



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

SBÍRKA PŘÍKLADŮ NA TÉMA KUŽELOSEČKY

Autor práce: Bc. Žaneta Mířková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Sbíрка příkladů na téma kuželosečky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu profesoru RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné vedení mé diplomové práce, cenné připomínky, užitečné rady a přínosné konzultace. Dále pak děkuji mému dědovi za pomoc s překladem ruské sbírky příkladů a rodině a příteli za podporu během celé doby studia.

Anotace

Diplomová práce se zabývá především příklady na téma kuželosečky. Je rozdělena do dvou částí. První část obsahuje kapitoly s příklady k tématům probíraným v předmětu Geometrie I. Ve druhé části jsou zmíněny afinní vlastnosti kuželoseček, které lze využít v konstrukčních úlohách, Pascalova a Brianchonova věta a jejich použití. Cílem diplomové práce je přiblížit zájemcům problematiku kuželoseček na typických příkladech a seznámit je se zajímavými vlastnostmi, na které nezbývá v kurzu Geometrie I prostor.

Annotation

Diploma thesis deals especially with practical examples on the topic of conics. It is divided into two parts. The first part includes chapters with examples on the topics discussed in the course Geometry I. In the second part affine properties of conics, which can be used in construction tasks, Pascal's theorem and Brianchon's theorem and their use are mentioned. The aim of this thesis is to illustrate the conics on typical examples for those interested and then to show them the interesting properties, for which there is no space in the course Geometry I.

Obsah

Úvod.....	8
1. Kuželosečky jako algebraické křivky 2. stupně	10
1.1 Kuželosečka.....	10
1.2 Příklady některých kuželoseček	11
2. Asymptotický směr kuželosečky.....	15
2.1 Řešené příklady	15
2.2 Příklady k procvičení.....	16
2.3 Výsledky.....	17
3. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky.....	18
3.1 Řešené příklady	19
3.2 Příklady k procvičení.....	23
3.3 Výsledky.....	23
4. Střed kuželosečky, středové a nestředové kuželosečky	25
4.1 Střed kuželosečky	25
4.2 Středové a nestředové kuželosečky	25
4.3 Řešené příklady	25
4.4 Příklady k procvičení.....	27
4.5 Výsledky.....	28
5. Singulární bod, singulární a regulární kuželosečky	30
5.1 Singulární bod	30
5.2 Singulární a regulární kuželosečky	30
5.3 Řešené příklady	30
5.4 Příklady k procvičení.....	32
5.5 Výsledky.....	32
6. Tečna a polára kuželosečky.....	34

6.1	Tečna kuželosečky	34
6.2	Polára kuželosečky	35
6.3	Řešené příklady	36
6.4	Příklady k procvičení.....	40
6.5	Výsledky.....	40
7.	Klasifikace kuželoseček	42
7.1	Charakteristická rovnice.....	42
7.2	Klasifikace kuželoseček - středové kuželosečky.....	42
7.3	Klasifikace kuželoseček - nestředové kuželosečky.....	43
7.4	Řešené příklady	43
7.5	Příklady k procvičení.....	46
7.6	Výsledky.....	46
8.	Afinní vlastnosti elipsy.....	47
8.1	Příklady užití afinity	48
9.	Kuželosečky jako místa středů kružnic	53
9.1	Průsečík přímky a hyperboly.....	53
9.2	Průsečíky přímky s parabolou	55
10.	Pascalova věta	58
10.1	Verifikace Pascalovy věty v DGS	58
10.2	Využití Pascalovy věty	60
11.	Brianchonova věta.....	62
11.1	Verifikace Brianchonovy věty v DGS	62
11.2	Využití Brianchonovy věty.....	64
12.	Rovnoosá hyperbola.....	65
12.1	Trojúhelník, jehož vrcholy leží na rovnoosé hyperbole	65
12.2	Verifikace problému v DGS	65

12.3	Počítačový důkaz (analytický důkaz s využitím počítače)	67
Závěr.....		70
Seznam použité a citované literatury a internetových zdrojů		71

Úvod

Mou diplomovou práci, ve které se věnuji kuželosečkám, je možné teoreticky rozdělit do dvou částí.

V první části se zabývám kuželosečkami jako algebraickými křivkami druhého stupně. Úvodní kapitola Kuželosečky jako algebraické křivky 2. stupně čtenáře seznámí se základními definicemi, pojmy a příklady kuželoseček. Další kapitoly s názvy Asymptotický směr kuželosečky; Vzájemná poloha přímky a kuželosečky; Střed kuželosečky, středové a nestředové kuželosečky; Singulární bod, singulární a regulární kuželosečky; Tečna a polára kuželosečky a Klasifikace kuželoseček otevírá stručná teorie obsahující základní definice a věty k tématu, následují řešené typické příklady a závěrem jsou předloženy neřešené příklady k procvičení s výsledky.

Druhá část přibližuje některé vlastnosti kuželoseček. V kapitole Afinní vlastnosti jde o využití vlastností pravoúhlé afinity pro hledání průsečíků přímky a elipsy, sestrojování tečen z bodu k elipse, tečen v bodě elipsy nebo tečen rovnoběžných s danou přímkou, aniž bychom museli elipsu sestrojovat. Následující kapitola čtenáři také ukazuje, jak hledat průsečíky přímky s hyperbolou, nebo parabolou, aniž by tyto kuželosečky opět musel sestrojovat. Zde se ale využívá hyperboly (resp. paraboly) jako geometrického místa středů. Další dvě kapitoly s názvy Pascalova věta a Brianchonova věta se zabývají verifikací těchto vět v DGS (Dynamic geometry system) a jejich využitím v geometrii. Kapitola pojmenovaná Rovnoosá hyperbola uzavírá mou diplomovou práci a seznamuje se vztahem hyperboly a ortocentra trojúhelníku, jehož vrcholy leží na hyperbole.

Cílem práce je přinést studentům PF JU další materiály k procvičení některých témat probíraných v rámci předmětu Geometrie I. Dále pak upozornit na zajímavé vlastnosti a věty týkající se kuželoseček, jimž se z časových důvodů nelze věnovat ve zmíněném kurzu, ale mohly by být pro studenty nebo pro zájemce velmi zajímavé.

Obrázky, doplňující některé kapitoly, byly vytvořeny v programu GeoGebra 4.2. K ověření správnosti výpočtu malých i velkých determinantů a k řešení soustav lineárních rovnic jsem využila program Derive 6. Pokud nebude uvedeno jinak, pak

jsou veškeré definice a věty převzaty z knihy *Kuželosečky* - v seznamu literatury označené [1].

1. Kuželosečky jako algebraické křivky 2. stupně

1.1 Kuželosečka

Definice: Necht' je dána rovnice ve tvaru:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou reálná čísla a alespoň jeden z koeficientů u kvadratických členů je různý od nuly, tj. $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$. Potom se množina bodů X euklidovského prostoru E^2 , jejichž souřadnice $[x, y]$ v nějaké lineární soustavě souřadnic vyhovují rovnici (1), nazývá algebraická křivka 2. stupně, přesněji algebraická křivka 2. stupně určená rovnicí (1). Rovnici (1) nazýváme rovnicí kuželosečky, nebo stručně kuželosečkou.

Maticový tvar kuželosečky:

Rovnici kuželosečky (1) lze vyjádřit i v maticovém tvaru:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

kdy platí $a_{ij} = a_{ji}$, pro $i, j = 1, 2, 3$.

Malý determinant:

Malý determinant kuželosečky se značí δ a je ve tvaru:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Velký determinant:

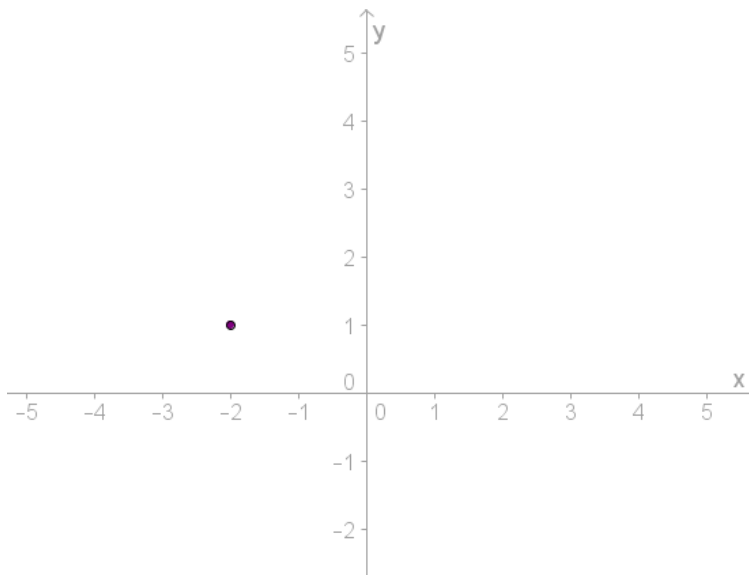
Velký determinant kuželosečky se značí Δ a je ve tvaru:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

1.2 Příklady některých kuželoseček

- jediný bod $[-2, 1]$:

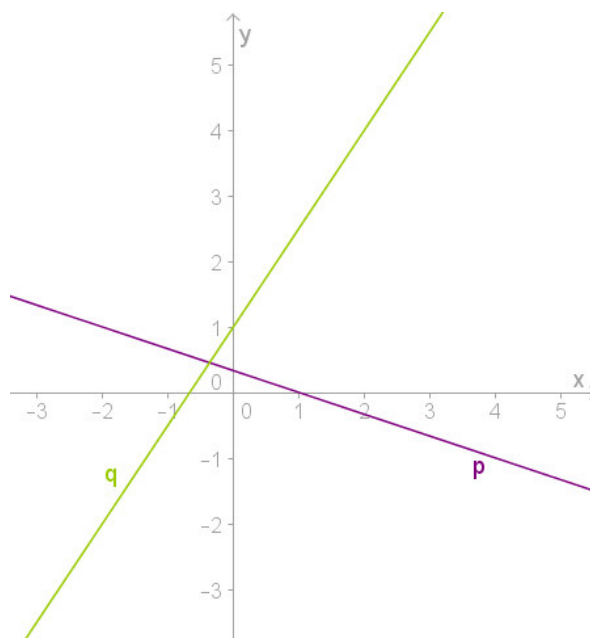
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$$



Obr. 1 a) Jediný bod

- dvojice různoběžek:

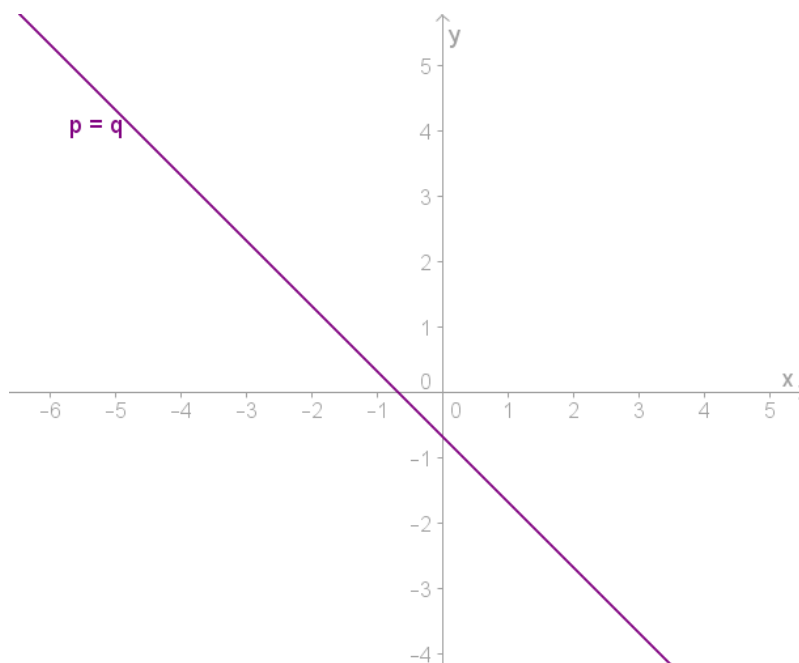
$$(x + 3y - 1) \cdot (3x - 2y + 2) = 0$$



Obr. 1 b) Dvojice různoběžek

- dvě splývající přímky:

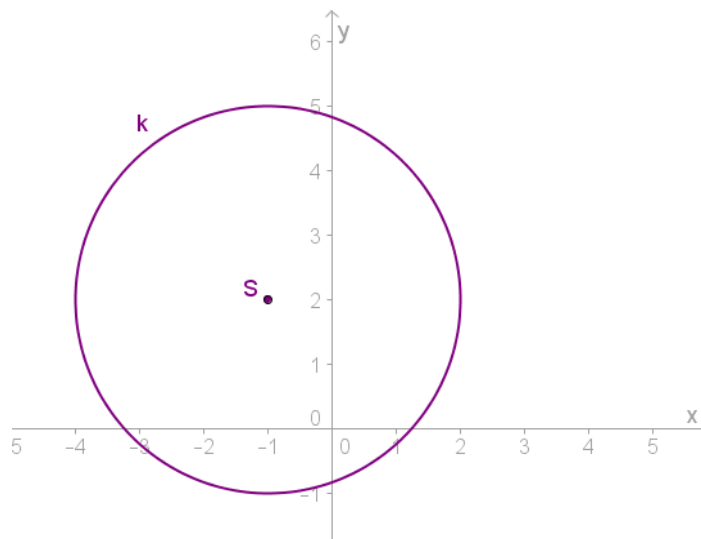
$$(3x + 3y + 2)^2 = 0$$



Obr. 1 c) Dvě splývající přímky

- kružnice se středem $S = [-1, 2]$ a poloměrem 3:

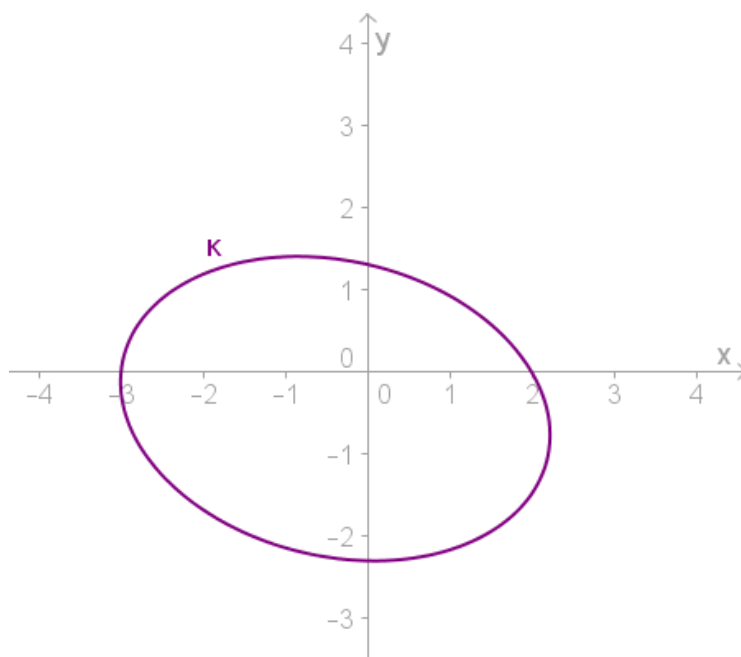
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 9 = 0$$



Obr. 1 d) Kružnice

- elipsa:

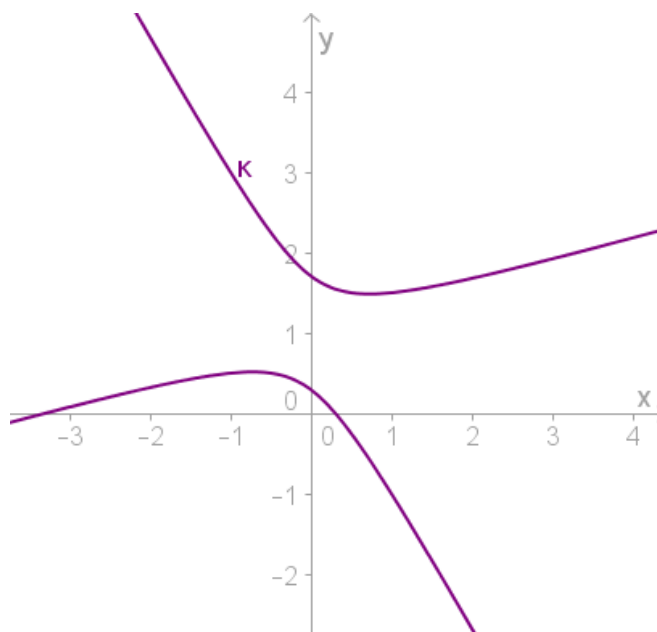
$$2x^2 + xy + 4y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$$



Obr. 1 e) Elipsa

- hyperbola:

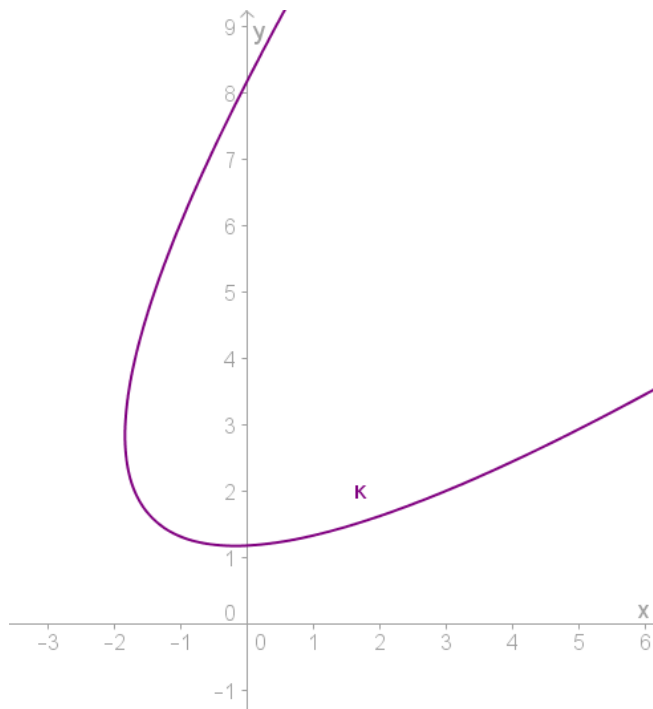
$$x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 1 = 0$$



Obr. 1 f) Hyperbola

- parabola:

$$9x^2 - 18xy + 9y^2 + 24x - 84y + 86 = 0$$



Obr. 1 g) Parabola

- prázdná množina:

$$4x^2 + 3y^2 + 5 = 0$$

2. Asymptotický směr kuželosečky

Definice: Směr, určený nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v)$, pro který platí

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0,$$

nazýváme asymptotický směr kuželosečky (1).

Věta:

Je-li $\delta > 0$, kuželosečka (1) nemá žádný asymptotický směr - říkáme, že kuželosečka je eliptického typu.

Je-li $\delta = 0$, kuželosečka (1) má jediný asymptotický směr - říkáme, že kuželosečka je parabolického typu.

Je-li $\delta < 0$, kuželosečka (1) má dva různé asymptotické směry - říkáme, že kuželosečka je hyperbolického typu.

2.1 Řešené příklady

Příklad: Určete asymptotické směry kuželosečky:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x + y - 7 = 0$

Nejprve určíme rovnici asymptotických směrů kuželosečky:

$$u^2 - 6uv + 9v^2 = 0$$

$$(u - 3v)^2 = 0,$$

rovnici řeší jediný asymptotický směr, který splňuje rovnici $u = 3v$, tedy např. $\vec{u} = (3; 1)$.

K ověření existence asymptotických směrů můžeme využít i malého determinantu δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0,$$

protože $\delta = 0$, má daná kuželosečka jeden asymptotický směr.

$$\text{b) } 2x^2 + xy - 4y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$$

Opět sestavíme a upravíme rovnici asymptotických směrů této kuželosečky:

$$2u^2 + uv - 4v^2 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{v^2}$$

$$2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \frac{u}{v} - 4 = 0,$$

diskriminant D získané rovnice:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 1 + 32 = 33.$$

Diskriminant D je kladný, proto existují dva různé reálné kořeny, které jsou řešením. Tyto kořeny získáme ze vztahu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

po dosazení

$$\left(\frac{u}{v}\right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Asymptotické směry vyšetřované kuželosečky tedy jsou $\vec{u}_1 = (-1 + \sqrt{33}; 4)$
a $\vec{u}_2 = (-1 - \sqrt{33}; 4)$.

2.2 Příklady k procvičení

Příklad: Určete asymptotické směry kuželosečky:

a) $5x^2 - 3xy - 8y^2 - 3x + 1 = 0$

b) $3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - 7y - 11 = 0$

c) $4x^2 + 4xy + y^2 + 5x - y = 0$

d) $6x^2 + xy + 3x + 2y - 13 = 0$

e) $8x^2 + 4xy + 3y^2 - 12x - 5y + 6 = 0$

f) $x^2 - 3xy + 8y^2 - 10y + 5 = 0$

2.3 Výsledky

Příklad:

- a) $\delta < 0$ ($\delta = -\frac{169}{4}$); 2 různé asymptotické směry: $\vec{u}_1 = (8, 5)$ a $\vec{u}_2 = (-1, 1)$
- b) $\delta > 0$ ($\delta = \frac{23}{4}$); žádný asymptotický směr
- c) $\delta = 0$; 1 asymptotický směr: $\vec{u} = (1, -2)$
- d) $\delta < 0$ ($\delta = -\frac{1}{4}$); 2 různé asymptotické směry: $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = (1, -6)$
- e) $\delta > 0$ ($\delta = 20$); žádný asymptotický směr
- f) $\delta > 0$ ($\delta = \frac{23}{4}$); žádný asymptotický směr

3. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

Mějme kuželosečku (1) a dále přímku p zadanou parametricky:

$p: X = M + t \cdot \vec{u}$, kde $M = [m, n]$, $\vec{u} = (u, v)$:

$$x = m + t \cdot u$$

$$y = n + t \cdot v$$

Dosazením x, y do rovnice kuželosečky (1) získáme pro parametr t rovnici:

$At^2 + 2Bt + C = 0$, kde:

$$A = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2,$$

$$B = u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}),$$

$$C = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 + 2a_{13}m + 2a_{23}n + a_{33}.$$

Pak může dojít k následujícím případům:

$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$	rovnice platí pro všechna $t \Rightarrow$ celá přímka náleží kuželosečce (každý bod přímky je i bodem kuželosečky)
$A = 0, \quad B = 0, \quad C \neq 0$	rovnice nemá žádný kořen \Rightarrow přímka nemá s kuželosečkou žádný společný bod (přímka je asymptotou)
$A = 0, \quad B \neq 0, \quad C = \text{libovolné}$	řešením rovnice je jeden lineární kořen $t = \frac{-C}{2B}$ \Rightarrow přímka má s kuželosečkou jeden společný bod (přímka je rovnoběžná s hlavní osou, nebo s asymptotou)
$A \neq 0, \quad B^2 - AC > 0$	řešením rovnice jsou 2 různé reálné kořeny \Rightarrow přímka má s kuželosečkou společné 2 body – je její sečnou
$A \neq 0, \quad B^2 - AC = 0$	řešením rovnice je 1 dvojnásobný kořen \Rightarrow přímka má s kuželosečkou společný 1 dvojnásobný bod – je její tečnou
$A \neq 0, \quad B^2 - AC < 0$	rovnice nemá reálné kořeny \Rightarrow přímka nemá s kuželosečkou žádný společný bod – je její nesečnou

3.1 Řešené příklady

Příklad: Určete vzájemnou polohu kuželosečky κ a přímky p :

a) $\kappa: 16x^2 + 25y^2 - 112x + 96 = 0$; $p: x - 2y - 6 = 0$

Z rovnice přímky si vyjádříme např. proměnnou x :

$$x = 2y + 6.$$

Pro zjištění vzájemné polohy přímky p a kuželosečky κ , dosadíme vztah $x = 2y + 6$ do rovnice kuželosečky κ a následně rovnici upravíme:

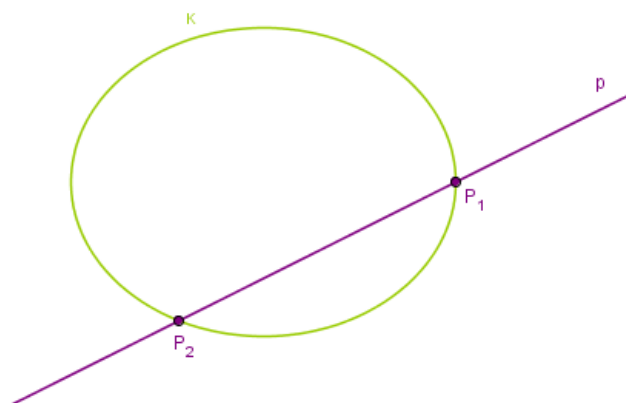
$$\begin{aligned} p \cap \kappa: \quad 16(2y + 6)^2 + 25y^2 - 112(2y + 6) + 96 &= 0, \\ 89y^2 + 160y &= 0. \end{aligned}$$

Protože diskriminant $D > 0$ ($D = 25600$), má tato rovnice dvě různá reálná řešení. To znamená, že přímka p kuželosečku κ protíná (je tedy její sečnou).

Vypočteme-li rovnici $89y^2 + 160y = 0$, získáme kořeny $y_1 = 0$ a $y_2 = -\frac{160}{89}$.

Po dosazení do rovnice přímky p , dostaneme $x_1 = 6$ a $x_2 = \frac{214}{89}$.

Přímka p protíná kuželosečku κ ve dvou bodech $P_1 = [6, 0]$ a $P_2 = [\frac{214}{89}, -\frac{160}{89}]$.



Obr. 3.1 Příklad 1 a)

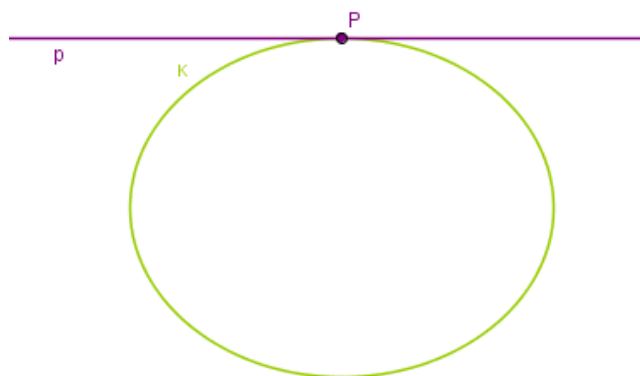
b) $\kappa: 16x^2 + 25y^2 - 112x + 96 = 0$; $p: y = 2$

Opět dosadíme rovnici $y = 2$ do rovnice kuželosečky κ a upravíme:

$$p \cap \kappa: \quad 16x^2 + 25 \cdot 2^2 - 112x + 96 = 0$$

$$16x^2 - 112x + 196 = 0.$$

Vypočteme-li diskriminant $D = b^2 - 4ac$, zjistíme, že $D = 0$. Jelikož je diskriminant roven 0, má daná rovnice jeden dvojnásobný kořen $x = \frac{7}{2}$, a tudíž se přímka p kuželosečky κ dotýká (je její tečnou). Bodu dotyku odpovídá bod $P = \left[\frac{7}{2}, 2\right]$.



Obrázek 3.1 Příklad 1 b)

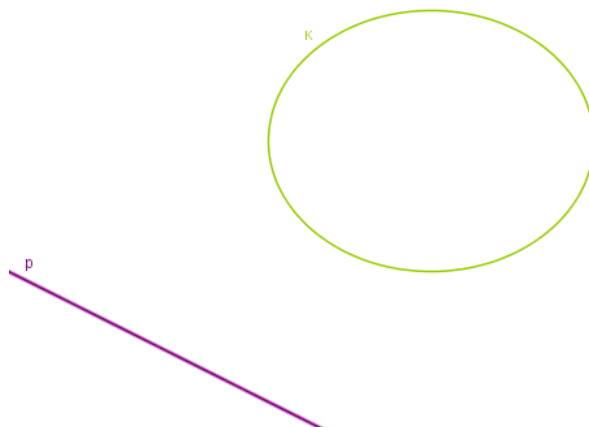
c) $\kappa: 16x^2 + 25y^2 - 112x + 96 = 0$; $p: x + 2y + 7 = 0$

Z rovnice přímky p si vyjádříme jednu z proměnných (např. $x = -2y - 7$) a dosadíme do rovnice kuželosečky κ :

$$p \cap \kappa: \quad 16(-2y - 7)^2 + 25y^2 - 112(-2y - 7) + 96 = 0$$

$$89y^2 + 672y + 1664 = 0.$$

Diskriminant D je v tomto případě záporný ($D = -140800$), neexistuje tak žádný reálný kořen a přímka p nemá s kuželosečkou κ žádný společný bod (je její nesečnou).



Obr. 3.1 Příklad 1 c)

Příklad 2: V rovnici $y = x + q$ určete číslo q tak, aby přímka $y = x + q$ byla sečnou, tečnou nebo nesečnou elipsy $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. ([5], str. 272)

Znovu dosadíme rovnici přímky do rovnice kuželosečky:

$$9x^2 + 16(x + q)^2 - 144 = 0$$

$$25x^2 + 32qx + 16q^2 - 144 = 0.$$

Nyní pro nás bude důležitý diskriminant D :

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = -576q^2 + 14400.$$

Přímka je tečnou kuželosečky (mají 1 dvojnásobný společný bod), když $D = 0$, tedy:

$$-576q^2 + 14400 = 0$$

$$q = \pm 5.$$

Přímka je sečnou kuželosečky (mají dva společné body), když $D > 0$, tedy:

$$-576q^2 + 14400 > 0 \quad /: (-576)$$

$$q^2 - 25 < 0$$

$$(q - 5) \cdot (q + 5) < 0$$

$$q \in (-5, 5).$$

Přímka je nesečnou kuželosečky (nemají žádný společný bod), když $D < 0$, tedy:

$$-576q^2 + 14400 < 0 \quad /: (-576)$$

$$q^2 - 25 > 0$$

$$(q - 5) \cdot (q + 5) > 0$$

$$q \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty).$$

Příklad 3: Ověřte, že přímka $p: 2x - y - 14 = 0$ má s kuželosečkou $\kappa: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ jeden společný bod.

Z rovnice přímky si vyjádříme např. proměnnou $y = 2x - 14$, dosadíme do rovnice kuželosečky κ a upravíme:

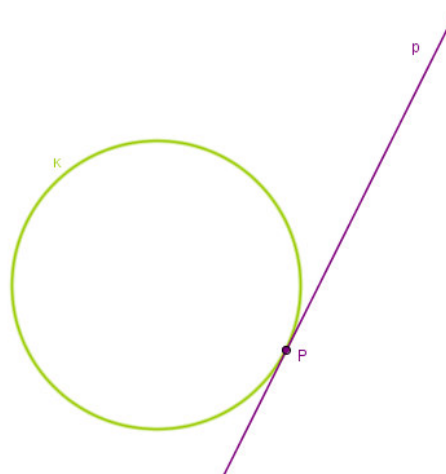
$$x^2 + (2x - 14)^2 - 10x - 2(2x - 14) + 21 = 0$$

$$5x^2 - 70x + 245 = 0.$$

Nyní určíme diskriminant D :

$$D = (-70)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 245 = 4900 - 4900 = 0.$$

Protože je diskriminant $D = 0$, má přímka p s kuželosečkou κ společný jeden dvojnásobný bod - je její tečnou.



Obr. 3.1 Příklad 3

3.2 Příklady k procvičení

Příklad 1: Určete průsečíky kuželosečky κ a přímky p :

a) $\kappa: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$; $p: 3x - y + 5 = 0$

b) $\kappa: x^2 + y^2 - 12x + 2y + 11 = 0$; $p: 5x - y + 5 = 0$

c) $\kappa: x^2 + y^2 - 12x + 2y + 1 = 0$; $p: y - 5 = 0$

d) $\kappa: x^2 - 4y - 4 = 0$; $p: y + 1 = 0$

e) $\kappa: y^2 - 2x = 0$; $p: x - 2 = 0$

f) $\kappa: x^2 + 2y^2 - 8 = 0$; $p: y + 2 = 0$

g) $\kappa: 9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$; $p: -4x + 5y - 20 = 0$

Příklad 2:

a) V rovnici $y = x + q$ určete číslo q tak, aby daná přímka byla sečnou, tečnou nebo nesečnou paraboly $y^2 - 10x = 0$. ([5], str. 272)

b) V rovnici $y = \frac{5}{2}x + m$ určete číslo m tak, aby daná přímka byla sečnou, tečnou nebo nesečnou hyperboly $4x^2 - y^2 - 36 = 0$. ([2], str. 74)

3.3 Výsledky

Příklad 1:

a) $D = 0$; mají jeden společný dvojnásobný bod \Rightarrow přímka je tečnou kuželosečky \Rightarrow bod dotyku $T = [-1, 2]$

b) $D < 0$ ($D = -2480$); nemají žádný společný bod \Rightarrow přímka je nesečnou kuželosečky

c) $D = 0$; mají jeden společný dvojnásobný bod \Rightarrow přímka je tečnou kuželosečky \Rightarrow bod dotyku $T = [6, 5]$

d) $D = 0$; mají jeden společný dvojnásobný bod \Rightarrow přímka je tečnou kuželosečky \Rightarrow bod dotyku $T = [0, -1]$

- e) $D > 0$ ($D = 16$); mají dva společné body \Rightarrow přímka je sečnou kuželosečky
 \Rightarrow průsečíky $P_1 = [2, 2]$ a $P_2 = [2, -2]$
- f) $D = 0$; mají jeden společný dvojnásobný bod \Rightarrow přímka je tečnou kuželosečky \Rightarrow bod dotyku $T = [0, -2]$
- g) $D < 0$ ($D = -17100$); nemají žádný společný bod \Rightarrow přímka je nesečnou kuželosečky

Příklad 2:

- a) tečna - $D = 0$ pro $q = \frac{10}{4} = 2,5$
sečna - $D > 0$ pro $q < \frac{10}{4}$
nesečna - $D < 0$ pro $q > \frac{10}{4}$
- b) tečna - $D = 0$ pro $m = \pm \frac{9}{2} = \pm 4,5$
sečna - $D > 0$ pro $m \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$
nesečna - $D < 0$ pro $m \in \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

4. Střed kuželosečky, středové a nestředové kuželosečky

4.1 Střed kuželosečky

Definice: Bod M nazveme středem kuželosečky (1), jestliže pro libovolný bod X kuželosečky existuje bod Y kuželosečky takový, že bod M je středem úsečky XY .

Věta: Bod $M = [m, n]$ je středem kuželosečky (1), právě když platí:

$$\begin{aligned}a_{11}m + a_{12}n + a_{13} &= 0 \\ a_{21}m + a_{22}n + a_{23} &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

4.2 Středové a nestředové kuželosečky

Definice: Kuželosečka, která má jediný střed, se nazývá středová kuželosečka.

Věta: Kuželosečka je středová, právě když $\delta \neq 0$.

4.3 Řešené příklady

Příklad 1: Určete, zda jsou následující kuželosečky středové, či nestředové. V případě středové kuželosečky určete souřadnice středu.

a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$ ([2], str. 88)

Sestavíme a vypočteme malý determinant δ (2), tedy:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Vidíme, že $\delta = 0$, a jedná se tak o kuželosečku nestředovou.

Můžeme ale zjistit, zda střed neexistuje, nebo existuje přímka plná středů.

Dosadíme-li do vztahu (4), získáme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}4m + 2n - 4 &= 0 \\ 2m + n - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Nyní můžeme například pomocí Gauss-Jordanovy eliminace tuto soustavu vyřešit:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow h(A) = h(A_{\text{roz}}) < n.$$

Z Frobeniovy věty víme, že pokud se hodnost matice rozšířené rovná hodnosti matice nerozšířené, pak má soustava lineárních rovnic řešení. Je-li hodnost matice menší než počet neznámých, pak existuje nekonečně mnoho řešení.

V tomto případě má tedy vyšetřovaná soustava nekonečně mnoho řešení, což můžeme interpretovat tak, že daná nestředová kuželosečka má celou přímku plnou středů o rovnici $2x + y - 2 = 0$.

$$\mathbf{b) } 3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0 \quad ([2], \text{ str. } 88)$$

Nejprve určíme malý determinant δ (2), v tomto případě bude ve tvaru:

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 3 - \frac{25}{4} = -\frac{13}{4}.$$

Protože $\delta \neq 0$, jedná se o kuželosečku středovou.

Pomocí vztahu (4) určíme souřadnice středu. Dosadíme vyšetřovanou kuželosečku do vztahu (4) a získáme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3m + \frac{5}{2}n - 4 &= 0 \\ \frac{5}{2}m + n - \frac{11}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Následným vyřešením soustavy lineárních rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} m &= 3 \\ n &= -2. \end{aligned}$$

Hledaným středem kuželosečky je $M = [3, -2]$.

Příklad 2: Při jakých hodnotách neznámé a a neznámé b určuje rovnice $2x^2 + 8xy + ay^2 + 6x + by + 5 = 0$ nestředovou kuželosečku, u které střed neexistuje?

Nejprve určíme hodnotu a tak, aby se jednalo o nestředovou kuželosečku. Víme, že v případě nestředové kuželosečky platí $\delta = 0$, tedy:

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 0,$$

odtud plyne rovnice:

$$2a - 16 = 0.$$

Jednoduchou úpravou zjistíme, že pouze v případě $a = 8$ bude uvedená rovnice nestředovou kuželosečkou.

Protože chceme, aby střed neexistoval, nesmí mít následující soustava lineárních rovnic řešení:

$$\begin{aligned} 2m + 4n + 3 &= 0 \\ 4m + 8n + \frac{b}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že pokud by hodnota neznámé b byla rovna 12, je druhá rovnice dvojnásobkem první. V takovém případě bychom při řešení soustavy získali výsledek $0 = 0$ (event. $h(A) = h(A_{roz}) < n$) a existovalo by nekonečně mnoho řešení této soustavy. Proto tato soustava nebude mít žádná reálná řešení (a bude se jednat o případ, kdy střed neexistuje) pro všechna $b \neq 12$.

4.4 Příklady k procvičení

Příklad 1: Rozhodněte, zda jsou následující kuželosečky středové, či nestředové. V případě středové kuželosečky nezapomeňte určit souřadnice středu.

a) $2x^2 + 4xy - y^2 + 6x - 4y + 5 = 0$

b) $5x^2 + xy - 6x + 7y - 2 = 0$

c) $2x^2 - 8xy + 8y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$

- d) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18x - 54y + 72 = 0$
- e) $3x^2 + 8xy - 2y^2 - x + 3y + 5 = 0$
- f) $2xy + 3y^2 - 7y + 5 = 0$
- g) $4x^2 + 16xy + 16y^2 - 5x + 1 = 0$
- h) $x^2 - 12xy + y^2 - 6x + 2 = 0$
- i) $9x^2 - 30xy + 25y^2 - 66x + 110y + 105 = 0$
- j) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Příklad 2: Určete hodnoty neznámé m a neznámé n , pro které bude rovnice $mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$ rovnicí: ([2], str. 89)

- a) kuželosečky středové
- b) kuželosečky nestředové - střed neexistuje
- c) kuželosečky nestředové - přímka plná středů

4.5 Výsledky

Příklad 1:

- a) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = -6$); $M = [\frac{1}{6}, -\frac{5}{3}]$
- b) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = -\frac{1}{4}$); $M = [-7, 76]$
- c) nestředová kuželosečka ($\delta = 0$); střed neexistuje
- d) nestředová kuželosečka ($\delta = 0$); přímka plná středů $x + 3y - 9 = 0$
- e) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = -22$); $M = [-\frac{5}{22}, \frac{13}{44}]$
- f) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = -1$); $M = [\frac{7}{2}, 0]$
- g) nestředová kuželosečka ($\delta = 0$); střed neexistuje
- h) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = -35$); $M = [-\frac{3}{35}, -\frac{18}{35}]$
- i) nestředová kuželosečka ($\delta = 0$); přímka plná středů $3x - 5y - 11 = 0$
- j) středová kuželosečka ($\delta \neq 0, \delta = 1$); $M = [3, -1]$

Příklad 2:

a) $m \neq 4, n \in R$

b) $m = 4, n \neq 6$

c) $m = 4, n = 6$

5. Singulární bod, singulární a regulární kuželosečky

5.1 Singulární bod

Definice: Singulárním bodem kuželosečky (1) nazveme takový bod $X = [x, y]$, pro který platí:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Věta: Singulární bod kuželosečky je bodem kuželosečky a zároveň jejím středem.

Definice: Bod kuželosečky, který není singulární, je regulární.

5.2 Singulární a regulární kuželosečky

Definice: Kuželosečka (1) se nazývá singulární, jestli platí $\Delta = 0$. Jestliže $\Delta \neq 0$, pak se kuželosečka (1) nazývá regulární.

Věta: Obsahuje-li kuželosečka singulární bod, potom je kuželosečka singulární.

5.3 Řešené příklady

Příklad: Rozhodněte, zda jsou následující kuželosečky singulární, nebo regulární.

a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 3x + 2y - 4 = 0$

Nejdříve vypočteme Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 5 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-40 + 3 + 3) - \left(\frac{45}{4} + 2 - 16\right) = -\frac{125}{4}.$$

Protože $\Delta \neq 0$, jde o kuželosečku regulární.

$$\text{b) } 2x^2 + 2xy + y^2 - 6y + 18 = 0$$

Opět vypočteme Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - (0 + 18 + 18) = 0.$$

Určili jsme, že $\Delta = 0$, a tudíž se jedná o singulární kuželosečku.

Nyní zjistíme, zda existuje singulární bod. Dle definice musí jeho souřadnice být řešením následující soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + y - 3 &= 0 \\ -3y + 18 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic získáme souřadnice středu vyšetřované kuželosečky, tedy $X = [-3; 6]$.

Aby bod $X = [-3; 6]$ byl singulárním bodem, musí na kuželosečce zároveň ležet. To ověříme dosazením jeho souřadnic do poslední rovnice:

$$\begin{aligned} -3 \cdot 6 + 18 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Bod $X = [-3, 6]$ je středem kuželosečky a zároveň na ní leží, proto je i singulárním bodem kuželosečky.

Příklad 2: Určete hodnotu neznámé k tak, aby kuželosečka o rovnici $kx^2 + 4xy - 8x + 4y - 1 = 0$ byla singulární.

Nejprve zjistíme Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 16 - 16 - (0 + 4k - 4) = -28 - 4k.$$

Kuželosečka je singulární právě tehdy, když $\Delta = 0$, proto:

$$\begin{aligned} -28 - 4k &= 0 \\ k &= -7. \end{aligned}$$

Při hodnotě $k = -7$ bude uvedená kuželosečka singulární.

5.4 Příklady k procvičení

Příklad 1: Rozhodněte, zda jsou uvedené kuželosečky singulární, nebo regulární.

a) $3x^2 + 6xy - y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$

b) $2x^2 + 6xy - 3x + 2y = 0$

c) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

d) $5x^2 - 6xy + y^2 + 4x - 1 = 0$

e) $2xy + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$

f) $9x^2 - 4xy + y^2 - 7x - 3 = 0$

Příklad 2: Určete hodnotu neznámé g tak, aby uvedená rovnice byla rovnicí singulární kuželosečky:

a) $gx^2 - 6xy + 6x - 2y + 5 = 0$

b) $2x^2 + gxy + 3y^2 + 4x + 2y = 0$

5.5 Výsledky

Příklad 1:

a) regulární kuželosečka ($\Delta \neq 0, \Delta = 61$)

b) regulární kuželosečka ($\Delta \neq 0, \Delta = -11$)

c) singulární kuželosečka ($\Delta = 0$); singulární bod $X = [2, 1]$

- d) singulární kuželosečka ($\Delta = 0$); singulární bod $X = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
- e) regulární kuželosečka ($\Delta \neq 0, \Delta = -23$)
- f) regulární kuželosečka ($\Delta \neq 0, \Delta = -\frac{109}{4}$)

Příklad 2:

a) $g = -27$

b) $g = 7$

6. Tečna a polára kuželosečky

6.1 Tečna kuželosečky

Definice: Tečna kuželosečky je přímka, která má v bodě dotyku s kuželosečkou dvojnásobný průsečík.

Věta: Přímka $t: X = M + t \vec{u}$ je tečnou kuželosečky (1) v regulárním bodě $M = [m, n]$, právě když vektor $\vec{u} = (u, v)$ splňuje:

$$u(a_{11}m + a_{12}n + a_{13}) + v(a_{21}m + a_{22}n + a_{23}) = 0.$$

Definice: Přímka t o rovnici:

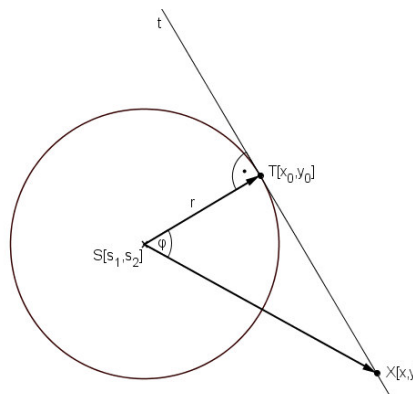
$$t: (a_{11}m + a_{12}n + a_{13})x + (a_{21}m + a_{22}n + a_{23})y + a_{31}m + a_{32}n + a_{33} = 0$$

procházející bodem $M = [m, n]$ kuželosečky se nazývá tečnou kuželosečky (1) v bodě M . Bod $M = [m, n]$ je bod dotyku.

Pro přehlednější výpočet se používá maticový tvar tečny t :

$$(m, n, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

pozn.: Na střední škole se využívá pro určení tečny t kružnice v bodě $T = [x_0, y_0]$ rovnice $(x_0 - s_1) \cdot (x - s_1) + (y_0 - s_2) \cdot (y - s_2) = r^2$. Kterou lze odvodit následovně:



Obr. 6.1 Tečna ke kružnici - odvození vzorce

Obecná rovnice kružnice: $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$.

Vektory: $\vec{ST} = (x_0 - s_1; y_0 - s_2)$, $\vec{SX} = (x - s_1; y - s_2)$.

Skalární součin vektorů $|\vec{ST}|$ a $|\vec{SX}|$: $\vec{ST} \cdot \vec{SX} = |\vec{ST}| \cdot |\vec{SX}| \cdot \cos\varphi$.

Protože je trojúhelník STX pravoúhlý, platí: $\cos\varphi = \frac{|\vec{ST}|}{|\vec{SX}|}$.

Po dosazení zpět do rovnice skalárního součinu vektorů získáme:

$$\vec{ST} \cdot \vec{SX} = |\vec{ST}| \cdot |\vec{SX}| \cdot \frac{|\vec{ST}|}{|\vec{SX}|},$$

po úpravě pak: $\vec{ST} \cdot \vec{SX} = |\vec{ST}|^2$.

$|\vec{ST}|$ je však poloměrem dané kružnice, proto: $\vec{ST} \cdot \vec{SX} = r^2$, a tedy:

$$(x_0 - s_1) \cdot (x - s_1) + (y_0 - s_2) \cdot (y - s_2) = r^2.$$

6.2 Polára kuželosečky

Definice: Přímka p o rovnici:

$$(a_{11}r + a_{12}s + a_{13})x + (a_{21}r + a_{22}s + a_{23})y + a_{31}r + a_{32}s + a_{33} = 0$$

se nazývá polára bodu $R = [r, s]$ vzhledem ke kuželosečce (1). Bod R se nazývá pól přímky p vzhledem ke kuželosečce (1).

Věta: Leží-li bod P na poláře bodu R , leží bod R na poláře bodu P .

Pro výpočet je výhodnější použít maticový zápis poláry p :

$$(r, s, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

6.3 Řešené příklady

Příklad 1: Napište rovnici tečny ke kuželosečce $x^2 + y^2 = 5$ v bodě $T = [-1, ?]$.

Nejprve zjistíme dosazením do kuželosečky y -ovou souřadnici bodu dotyku T tak, aby ležel na dané kuželosečce:

$$\begin{aligned}1 \cdot (-1)^2 + y^2 &= 5 \\y^2 &= 4 \\y &= \pm 2\end{aligned}$$

Získali jsme tedy dva body dotyku tečny: $T_1 = [-1, -2]$ a $T_2 = [-1, 2]$.

I. způsob - výpočet rovnice tečny podle definice:

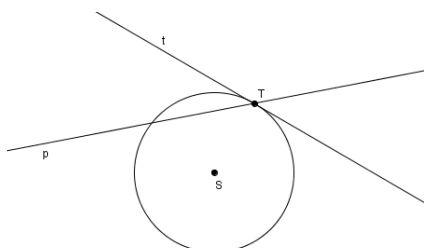
Bod dotyku T_1 dosadíme do maticového tvaru pro rovnici tečny:

$$\begin{aligned}t_1: (-1, -2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\-x - 2y - 5 &= 0.\end{aligned}$$

Stejným způsobem zjistíme rovnici tečny i v bodě T_2 :

$$\begin{aligned}t_2: (-1, 2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\-x + 2y - 5 &= 0.\end{aligned}$$

II. způsob - podle věty o tečně:



$$p: X = T + d \cdot \vec{u}; \quad \vec{u} = (u, v), d\text{-parametr}$$

Dosadíme $T_1 = [-1; -2]$:

$$p: x = -1 + du$$

$$y = -2 + dv$$

Vypočítáme průsečík přímky p a kuželosečky κ :

$$p \cap \kappa: \quad (-1 + du)^2 + (-2 + dv)^2 - 5 = 0$$

$$d^2u^2 - 2tu + 1 + 4 - 4dv + d^2v^2 - 5 = 0$$

$$d^2(u^2 + v^2) + d(-2u - 4v) + 5 - 5 = 0$$

$$d^2(u^2 + v^2) + d(-4v - 2u) = 0$$

$$d[d(u^2 + v^2) - 4v - 2u] = 0$$

$$d = 0 \Rightarrow u = -2v \Rightarrow \text{např.: } \vec{u} = (2; -1)$$

Nyní dosadíme:

$$t_1: X = T + d \cdot \vec{u}$$

$$x = -1 + 2d$$

$$\underline{y = -2 - d.}$$

$$2(2) + (1) \quad 2y + x = -5$$

$$t_1: -x - 2y - 5 = 0.$$

Obdobně vypočítáme i t_2 v bodě $T_2 = [-1; 2]$.

Hledané tečny mají rovnice $-x - 2y - 5 = 0$ a $-x + 2y - 5 = 0$.

III. způsob - dosazení do vzorečku známého ze SŠ

Pro t_1 v bodě $T_1 = [-1; -2]$:

$$(x_0 - s_1) \cdot (x - s_1) + (y_0 - s_2) \cdot (y - s_2) = r^2$$

$$(-1 - 0) \cdot (x - 0) + (-2 - 0) \cdot (y - 0) = 5,$$

po úpravě dostaneme:

$$t_1: -x - 2y - 5 = 0.$$

Pro t_2 v bodě $T_2 = [-1; 2]$:

$$(x_0 - s_1) \cdot (x - s_1) + (y_0 - s_2) \cdot (y - s_2) = r^2$$

$$(-1 - 0) \cdot (x - 0) + (2 - 0) \cdot (y - 0) = 5,$$

po úpravě získáme:

$$t_2: -x + 2y - 5 = 0.$$

Hledané tečny mají rovnice $-x - 2y - 5 = 0$ a $-x + 2y - 5 = 0$.

Příklad 2: Určete rovnici tečen vedených k hyperbole $x^2 - y^2 = 16$ z bodu $A = [-1, -7]$. ([2], str. 74)

Nejprve potřebujeme získat rovnici poláry p v bodě A :

$$(-1, -7, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

po výpočtu tedy $p: -x + 7y - 16 = 0$.

Polára p je přímka, která spojuje body dotyku tečen vedených ke kuželosečce.

Nalezneme-li průsečíky poláry p a kuželosečky κ (v tomto případě zadané hyperboly), pak jsme našli i body dotyku hledaných tečen.

Z rovnice poláry si vyjádříme například proměnnou $x = 7y - 16$, dosadíme do rovnice kuželosečky a upravíme:

$$\begin{aligned} p \cap \kappa: \quad (7y - 16)^2 - y^2 - 16 &= 0 \\ 49y^2 - 224y + 256 - y^2 - 16 &= 0 \\ 48y^2 - 224y + 256 &= 0. \end{aligned}$$

Protože diskriminant $D > 0$, má tato kvadratická rovnice 2 různá reálná řešení - po výpočtu: $y_1 = 3, y_2 = \frac{5}{3}$.

Snadno již dopočítáme x -ové souřadnice: $x_1 = 5, x_2 = -\frac{13}{3}$. Body dotyku hledaných tečen a hyperboly tedy jsou $T_1 = [5, 3]$ a $T_2 = [-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}]$.

Rovnici tečny v bodě $T_1 = [5, 3]$ získáme výpočtem přes vzorec pro tečnu:

$$t_1: (5,3,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$5x + 3y - 16 = 0,$$

stejným způsobem pak získáme i druhou tečnu v bodě $T_2 = [-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}]$:

$$t_2: \left(-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{13}{3}x + \frac{5}{3}y - 16 = 0,$$

po úpravě:

$$13x - 5y + 48 = 0.$$

Hledané tečny mají rovnice $t_1: 5x + 3y - 16 = 0$ a $t_2: 13x - 5y + 48 = 0$.

Příklad 3: Najděte rovnice tečen k elipse $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$, které jsou kolmé k přímce $2x - 2y - 13 = 0$. ([2], str. 65)

Normálový vektor zadané přímky je $\vec{n} = (1, -1)$.

Protože je tato přímka kolmá k hledaným tečnám, musí být normálový vektor hledaných tečen kolmý k normálovému vektoru zadané přímky, tedy $\vec{n}_t \perp \vec{n}$. Proto $\vec{n}_t = (1, 1)$.

Všechny přímky ve tvaru $x + y + c = 0$ jsou kolmé k zadané přímce. Označme $t: x + y + c = 0$ a určíme parametr c tak, aby přímka měla se zadanou elipsou jeden (dvojnásobný) společný bod a byla tak její tečnou (tzn. diskriminant $D = 0$):

$$t \cap \kappa: y^2 + 2yc + c^2 + 4y^2 - 20 = 0$$

$$5y^2 + 2yc + c^2 + 20 = 0,$$

$$D = 0$$

$$4c^2 - 20c^2 + 400 = 0$$

$$c = \pm 5.$$

Hledané tečny k elipse $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ kolmé k přímce $2x - 2y - 13 = 0$ jsou $t_1: x + y + 5 = 0$ a $t_2: x + y - 5 = 0$.

6.4 Příklady k procvičení

Příklad 1: Určete rovnici tečny v daném bodě kuželosečky:

a) $\kappa: x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 6 = 0; T = [2, -1]$

b) $\kappa: x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0; T = [6, 4]$

c) $\kappa: 63x^2 + 6xy + 55y^2 - 72x - 168y - 720 = 0; T = [4, 0]$

Příklad 2: Napište rovnice tečny kuželosečky jdoucí bodem L :

a) $\kappa: y^2 - 36x = 0; L = [2, 9]$ ([2], str. 81)

b) $\kappa: x^2 + 4y^2 - 20 = 0; L = [\frac{10}{3}, \frac{5}{3}]$ ([2], str. 65)

Příklad 3: Najděte rovnice tečen kuželosečky rovnoběžných s danou přímkou:

a) $\kappa: x^2 + y^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0; p: -x + y + 5 = 0$

b) $\kappa: 4x^2 + 5y^2 + 24x - 20y + 36 = 0; p: x + y - 6 = 0$

c) $\kappa: y^2 = 8x; p: 2x + 2y - 3 = 0$ ([2], str. 80)

Příklad 4: Určete rovnice tečen kuželosečky, které jsou kolmé k dané přímce:

a) $\kappa: x^2 - 4y - 16 = 0; p: x = 0$

b) $\kappa: 4x^2 + 5y^2 + 24x - 20y + 36 = 0; p: x - y + 2 = 0$

c) $\kappa: x^2 - 4y^2 - 20 = 0; p: 4x + 3y - 7 = 0$ ([2], str. 74)

6.5 Výsledky

Příklad 1:

a) $t_1: x - 2 = 0$

b) $t_1: y - 4 = 0$

c) $t_1: 3x - y - 12 = 0$

Příklad 2:

a) $t_1: 3x - 2y + 12 = 0, t_2: 3x - y + 3 = 0$

b) $t_1: x + 4y - 10 = 0, t_2: x + y - 5 = 0$

Příklad 3:

a) $t_1: -x + y + 3 = 0, t_2: -x + y + 1 = 0$

b) $t_1: x + y + 4 = 0, t_2: x + y - 2 = 0$

c) $t_1: 2x + 2y + 4 = 0$

Příklad 4:

a) $t_1: y + 4 = 0$

b) $t_1: -x + y - 2 = 0, t_2: -x + y - 8 = 0$

c) $t_1: 3x - 4y + 10 = 0; t_2: 3x - 4y - 10 = 0$

7. Klasifikace kuželoseček

7.1 Charakteristická rovnice

Definice: Charakteristickou rovnicí kuželosečky (1) nazýváme rovnici:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

7.2 Klasifikace kuželoseček - středové kuželosečky

$$A \cdot K \cdot A^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice kuželosečky: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

<p><u>Regulární kuželosečky:</u></p> <p>$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$ $\delta \neq 0, \Delta \neq 0$</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$ $\delta > 0$	všechna vlastní čísla mají stejná znaménka => elipsa
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$ $\delta < 0$	vlastní čísla mají různá znaménka => hyperbola

<p><u>Singulární kuželosečky:</u></p> <p>$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$ $\delta \neq 0, \Delta = 0$</p>	$\delta > 0$	jediný bod
	$\delta < 0$	dvě různoběžky

7.3 Klasifikace kuželoseček - nestředové kuželosečky

<u>Regulární kuželosečky:</u> alespoň jedno z vlastních čísel = 0, $\Delta \neq 0, \delta = 0$	$y^2 = 2px$	parabola
---	-------------	----------

<u>Singulární kuželosečky:</u> alespoň jedno z vlastních čísel = 0, $\Delta = 0, \delta = 0$	dvě rovnoběžky
	splývající (totožné, identické) přímky
	prázdná množina

7.4 Řešené příklady

Příklad: Vyšetřete kuželosečku:

a) $9x^2 + 6xy + y^2 - 30x - 10y + 24 = 0$

Nejprve vypočteme velký determinant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -15 \\ 3 & 1 & -5 \\ -15 & -5 & 24 \end{vmatrix} = (216 + 225 + 225) - (225 + 216 + 225) = 0,$$

protože $\Delta = 0$, jde o kuželosečku singulární.

Nyní pomocí malého determinantu δ zjistíme, zda se jedná o kuželosečku středovou, nebo nestředovou:

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0,$$

jelikož $\delta = 0$, jedná se o kuželosečku nestředovou.

Singulární nestředovou kuželosečkou jsou dvě různé rovnoběžky, dvě splývající přímky nebo prázdná množina.

Určíme asymptotický směr kuželosečky (protože $\delta = 0$, má kuželosečka jediný asymptotický směr) - první řádek velkého determinantu Δ je násobkem druhého, proto:

$$(3x + y - 5)^2 = 9x^2 + y^2 + 25 + 6xy - 10y - 15x = 0,$$

tento tvar porovnáme s rovnicí zadané kuželosečky a zjistíme, že se liší pouze ve členu a_{33} .

Po úpravě tedy:

$$(3x + y - 5)^2 - 1 = 0.$$

Rozložíme-li tento tvar podle vzorce $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B) = 0$, dostaneme:

$$(3x + y - 5)^2 - 1 = (3x + y - 5 - 1) \cdot (3x + y - 5 + 1) = 0,$$

po úpravě:

$$(3x + y - 6) \cdot (3x + y - 4) = 0.$$

Řešením jsou tedy dvě různé rovnoběžky o rovnicích $3x + y - 6 = 0$ a $3x + y - 4 = 0$.

b) $x^2 + 5y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

Nejprve opět vypočteme velký determinant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ -4 & -5 & 16 \end{vmatrix} = (80) - (80 + 25) = -25,$$

protože $\Delta \neq 0$, je daná kuželosečka regulární.

Dále určíme malý determinant δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

vidíme, že $\delta \neq 0$, proto jde o kuželosečku středovou a v tomto případě se jedná o elipsu, protože $\delta > 0$.

Vypočteme souřadnice středu:

$$m - 4 = 0$$

$$5n - 5 = 0,$$

tedy střed vyšetřované kuželosečky má souřadnice $S = [4, 1]$.

Pomocí charakteristické rovnice (5) zjistíme vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

Dosazením vlastních čísel určíme kanonickou rovnici elipsy:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$$x'^2 + 5y'^2 + \left(-\frac{25}{5}\right) = 0$$

$$x'^2 + 5y'^2 = \frac{25}{5}$$

$$\frac{5x'^2}{25} + \frac{25y'^2}{25} = 1$$

$$\frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Víme, že elipsa má střed v bodě $S = [4, 1]$, proto:

$$\frac{(x'-4)^2}{5} + \frac{(y'-1)^2}{1} = 1.$$

7.5 Příklady k procvičení

Příklad: Vyšetřete kuželosečku:

a) $3x^2 + 6xy - 5y^2 - 12x + 12y = 0$

b) $4x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + y + 1 = 0$

c) $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x - 10y + 21 = 0$

d) $-x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$

e) $4x^2 + 5y^2 + 24x - 20y + 36 = 0$

f) $8x^2 - 24xy + 18y^2 + 72x - 108y + 162 = 0$

g) $2x^2 - 9xy + 9y^2 + 24x - 45y + 54 = 0$

h) $5x^2 + 4y^2 - 20x - 24y + 36 = 0$

i) $49x^2 - 14xy + y^2 + 49x - 7y + 10 = 0$

7.6 Výsledky

Příklad:

a) hyperbola: $\frac{(x' - \frac{1}{2})^2}{\frac{6}{5}} - \frac{(y' - \frac{3}{2})^2}{2} = 1; \Delta = -144; \delta = -24$

b) bod: $[-\frac{1}{2}, 0]; \Delta = 0; \delta = 11$

c) dvě různé rovnoběžky: $(2x + y - 7)(2x + y - 3) = 0; \Delta = 0; \delta = 0$

d) dvě různoběžky: $(x + y - 4)(-x + y - 2) = 0; \Delta = 0; \delta = -1$

e) elipsa: $\frac{(x'+3)^2}{5} + \frac{(y'-2)^2}{4} = 1; \Delta = -400; \delta = 20$

f) dvě splývající přímky: $(-2x + 3y - 9)(-4x + 6y - 18) = 0; \Delta = 0; \delta = 0$

g) dvě různoběžky: $(-2x + 3y - 6)(-x + 3y - 9) = 0; \Delta = 0; \delta = -\frac{9}{4}$

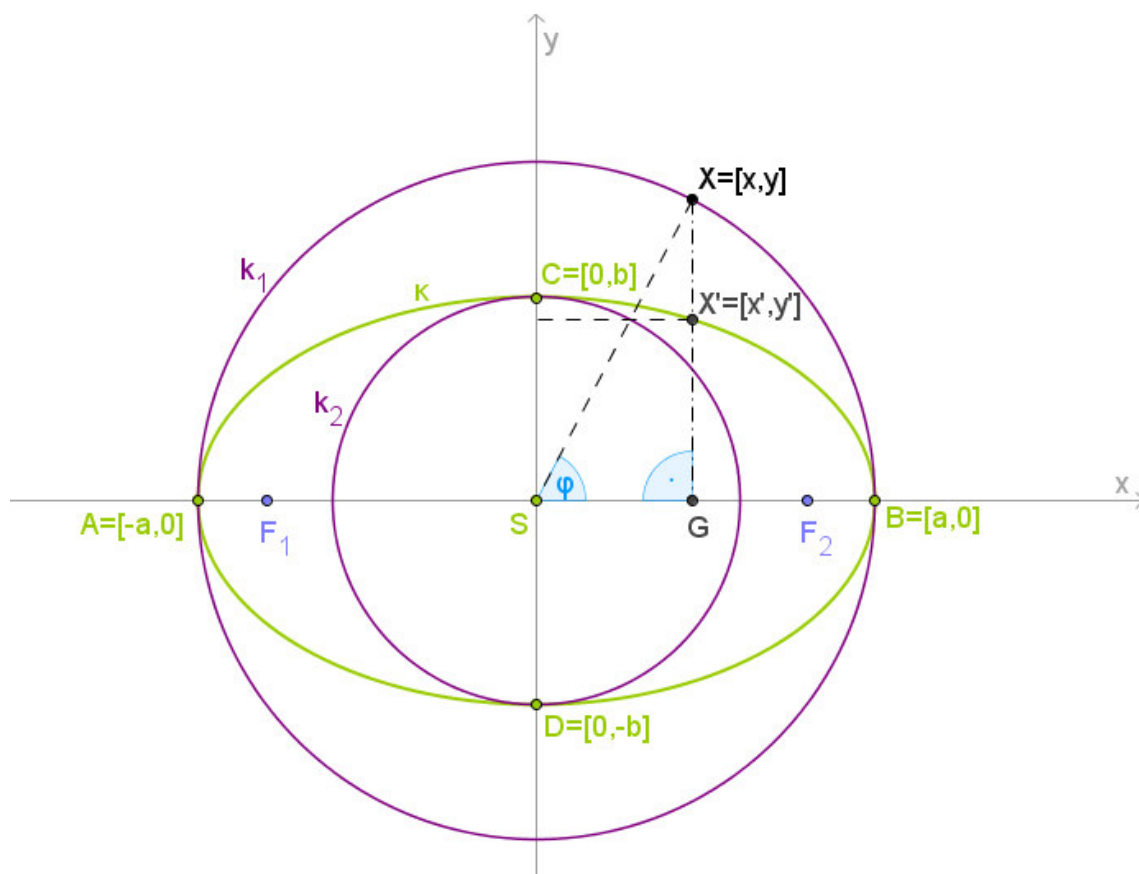
h) elipsa: $\frac{(x'-2)^2}{4} + \frac{(y'-3)^2}{5} = 1; \Delta = -400; \delta = 20$

j) dvě různé rovnoběžky: $(7x - y + 2)(7x - y + 5) = 0; \Delta = 0; \delta = 0$

8. Afinní vlastnosti elipsy

Následující kapitola byla zpracována s oporou publikace *Deskriptivní geometrie: příručka pro přípravu na vysokou školu*, v seznamu literatury označené [3].

Věta: Elipsa κ o poloosách a, b je pravoúhle afinní se soustřednou kružnicí k o poloměru a , přičemž osou afinity je společný průměr AB obou křivek (tj. osa x) a charakteristikou afinity poměr $q = \frac{b}{a}$.



Obr. 8 Afinita elipsy a kružnice

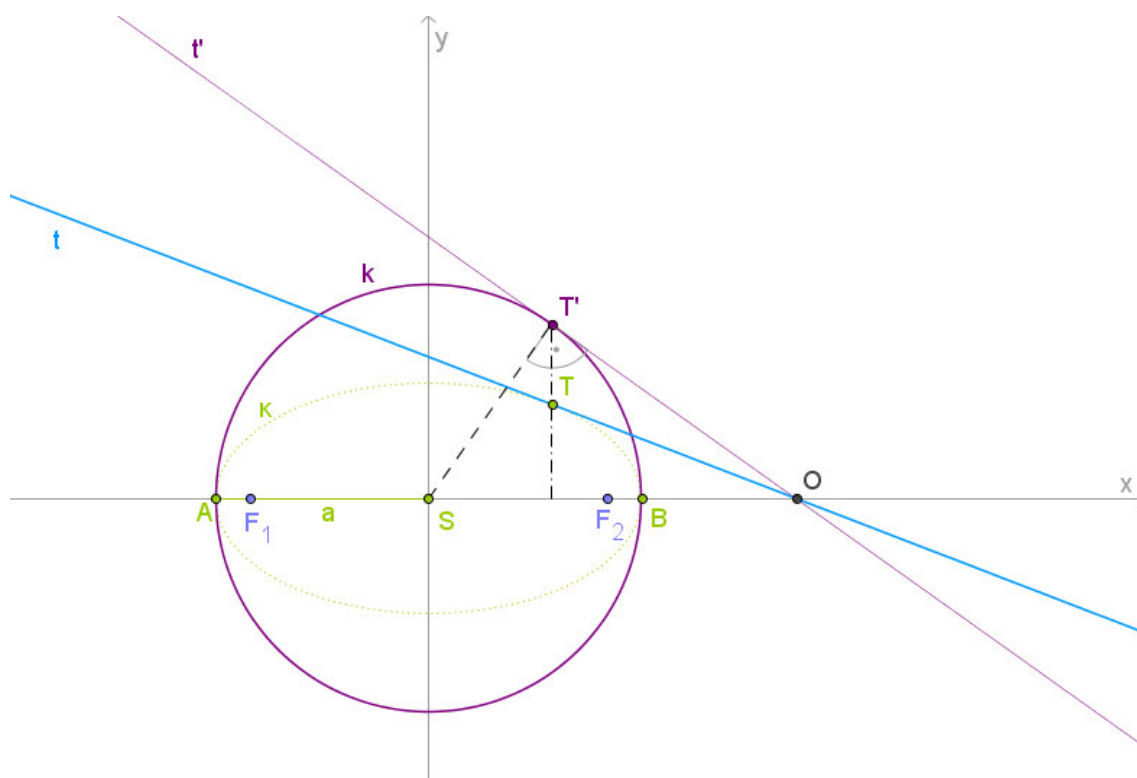
Jak je patrné z obrázku *Obr. 8*, odpovídá v pravoúhle afinitě středu jedné kuželosečky střed druhé kuželosečky. Dále lze libovolnému bodu X kružnice přiřadit bod X' elipsy, který leží na rovnoběžce s osou y , proto mají oba body X a X' shodné x -ové souřadnice, tzn. $x = x'$. Z trojúhelníkové konstrukce elipsy platí pro y -ové souřadnice $y = a \sin \varphi$, $y' = b \sin \varphi$, odkud úpravou získáme $y' = \frac{b}{a} y$.

V pravoúhlé afinitě tedy odpovídá kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = a^2$ křivka o rovnici $x'^2 + \left(\frac{b}{a}y'\right)^2 = a^2$. Vydělíme-li tuto rovnici a^2 , získáme rovnici $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, což je rovnice elipsy.

Toho, že obrazem kružnice v pravoúhlé afinitě je elipsa, lze využít ke konstrukci tečen elipsy v bodě elipsy, tečen elipsy z bodu či průsečíků přímky s elipsou, aniž by bylo nutné elipsu sestrojovat.

8.1 Příklady užití afinity

Příklad 1: Elipsa κ je dána hlavní poloosou a , vedlejší poloosou b a bodem T . Sestrojte tečnu v bodě T elipsy κ .

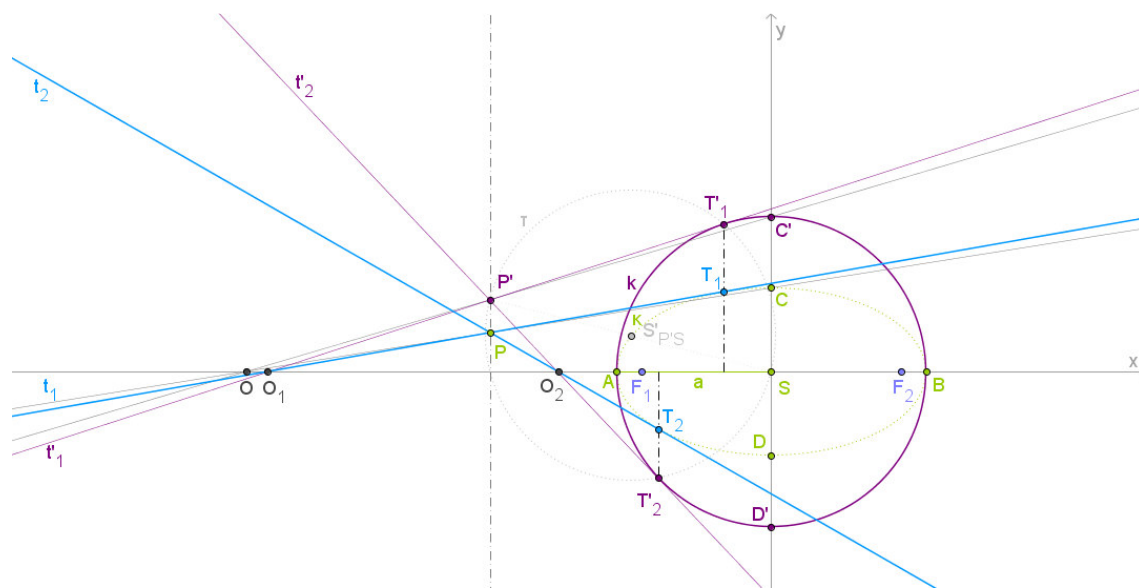


Obr. 8.1 a) Užití afinity - tečna v bodě elipsy

Nejprve k dané elipse κ sestrojíme afinní kružnici k ($S; a$). Osou pravoúhlé afinity je osa x . Pomocí kolmice na osu x jdoucí bodem T získáme afinní bod T' k bodu T . Bodem T' vedeme tečnu t' ke kružnici k . Průsečík tečny t' s osou afinity označíme

O . Tečna t' je afinní k hledané tečně t elipsy κ , tudíž je jejich průsečíkem samodružný bod O na ose afinity. Spojením bodu T a bodu O získáme hledanou tečnu t jdoucí bodem T elipsy κ .

Příklad 2: K elipse κ zadané hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b ved'te tečny z bodu P .

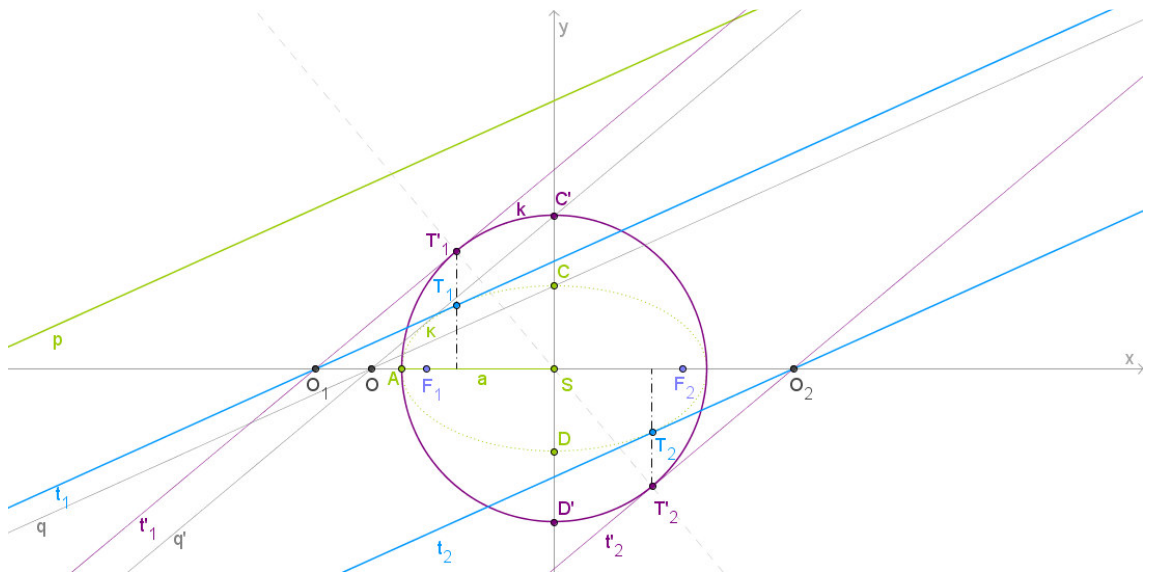


Obr. 8.1 b) Užití afinity - tečna z bodu k elipse

K elipse κ opět sestrojíme afinní kružnici k (S ; a). K bodu C elipsy κ přiřadíme afinní bod C' na kružnici k . Přímka PC protne osu afinity (osu x) v bodě O . Nyní vyhledáme afinní bod P' k bodu P . Přímka $P'C'$ je afinní k přímce PC , a proto je jejich průsečíkem bod O . Spojíme-li bod O s bodem C' získáme přímku, na které leží bod P' . Jelikož se jedná o pravouhlou afinitu, je bod P' průsečíkem této přímky s kolmicí vedenou bodem P . Z bodu P' vedeme tečny t'_1 a t'_2 ke kružnici k (např. pomocí Thaletovy kružnice τ ($S'_{P'S}$; $|P'S'_{P'S}|$), jejíž průsečíky T'_1 a T'_2 s kružnicí k jsou body dotyku tečen t'_1 a t'_2). Tečna t'_1 (přímka $P'T'_1$) protne osu afinity v bodě O_1 , tímto bodem musí procházet i hledaná tečna t_1 . Sestrojíme-li přímku PO_1 , bude se jednat o hledanou tečnu t_1 . Obdobným způsobem nalezneme i tečnu t_2 .

Bod dotyku T_1 tečny t_1 s elipsou κ získáme spuštěním kolmice z bodu T'_1 na osu afinity. Tam, kde se kolmice protne s tečnou t_1 , leží bod dotyku T_1 tečny t_1 s elipsou κ . Stejným způsobem určíme i bod dotyku T_2 tečny t_2 s elipsou κ .

Příklad 3: K elipse κ dané hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b najděte tečny rovnoběžné s přímkou p .

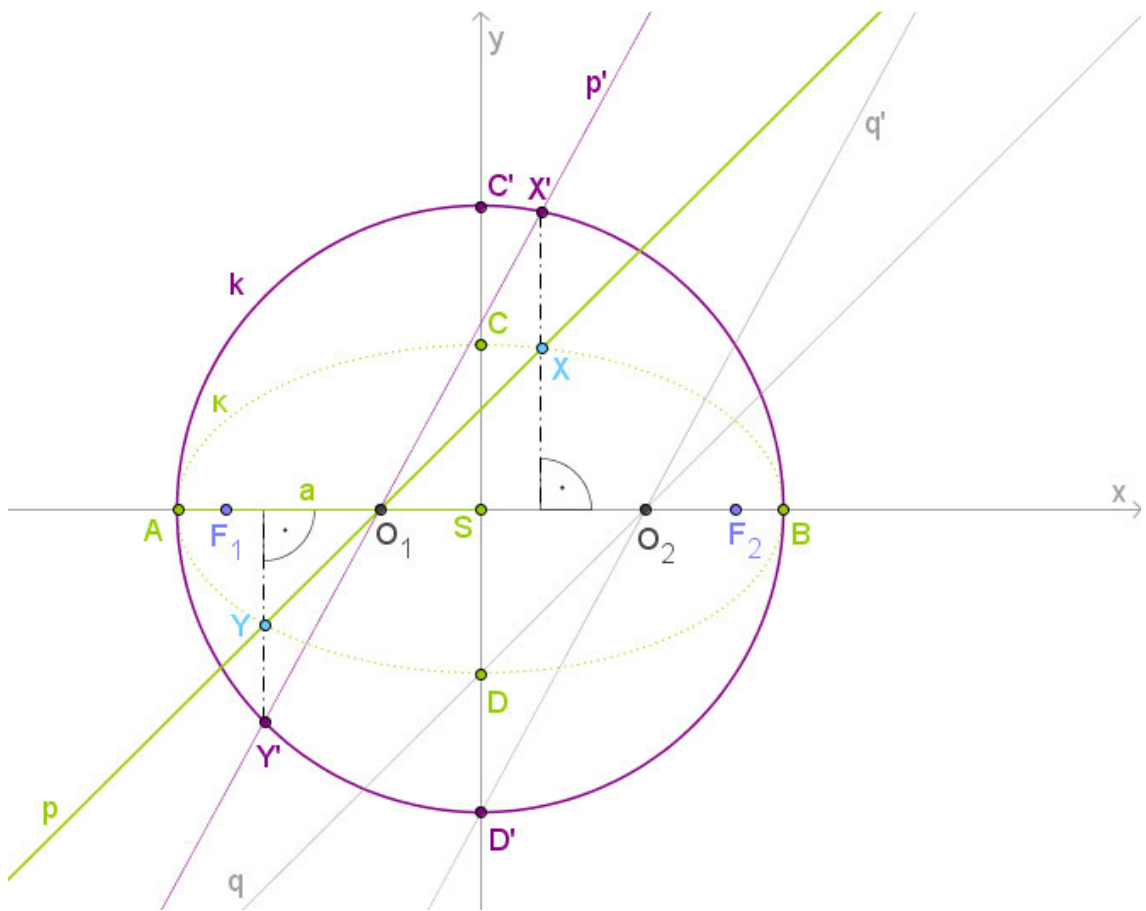


Obr. 8.1 c) Užití afinity - tečna elipsy rovnoběžná s přímkou

K elipse κ znovu sestrojíme afinní kružnici $k(S; a)$. K bodu C elipsy κ přiřadíme afinní bod C' na kružnici k . Bodem C vedeme přímkou q rovnoběžnou s přímkou p . Přímkou q protne osu afinity (osu x) v bodě O . Protože se jedná o pravoúhlo afinitu, bude přímce q odpovídat přímka q' , kterou sestrojíme spojením bodu O a bodu C' . Nyní sestrojíme tečny k afinní kružnici k rovnoběžné s přímkou q' . Nejprve nalezneme body dotyku T'_1 a T'_2 pomocí přímky kolmé na přímkou q' a procházející středem kružnice S . Tečna t'_1 je rovnoběžná s přímkou q' a prochází bodem T'_1 , tečna t'_2 prochází bodem T'_2 a je také rovnoběžná s přímkou q' . Tečna t'_1 protne osu afinity v bodě O_1 , tímto bodem musí vést i hledaná tečna t_1 . Tu získáme tak, že sestrojíme rovnoběžku s přímkou p procházející bodem O_1 . Obdobným způsobem najdeme i tečnu t_2 .

Body dotyku T_1 a T_2 určíme spuštěním kolmic z bodu T'_1 (resp. T'_2) na osu x . Tam, kde se kolmice protne s tečnou t_1 (resp. t_2), se nachází hledaný bod dotyku s elipsou κ .

Příklad 4: Najděte průsečíky přímky p a elipsy κ zadané hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b .

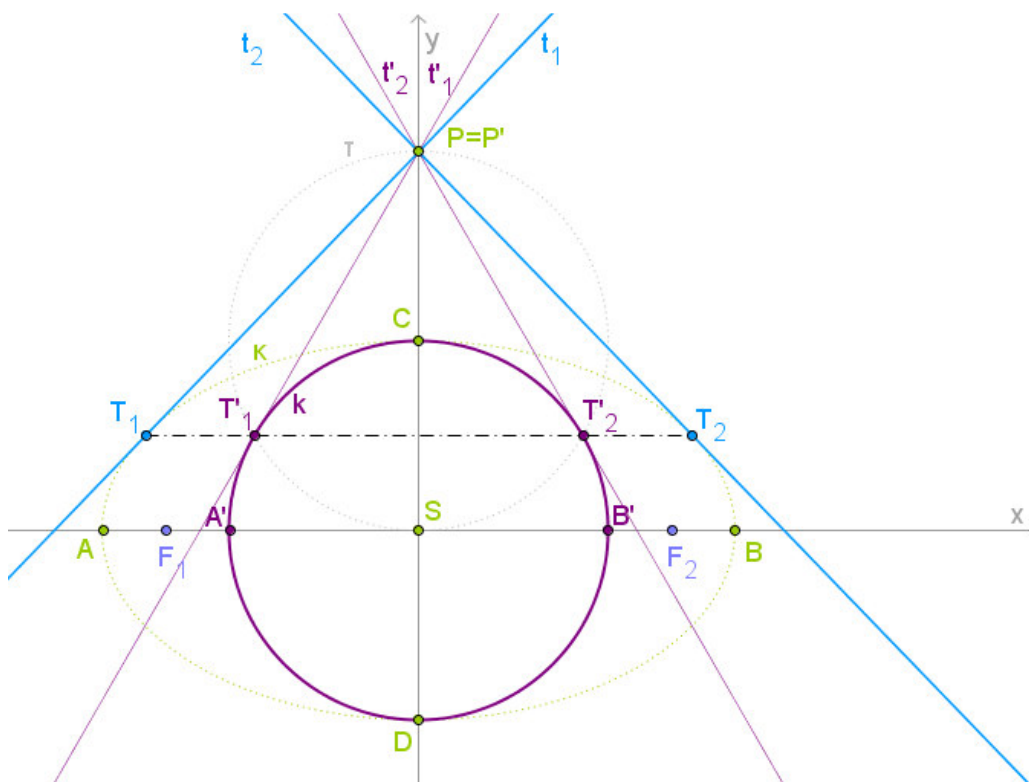


Obr. 8.1 d) Užití afinity - průsečíky přímky s elipsou

K elipse κ nejprve nalezneme afinní kružnici k (S, a). Přímka p se s osou afinity (osou x) protíná v bodě O_1 , ten je samodružným bodem a prochází jím přímce p v afinitě odpovídající přímka p' . Sestrojíme přímku q rovnoběžnou s přímkou p . Průsečík přímky q s osou afinity označíme O_2 . K bodu D nalezneme afinní bod D' . Body D' a O_2 vedeme přímku q' , která je afinní k přímce q . Přímka p' je rovnoběžná s přímkou q' a zároveň prochází bodem O_1 . Průsečíky přímky p' s kružnicí k označíme

X' a Y' . Jim odpovídající body X a Y (tj. průsečíky přímky p a kolmic spuštěných z bodů X' a Y' na osu) jsou hledané průsečíky přímky p s elipsou κ .

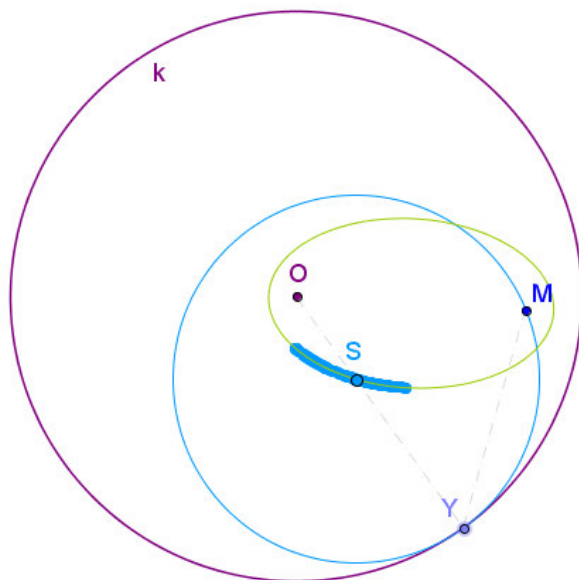
Příklad k procvičení: K elipse κ ($a = 5, e = 3$) ved'te tečny z bodu P na vedlejší ose ($PS = 6$). ([3], str. 95)



Obr. 8.1 e) Jedno z možných řešení

9. Kuželosečky jako geometrická místa středů kružnic

Věta: Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí pevně daným bodem M , jenž leží uvnitř kružnice, je elipsa s ohnisky ve středu O kružnice k a v bodě M , jejíž délka hlavní poloosy je rovna $\frac{r}{2}$.

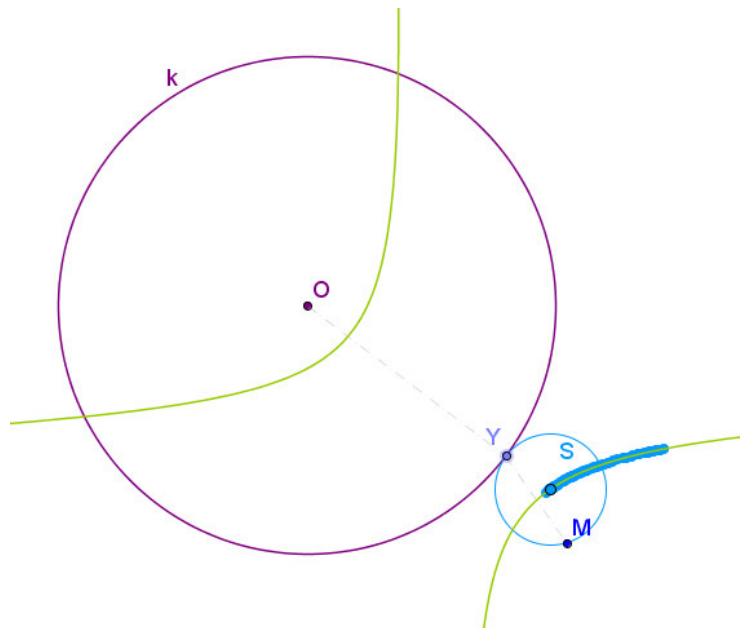


Obr. 9 Množina středů kružnic - elipsa

9.1 Průsečík přímky a hyperboly

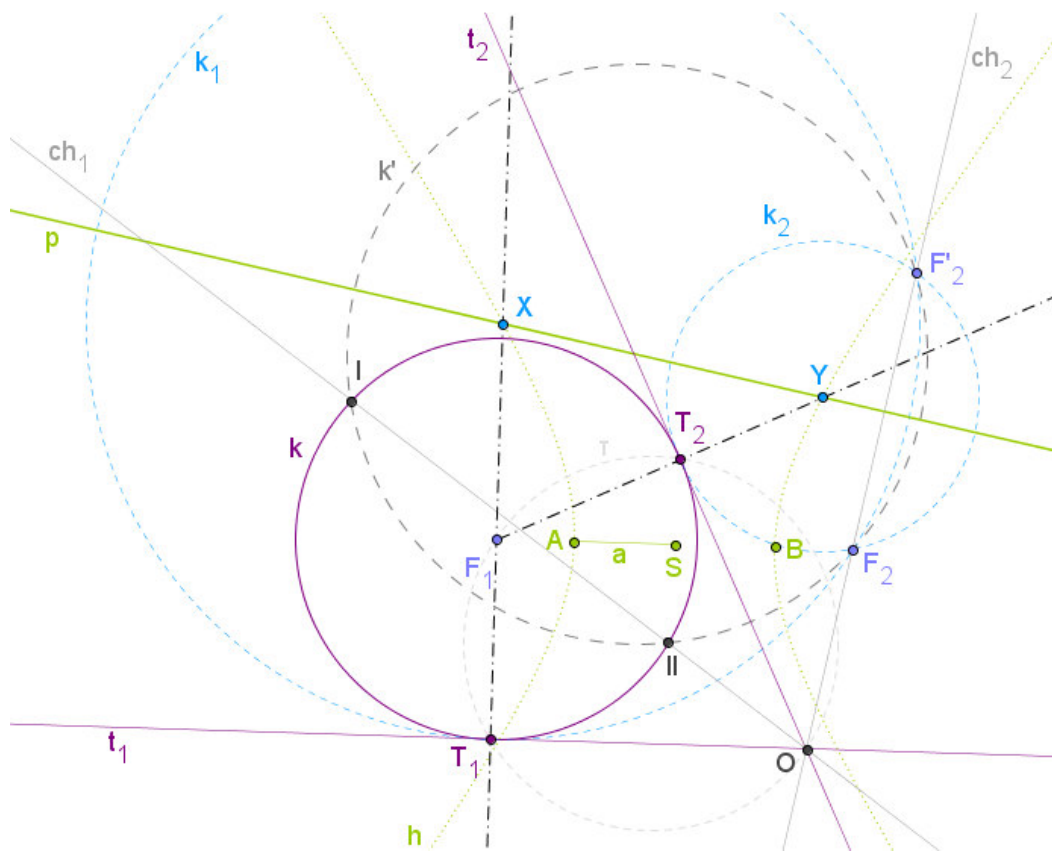
Podobně jako u elipsy lze i u hyperboly zjistit průsečíky přímky a hyperboly, aniž bychom museli hyperbolu rýsovat. Na rozdíl od elipsy se ale využívá hyperboly jako geometrického místa středů kružnic.

Věta: Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí daným bodem M , jenž leží vně kružnice, je hyperbola s ohnisky ve středu O kružnice k a v bodě M , jejíž délka hlavní poloosy je rovna $\frac{r}{2}$.



Obr. 9.1 a) Množina středů kružnic - hyperbola

Příklad 1: Najděte průsečíky přímky p a hyperboly h , která je dána ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní osy a .



Obr. 9.1 b) Průsečíky přímky s hyperbolou

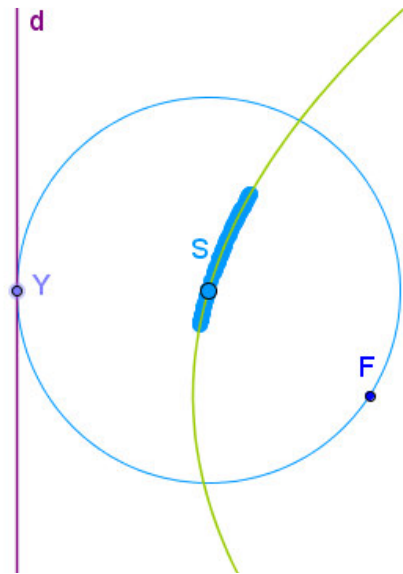
Nejprve sestrojíme kružnici $k(F_1, 2a)$ a bod F'_2 , jenž je osově souměrný podle přímky p s bodem F_2 . Kružnice k se dotýkají kružnice, které mají středy na hyperbole h a prochází druhým ohniskem F_2 . Středy těchto kružnic (označíme je k_1 a k_2), které jdou i bodem F'_2 , jsou zároveň hledanými průsečíky X, Y přímky p s hyperbolou h .

Poté zkonstruujeme libovolnou kružnici k' , která prochází body F_2 a F'_2 a protíná kružnici k . Průsečíky kružnice k' s kružnicí k označíme I a II . Kružnice k' protíná kružnici k v chordále III a kružnice k_1, k_2 v chordále $F_2F'_2$. Průsečík chordál označíme O . Z bodu O vedeme tečny t_1 a t_2 ke kružnici k například pomocí Thaletovy kružnice τ . Bod dotyku T_1 je zároveň bodem dotyku kružnice k s hledanou kružnicí k_1 , bod T_2 pak určuje bod dotyku kružnice k s hledanou kružnicí k_2 . Sestrojíme-li průsečíky přímky p s přímkou T_1F_1 a s přímkou T_2F_1 , nalezneme body X a Y , které jsou hledanými průsečíky přímky p s hyperbolou h .

9.2 Průsečíky přímky s parabolou

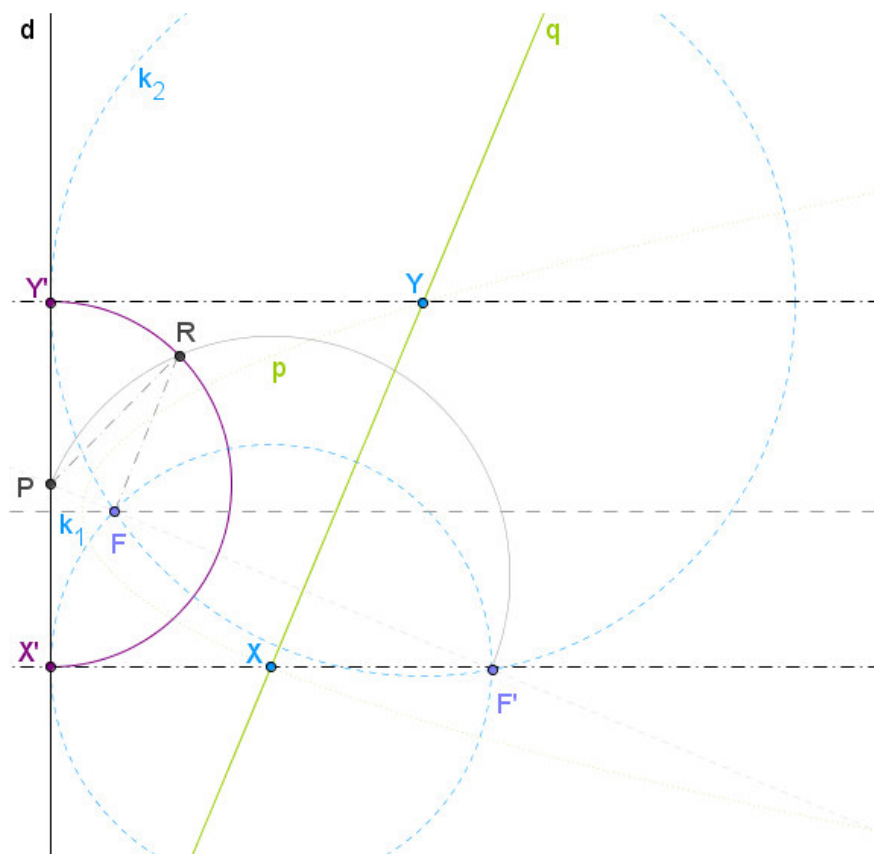
Výše bylo uvedeno, jak najít průsečíky přímky s elipsou či hyperbolou, aniž by bylo nutné kuželosečky rýsovat. I v případě hledání průsečíků přímky a paraboly není nutné kuželosečku sestrojovat. Stejně jako u hyperboly se užívá paraboly jako geometrického místa středu kružnic.

Věta: Množinou středů všech kružnic, které se dotýkají přímky d a procházejí bodem F , je parabola, která má ohnisko F a řídící přímku d .



Obr. 9.2 a) Množina středů kružnic - parabola

Příklad 1: Nalezněte průsečíky přímky q a paraboly p , která je zadaná řídicí přímkou d a ohniskem F .



Obr. 9.2 b) Průsečíky přímky s parabolou

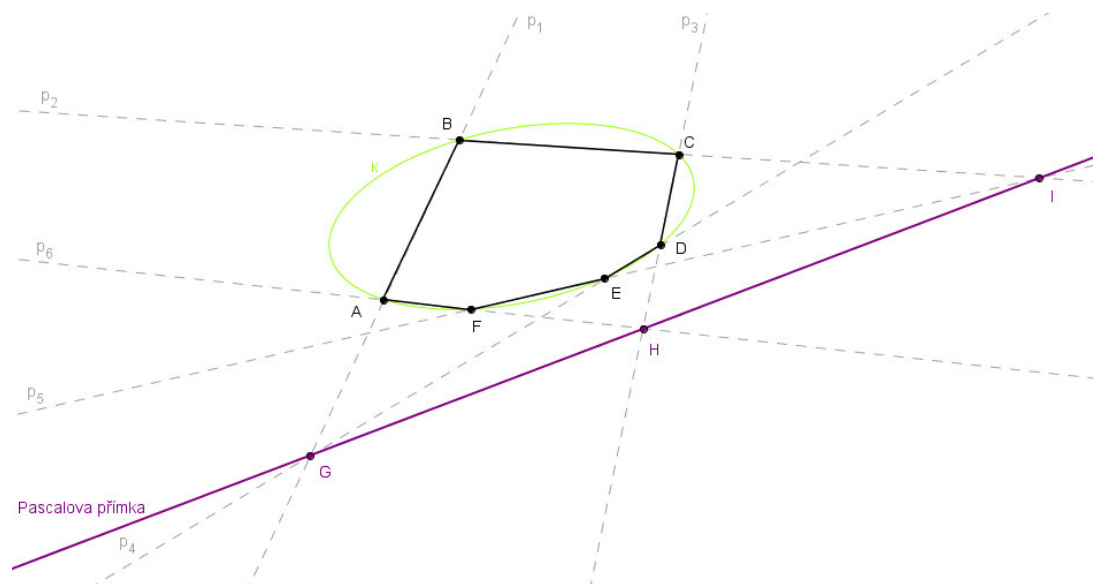
Vzhledem k větě o parabole jako geometrickém místu středů kružnic, je jasné, že hledané průsečíky přímky q a paraboly p jsou zároveň středy kružnic, které procházejí ohniskem F a dotýkají se řídicí přímky d . Prochází-li tyto kružnice ohniskem F , pak musí procházet i bodem F' , který je s bodem F osově souměrný podle přímky q . Průsečík přímky FF' s řídicí přímkou d pak označíme P . Jelikož chceme sestrojiti kružnici, která prochází dvěma různými body (F a F') a která se dotýká dané přímky (d), využijeme mocnosti bodu ke kružnici. Pokud označíme bod dotyku hledané kružnice s přímkou d jako X' (resp. Y'), pak vzhledem k vlastnostem mocnosti bodu ke kružnici platí: $|PX'|^2 = |PF| \cdot |PF'|$, resp. $|PY'|^2 = |PF| \cdot |PF'|$. Proto lze bod dotyku sestrojiti. Zkonstruujeme Thaletovu kružnici nad úsečkou $|PF'|$. Vedeme-li kolmici bodem F , pak průsečíkem této kolmice s Thaletovou kružnicí získáme vrchol R pravoúhlého trojúhelníku PRF' , úsečka RF je výškou pravoúhlého trojúhelníku PRF' . Z Euklidovy věty o odvěsně pak plyne vztah: $|PF| \cdot |PF'| = |PR|^2$. Následně pomocí kružnice se středem P a poloměrem $|PR|$ sestrojíme body dotyku hledaných kružnic a řídicí přímky d , které označíme X' a Y' .

Středy hledaných kružnic a tedy i průsečíky paraboly p s přímkou q již nalezneme velmi snadno. Bodem dotyku X' (resp. Y') vedeme kolmici k řídicí přímce d . Bod, ve kterém se kolmice protne s přímkou q , je průsečíkem přímky q a paraboly p . Můžeme jej označit X (resp. Y).

Výše uvedeným postupem jsme tedy našli průsečíky přímky a paraboly, aniž bychom museli parabolu sestrojovat.

10. Pascalova věta

Věta: Průsečíky protějších stran šestiúhelníka kuželosečce vepsané jsou tři body, které leží na jedné přímce (tzv. Pascalově přímce), viz *Obr. 10.*, [6].



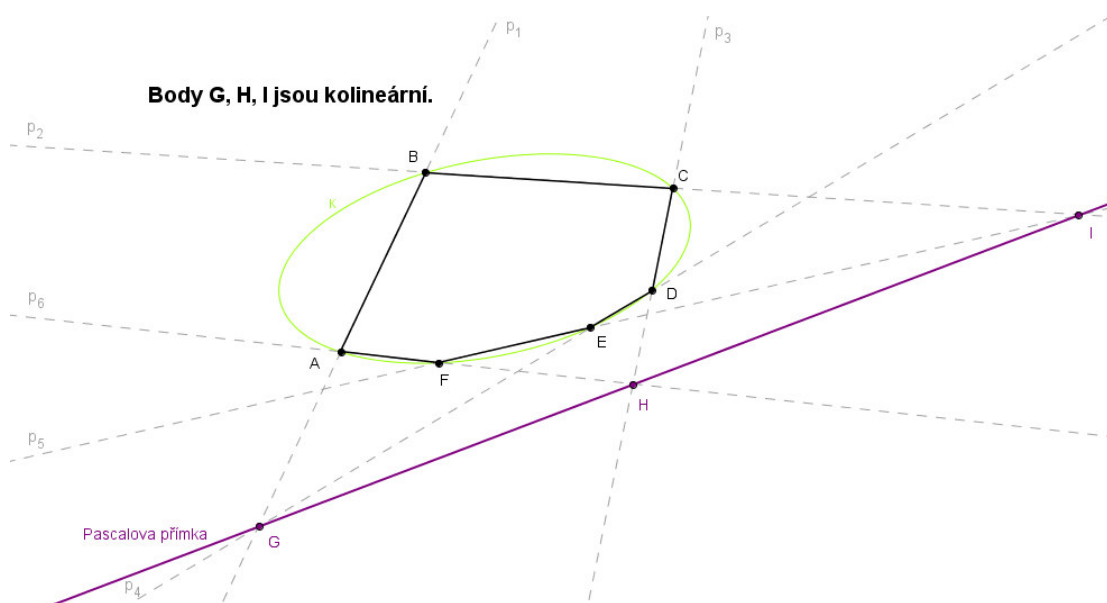
Obr. 10 Pascalova věta

10.1 Verifikace Pascalovy věty v DGS

Verifikace byla provedena v programu GeoGebra. Verifikace je pouhé ověření, tudíž tento postup nemůžeme považovat za důkaz, ale je možné říct, že dané tvrzení je s vysokou pravděpodobností pravdivé.

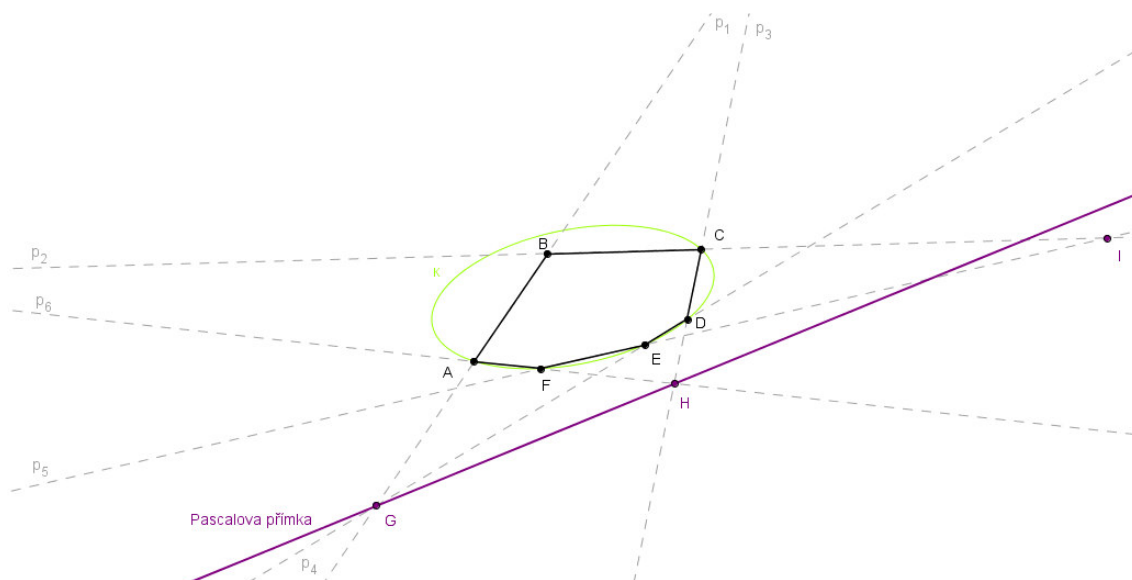
Elipsa κ byla zadána dvěma ohnisky a bodem elipsy. Strany šestiúhelníka vepsané elipse κ jsou označeny AB, BC, CD, DE, EF, FA . Přímky $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ jsou přímky procházející jednotlivými stranami šestiúhelníka. Bod G je průsečík strany AB (přímky p_1) s protější stranou DE (přímkou p_4). Bod H je průsečík strany CD (přímky p_3) s protější stranou FA (přímkou p_6). Bod I je průsečík strany BC (přímky p_2) s protější stranou EF (přímkou p_5). Body G a H leží na jedné přímce p , tzv. Pascalově přímce, pro verifikaci ukážeme, že bod I také leží na Pascalově přímce. Využijeme nástroje “vložit text“ a následně jej ve vlastnostech pro pokročilé doplníme o podmínku, že vzdálenost bodu I a přímky p je rovna 0, tj. vepíšeme podmínku

zobrazení objektu $Vzdalenost[I, p] \doteq 0$. To znamená, že text “Body G, H, I jsou kolineární” se zobrazí pouze tehdy, bude-li tato podmínka splněna, viz *Obr. 10.1 a*).



Obr. 10.1 a) Verifikace Pascalovy věty

Využijeme-li nástroje “připojit/oddělit bod” a klikneme-li na jakýkoliv bod označující vrchol vepsaného šestiúhelníku, pak tento bod již nebude ležet na elipse. Pascalova věta přestane platit a text “Body G, H, I jsou kolineární” zmizí.



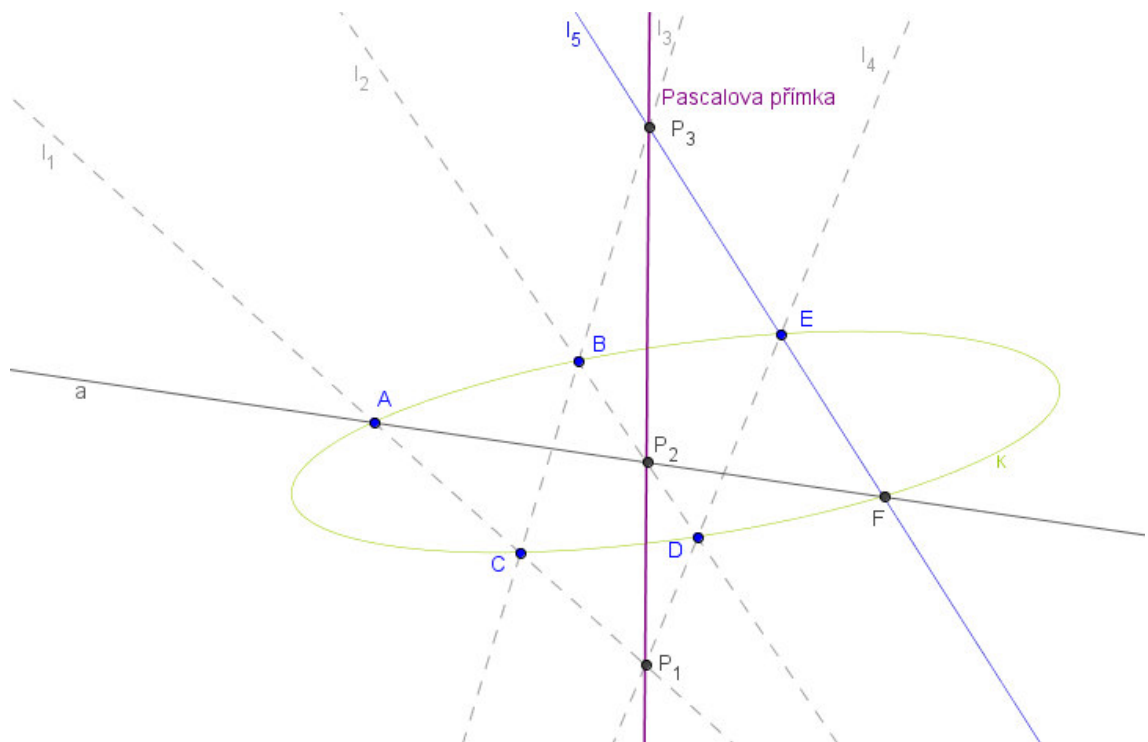
Obr. 10.1 b) Interaktivita textu

Klasický důkaz Pascalovy věty se pak provádí pomocí Menelaovy věty.

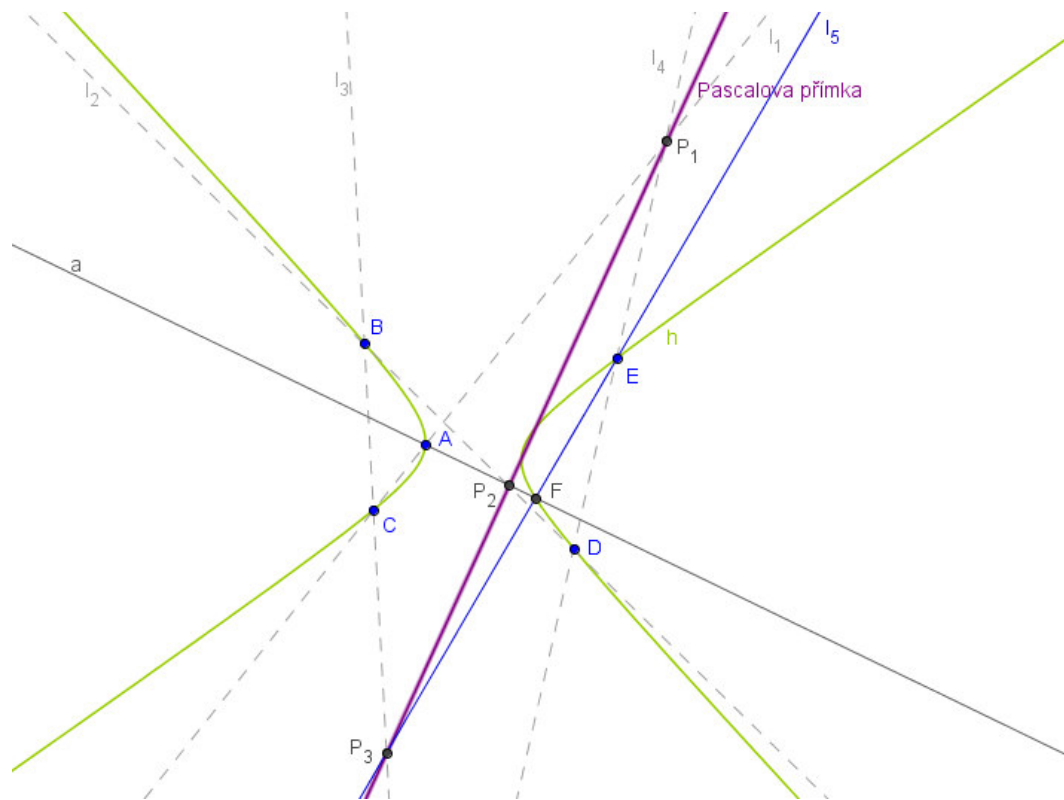
10.2 Využití Pascalovy věty

Pascalovu větu lze využít k získávání (generování) bodů kuželosečky, aniž bychom ji museli rýsovat.

Zvolme 5 libovolných bodů např. A, B, C, D, E , které nebudou kolineární. Přímky l_1, l_2, l_3, l_4 jsou postupně spojnice bodů AC, BD, BC, ED . Bodem A vedeme libovolnou přímku a . Průsečík přímek l_1 a l_4 nazveme P_1 , průsečík přímky a s přímkou l_2 pak P_2 . Přímku vedoucí body P_1 a P_2 označme p , jedná se o Pascalovu přímku. Průsečík přímek l_3 a p pojmenujme P_3 . Spojením bodů P_3 a E získáme přímku l_5 , jejíž průsečík s přímkou a nám vygeneruje další bod kuželosečky - bod F . Nástrojem “Kuželosečka dána pěti body“ pak můžeme určit i tvar dané kuželosečky a nástrojem “Vztah mezi dvěma objekty“ lze ověřit, zda bod F opravdu leží na kuželosečce.



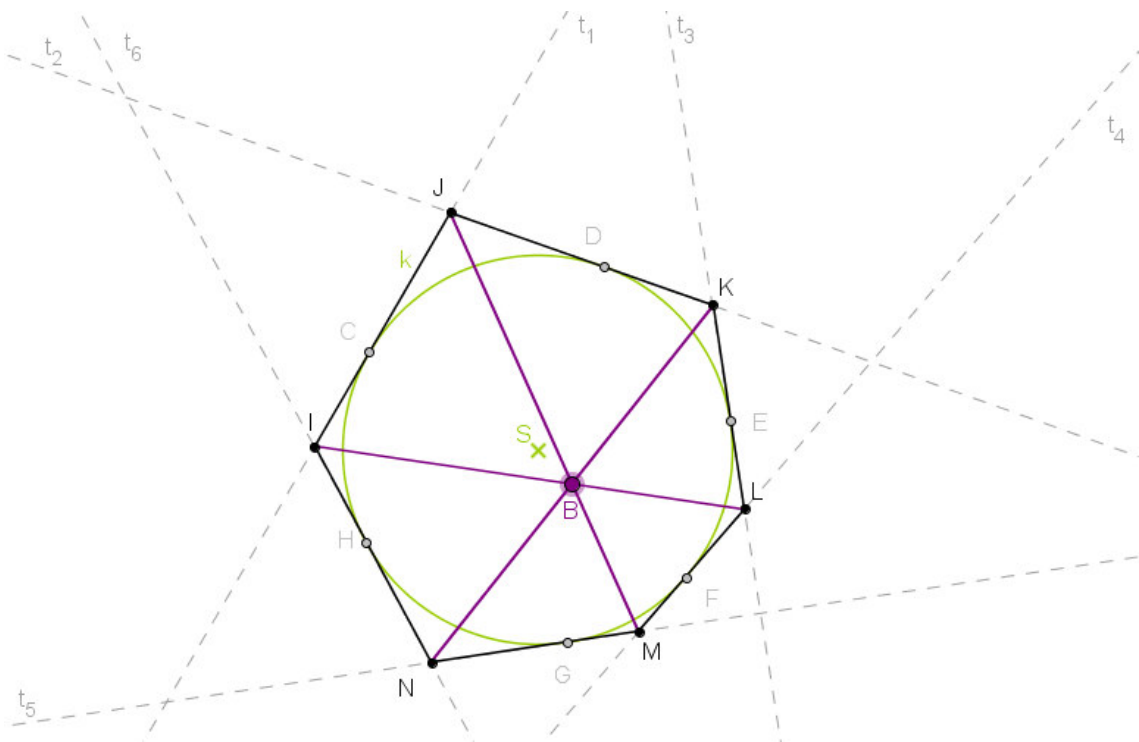
Obr. 10.2 a) Využití Pascalovy věty - Elipsa



Obr. 10.2 b) Využití Pascalovy věty - Hyperbola

11. Brianchonova věta

Věta: Úsečky spojující protější vrcholy šestiúhelníka opsaného regulární kuželosečce jsou tři úsečky procházející jedním bodem, který se nazývá Brianchonův bod - B , viz *Obr. 11.*, [7].

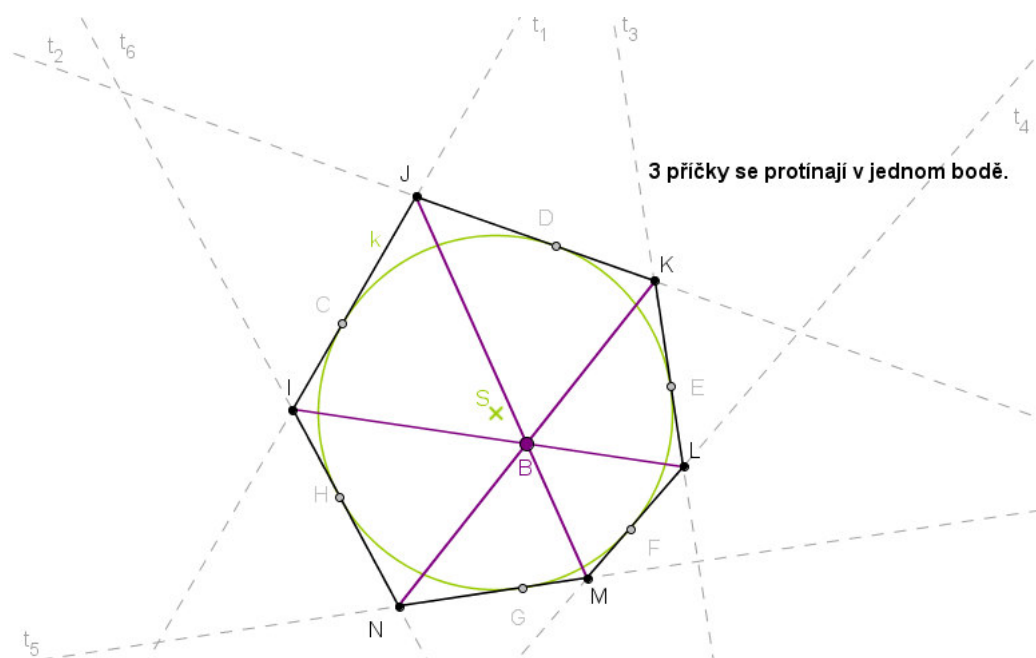


Obr. 11 Brianchonova věta

11.1 Verifikace Brianchonovy věty v DGS

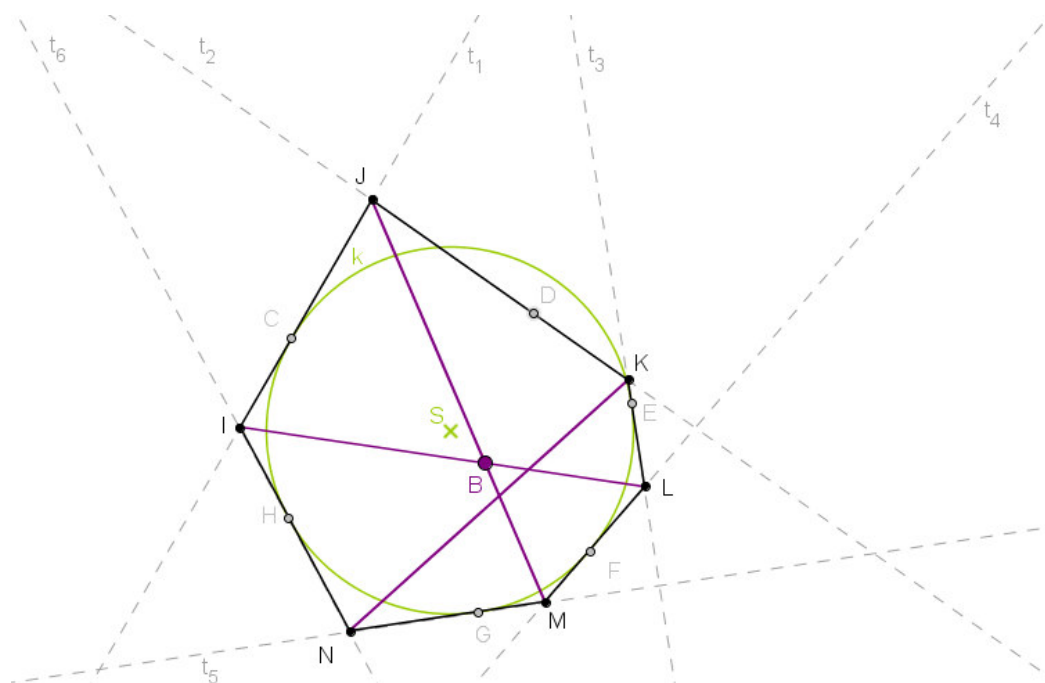
Verifikace byla provedena v programu GeoGebra.

Kružnice k je zadána středem S a poloměrem r . Strany šestiúhelníka opsaného kružnici k jsou označeny IJ, JK, KL, LM, MN, NI . Úsečky spojující protější vrcholy jsou IL, JM, KN . Bod B je průsečíkem úseček IL a JM , pro verifikaci dokážeme, že KN také prochází bodem B . Úsečku KN pojmenujeme například u_3 a využijeme nástroje "vložit text", následně jej ve vlastnostech pro pokročilé doplníme podmínkou, že vzdálenost bodu B a úsečky KN je rovna 0, tzn. vložili jsme podmínku pro zobrazení ve tvaru $Vzdálenost[B, u_3] \stackrel{!}{=} 0$. To znamená, že text "3 příčky se protínají v jednom bodě" se zobrazí pouze tehdy, je-li splněna daná podmínka, viz *Obr. 11.1 a*).



Obr. 11.1 a) Verifikace Brianchonovy věty

Pomocí nástroje “připojit/odpojit bod“ oddělíme jeden z bodů dotyku opsaného šestiúhelníka tak, aby neležel na kuželosečce. Nyní se již nejedná o opsaný šestiúhelník, Brianchonova věta tak neplatí a text “3 příčky se protínají v jednom bodě“ nebude zobrazen, viz Obr. 11.1 b).



Obr. 11.1 b) Interaktivita textu

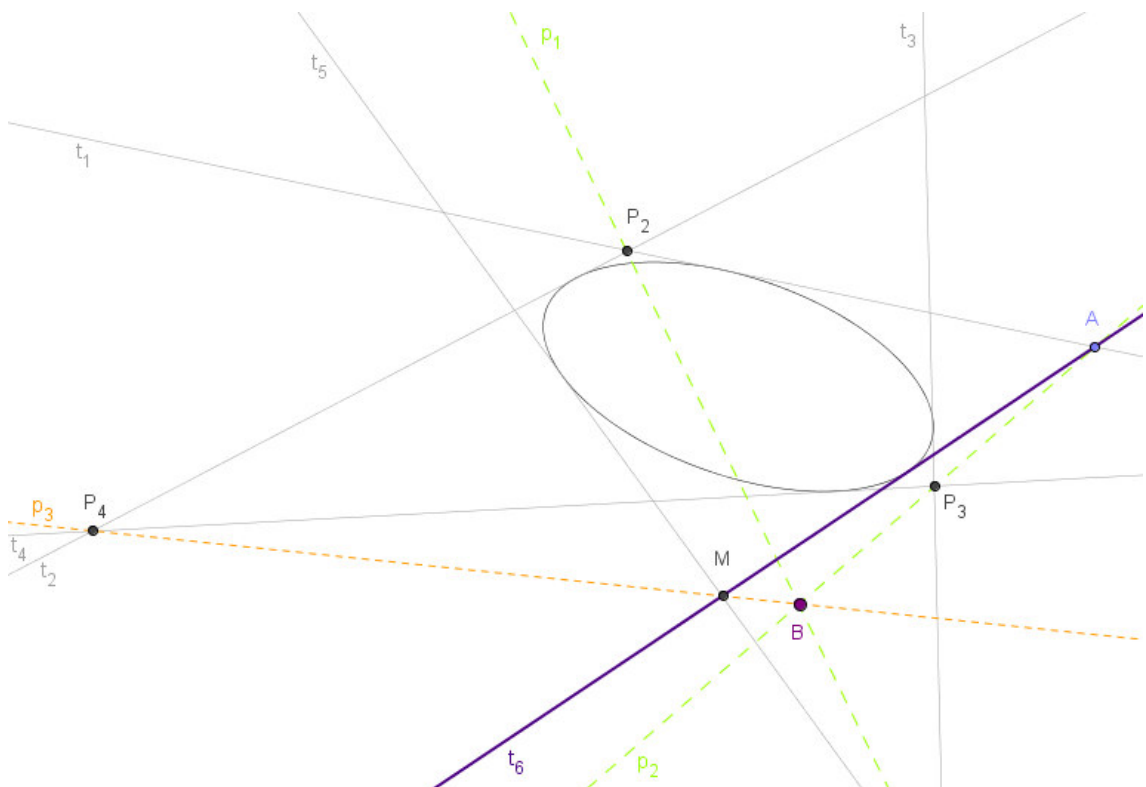
Klasický důkaz Brianchonovy věty se provádí pomocí Cevovy věty.

11.2 Využití Brianchonovy věty

Brianchonovu větu lze využít k získávání (generování) tečen kuželosečky, aniž bychom ji museli rýsovat.

Zvolme 5 různých libovolných tečen (přímek) např.: t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 . Na tečně t_1 libovolně zvolíme bod A , kterým bude procházet hledaná tečna t_6 - bod A je průsečíkem t_1 a t_6 . Průsečík tečen t_3 a t_5 nazveme P_1 , průsečík tečen t_1 a t_2 pak P_2 . Spojnici průsečíků P_1 a P_2 označme jako p_1 . Průsečík tečen t_3 a t_4 nazveme P_3 . Spojnici průsečíku P_3 a bodu A nazveme p_2 . Nyní můžeme sestrojít Brianchonův bod = bod B - je průsečíkem přímek p_1 a p_2 .

Průsečík tečen t_4 a t_2 pojmenujme P_4 . Průsečík přímky p_3 , která spojuje bod B s průsečíkem P_4 , a tečny t_5 nazveme M . Spojením bodu M s bodem A získáme tečnu t_6 .

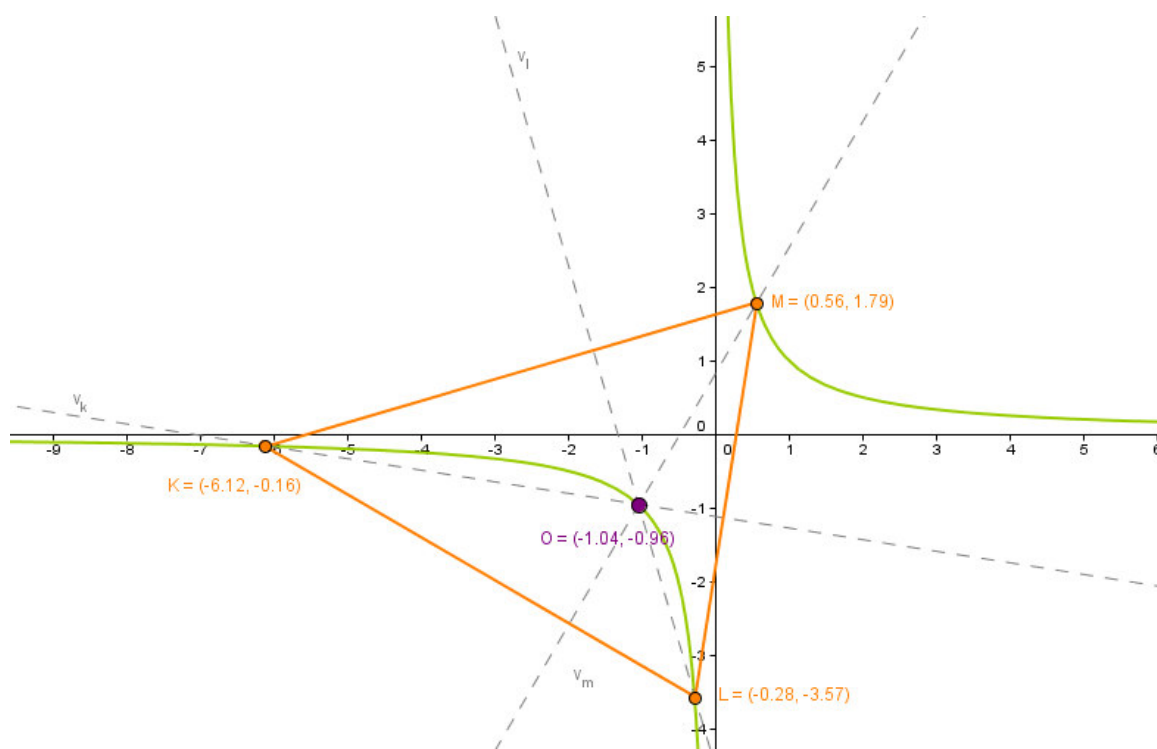


Obr. 11.2 Použití Brianchonovy věty

12. Rovnoosá hyperbola

12.1 Trojúhelník, jehož vrcholy leží na rovnoosé hyperbole

Mějme trojúhelník KLM , jehož vrcholy leží na rovnoosé hyperbole h . Pak průsečík výšek O trojúhelníku KLM leží také na této hyperbole h (viz Obr. 12.1).



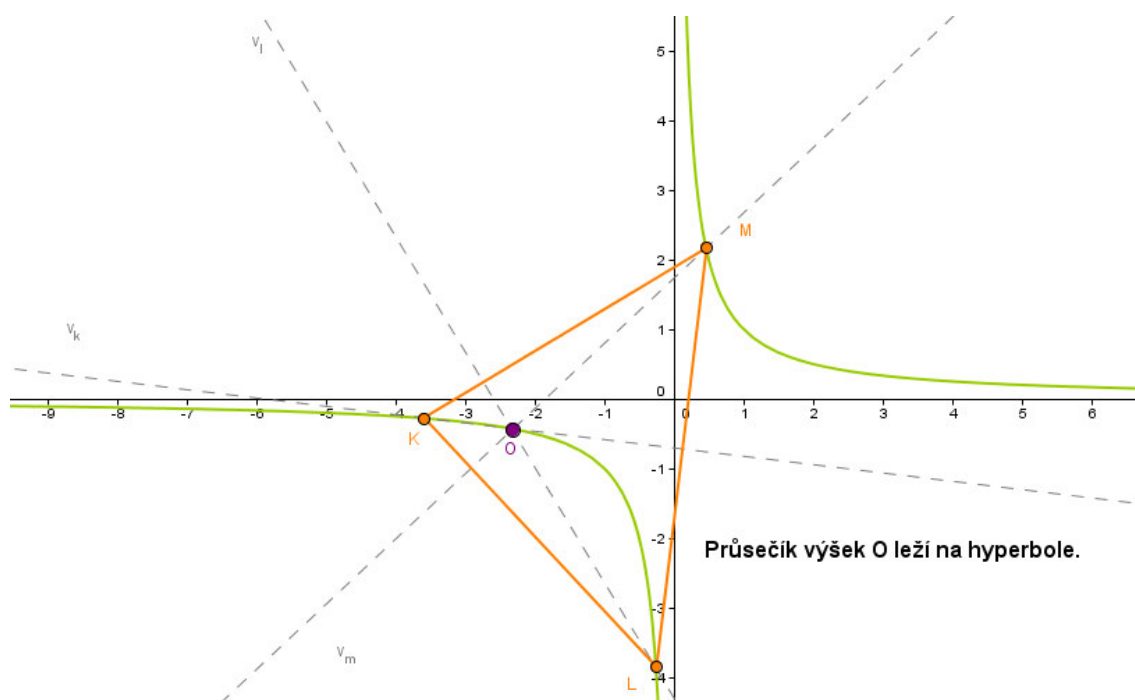
Obr. 12.1 Trojúhelník, jehož vrcholy leží na rovnoosé hyperbole

12.2 Verifikace problému v DGS

Verifikace byla provedena v programu GeoGebra.

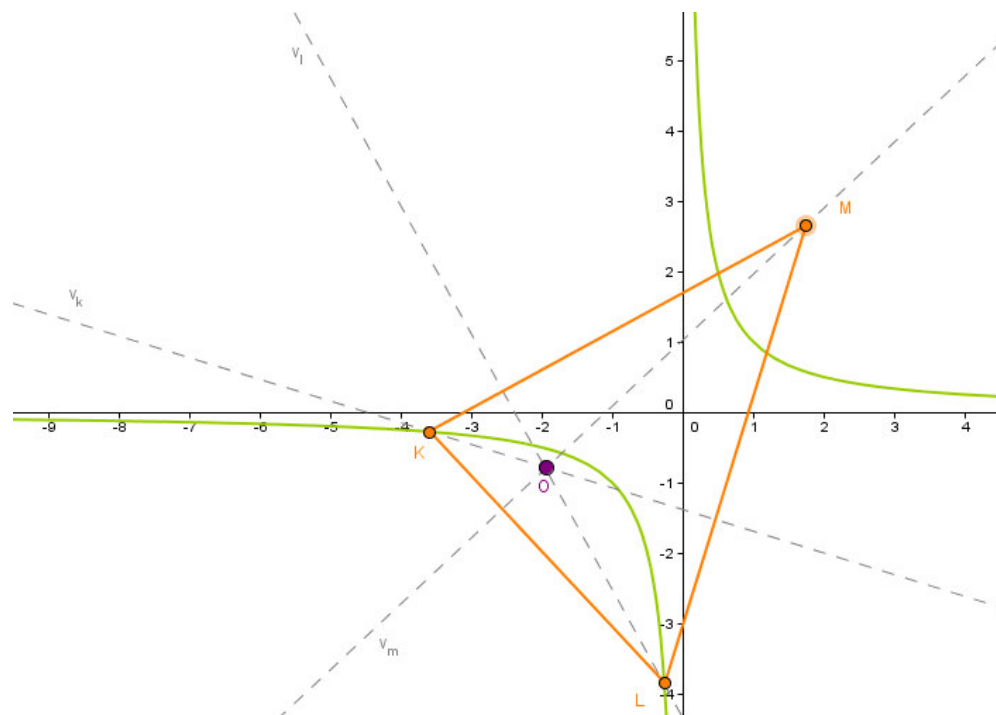
Hyperbola h byla zadána funkcí $y = \frac{1}{x}$. Body K, L, M jsou vrcholy trojúhelníku a leží na hyperbole h . Bod O je průsečíkem výšek v_k, v_l, v_m trojúhelníku KLM . Pro verifikaci ukážeme, že bod O také leží na hyperbole h . Využijeme nástroj “vložit text” a následně jej ve vlastnostech pro pokročilé doplníme podmínkou, že vzdálenost bodu O a hyperboly h se rovná 0, tj. zadáme podmínku zobrazení objektu:

Vzdálenost $[O, h] \stackrel{!}{=} 0$. To znamená, že text “Průsečík výšek O leží na hyperbole.“ se zobrazí pouze tehdy, je-li splněna daná podmínka, viz *Obr. 12.2 a*).



Obr. 12.2 a) Verifikace

Pomocí nástroje “připojit/odpojit bod“ odpojíme jeden z bodů označujících vrcholy trojúhelníku KLM tak, aby neležel na hyperbole h . Nyní již průsečík výšek O neleží na hyperbole h , a tak text “Průsečík výšek O leží na hyperbole.“ nebude zobrazen, viz *Obr. 12.2 b*).



Obr. 12.2 b) Interaktivita textu

12.3 Počítačový důkaz (analytický důkaz s využitím počítače)

K počítačovému důkazu využijeme program CoCoA.

Základem je převedení této geometrické situace do algebraických rovnic. Rovnice hyperboly h je $y = \frac{1}{x}$, tj. $xy - 1 = 0$. Poté si určíme souřadnice bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic: $K = [k_1, k_2]$, $L = [l_1, l_2]$, $M = [m_1, m_2]$, $O = [p, q]$. Víme, že body K, L, M leží na hyperbole h , proto platí:

$$M_1: K \in h \Leftrightarrow k_1 k_2 - 1 = 0,$$

$$M_2: L \in h \Leftrightarrow l_1 l_2 - 1 = 0,$$

$$M_3: M \in h \Leftrightarrow m_1 m_2 - 1 = 0.$$

Dále sestavíme rovnice výšek pomocí kolmosti vektorů:

$$M_4: \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{KL} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0,$$

po dosazení získáme:

$$M_4: \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{KL} \Leftrightarrow (p - m_1) \cdot (k_1 - l_1) + (q - m_2) \cdot (k_2 - l_2) = 0.$$

$$M_5: \overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{KM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{KM} = 0,$$

po dosazení tedy získáme:

$$M_5: \overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{KM} \Leftrightarrow (p - l_1) \cdot (k_1 - m_1) + (q - l_2) \cdot (k_2 - m_2) = 0$$

Zároveň musí průsečík výšek O ležet i na hyperbole h , tedy:

$$C: O \in h \Leftrightarrow pq - 1 = 0.$$

Pomocí programu *CocoaA* a rovnic $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, C$, zjistíme, zda tato tvrzení opravdu platí. Užijeme příkazů, viz *Obr. 12.3 a)*:

```

Interactive (0)  ◆ Seminarni prace GSA (1)
Use R:=Q[k[1..2],l[1..2],m[1..2],p,q,t,s];
M1:= k[1]k[2]-1;
M2:= l[1]l[2]-1;
M3:= m[1]m[2]-1;
M4:=(p-m[1]) (k[1]-l[1])+(q-m[2]) (k[2]-l[2]);
M5:=(p-l[1]) (k[1]-m[1])+(q-l[2]) (k[2]-m[2]);
C:=pq-1;
I:=Ideal (M1,M2,M3,M4,M5, (pq-1) t-1);
--NF (1, I);
1;
Elim(p..t, I);

```

Obr. 12.3 a)

V příkazu “Use R:=Q“ do hranatých závorek napíšeme všechny neznámé, se kterými pracujeme. V příkazu “I:=Ideal“ uvedeme do kulatých závorek rovnice M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , od sebe je oddělíme pouze čárkami a za ně doplníme polynom $(pq - 1)t - 1$. V příkazu “Elim“ do kulaté závorečky uvedeme, které neznámé chceme eliminovat. V horní části okna se pak objeví výsledek, viz *Obr. 12.3 b)*.

```

File Edit CoCoA CoCoAServer Settings Help
Use R:=Q[k[1..2],l[1..2],m[1..2],p,q,t,s];
M1:= k[1]k[2]-1;
M2:= l[1]l[2]-1;
M3:= m[1]m[2]-1;
M4:=(p-m[1])(k[1]-l[1])+(q-m[2])(k[2]-l[2]);
M5:=(p-1[1])(k[1]-m[1])+(q-1[2])(k[2]-m[2]);
C:=pq-1;
I:=Ideal(M1,M2,M3,M4,M5,(pq-1)t-1);
--NF(1,I);
1;
Elim(p..t,I);

1
-----
Ideal(m[1]m[2] - 1, l[1]l[2] - 1, k[1]k[2] - 1, k[2]l[1] - k[1]l[2] - k[2]m[1] + l[2]m[1] + k[1]m[2] - l[1]m[2], k[1]l[2]^2 + k[2]l[2]m[1] - l[2]^2m[1] - k[1]l[2]m[2] - k[2] + m[2], k[1]^2l[2] - k[1]l[2]m[1] - k[1]^2m[2] + k[1]l[1]m[2] - l[1] + m[1], k[1]^2l[1] - k[1]l[1]^2 - k[1]^2m[1] + l[1]^2m[1] + k[1]m[1]^2 - l[1]m[1]^2, -k[2]^2l[2] + k[2]l[2]^2 + k[2]^2m[2] - l[2]^2m[2] - k[2]m[2]^2 + l[2]m[2]^2)

```

Obr. 12.3 b)

Do příkazu “Factor“ vepíšeme do kulaté závorky jeden z polynomů, který se objevil v horní části okna po zadání příkazu “Elim“. Opět vyjde polynom a tato podmínka znamená, že body K, L, M jsou po dvou různé. Do příkazu “J:=Ideal“ nyní vepíšeme znovu rovnice M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , za ně přepíšeme polynom, který vyšel po zadání příkazu “Elim“, a celý jej ještě vynásobíme výrazem $s - 1$, následně závorku opět doplníme o polynom $(pq - 1)t - 1$. Na závěr využijeme příkaz “NF(1,J)“, viz Obr. 12.3 c).

```

File Edit CoCoA CoCoAServer Settings Help
Use R:=Q[k[1..2],l[1..2],m[1..2],p,q,t,s];
M1:= k[1]k[2]-1;
M2:= l[1]l[2]-1;
M3:= m[1]m[2]-1;
M4:=(p-m[1])(k[1]-l[1])+(q-m[2])(k[2]-l[2]);
M5:=(p-1[1])(k[1]-m[1])+(q-1[2])(k[2]-m[2]);
C:=pq-1;
I:=Ideal(M1,M2,M3,M4,M5,(pq-1)t-1);
--NF(1,I);
1;
Elim(p..t,I);
Factor(-k[2]^2l[2] + k[2]l[2]^2 + k[2]^2m[2] - l[2]^2m[2] - k[2]m[2]^2 + l[2]m[2]^2);
J:=Ideal(M1,M2,M3,M4,M5,(l[2] - m[2])(k[2] - l[2])(k[2] - m[2])s-1,(pq-1)t-1);
NF(1,J);
1
-----
Ideal(m[1]m[2] - 1, l[1]l[2] - 1, k[1]k[2] - 1, k[2]l[1] - k[1]l[2] - k[2]m[1] + l[2]m[1] + k[1]m[2] - l[1]m[2], k[1]l[2]^2 + k[2]l[2]m[1] - l[2]^2m[1] - k[1]l[2]m[2] - k[2] + m[2], k[1]^2l[2] - k[1]l[2]m[1] - k[1]^2m[2] + k[1]l[1]m[2] - l[1] + m[1], k[1]^2l[1] - k[1]l[1]^2 - k[1]^2m[1] + l[1]^2m[1] + k[1]m[1]^2 - l[1]m[1]^2, -k[2]^2l[2] + k[2]l[2]^2 + k[2]^2m[2] - l[2]^2m[2] - k[2]m[2]^2 + l[2]m[2]^2)
-----
[[l[2] - m[2], 1], [k[2] - m[2], 1], [k[2] - l[2], 1], [-1, 1]]
-----
0

```

Obr. 12.3 c)

Dokázali jsme, že průsečík výšek O trojúhelníku KLM , jehož vrcholy leží na hyperbole h , také leží na hyperbole h .

Závěr

Svou diplomovou práci jsem věnovala kuželosečkám. Záměrem bylo podat případným zájemcům o tuto problematiku ucelený soubor s typickými vyřešenými příklady, na které pak navazovaly příklady k procvičení a upevnění dané látky. Tato diplomová práce v mnohém souvisí s mou bakalářskou prací Sběrka příkladů na kvadratické plochy a společně téměř pokrývají veškerý obsah předmětu Geometrie I., a mohou tak studentům kurzu případně pomoci s domácí přípravou, či opakováním probírané látky.

Nadstavbou jsou závěrečné kapitoly týkající se zajímavých vlastností kuželoseček. Byly pro mě přínosné především svým přesahem do deskriptivní geometrie a využitím DGS k verifikacím. Samozřejmě nejsou zmíněny všechny vlastnosti, protože je to téma velmi široké a samo by vydalo za několik diplomových prací.

Seznam použité a citované literatury a internetových zdrojů

- [1] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004, 149 s.
- [2] KLETENIK, David Viktorovič. *Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii*. 14., ispravlennoje izd. Moskva: Nauka, 1986, 222 s.
- [3] MENŠÍK, Miroslav, Ota SETZER a Karel ŠPAČEK. *Deskriptivní geometrie: příručka pro přípravu na vysokou školu*. 1. vyd. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1966, 224 s.
- [4] ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky*. 1. vyd. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1983, 876 s.
- [5] JIRÁSEK, František, Zdeněk TICHÝ a Eduard KRIEGELSTEIN. *Sbírka řešených příkladů z matematiky*. 1. vyd. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1979, 817 s.

Internetové zdroje:

- [6] Brianchon's theorem. *Brianchon's theorem* [online]. 2015 [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Brianchon.shtml>
- [7] Pascal's Theorem. *Pascal's Theorem* [online]. 2015 [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pascal.shtml#words>