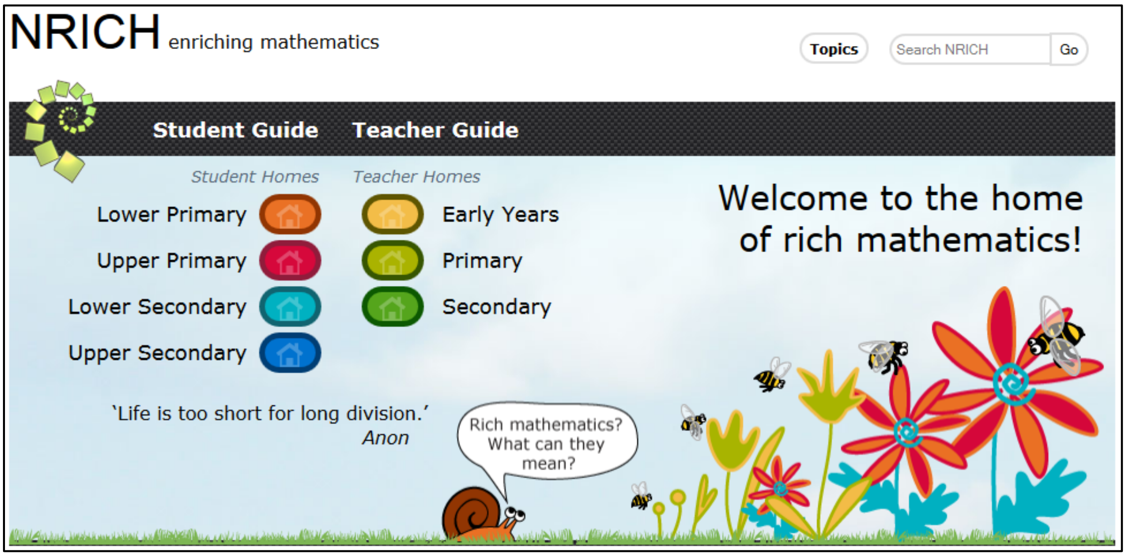
Při vstupu na tyto webové stránky si může uživatel vybrat svou kategorii. První kategorií je učitel, pro kterého jsou kromě úloh pro žáky dostupná také řešení doplněná o metodické poznámky a zadání úloh v podobě pracovního listu pro žáky. Druhou kategorií je žák, pro kterého je k dispozici zadání a řešení každé úlohy, bez dalších poznámek. Třetí kategorií je rodič, který se může dočíst mnoho zajímavých informací z historie matematiky. Také ve své kategorii najde informace týkající se didaktiky matematiky či specifických vzdělávacích potřeb dítěte.

Můj názor na tyto internetové stránky je velmi kladný. Především bych vyzdvihla zaměření na slabší žáky, jelikož portály s matematickými úlohami se zaměřují většinou spíše na nadané žáky. Dále mě zaujalo celkové zpracování úloh, které je na první pohled poutavé a doplněné o mnoho ilustrací, díky čemuž si žáci mohou lépe představit situaci v dané úloze.

4.1.2 NRICH

http://nrich.maths.org/frontpage

Název NRICH je odvozeno od enriching mathematics, což se dá přeložit jako obohacování matematikou. NRICH je kvalifikovaná skupina učitelů, jejichž zájmem je poskytovat rady a podporovat studenty i učitele matematiky. NRICH si klade za cíl obohatit žáky o cenné zkušenosti z matematiky, nabízet jim poutavé úlohy a ukázat jejich smysluplnost. Dále rozvíjet matematické myšlení žáků a schopnost řešit problémy a spolupracovat s učiteli, školami a jinými vzdělávacími zařízeními. [6]



Obr. 10 – Ukázka webové stránky NRICH [6]

Tento internetový portál nabízí bezplatně matematické problémy, články a hry pro žáky všech věkových kategorií. Hned na úvod si každý uživatel vybere svůj „domeček" podle kategorie a úrovně, o kterou má zájem. Žáci si mohou vybrat ze čtyř kategorií: 1. – 2. ročník ZŠ, 3. – 5. ročník ZŠ, 6. – 9. ročník ZŠ + 1. ročník SŠ nebo 2. – 3. ročník SŠ. Učitelé mají na výběr 3 kategorie podle toho, jaké žáky učí: mateřská škola, 1. stupeň ZŠ nebo 2. stupeň ZŠ + SŠ. Stejně jako u kategorií žáků se úlohy u učitelů dále rozdělují do mnoha různých tematických okruhů a každý okruh obsahuje velké množství úloh. Některé úlohy mají své zadání a řešení a některé jsou pojaté jako hry. Žák v nich může odpověď doplnit přímo na určené místo a ta je okamžitě vyhodnocena.

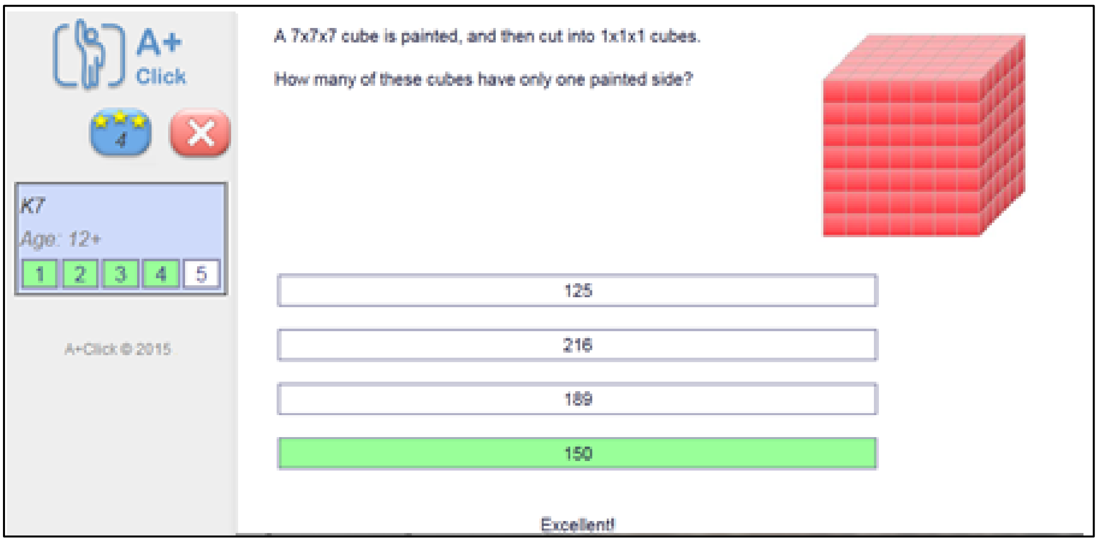
Mé osobní hodnocení internetové stránky je velmi pozitivní. Na první pohled upoutá žáka i učitele atraktivním vzhledem úvodní strany, která je příjemně barevná s obrázky a neobsahuje příliš mnoho textu. Na druhý pohled zaujme ještě více, protože podle mého názoru obsahuje vše, co by žák či učitel hledající problémové úlohy mohl chtít najít. Kdyby uživateli připadaly tyto webové stránky nepřehledné, nebo by nevěděl, kde co najít, obsahují také průvodce stránkou zvlášť pro učitele i žáka, což je podle mého také velkou výhodou.

4.1.3 A+ Click

http://www.aplusclick.com

A+ Click je projekt který v roce 2010 založil Igor Kokcharov, který se snaží pomáhat dětem z celého světa, které touží po objevování a řešení zajímavých matematických hádanek a problémů. A+ Click si zakládá na tom, že nevyžaduje žádné přihlášení, poplatky a neobsahuje reklamy. [7]

Tento internetový portál obsahuje více než 4700 problémových úloh pro žáky od 1. ročníku ZŠ až po 3. ročník SŠ. Úlohy se zaměřují spíše než na matematická pravidla a definice, na logické myšlení, prostorovou představivost a užitečnost řešení problémů. Obsahují krátký popis a ilustraci, aby si žák lépe představil problémovou situaci. Většinu úloh je možné řešit během krátké doby bez použití kalkulačky.[7]



Obr. 11 – Ukázka úlohy z A+ Click [7]

Úlohy na A+ Click mají testový charakter, vždy je na výběr ze čtyř možných odpovědí. Při vstupu na tento web si žák může vybrat svou úroveň nebo téma, kterému se chce věnovat a poté si zvolí svou první úlohu. Další úlohy se generují náhodně ze stejné úrovně. Pokud žák odpoví správně na pět po sobě jdoucích úloh, je mu nabídnut přechod na úlohy z vyššího ročníku. Za každou správně zodpovězenou úlohu získá žák hvězdičku. Poté co získá 16 hvězdiček, může vstoupit do soutěže, ve které soutěží s ostatními žáky v počtu získaných hvězdiček. Nejlepších 10 žáků je vždy zobrazeno na úvodní straně i s jejich skóre.

Podle mého názoru je internetový portál A+ Click velmi nápaditě a poutavě zpracovaný. Jako výhodu bych vyzdvihla celkovou přehlednost stránek, díky čemuž se na nich lehce orientují i ti nejmladší žáci. Dalším pozitivem je, že se žáci mohou posouvat do vyšších úrovní, když bez problémů zvládají úroveň, ve které se nacházejí, a když mají zájem, mohou i soutěžit. To může být pro žáky velmi motivující.

4.2 Matematické soutěže

Každým rokem se v České republice na základních i středních školách konají matematické soutěže zaměřené přímo na problémové úlohy. Pro každý ročník se vytváří zcela originální zadání a zadání z minulých let je archivováno. Archivy takových soutěží najdeme i volně přístupné na jejich internetových portálech. Nejznámějšími matematickými soutěžemi v České republice jsou Matematický klokan a Matematická olympiáda. Z tohoto důvodu bych je ráda přiblížila podrobněji.

4.2.1 Matematický klokan

http://matematickyklokan.net

Matematický klokan je mezinárodní matematická soutěž, které se v Evropě každý rok účastní dva a tři čtvrtě milionu soutěžících, z toho je přes 340 000 z ČR. Od roku 1995 pořádá tuto soutěž v ČR Jednota českých matematiků a fyziků spolupracující s Katedrou matematiky PdF UP a Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci.[8]

Úlohy v Matematickém klokanovi jsou rozděleny do pěti kategorií podle ročníků, pro které jsou určeny. Klokánek (4. – 5. ročník ZŠ), Benjamín (6. – 7. ročník ZŠ), Kadet

(8. – 9. ročník ZŠ), Junior (1. – 2. ročník SŠ) a Student (3. – 4. ročník SŠ). V každé kategorii je testových 24 úloh, které jsou ještě tříděny podle obtížnosti na tři úrovně. Úlohy jsou kratší a stručně podané, často doplněné o vhodné obrázky, tabulky či grafy. Tematicky úlohy Matematického klokana prolínají různé oblasti matematiky, setkáme se s příklady z aritmetiky, geometrie, algebry i s příklady, které lze řešit jen pomocí logické úvahy. [8]

Na internetových stránkách Matematického klokana můžeme najít sborníky úloh od roku 2004, které obsahují úlohy ze všech kategorií i obtížností. Za každý rok jsou úlohy spolu s řešením i vyhodnocením výsledků uloženy v jednom pdf souboru.

4.2.2 Matematická olympiáda

http://mo.webcentrum.muni.cz

Matematická olympiáda je mezinárodní matematická soutěž pro žáky základních a středních škol. Jejím cílem je pomáhat vyhledávání talentovaných žáků a podporovat jejich odborný růst. Matematická olympiáda probíhá každoročně pouze pro zájemce o matematiku a řešení náročných matematických problémů, tedy soutěže se neúčastní celé třídy, ale jen jedinci.[9]

Matematická olympiáda je rozdělena do osmi kategorií podle ročníků. Kategorie Z5 – Z9 (5. – 9. ročník ZŠ), kategorie C (1. ročník SŠ), kategorie B (2. ročník SŠ) a kategorie A (3. a 4. ročník SŠ). Soutěž má tři kola, školní, okresní a krajské, každé kolo se skládá ze 4 – 6 otevřených problémových úloh z různých oblastí matematiky. [9] Ve školním roce 2014/2015 se v České republice koná již 64. ročník matematické olympiády. Na její webové stránce jsou archivována zadání i řešení úloh z posledních 17 ročníků.

V porovnání s Matematickým klokanem je Matematická olympiáda opravdu jen pro velmi talentované žáky a při řešení úloh je nutné mít dobré znalosti matematiky. U Matematického klokana je možné mnoho úloh řešit pouze se základními znalostmi v kombinaci s logickou úvahou.

4.3 Problems of the week

Především na zahraničních internetových portálech se často setkáme s tzv. problémy týdne. Jedná se o problémové úlohy z různých oblastí matematiky, které vychází jednou za týden, a o týden později vyjde i řešení. Na ukázku jsem vybrala dva z těchto internetových portálů.

4.3.1 CEMC

http://www.cemc.uwaterloo.ca

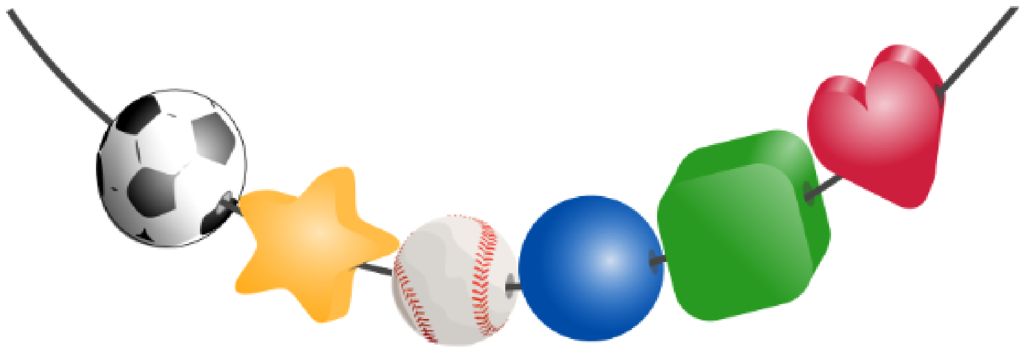
The Centre for Education in Mathematics and Computing (Centrum pro vzdělávání v matematice a výpočetní technice) je největší a nejuznávanější Kanadská organizace pro podporu a vytváření materiálů k matematice a informatice. Hlavním cílem centra pro vzdělávání v matematice a informatice je zvýšit radost, sebedůvěru a schopnosti v těchto vědách mezi studenty a učiteli nejen v Kanadě, ale i na mezinárodní úrovni. CEMC se snaží zdůraznit význam a důležitost matematiky a informatiky ve 21. století. Činí tak prostřednictvím soutěží, workshopů, online publikací a poskytováním učiva, které obohacuje učivo základních a středních škol. [10]

CEMC vydává problémy týdne od roku 2012 a všechny jejich vydané úlohy jsou volně přístupné přímo na jejich internetových stránkách. Tyto problémové úlohy jsou určeny především pro učitele, aby je řešili se svými žáky. Úlohy jsou vhodné pro žáky od 5. ročníku základní školy až do 3. ročníku střední školy. Jsou rozděleny dle obtížnosti, do čtyř skupin vždy po dvou ročnících. CEMC navíc přiděluje každé úloze i zařazení do určité oblasti matematiky, jako jsou algebra, geometrie prostorová představivost, pravděpodobnost, měření a další.

Podle mého názoru jsou problémy týdne na CEMC velmi přehledně klasifikované a úlohy jsou srozumitelně zadané. Výhodou také shledávám, že každá úloha obsahuje alespoň jeden obrázek, tabulku nebo graf a tím se pro žáky stává atraktivnější. Tento styl zpracování problémových úloh mě tolik zaujal, že jsem se jím inspirovala při tvorbě své sbírky problémových úloh. Jako nevýhodu internetových stránek CEMC bych zmínila jejich mírnou nepřehlednost, která je ovšem způsobena velkým rozsahem obsahu.

Just Bead It!

Serena is making a necklace, using different shapes and types of beads in the arrangement shown below, and then repeating this arrangement.



a) If she continues stringing the beads in this manner, what will be the type and shape of the 40^{th} bead on the string? (Try to find the answer without listing all 40 objects.)

b) Serena has some crystal beads she wants to add to the pattern in her necklace, giving a basic arrangement of 7 beads. At what position in the pattern should she insert each crystal bead so that the 52^{nd} bead is a crystal?

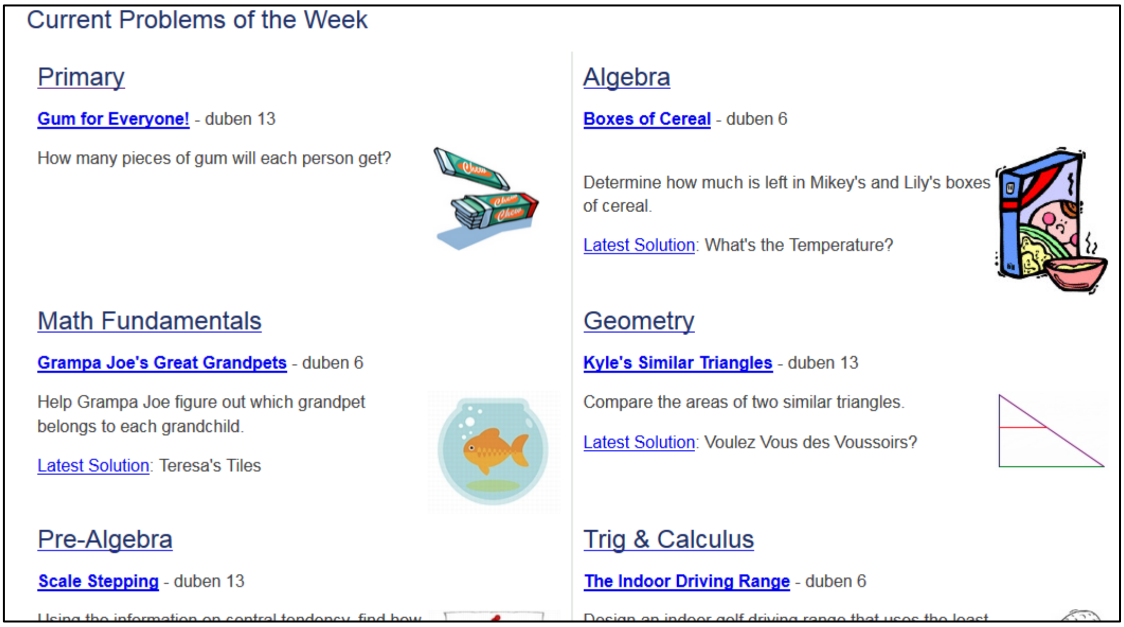
Obr. 12 – Ukázka problémové úlohy z CEMC [10]

4.3.2 The Math Forum

http://mathforum.org

Tento internetový portál je produktem soukromé Drexel University ve Philadelphii. Jejich posláním je poskytovat prostředky, materiály, aktivity a vzdělávací služby, které obohacují a podporují výuku matematiky, jak píší na svých webových stránkách.

Problémy týdne na tomto internetovém portálu jsou přístupné jen přihlášeným uživatelům. Lze si přihlásit členství zdarma na 21 dní, ale s omezenými možnostmi. Plné členství je rozděleno do několika kategorií, kde je možné si zvolit, tu nejvýhodnější. V nabídce je členství obsahující přístup k aktuálním týdenním problémům pro jednoho studenta nebo učitele s celou svou třídou, plné členství zahrnující i přístup ke starším problémovým úlohám a jiným aktivitám pro učitele a jeho třídu nebo plné členství pro celou školu.



Obr. 13 – Náhled na rozdělení problémů týdne na Math Forum [11]

Aktuální problémy týdne jsou na Math Forum řazené do šesti kategorií, primární, matematické základy, pre-algebra, algebra, geometrie a trigonometrie. Nejsou-li problémové úlohy už aktuální, přesouvají se do knihovny, to je archiv problémových úloh, který je plně přístupný pouze uživatelům s plným členstvím. V Archivu se úlohy nacházejí už se svými řešeními, které vložili studenti z celého světa a okomentovali je lektoři z The Math Forum.

Můj osobní názor na tento internetový portál je spíše negativní. Na první pohled mi stránky připadají nepřehledné a je obtížné se v nich orientovat. Jako velkou nevýhodu shledávám omezený přístup v případě neplaceného členství. Také se mi nelíbí zpracování řešení problémových úloh, sice se jich nabízí větší množství, ale jsou to řešení psaná studenty a ne vždy jsou přehledná a jasná. Naopak jako pozitivum musím vyzdvihnout, že tyto internetové stránky obsahují kromě problémových úloh i mnoho užitečných informací o tom, jak učit žáky pomocí problémových úloh, popisují způsoby řešení problémů a mnoho dalšího. Tím mohou velmi napomoci nejen učitelům ale i žákům.

5 Sbírka problémových úloh z matematiky

Tato sbírka problémových úloh z matematiky pro žáky 2. stupně základní školy je rozdělena do čtyř podkapitol dle jednotlivých ročníků. Úlohy jsem do ročníků zařazovala podle doporučených učebních osnov z matematiky pro základní školy. [12] Každá škola si sestavuje svůj školní vzdělávací program sama, proto mé zařazení úloh není závazné a při využití na základních školách se může drobně lišit.

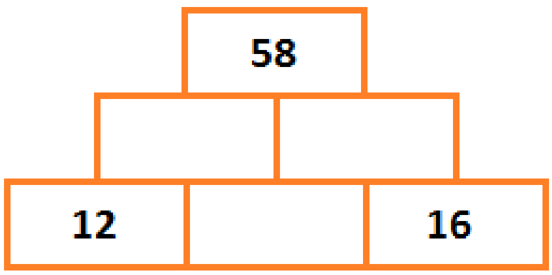
5.1 Šestý ročník

Problémové úlohy v 6. Ročníku základní školy by měly být zaměřené především číselné a obrázkové řady, početní obrazce a vlastnosti rovinných a prostorových geometrických útvarů. [12]

První úloha se zabývá řešením početního obrazce, konkrétně jde o doplnění matematické pyramidy. Druhá úloha s názvem Duhový plot je nestandardní úlohou na obrázkové řady. V třetí a čtvrté úloze žák využívá znalostí rovinných geometrických útvarů. Čtvrtá úloha je zaměřena na obsahy rovinných útvarů.

5.1.1 Pyramida

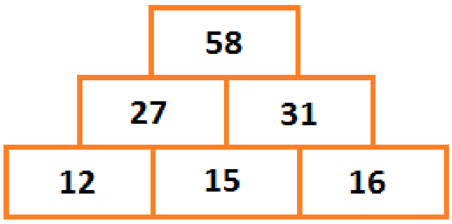
Doplňte do pyramidy znázorněné na obrázku všechny chybějící čísla, jestliže víte, že každé číslo je součtem dvou čísel přímo pod tímto číslem.



(Vytvořeno dle[13], str. 45)

Řešení

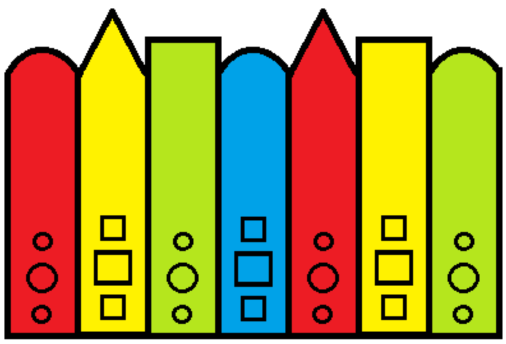
Víme, že číslo v každém políčku uprostřed pyramidy je součet dvou čísel přímo pod konkrétním políčkem a 58 je součet dvou políček z prostředka pyramidy. První z těchto čísel, je součet 12 plus prostřední číslo ve spodním řádku a druhé číslo je součet 16 plus prostřední číslo ze spodního řádku. Tedy prostřední číslo z prvního řádku bude v příkladu figurovat dvakrát, takže $58 - 12 - 16 = 30$ je jeho dvojnásobek. Prostředním číslem je $30 \div 2 = 15$. Řešení zbytku pyramidy je zobrazeno na obrázku



5.1.2 Duhový plot

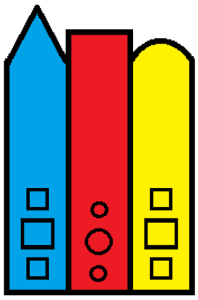
V mateřské škole U pastelky se rozhodli postavit nový dřevěný plot. Přesně takový, jaký je ukázaný na obrázku níže. Na celý plot budou potřebovat celkem 100 prken.

1. Jaká jsou tři kritéria, ve kterých se od sebe prkna liší?
2. Nakresli nebo popiš následující 3 prkna.
3. Kolikáté prkno bude stejné jako první?
4. Jak bude vypadat poslední prkno tohoto plotu?



Řešení

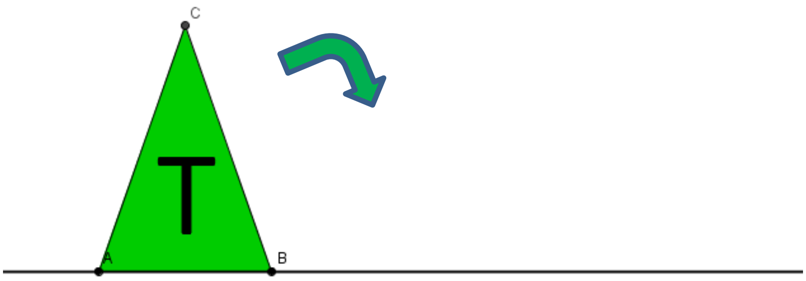
1. Kritéria, ve kterých se od sebe prkna liší, vyčteme z obrázku v zadání. Jsou to, barva, tvar zakončení prkna a vzor ve spodní části prkna.
2. Následující tři prkna vypadají takto:



3. Máme celkem 3 tvary prken, 4 barvy a 2 vzory. Protože vzor je stejný každé druhé prkno a barva každé čtvrté, tak můžeme říct, že každé čtvrté prkno bude mít stejnou barvu i vzor. Tvar se mění každé třetí prkno, takže až $(3 \times 4 = 12)$ každé dvanácté prkno bude mít všechna tři kritéria stejná jako na začátku. My chceme zjistit, kdy se bude opakovat první prkno, tedy $1 + 12 = 13$. prkno bude stejné jako první.
4. Vzhledem k tomu, že $12 \times 8 = 96$, tak 97. prkno bude stejné jako první a tedy poslední sté prkno bude stejné jako čtvrté na obrázku v zadání.

5.1.3 Trojúhelník s T- čkem

Zelený rovnoramenný trojúhelník má základnu dlouhou 2 cm a rameno dlouhé 3 cm. V trojúhelníku je napsané písmeno T, jak je ukázáno na Obr. 16. Předpokládejme, že se trojúhelník bude překlápět doprava (bez klouzání) několikrát za sebou, dokud nebude písmeno T ve stejné pozici jako na začátku. Jak daleko se trojúhelník překlápěl?



(Vytvořeno dle [14], str. 27)

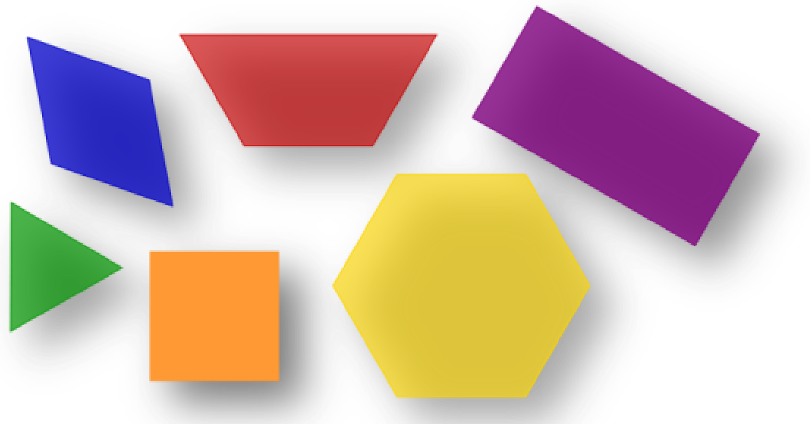
Řešení

Pokud se trojúhelník překlopí 3 krát doprava, přes otočný bod B, poté C a poté A bez uklouznutí, bude T ve stejné pozici jako na začátku. Když podstava trojúhelníku je 2 cm a ramena 3 cm, tak celková vzdálenost bude 2 + 3 + 3 = 8 cm

5.1.4 Šestiúhelníky

Máme 6 základních geometrických útvarů, které jsou znázorněné na obrázku. Jana má ve své sbírce 11 trojúhelníků, 5 lichoběžníků a 5 kosočtverců

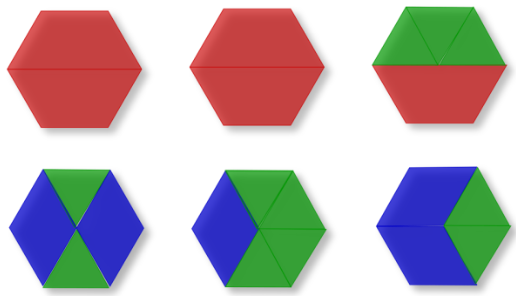
1. Kolik šestiúhelníků shodných se žlutým šestiúhelníkem na obrázku může Jana vytvořit ze své sbírky útvarů?
2. Kolik a kterých útvarů zbyde?



(Vytvořeno dle [14], str. 17)

Řešení:

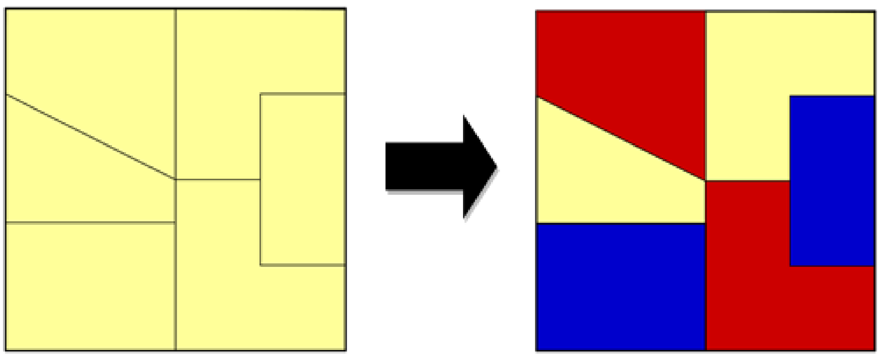
1. Je možné vytvořit 6 šestiúhelníků, jak je znázorněno na obrázku níže.



2. Nezbydou žádné útvary. Tento fakt můžeme vysvětlit následujícím způsobem: Přiřadíme plochu 1 jednotky zelenému trojúhelníku. Potom kosočtverec zabírá plochu 2 jednotek, lichoběžník plochu 3 jednotek a šestiúhelník plochu 6 jednotek. Máme-li k dispozici 11 trojúhelníků, 5 kosočtverců a 5 lichoběžníků, je to celkem plocha 36 jednotek. Tedy $11 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 = 36$ jednotek. Jelikož šestiúhelník má plochu 6 jednotek a protože 36 je násobkem čísla 6, můžeme z celkových 36 jednotek vytvořit přesně $36 \div 6 = 6$ šestiúhelníků beze zbytku.

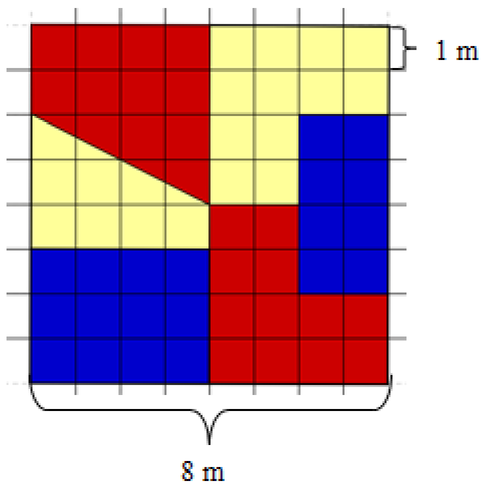
5.1.5 Koberce

Novákovi si koupili nový byt, který zabírá plochu 64 m^2. Rozdělení místností je znázorněno na obrázcích níže. V celém tomto bytě je podlaha pokryta béžovým linoleem. Novákovi se rozhodli, že do některých místností dají modrý nebo červený koberec přesně tak, jak je vidět na obrázku vpravo. Kolik metrů čtverečních modrého a červeného koberce musí Novákovi koupit?



Řešení

Celý byt zabírá plochu 64 m^2, tedy každá strana je dlouhá 8 metrů ($8 \times 8 = 64$). Aby se nám lépe počítalo, můžeme si vytvořit přes obrázek síť tak, aby jeden čtverec znázorňoval 1 m^2 jak se zobrazeno na obrázku níže. Potom plochu na modrý koberec spočítáme tak, že sečteme obsahy všech jeho částí, tedy modrého koberce je potřeba $3 \times 4 + 2 \times 4 = 20$ m^2. Stejně tak vypočítáme i plochu červeného koberce. Zkosenou část koberce vypočítáme jako obsah obdélníku a trojúhelníku. Červeného koberce je potřeba $2 \times 4 + 2 \times 4 \div 2 + 12 = 24$ m^2.



5.2 Sedmý ročník

V sedmém ročníku základní školy by žák měl žák řešit problémové úlohy s využitím desetinných čísel, zlomků a procent. Dále by problémové úlohy měly být zaměřeny na složitější číselné řady, řešení pomocí tabulek, přehledné třídění dat a v neposlední řadě řešení nestandardních geometrických úloh.[12]

První úloha s názvem Čokoláda je zaměřená na počítání se zlomky. Druhá úloha je nestandardní úlohou na číselné řady. V třetí úloze jde především o řazení dat a využití tabulky pro řešení problémové úlohy. Ve čtvrté úloze žák využívá znalost desetinných čísel, zlomků a procent. Pátá úloha je geometrickou problémovou úlohou, kde je nutná znalost hranolu a jeho vlastností.

5.2.1 Čokoláda

Petr, Jana, Tomáš a Iveta se rozhodli, že si koupí dohromady 5 tabulek čokolády. Každá čokoláda stála 27 korun. Petr platil 81 korun, Jana 27 korun, Tomáš 18 korun a Iveta zaplatila zbytek. Dohodli se, že si čokolády rozdělí podle toho, kolik každý z nich dal peněz. Kolik čokolády by měl každý z nich dostat?

(Vytvořeno dle [15], str. 49)

Řešení

Když koupili celkem 5 tabulek čokolády po 27 korunách, tak dohromady zaplatili 5 x 27 = 135 korun. Petr platil 81 korun, Jana platil 27 korun, Tomáš platil 18 korun a Iveta platila zbytek. Tedy, Iveta platila 135 – 81 – 27 – 18 = 9 korun.

Petr by měl dostat 81 / 135 = 3 / 5 ze všech čokolád.

Takže Petr by měl dostat 3 / 5 z 5 tedy 3 / 5 x 5 = 3 čokolády.

Jana by měla dostat 27 / 135 = 1 / 5 ze všech čokolád.

Takže Jana by měla dostat 1 / 5 z 5 nebo 1 / 5 x 5 = 1 čokolády.

Tomáš by měl dostat 18 / 135 = 2 / 15 ze všech čokolád.

Takže Tomáš by měl dostat 2 / 15 z 5 nebo 2 / 15 x 5 = 2 / 3 čokolády.

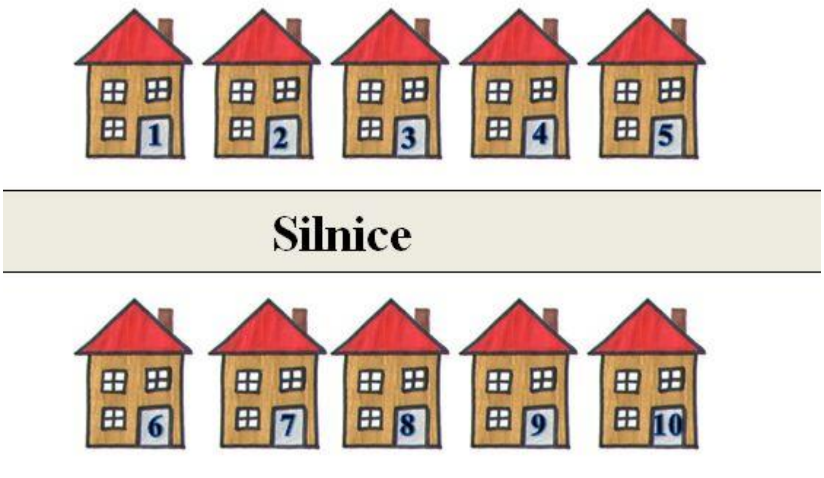
Iveta by měla dostat 9 / 135 = 1 / 15 ze všech čokolád.

Takže Iveta by měla dostat 1 / 15 z 5 nebo 1 / 15 x 5 = 1 / 3 čokolády.

Měli bychom zkontrolovat, jestli byla rozdána všechna čokoláda. Pokud by byla nějaká chyba v našem řešení, zkouška by nám měla pomoci jí odhalit. Petr dostal 3 tabulky čokolády, Jana dostala 1 čokoládu, Tomáš dostal 2 / 3 čokolády a Iveta dostala 1 / 3 čokolády. Celkový součet rozdaných čokolád je 3 + 1 + 2 / 3 + 1 / 3 = 5, jak je požadováno.

5.2.2 Sousedé

Domy stojící na jedné straně ulice jsou postavené přímo naproti domům na druhé straně. Domy jsou číslovány postupně 1, 2, 3, … po jedné straně. Vždy, kdy se dojde na konec řady domů, postupné číslování pokračuje u domu na druhé straně ulice, naproti domu s číslem 1. Postupné číslování pokračuje po druhé straně, dokud není očíslován poslední dům. Pokud by na ulici bylo 10 domů, byly by číslovány, jak je ukázáno na nákresu níže. Nicméně, na naší ulici, když se obyvatelé domu číslo 37 podívají přímo přes ulici, uvidí dům s číslem 84. Kolik je domů na obou stranách ulice dohromady?



(Vytvořeno dle [15], str. 60)

Řešení 1

V tomto řešení použijeme logickou úvahu k získání celkového počtu domů v ulici. Máme 36 domů před domem číslo 37 na jedné straně ulice. Tím pádem zde musí být 36 domů na druhé straně ulice před domem číslo 84. Takže první dům na druhé straně je dům s číslem $84 - 36 = 48$. Tím pádem, poslední dům na straně první je dům s číslem 47. Naproti každému domu je přímo přes ulici postavený jiný dům. Pokud tedy je 47 domů na jedné straně, je tedy 47 domů na druhé straně a je zde dohromady $47 \times 2 = 94$ domů na ulici.

Řešení 2

V tomto řešení, použijeme proměnnou. Předpokládejme, že je zde n domů na jedné straně ulice. Poté je zde dohromady $2 \times n = 2n$ domů na ulici. Dům číslo 1 je naproti domu $n + 1$, dům číslo 2 je naproti domu $n + 2$, dům číslo 3 je naproti domu $n + 3$ a tak dále. (… níže jsou zobrazeny domy mezi domem 3 a domem 37 a znovu domy mezi domem 37 a domem n.) Dům číslo 37 je naproti domu 84 a dům n je naproti domu $2n$.

1	2	3	…	37	…	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	84	…	$2n$

Je zde 36 domů před domem číslo 37. Tím pádem, zde musí být 36 domů před domem 84. Takže první dům na druhé straně je dům s číslem $84 - 36 = 48$. Toto je dům $n + 1$. Tím pádem, poslední dům na první straně, dům n, je dům číslo 47. Takže je zde $47 \times 2 = 94$ domů v ulici.

5.2.3 Na farmě

Studenti prvního stupně jezdecké střední školy nedávno navštívili místní farmu. Během návštěvy na farmě uviděli krávy, koně, psi a kuřata (Od každého druhu viděli alespoň jedno zvíře). Celkem na farmě napočítali 27 zvířat. Farmář jim říkal, že všechna jeho zvířata dohromady mají 76 nohou, že je zde 16 kuřat, a o 4 psy více než krav. Kolik kterých zvířat je na farmě? (Možno více řešení)

(Vytvořeno dle [14], str. 85)

Zvířata	Počet zvířat	Počet nohou zvířete	Počet nohou celkem
Krávy			
Koně			
Psi			
Kuřata	16		20 nebo 24 nebo 28
Celkem	27		76

Řešení

Tato úloha lze řešit logickou úvahou tak, že je na farmě 16 kuřat, tak je tam 27 – 16 = 11 čtyřnohých zvířat. Máme ale dáno, že je na farmě o 4 psy více než krav. Takže krav může být 1, 2 nebo 3 a k nim 5, 6 nebo 7 psů, na koně pak zbývá 5, 3 nebo 1. Výsledky znázorňuje tabulka níže.

Zvířata	Počet zvířat	Počet nohou zvířete	Počet nohou celkem
Krávy	1 nebo 2 nebo 3	4	4 nebo 8 nebo 12
Koně	5 nebo 3 nebo 1	4	20 nebo 12 nebo 4
Psi	5 nebo 6 nebo 7	4	20 nebo 24 nebo 28
Kuřata	16	2	32
Celkem	27		76

Možná řešení:

a) 1 kráva, 5 koní, 5 psů a 16 kuřat
b) 2 krávy, 3 koně, 6 psů a 16 kuřat
c) 3 krávy, 1 kůň, 7 psů a 16 kuřat

5.2.4 Rozvoz pizzy

Majitel Pražské pizzerie sledoval, kolik kusů pizzy se rozveze v průměru za jeden všední den.

- Typicky 200 kusů pizzy bylo rozvezeno v pondělí;
- V úterý bylo rozvezeno o 40 kusů pizzy méně než v pondělí;
- Ve středu zde byla další špička se 1,3 krát vyšším rozvozem než v úterý;
- Ve čtvrtek byl počet kusů rozvezené pizzy obvykle $\frac{3}{4}$ z pondělního množství
- V pátek se rozvezlo 50 % čtvrtečního množství pizzy

Kolik kusů pizzy bylo distribuováno za celý týden?

Rozšíření: Výše byla čísla typická pro týden na jaře. Co byste předpokládali pro podzimní týden, kdy je poptávka snížena o $\frac{1}{3}$?

(Vytvořeno dle [13], str. 47)

Řešení

Zde je denní distribuce:

- V pondělí bylo distribuováno 200 kusů pizzy,
- V úterý 200 – 40 = 160 kusů pizzy,
- Ve středu 160 x 1,3 = 208 kusů pizzy,
- Ve čtvrtek 200 x $\frac{3}{4}$ = 150 kusů pizzy,
- A v pátek 150 x 0,5 = 75 kusů pizzy bylo distribuováno.

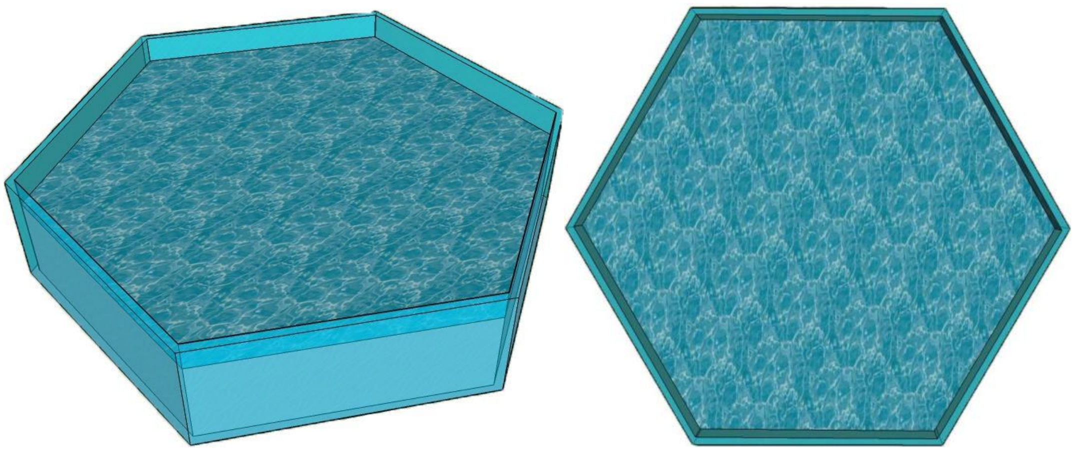
To dává dohromady 200 + 160 + 208 + 150 + 75 = 793 kusů pizzy za typický týden.

Řešení k rozšíření

S poptávkou sníženou o 1/3, počty distribuovaných kusů pizzy budou $\frac{2}{3}$ z toho, co bylo distribuováno na jaře. Se zaokrouhlením, máme 133 kusů pizzy v pondělí, 107 v úterý, 139 ve středu, 100 ve čtvrtek a 50 v pátek, což dává celkem 529 kusů pizzy za týden.

5.2.5 Bazén

Novákovi si na konci června pořídili nový bazén. Bazén má tvar šestibokého hranolu o objemu $12,5m^3$ a je hluboký je 1 metr a 20 centimetrů. Rozhodli se, že přestože mají filtraci, tak budou každé dva týdny měnit vodu. Poprvé napustí bazén 1. července a na konci srpna už vodu jen vylejí. Kolik vody spotřebují na provoz bazénu do konce srpna? (Předpokládejme, že voda sahá jen 20 cm pod okraj, aby se nevylévala)



Řešení

Abychom vypočítali spotřebu vody, musíme nejprve zjistit, kolik vody se do bazénu vejde. Víme sice objem celého hranolu, ale my potřebujeme o 20 cm nižší hranol. Proto si ze vzorce pro objem hranolu získáme obsah podstavy a vynásobíme jí jinou výškou. Tedy $V = S_p \times v$,

$S_p = V \div v = 12,5 \div 1,2 = 10,4\, m^2$. Vzhledem k tomu, že voda v bazénu po naplnění sahá do výšky jednoho metru, pak je $10,4\, m^2 \times 1 = 10,4\, m^3$ objem vody. Tedy do bazénu se vejde 10400 litrů vody. Během července a srpna bude nutné bazén naplnit celkem pětkrát. Takže celková spotřeba vody bude $5 \times 10\,400 = 52\,000$ litrů.

5.3 Osmý ročník

V osmém ročníku by mělo být hlavní náplní problémových úloh především řešení geometrických úloh se znalostmi vlastností kruhu, kružnice, koule a válce. Nově žák při řešení problémových úloh dokáže využívat Pythagorovu větu. [12]

První příklad s názvem Meruňky je obtížnější úlohou na procenta, která se probírají až ke konci sedmého ročníku, proto jsem je zařadila až do ročníku osmého. Druhá úloha se zaměřuje na povrch válce a kruh. Ve třetí úloze se prolínají objem kvádru a objem koule. Čtvrtá úloha vyžaduje znalost Pythagorovy věty, přestože může působit spíš o úlohu zaměřenou na válec. Poslední úloha, kterou jsem zařadila do osmého ročníku je podmíněna znalostí objemu válce.

5.3.1 Meruňky

Obsah vody v meruňce je 80 % z její celkové hmotnosti. Dalších 20 % hmotnosti je jiný materiál. Když necháme meruňku na slunci vyschnout, tak ztratí 75 % obsahu vody a z ostatního materiálu neztratí nic. Kolik procent ze sušené meruňky je voda?

(Vytvořeno dle [15], str. 58)

Řešení 1

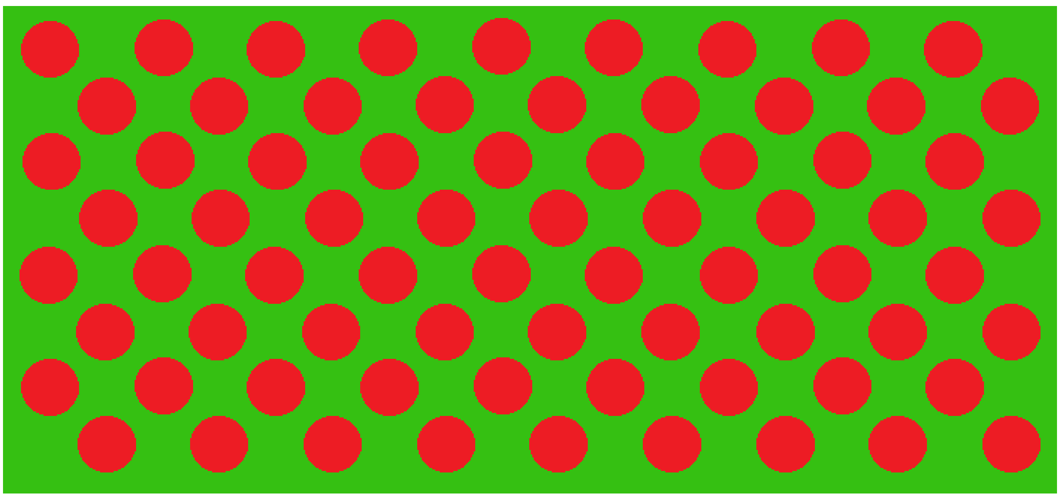
Vezmeme-li v úvahu meruňku, která původně váží 100 g. Když 80 % hmotnosti je voda, tak to znamená, že 80 g je voda a 20 g je ostatní materiál. Když na slunci meruňka ztrácí 75 % hmotnosti vody, ztrácí 75 % z $80\ g = 0,75 \times 80 = 60\ g$ vody a zbyde jí $80 - 60 = 20$ g vody. Sušená meruňka stále obsahuje 20 g ostatního materiálu. Tedy sušená meruňka se skládá z 20 g vody a z 20 g ostatního materiálu. V sušené meruňce je tedy $\frac{20}{20+20} \times 100\ \% = 50\ \%$ vody.

Řešení 2

Předpokládejme, že meruňka původně váží x g. Když 80 % z její hmotnosti je voda, to znamená, že 80 % z $= 0,8x$ je voda a 20 % je ostatní materiál. Když meruňku necháme na slunci, ztratí 75 % z hmotnosti vody. Takže ztratí 75 % z $0,8x = 0.75 \times 0,8x = 0,6x$ vody, a tedy $0,8x - 0,6x = 0,2x$ hmotnosti vody zbyde. Sušená meruňka má stále $0,2x$ ostatního materiálu. Tudíž, sušená meruňka se skládá z $0,2x$ g vody a $0,2x$ g ostatního materiálu. Protože množství vody v sušené meruňce je stejné, jako množství ostatního materiálu, tak sušená meruňka obsahuje 50 % vody a 50 % ostatního materiálu.

5.3.2 Zelený hrnek

Klára se rozhodla, že své nejlepší kamarádce Janě koupí k narozeninám puntíkatý hrneček v jejích oblíbených barvách. Janiny nejoblíbenější barvy jsou červená a zelená. Kláře se ale nepodařilo takto barevný puntíkatý hrnek v žádném obchodě sehnat. Rozhodla se, že koupí jen zelený hrnek a nechá ho potisknout červenými puntíky v kopírovacím centru. Zelený hrnek je vysoký 10 cm a průměr dna je 8 cm. Kolik nejvíce se na hrnek vejde celých červených puntíků, jestliže má každý průměr 2 cm? Jejich rozložení je takové, že mezera mezi puntíky v jedné řadě či sloupci je stejně velká jako jeden puntík, jak je znázorněno na obrázku níže.



Řešení 1

Abychom spočítali, kolik puntíků se vejde na hrneček, musíme zjistit, jak velký povrch jimi chceme potisknout. Hrnek má tvar válce, pro který platí $S = 2\pi r(r + v)$ a nemá ucho. Ovšem u hrnečku není horní podstava a dno zůstává jednobarevné, proto z povrchu válce odečteme podstavy $S = 2\pi r(r + v) - 2\pi r^2 = 2\pi rv$ a máme tak vzorec pro výpočet povrchu puntíkaté plochy. Tedy $S = 2\pi \times 4 \times 10 = 251{,}3\ cm^2$. Jestliže víme, že hrnek je vysoký 10 cm, pak plocha, kterou chceme potisknout hrnek, musí mít rozměry $10 \times 25{,}13\ cm$. Na výšku se na něj tedy vejde $10 \div 2 = 5$ řad puntíků a na délku $25{,}13 \div 2 = 12$ celých sloupců puntíků. Vzhledem k rozložení puntíků, můžeme říct, že když máme 12 sloupců a puntíky jsou ob jeden, tak v každé řadě je 6 puntíků. Sloupců je 5, takže na hrneček se vejde přesně $5 \times 6 = 30$ celých puntíků.

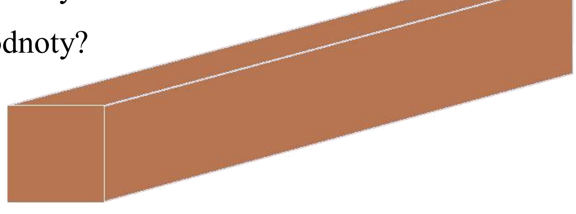
Řešení 2

V tomto řešení použijeme především logickou úvahu. Plocha, kterou budeme chtít potisknout je vlastně stočený obdélník, jehož kratší strana je výška hrnku, tedy $10\ cm$ a delší strana je obvod dna. Delší stranu obdélníku tedy zjistíme jako $d\pi = 8\pi = 25{,}13\ cm$. Zbytek úlohy řešíme stejně jako v prvním řešení.

5.3.3 Dřevěné kuličky

Truhlář má ve skladu mnoho obdélníkových hranolů o rozměrech $2 \times 2 \times 20$ cm. Rozhodl se, že z nich vyrobí kuličky a použije je jako dekorace na jiné dřevěné předměty.

1) Kolik cm maximálně mohou kuličky měřit?
2) Jaký maximální počet korálků může udělat z jednoho takového prkénka?
3) Kolik dřeva z jednoho hranolu využije truhlář
   na kuličky a kolik vyhodí jako odřezky?
   V jakém poměru jsou tyto dvě hodnoty?

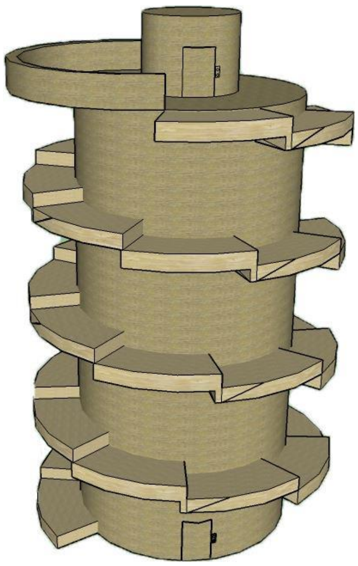


Řešení

1) Nejkratší strany kvádru jsou 2 cm, proto maximální průměr kuličky může být právě 2 cm
2) Jestliže má každá kulička průměr 2 cm, a potom se jich do jednoho prkénka vejde maximálně $20 \div 2 = 10$
3) Dřevo využité na kuličky spočítáme tak, že zjistíme objem jedné kuličky a vynásobíme jejich počtem. Kolik bude odřezků, zjistíme odečtením objemu materiálu spotřebovaného na kuličky od objemu materiálu celého prkénka. Tedy objem jedné kuličky je $V_k = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi \times 8 = 4,2\ cm^3$. Všechny kuličky z jednoho prkénka mají dohromady $42\ cm^3$. Celé prkénko má objem $V = 2 \times 2 \times 20 = 80\ cm^3$. Odřezky budou tedy $80 - 42 = 38\ cm^3$. Poměr využitého materiálu a odřezků je $42 : 38 => 21 : 19 => 1,1 : 1$.

5.3.4 Rozhledna

Na kopci se nachází rozhledna, na kterou je možné vyjet výtahem nebo jít pěšky po schodech. Výtah se nachází uvnitř věže, ale schody se točí venkem okolo věže celkem čtyřikrát, jak je vidět na obrázku níže. Věž má válcovitý tvar a šířku 3 metry. Cesta výtahem nahoru je dlouhá 20 metrů. Kolik metrů ujde návštěvník, jestliže půjde po schodech?



Řešení

Jestliže je věž válcem o daném průměru a výšce, můžeme si cestu pěšky představit jako spojnici místa začátku schodů s koncem. Tím nám vznikne stočený pravoúhlý trojúhelník, kde zmíněná spojnice je přeponou. Jednou odvěsnou je výška 20 m, a druhou je obvod kulaté podstavy vynásobený čtyřmi (protože schody se obtočí kolem věže čtyřikrát). Druhou odvěsnu tedy spočítáme jako $\pi d \times 4 = 37{,}7\, m.$ Nyní známe dvě strany trojúhelníku a můžeme pomocí Pythagorovy věty spočítat délku schodiště. Tedy $s^2 = 20^2 + 37{,}7^2$, $s = 42{,}7\, m.$ Cesta po schodech je tedy dlouhá 42,7 metrů.

5.3.5 Konev

Zahradník má celkem 10 záhonů o rozměrech $1{,}2 \times 3\, m$. Každý večer je chodí zalévat svou konví. Konev je $30\, cm$ vysoká a má dno ve tvaru kruhu o průměru $25\, cm.$ Na zalití jednoho metru čtverečního zahradník spotřebuje cca $1{,}5\, l$ vody. Vždy když mu dojde voda v konvi, dojde si ji opět doplnit ke studni. Kolikrát musí jít zahradník doplnit vodu během jednoho večera?

Řešení

Nejprve vypočítáme, kolik vody se vejde do konve, což je vlastně objem válce. Tedy máme $V = \pi r^2 v = \pi \times 12{,}5^2 \times 30 = 14726\, cm^3 = 14{,}726\, dm^3 = 14{,}7\, l$ vody. Poté zjistíme, jak velkou plochu je třeba zalévat. Máme 10 obdélníkových záhonů o daných rozměrech, tedy $10 \times 1{,}2 \times 3\, m = 36\, m^2$. Jestliže na každý m^2 je potřeba $1{,}5\, l$ vody, pak na celou zahradu je třeba $1{,}5 \times 36 = 54$ litrů vody. Potom je zřejmé, že zahradník musí dolít vodu $54 \div 14{,}7 = 3{,}6$ => 4 krát. Aby zalil celou zahradu.

5.4 Devátý ročník

V devátém ročníku základní školy by měl žák řešit především nestandardní aplikační úlohy na prostorovou představivost s využitím znalostí jehlanu, kužele a podobnosti geometrických útvarů. Žák také dokáže řešit praktické úlohy ze základů finanční matematiky či soustavy dvou lineárních rovnic. [12]

První úloha se zaměřuje na finanční matematiku, konkrétně počítání úroků. V druhé úloze se využívá znalost podobnosti v geometrii. Třetí úloha je řešená soustavou dvou lineárních rovnic. Poslední dvě úlohy jsou geometrické, jedna se zabývá jehlanem a druhá kuželem.

5.4.1 Peníze v bance

Od svých 5. narozenin si Šárka každý rok šetřila 250 korun, které dostávala k narozeninám od své tety. Příští týden bude mít Šárka 14. narozeniny a rozhodla se, že po své 14. narozeninové oslavě vezme všechny peníze od tety a otevře si spořicí účet v bance.

1. Kolik peněz si Šárka uloží na účet, když si ho otevře okamžitě po svých 14. narozeninách?

2. Pokud banka vyplácí 2 % úroku (což znamená 0, 02 krát zůstatek) za zůstatek na konci každého roku a ona uloží všechny své peníze z narozenin a žádné neutratí, kolik bude mít Šárka na svém účtu hned po svých 16. narozeninách?

Narozeniny	Peněz po narozeninách	Zisk ze spoření	Peněz na konci roku
14.			
15.			
16.			

(vytvořeno dle [14], str. 52)

Řešení

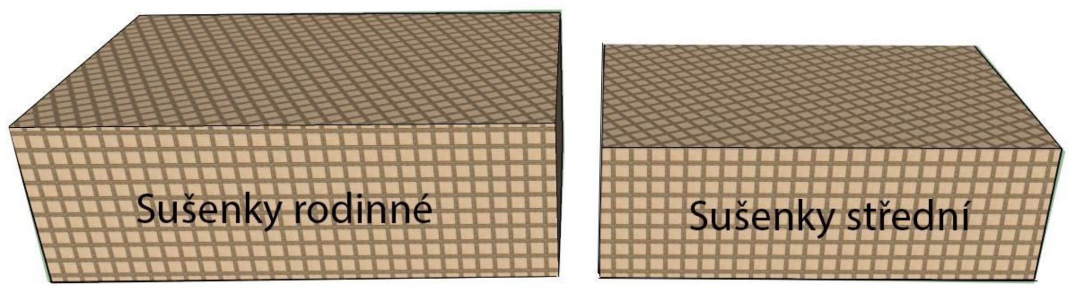
1. Hned po svých 14. narozeninách se Šárce shromáždí 250 korun za každé narozeniny od té doby, co jí bylo 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 a 14, což je celkem 10 narozenin. Takže bude mít 10 x 250 korun = 2500 korun, se kterými si bude zakládat svůj spořicí účet.
2. Šárka obdržela úrok na uložené peníze 2500 korun po svých 14. narozeninách a další rok po uložení 250 korun, které dostala ke svým 15. narozeninám. Za předpokladu, že přidala i svůj dárek k 16. narozeninám, částka je:

Narozeniny	Peněz po narozeninách	Zisk ze spoření	Peněz na konci roku
14.	2500 Kč	2500 x 0.02 = 50 Kč	2550 Kč
15.	2800 Kč	2800 x 0.02 = 56 Kč	2856 Kč
16.	3056 Kč		

Takže ihned po svých 16. narozeninách Šárka měla 3056 korun.

5.4.2 Sušenky

Výrobce hranatých slaných sušenek se rozhodl, že začne vyrábět kromě středního balení, ještě rodinné balení. To bude mít všechny strany podobné střednímu balení ale o 50 % větší objem. Střední balení má rozměry $6 \times 4 \times 12\ cm$. Jaké rozměry bude mít rodinné balení?



Řešení

Jestliže střední balení má objem $6 \times 4 \times 12 = 288cm^3$, pak rodinné balení bude mít objem o 50 % větší, tedy $1,5 \times 288 = 432cm^3$. Víme, že balení mají být podobná, tedy musí mít stejný poměr stran. Ve středním balení je poměr stran $6 \times 4 \times 12 = 3 \times 2 \times 6$. Rozměry rodinného balení tedy získáme pomocí poměru, který musí být zachován. Můžeme říci, že

$$432 = 3x \times 2x \times 6x$$

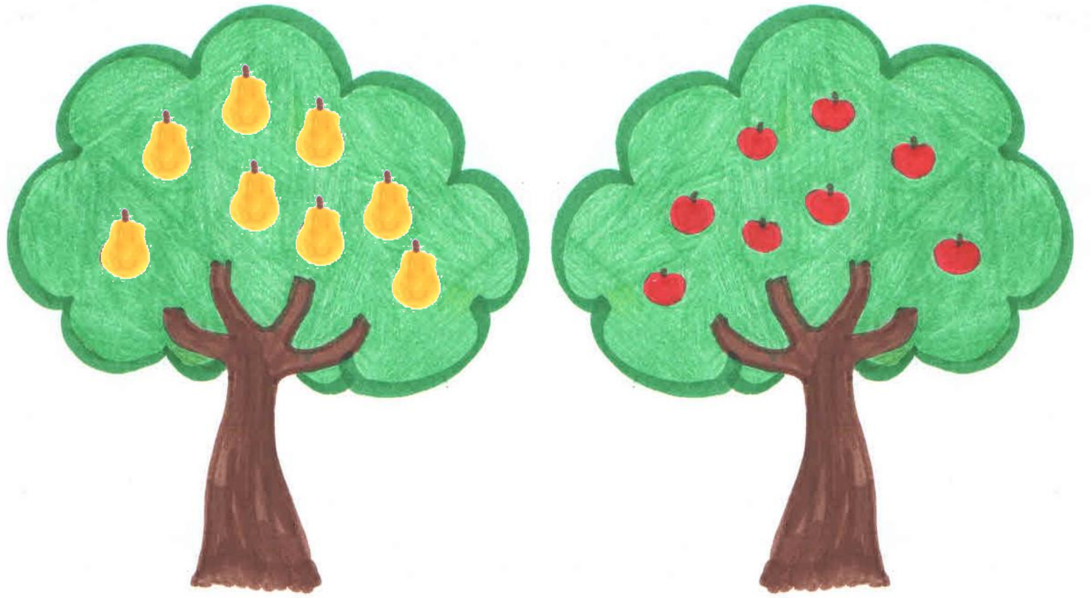
$$12 = x^3$$

$$x \cong 2,3$$

Potom $3 \times 2,3 = 6,9$, $2 \times 2,3 = 4,6$ a $6 \times 2,3 = 13,8$, tedy $\underline{6,9 \times 4,6 \times 13,8}$ jsou rozměry rodinného balení.

5.4.3 Ovocný sad

V městečku Jablkov jsou dva ovocné sady a jeden sklad, kam se ovoce vždy po sklizni sváží. V severním skladu se vypěstuje 20 % z celé úrody jablek, naopak v sadě na jihu je o 50 % vyšší úroda hrušek než na severu. Předpokládejme, že se ze severního skladu přiveze 50 tun ovoce a z druhého 150 tun. Kolik tun jablek a hrušek se přiveze z každého sadu zvlášť?



Řešení

Jestliže si hmotnost jablek označíme jako první neznámou – tedy x, a hmotnost hrušek jako druhou neznámou – y, potom je ze zadání patrné, že 20 % jablek ze severního sadu odpovídá $\frac{1}{5}$ z celku a tedy z jižního sadu je to potom $\frac{4}{5}$. Dále víme, že v jižním sadě je úroda o 50 % vyšší, než v severním, takže ze severního sadu je to jeden celek y a z jižního sadu je to o polovinu více, tedy $\frac{3}{2}x$. Nyní už můžeme vytvořit soustavu dvou lineárních rovnic:

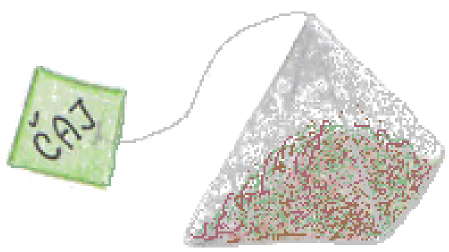
$$\frac{1}{5}x + y = 50$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{2}y = 150$$

Po vyřešení nám vyjde $x = 150$ a $y = 20$. Když si dosadíme postupně do rovnic, zjistíme, že ze severního sadu se přiveze $\frac{1}{5} \times 150 = 30\ t$ jablek a $20\ t$ hrušek a z jižního sadu se přiveze $\frac{4}{5} \times 150 = 120\ t$ jablek a $\frac{3}{2} \times 20 = 30\ t$ hrušek

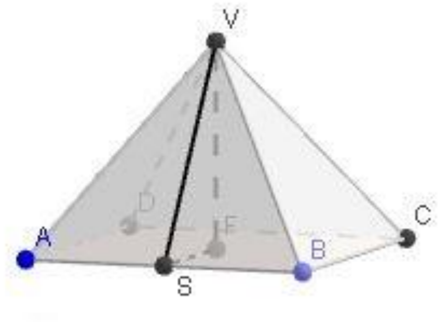
5.4.4 Čaj

Čajový sáček má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož všechny hrany mají délku 4 cm. 30 % z objemu sáčku je sypaný čaj, jehož 1 cm^3 má hmotnost 1 g. Kolik gramů čaje je v jednom čajovém sáčku? (počítejte s přesností na jedno desetinné místo)



Řešení:

Označíme si sáček jako jehlan ABCDV. Abychom zjistili, kolik je v sáčku čaje, musíme zjistit objem celého jehlanu, tedy $V = \frac{1}{3} S_p v$ Známe délku hrany $a = 4\,cm$, takže známe $S_p = 4 \times 4 = 16\,cm.$ Pro výpočet výšky si nejdříve vypočteme délku úsečky $|SV|$ pomocí Pythagorovy věty: $|SV|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $|SV| = 3,5\,cm.$ Samotnou výšku vypočítáme opět s využitím Pythagorovy věty: $v^2 = |SV|^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $v = 2,9\,cm.$ Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu: $V = \frac{1}{3} \times 16 \times 2,9 = 15,5\,cm^3$. Vypočítaný objem je vlastně 100 % a náš čaj zabírá 30 %, tedy $\frac{15,5 \times 30}{100} = 4,7\,cm^3$. Vzhledem k tomu, že máme zadáno, že $1g/1cm^3$, tak v našem čajovém sáčku je $4,7$ gramů čaje.



5.4.5 Svíčky

Do firmy na svíčky si nechávají přivážet vosk na výrobu svíček ve formě kvádrů o rozměrech $10 \times 30 \times 35\ cm$. Takový kvádr poté roztaví a pomocí forem z něj vyrobí různé tvary svíček. Aktuální zakázka vyžaduje výrobu 180 kusů svíček ve tvaru rotačního kuželu s průměrem 7 cm a výškou 15 cm. Kolik takových svíček je možné vyrobit z jednoho kvádru vosku? Kolik kvádrů bude potřeba na splnění této zakázky a kolik vosku zbyde?

Řešení

Musíme zjistit objemy obou těles. Kvádr: $V = abc = 10\,500 cm^3 = 10,5\ dm^3$. Rotační kužel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = 192,4\ cm^3$. Vzhledem k tomu, že kvádr se roztaví a použije, tak můžeme na výrobu použít celé množství. Proto z jednoho kvádru vosku můžeme vyrobit $10\,500 \div 192,4 = 54,6$ kusů svíček. Pro výrobu této zakázky bude potřeba $180 \div 54,6 = 3,3 \gg 4$ kvádrů vosku a 0, 7 kvádru zbyde.

Závěr

Tato bakalářská práce pro mne byla velkým přínosem. Až během jejího vytváření jsem pochopila, co přesně znamená pojem problémová úloha, i jakou má pozici v kurikulu České republiky. Zabývala jsem se používanými učebnicemi z matematiky, které jsem analyzovala z hlediska problémových úloh. Tím jsem dospěla k názoru, že přestože podle RVP ZV jsou problémové úlohy velmi důležitou součástí základního vzdělávání, tak se jim v učebnicích nevěnuje příliš velká pozornost.

Co se týče internetových portálů nabízejících problémové úlohy, které jsem také analyzovala, došla jsem k podobnému mínění jako u učebnic. V České republice se kromě archivů matematických soutěží, s problematickými úlohami setkáme jen velmi zřídka. To je podle mého názoru velká škoda hlavně z toho důvodu, že internet je mezi žáky základních škol čím dál populárnější a tedy i řešení problémových úloh prostřednictvím internetových stránek by pro ně mohlo být zajímavější než řešit úlohy z učebnice či knihy.

V rámci této bakalářské práce jsem vytvořila sbírku problémových úloh pro žáky 2. stupně základní školy. Tato sbírka by mohla sloužit učitelům jako materiál podporující výuku matematiky a rozvoj kompetencí k řešení problémů.

Vzhledem k tomu, že mi téma problémových úloh připadá velmi zajímavé a obsáhlé, ráda bych na něj navázala ve své diplomové práci, kde bych mohla využít zkušenosti z praxe, kterou absolvuji během magisterského studia.

Seznam použité literatury

[1] KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1999, 194 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-7044-247-6.

[2] *RVP ZV* [online]. 2013 [cit. 2015-03-07]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433

[3] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 87 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-129-9.

[4] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 86 s. ISBN 9788072386567.

[5] *Matematika pro všechny* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~math4all

[6] *NRICH* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://nrich.maths.org/frontpage

[7] *A+ Click* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://www.aplusclick.com/

[8] *Matematický klokan* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/

[9] *Matematická olympiáda* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/

[10] *CEMC* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://cemc.math.uwaterloo.ca/

[11] *The Math Forum* [online]. [cit. 2015-04-28]. Dostupné z: http://mathforum.org/problems_puzzles_landing.html

[12] *Dopoučené učební osnovy předmětů CJL, AJ a M pro základní školy* [online]. 2011 [cit. 2015-04-27]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/189

[13] *Problems of the Week Grade 5/6, 2012 - 2013* [online]. [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: http://cemc.uwaterloo.ca/resources/potw-strands/2012-13/POTWB-12-Combined5-6.pdf

[14] *Problems of the Week Grade 5/6, 2013 - 2014* [online]. [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: http://cemc.uwaterloo.ca/resources/potw-strands/2013-14/POTWB-13-Combined5-6.pdf

[15] *Problems of the Week Grade 7/8, 2013 - 2014* [online]. [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: http://cemc.uwaterloo.ca/resources/potw-strands/2013-14/POTWC-13-Combined7-8.pdf

Seznam obrázků

Obr. 1 – Matematický problém 7

Obr. 2 – Cvičení 8

Obr. 3 – Úlohy 8

Obr. 4 - Zkoumání 9

Obr. 5 – První příklad – Prometheus ([3], str. 49) 14

Obr. 6 – Druhý příklad – Prometheus ([3], str. 80) 14

Obr. 7 – První příkalad – Fraus ([4], str.74) 16

Obr. 8 – Druhý příklad – Fraus ([4], str.81) 16

Obr. 9 – Ukázka webové stránky Matematika pro všechny [5] 18

Obr. 10 – Ukázka webové stránky NRICH [6] 19

Obr. 11 – Ukázka úlohy z A+ Click [7] 20

Obr. 12 – Ukázka problémové úlohy z CEMC [10] 24

Obr. 13 – Náhled na rozdělení problémů týdne na Math Forum [11] 25