



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Matematika okolo nás – problematika zlatého řezu

Vypracovala: Bc. Jana Kaňková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2015

Ráda bych poděkovala všem, kteří mě při psaní této práce podpořili. Zejména děkuji mému vedoucímu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který mi pomohl vybrat téma zlatého řezu ke zpracování a s nímž jsem mohla konzultovat náplň práce.

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematika okolo nás – problematika zlatého řezu jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Anotace:

Tento text je určen všem zájemcům z řad široké veřejnosti. Práce zahrnuje konstrukci a výpočet zlatého čísla a jeho vlastnosti. Seznamuje s historií a ukazuje příklady výskytu zlatého řezu v rovinné geometrii a souvislost s Fibonacciho posloupností. Pojednává o výskytu zlatého řezu, Fibonacciho posloupnosti a logaritmických spirál v přírodě – jak v mnoho formách žijících živočichů a rostlin, tak na lidském těle. Text je doplněn názornými obrázky, které jsou vytvořeny v programu GeoGebra. Vlastnosti zlatého čísla a rovinné konstrukce jsou doplněny o podrobné důkazy. Výskyt zlatého řezu je pak doplněn sadou fotografií.

Abstract:

Diploma thesis is intended as material for general public. The thesis includes construction methods of the Golden Section and calculation of the Golden Number and its properties. It makes acquainted with the history of the Golden Section and its shows occurrence in a plane geometry. The thesis describes the connection between the Golden Number and the Fibonacci Sequence, occurrence of the Golden Section, Fibonacci Sequence and the logarithmic spirals in nature in both proportions of living organisms and in plants and on the human body. The text is completed with illustrative figures drawn mostly in GeoGebra. The Golden Number properties and the plane constructions are given. The Golden Section is completed with photos.

Obsah

1	ÚVODNÍ KAPITOLA.....	7
1.1	Historie.....	7
2	ZLATÉ ČÍSLO.....	10
2.1	Zajímavé vlastnosti zlatého poměru.....	12
3	KONSTRUKCE ZLATÉHO ŘEZU.....	16
3.1	Konstrukce 1.....	16
3.2	Konstrukce 2.....	18
3.3	Konstrukce 3.....	20
3.4	Konstrukce 4.....	22
4	ROVINNÉ ÚTVARY A ZLATÝ ŘEZ.....	24
4.1	Zlatý obdélník.....	24
4.2	Konstrukce zlatého obdélníku.....	29
4.2.1	Konstrukce 1.....	29
4.2.2	Konstrukce 2.....	30
4.2.3	Konstrukce 3.....	32
4.3	Zlatá spirála.....	33
4.4	Zlatý trojúhelník.....	36
4.5	Pravidelný pětiúhelník.....	38
4.5.1	Konstrukce 1.....	38
4.5.2	Konstrukce 2.....	39
5	FIBONACCIHO POSLOUPNOST.....	43
6	BINETOVA FORMULE.....	45
7	FIBONACCIHO ČÍSLA KOLEM NÁS.....	46
7.1	Včela medonosná (<i>Apis mellifera L.</i>) a její rodokmen.....	47
7.2	Včela medonosná a cesty v buňkách plástve.....	48
7.3	Lidské tělo.....	49

7.4	Rostliny	58
7.4.1	Fylotaxe.....	58
7.4.2	Kůra ananasu	60
7.4.3	Terč slunečnice.....	61
7.4.4	Šišky jehličnatých stromů	62
7.4.5	Okvětní lístky	62
7.5	Zvířata	64
7.5.1	Profil koně	64
7.5.2	Rohy a kly	65
7.5.3	Schránky měkkýšů.....	66
7.6	Let dravců.....	68
7.7	Fibonacciho posloupnost ve vesmíru.....	69
7.7.1	Prstence Saturnu	70
7.7.2	Mléčná dráha	71
8	METODICKÉ ZPRACOVÁNÍ ZLATÉHO ŘEZU	73
8.1	Pracovní list č. 1	73
8.2	Pracovní list č. 2	76
9	ZÁVĚR	78
10	LITERATURA	79

1 ÚVODNÍ KAPITOLA

„Nesčetné jsou divy světa.“

SOFOKLES (495–405 př. n. l.)

Tématem mé diplomové práce je zlatý řez. Toto sousloví není široké veřejnosti příliš známé. Není se čemu divit, není totiž ani ve středoškolských učebnicích. Někdo se s ním seznámí na vysoké škole, jiní nikdy a přesto jej můžeme najít v běžném životě a všude okolo nás. Je pro nás všední a přirozený, že jej ani nevnímáme. Přitom je užívám již od starověku – například ve stavitelství.

Co se tedy skrývá pod pojmem zlatý řez? Zlatým řezem je myšleno rozdělení úsečky na dvě části. Jejich délky jsou v konkrétním poměru. Poměr délky větší části rozdělené úsečky ku délce menší z částí úsečky je roven poměru celé úsečky ku delší z částí rozdělené úsečky. Tento poměr je konstantní a nezáleží na původní délce úsečky.

V následující kapitole popíši historii zlatého čísla, poté uvedu odvození hodnoty zlatého čísla, jeho vlastnosti a konstrukci. Dále se zaměřím na využití zlatého řezu a to hlavně v přírodě. Na závěr popíši metodiku zlatého řezu.

1.1 Historie

Pokud budeme sledovat vysvětlení a zřejmě i první definici zlatého řezu, dostáváme se do období kolem roku 300 př. n. l., kdy matematik Eukleides, autor věhlasných Základů, knihy, podle které studovalo geometrii nejedno pokolení, se zabýval úlohou: „*Jak rozdělit danou úsečku na dvě části tak, aby poměr celé úsečky k větší části byl stejný jako poměr větší části k menší.*“

Eukleides tuto proporcii odvodil z rozdělení úsečky v krajním a středním poměru, když se celá část má k delší části jako delší díl ke kratšímu.



Obrázek 1 rozdělení úsečky

Podíváme-li se na obrázek 1, pak je úsečka AB delší než AC . Zároveň je AC delší než CB . Rovná-li se poměr délky úsečky AC k délce CB a AB k AC , pak je úsečka rozdělena v poměru zlatého řezu.

Toto tvrzení se zdá být na první pohled nevinné, ale kdo by se nadál, že ovlivní pohled na otázky daleko přesahující obor matematiky. Kupříkladu postavení listů v botanice, strukturu galaxií či architekturu a umění. Ve zlatém řezu spolu nalezneme spoustu nádhery a překvapení. Albert Einstein to vyjádřil takto: „*To nejlepší, co můžeme zažít, je tajemství. Je to základní emoce, která stojí u kolébky opravdového umění a vědy. Kdo to nezná, nedokáže již být zvědavý a není schopen cítit údiv, je prakticky mrtev, podoben vyhaslé svíci.*“

Jak nám uvádí Livio [14] v zájmu o zlatý řez, Eukleida následovalo mnoho matematiků. Například „Dodatek“ k Základům, za jehož autora je považován Hypsiklodes z Alexandrie, obsahuje důležitou větu o dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Poté objevy týkající se zlatého řezu řídnou a pokud se objevují, jsou spojovány s Heronem (1. st. n. l.), Ptolemaiem (2. st. n. l.) a Pappem (4. st.). Pak nastává doba temna. Velká alexandrijská knihovna byla zničena a celá vědecká aktivita se přesouvá do Indie a arabského světa. Zde zmíním vznik desítkové poziční soustavy a vznik indicko-arabských číslic.

S nástupem islámu se novým centrem studia matematiky stává muslimský svět. Uvedu alespoň tři tehdejší matematiky: Al-Chvárizmím (9. st.), abú Kámilu Šudžu (9. st.) a abul Vafa (10. st.).

Práce těchto i dalších islámských matematiků je velmi významná, i když pouze dílčí v historii zlatého řezu. Období postupných poznatků a objevování je nezbytné pro příští průlom. Tématu pokroku věnoval dramatik G. B. Shaw jeden ze svých výroků: „*Rozumný člověk se přizpůsobuje světu, nerozumný se usilovně snaží přizbůsobit svět sobě. Proto veškerý pokrok závisí na člověku nerozumném.*“ V případě zlatého řezu čekal tento průlom na Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci. [14]

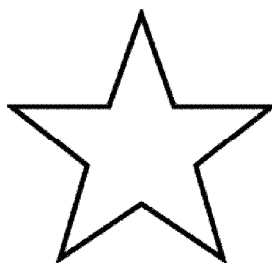
Přesná hodnota zlatého řezu (poměr úseček) je číslo nekončící, 1,6180339887... Tato čísla fascinovala svět už od starověku. Není proto divu, že objev čísla neperiodického desetinného rozvoje bez opakování či systému, uvedl

Pythagorejskou společnost v chaos a vyvolal krizi. Pythagorejci věřili, že existence iracionálních čísel je chybou v kosmu a tato chyba musí být zamlčena. [14]

Zajímavý je i samotný původ názvu „zlatý řez“. Pro jeho označení se dnes používá jméno ϕ (φ), což je počátečním písmenem jména Feidia, slavného řeckého sochaře, který proslul právě užitím zlatého řezu ve svých dílech. Označení zlatý řez, zlatý poměr, zlaté číslo, božská proporce, ϕ a jeho symbol jsou synonymy.

Zlatý poměr vyvolával nadšení již od antiky. Je tedy nutné pro odhalení označení zabrousit až do antiky? Ve skutečnosti ne. Termín zlatý řez zřejmě jako první použil Martin Ohm v roce 1835 ve své knize Čisté základy matematiky.

Kvůli čemu je vlastně geometrický poměr tak přitažlivý, že si zasluhuje takovou pozornost? Přitažlivost zlatého poměru je hlavně v tom, že má schopnost objevit se zcela nečekaně i v situacích a objektech, kde bychom ho nečekali. Už jste si někdy zkusili rozkrojit obyčejné jablko na polovinu? Vyjma toho, že zde o Vánocích hledáte, zda budete mít následující rok štěstí, můžete zde najít jádérka, která jsou rozmístěna do tvaru pěticípé hvězdy. Pentagram má tu vlastnost, že jeho delší strana ke kratším (myšlené základně) odpovídá zlatému poměru, obr. 2.



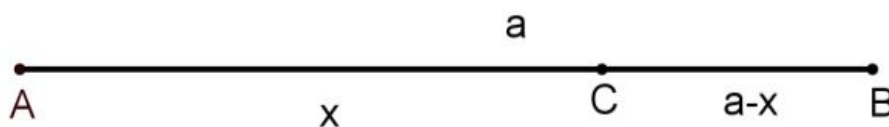
Obrázek 2 pěticípá hvězda

To je však pouze špička ledovce. V následujících kapitolách podhalíme další ukázky tohoto čísla. Jak se slunečnice otáčí za sluncem, uspořádání listů neboli fylotaxe, uspořádání kůry ananasu, stavba květu slunečnice? To vše a mnohem více lze vyjádřit zlatým poměrem.

2 ZLATÉ ČÍSLO

Jak jsem již uváděla, rozdělíme-li úsečky na dvě nestejně dlouhé části tak, že se celá má ku delší části jako delší část ku kratší, je úsečka rozdělena v poměru zlatého řezu.

Máme úsečku AB a na ní bod C . Označíme $|AB| = a$, $|AC| = x$, tedy $|CB| = a - x$, kde $x > a - x$, platí: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Pak můžeme říct, že jsme úsečku AB rozdělili bodem C v poměru zlatého řezu, obr. 3.



Obrázek 3 Odvození zlatého poměru.

Nyní ukáži určení konkrétní hodnoty zlatého čísla.

Zvolíme $|AB| = 1$, tj. $a = 1$, dosadíme do vztahu $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ a dostáváme

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Jednoduchými úpravami tuto rovnici upravíme na kvadratickou rovnici $x^2 + x - 1 = 0$, Podmínkami se nemusíme zabývat, jelikož x značí délku úsečky, tudíž rovno nule není. Oba zlomky jsou tedy definované. Dosazením do vzorce vyjádříme kořeny rovnice.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Kořen x_2 je záporný, nemůže tedy představovat délku úsečky. Nám vyhovuje kořen x_1 , který je přibližně roven 0,61803. Toto číslo je opravdu přibližné, jelikož $\sqrt{5}$ je iracionální číslo.

Dopočítejme konečnou hodnotu zlatého řezu (φ). $\varphi = \frac{a}{x}$, $a = 1$ a $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Odtud } \varphi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{5})}{-1+5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tato hodnota je přibližně rovna 1,61803. Opět se jedná o iracionální číslo.

Jelikož jsme dospěli k algebraickému vyjádření zlatého řezu, můžeme jej vypočítat s vysokou přesností. V roce 1966 M. Berg na sálovém počítači IBM 1401 vypočítal φ na 4599 míst za desetinnou čárkou. Dnes tento výpočet můžeme provést na jakémkoliv počítači za méně než 2 sekundy. V prosinci 1996 byl například zlatý řez vypočítán na deset milionů desetinných míst, tehdy to trvalo 30 minut. Pro zájemce předkládám výčet, uvádějící φ v desítkové soustavě:

1,6180339887 4989484820 4586834365 6381177203 0917980576
 2862135448 6227052604 6281890244 9707207204 1893911374
 8475408807 5386891752 1266338622 2353693179 3180060766
 7263544333 8908659593 9582905638 3226613199 2829026788
 0675208766 8925017116 9620703222 1043216269 5486262963
 1361443814 9758701220 3408058879 5445474924 6185695364
 8644492410 4432077134 4947049565 8467885098 7433944221
 2544877066 4780915884 6074998871 2400765217 0575179788
 3416625624 9407589069 7040002812 1042762177 1117778053
 1531714101 1704666599 1466979873 1761356006 7087480710
 1317952368 9427521948 4353056783 0022878569 9782977834
 7845878228 9110976250 0302696156 1700250464 3382437764

8610283831 2683303724 2926752631 1653392473 1671112115
8818638513 3162038400 5222165791 2866752946 5490681131
7159934323 5973494985 0904094762 1322298101 7261070596
1164562990 9816290555 2085247903 5240602017 2799747175
3427775927 7862561943 2082750513 1218156285 5122248093
9471234145 1702237358 0577278616 0086883829 5230459264
7878017889 9219902707 7690389532 1968198615 1437803149
9741106926 0886742962 2675756052 3172777520 3536139362
1076738937 6455606060 5921658946 6759551900 4005559089...

2.1 Zajímavé vlastnosti zlatého poměru

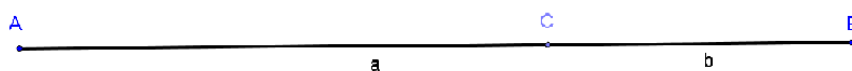
*Jak zlatý střed je absurdní,
nestrávím do konce svých dní.*

*Převrátím ho, pročpak ne,
mám pak totéž bez jedné.*

*Zvýším číslo o jednu,
znám hned jeho mocninu.*

P. S. BRUCKMAN (1977)

Budeme-li úsečku rozdělenou ve zlatém poměru zkoumat dále, zjistíme zajímavé vlastnosti čísla φ .



Již známe konkrétní hodnotu čísla φ i způsoby konstrukce dělení úsečky právě ve zlatém poměru. Pojdme se nyní podívat na některé zajímavé vlastnosti.

a) **$\varphi \cdot \tilde{\varphi} = -1$**

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Důkaz:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi \cdot \tilde{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = 1.$$

b) **$\varphi^{-1} = \varphi - 1$**

Důkaz:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

c) **$\varphi^2 = \varphi + 1$**

Důkaz:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varphi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Vlastnosti a.), b.), c.) vyplívají také z kvadratické rovnice $x^2 + x - 1 = 0$, zmíněnou výše. Čísla φ a φ jsou převrácenými hodnotami kořenů této rovnice.

d) **Hodnota výrazu:** $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

Představme si, že se snažíme určit hodnotu následujícího výrazu, spočívajícího v součtu nekonečného sledu druhých odmocnin:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

První metodou, jak postupovat, je začít počítat $\sqrt{1 + \sqrt{1}}$, což je $\sqrt{2} = 1,414 \dots$, pak sečíst $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$, a takto pokračovat dál v naději, že se hodnoty budou blížit k nějakému číslu. My si ukážeme mnohem elegantnější řešení. Hodnotu, kterou hledáme, označme x .

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Obě strany rovnice umocníme na druhou.

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Na pravé straně nám zmizela vnější odmocnina. Povšimněme si, že druhý výraz na pravé straně pokračuje do nekonečna, takže se vlastně rovná našemu původnímu x . Dostáváme tedy kvadratickou rovnici $x^2 = 1 + x$. To je však rovnice, která definuje zlatý řez. Zjistili jsme, že předchozí nekonečné vyjádření je rovno φ .

e) Řetězové zlomky

Nyní se podíváme na jiný typ nekonečného výrazu, tentokrát ve zlomcích. Základ teorie řetězových zlomků byl dán již italským matematikem Pietrem Antoniem Cataldim (1548–1626).

Konečným řetězovým zlomkem nazveme výraz tvaru

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.

Tento zápis je poměrně nešikovný, častěji užíváme zápisu:

$$a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Jedná se o případ řetězového zlomku. Jak se spočítá hodnota tohoto nekonečného zlomku? Opět bychom mohli zkrátit řadu jedniček a počítat postupně od nejvýše položených výrazů s nadějí, že se objeví číselná limita, k níž bude číselný zlomek konvergovat. My využijeme elegantnější metody, podobně jako v předchozím příkladě. Hodnotu, kterou hledáme, označíme x .

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Opět si všimneme, že vzhledem k nekonečnému charakteru řetězového zlomku je jmenovatel výrazu na pravé straně rovnice ve skutečnosti totožný s x . Máme tedy rovnici:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Vynásobením obou stran x dostaneme $x^2 = 1 + x$, což je znovu rovnice definující zlatý řez.

Jak uvádí Bruckman ve své básni Vždy ve středu:

*„Jako řetězový zlomek,
mi zlatý střed bere spánek.
Jedničky jen přičítám,
a v hlavě z toho zmatek mám“.*

3 KONSTRUKCE ZLATÉHO ŘEZU

V této kapitole si vysvětlíme, jak úsečku, které odpovídá zlatému poměru sestrojít. Uvedu čtyři možnosti konstrukce. První vychází již ze sestrojené úsečky AB a hledáme bod C . Další dvě, pak ukazují možnost sestrojení, známe-li pouze jednu z částí úsečky a chceme-li doplnit zbývající. Poslední konstrukce umožňuje sestrojít úsečku rozdělenou v poměru zlatého řezu pouze pomocí skládání papíru.

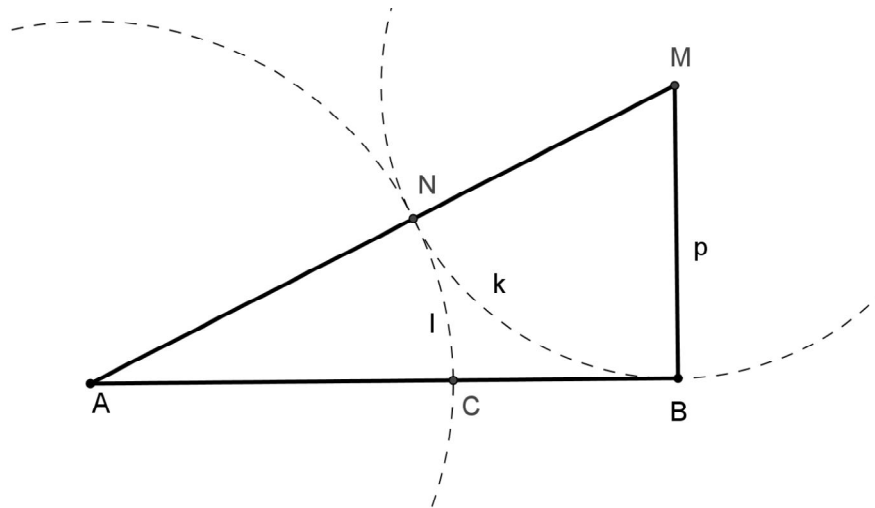
U všech konstrukcí provedu početní důkaz, aby bylo zřejmé, že jsme opravdu získali zlatý řez.

3.1 Konstrukce 1

Máme úsečku AB libovolné délky. Na této úsečce hledáme bod C tak, aby C dělil úsečku zlatým poměrem.

Postup konstrukce:

1. $\leftrightarrow p, p \perp AB$
2. $M, M \in p, |BM| = \frac{1}{2}|AB|$
3. ΔABM
4. $k, k(M, r = |BM|)$
5. $N, N \in k \cap AM$
6. $l, l(A, r = |AN|)$
7. $C, C \in l \cap AB.$



Obrázek 4 Konstrukce 1

Důkaz:

Chceme ukázat $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$. Označíme $|AB| = a$.

Pak $|BM| = \frac{1}{2}a$

$$|AM| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$|MN| = |BM| = \frac{1}{2}a,$$

$$|AC| = |AN| = |AM| - |MN| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$|BC| = |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Hodnoty poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

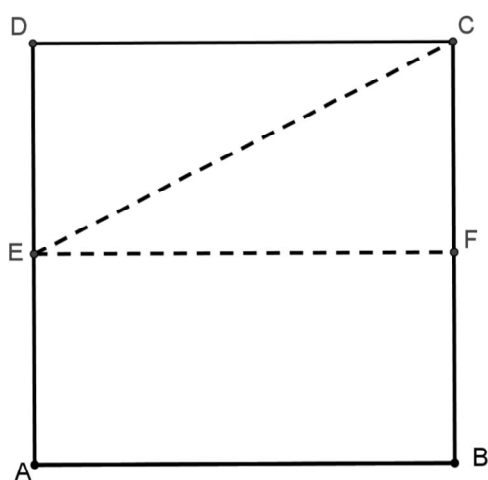
$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} - 3 + 5 - \sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

A důkaz je proveden.

3.2 Konstrukce 2

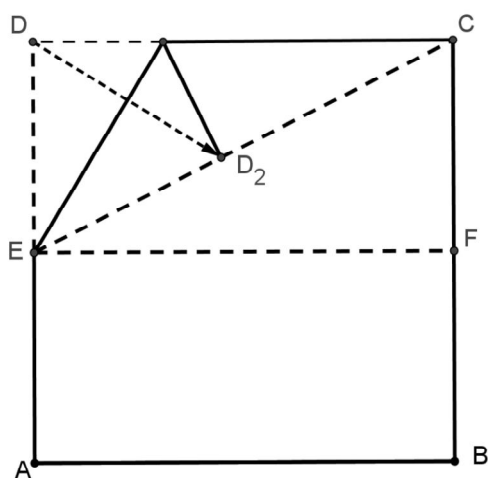
Konstrukce je obdobná konstrukci 1, ale pro ukázkou nepotřebujeme nic víc než list papíru. Z papíru si vystříhneme čtverec. Za délku strany volíme velikost úsečky, která bude zlatým řezem rozdělena.

Mějme čtverec $ABCD$ se stranou délky a . Přeložíme ho na půl tak, aby vznikl obdélník a opět rozevřeme. Střed strany AD označíme E . Papír ohneme tak, aby nám vznikla úsečka EC (viz obr. 7). A opět rozložíme.



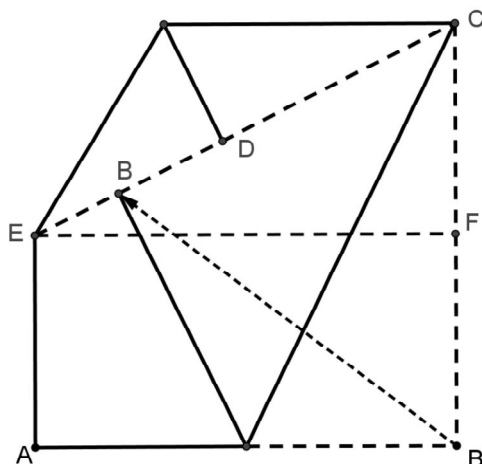
Obrázek 5 Konstrukce skládáním papíru

Dále vezmeme vrchol D a přiložíme jej na ohyb EC . Bod D tedy splývá s úsečkou EC a část úsečky EC je překryta úsečkou DE .

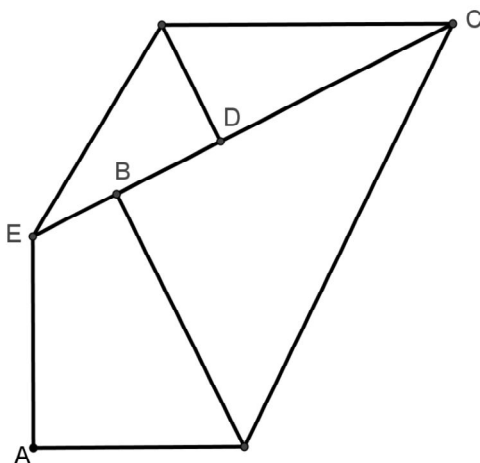


Obrázek 6 Konstrukce skládáním papíru

Nyní na přehyb CE přiložíme vrchol B .



Obrázek 7 Konstrukce skládáním papíru



Obrázek 8 Skládání z papíru

Bod D dělí úsečku BC ve zlatém poměru tak, že úsečka DC je větším dílem úsečky BC .

Důkaz:

Chceme ukázat $\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|DC|}{|BD|} = \varphi$.

Původní čtverec měl rozměry $a \times a$.

Potom $|BC| = a$, $|CD| = a$, $|ED| = \frac{a}{2}$.

Dále určíme pomocí Pythagorovi věty délku EC .

$$|EC| = \sqrt{|CD|^2 + |DE|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{|a|}{2}\sqrt{5}.$$

Ale $a > 0$, jinak by čtverec neexistoval, tudíž $|EC| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Zjistíme délky jednotlivých úseček BD a DC .

$$|DC| = |EC| - |ED| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$|BD| = |BC| - |DC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi,$$

$$\frac{|DC|}{|BD|} = \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{9 - 5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

Důkaz je proveden.

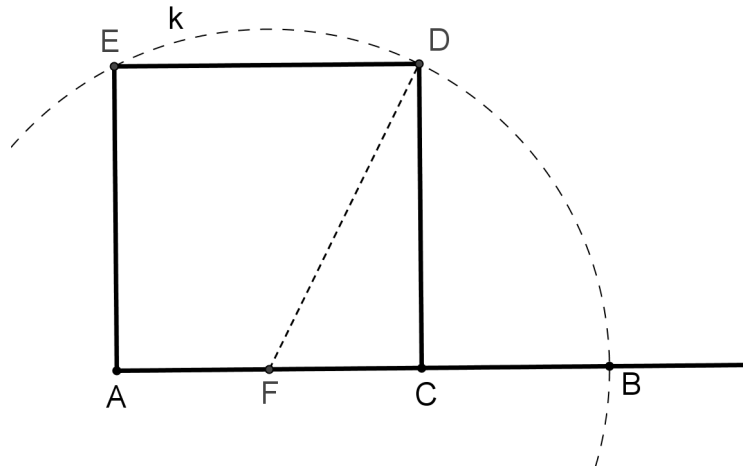
3.3 Konstrukce 3

Na úsečce AC libovolné délky hledáme bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém poměru. Přitom úsečka AC je větší než CB .

Tato konstrukce slouží k sestrojení i pravidelného pětiúhelníku.

Postup konstrukce:

1. $AC, |AC|$ je libovolná
2. $F, |FA| = |FC|$
3. $D, CD \perp AC, |CD| = |AC|$
4. $k, k(F, r = |FD|)$
5. $B, B \in k \cap \rightarrow AC$



Obrázek 9 konstrukce 2

Důkaz:

Chceme ukázat $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$.

Nejdříve si zvolíme libovolnou délku úsečky AC pomocí této délky si vyjádříme jednotlivé délky úseček. Nad úsečkou AC si přestavíme čtverec $ACDE$. Strana čtverce je délky a .

$$a = |AC| = |CD|,$$

$$|FC| = |AF| = \frac{1}{2}a,$$

$$|FD| = |FB| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$|BC| = |FB| - |FC| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Dosadíme do hodnot příslušných poměrů:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$

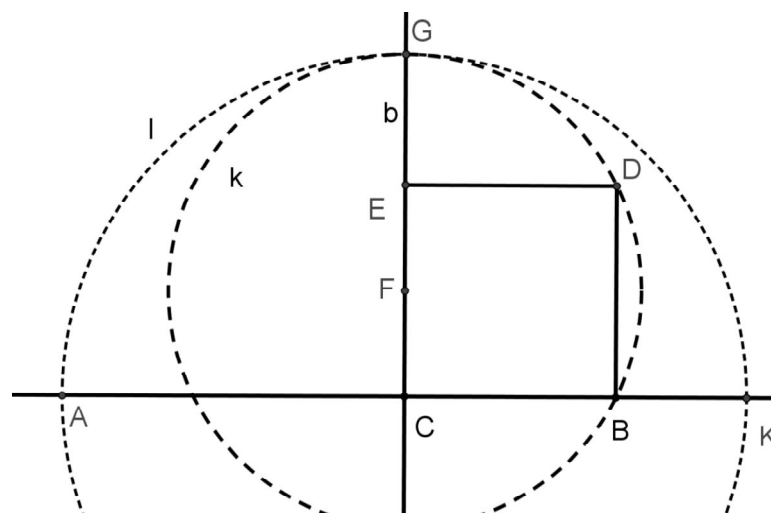
Důkaz je proveden.

3.4 Konstrukce 4

Na dané úsečce CB libovolné délky, hledáme bod A tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým poměrem. Přitom úsečka AC je větší než BC .

Popis konstrukce:

1. $b, b \perp BC, C \in m$
2. $F, F \in b, |CF| = |FE|$
3. $k, k(F, r = |FB|)$
4. $G, G \in b \cap CF$
5. $l, l(C, R = |CG|)$
6. $A, A \in l \cap \rightarrow BC$



Obrázek 10 Konstrukce 3

Důkaz:

Chceme ukázat, že $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \varphi$.

Zvolíme libovolnou, ale pevnou délku úsečky BC a pomocí této délky vyjádříme délky jednotlivých úseček. Nad úsečkou CB si pro názornost představíme čtverec $CBDE$. Strana čtverce je a .

$$a := |BC| = |ED|,$$

$$|FC| = |FE| = \frac{a}{2},$$

$$|FB| = |FD| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$|AC| = |CG| = |FC| + |FD| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$|AB| = |AC| + |BC| = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) + a = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5} + 2) = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}),$$

Dosadíme do hodnot poměrů:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})}{\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})} = \frac{3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ což je rovno } \varphi. \end{aligned}$$

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ opět dostáváme hodnotu } \varphi.$$

4 ROVINNÉ ÚTVARY A ZLATÝ ŘEZ

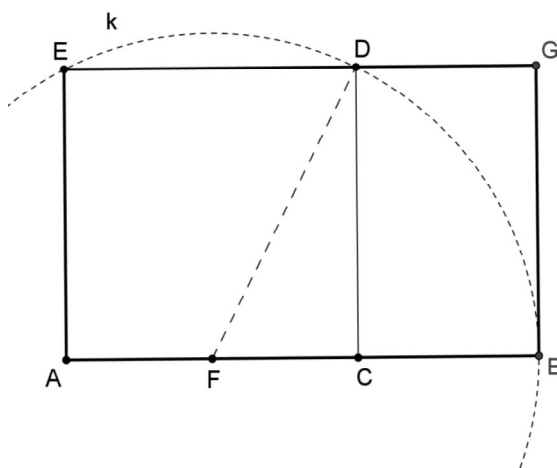
„Geometrie má dva velké poklady; jedním je věta Pythagorova; druhým rozdělení úsečky v krajním a středním poměru. První lze přirovnat k žíle zlata, druhý lze označit za drahokam.“

JOHANNES KEPLER (1571–1630)

Již Eukleides nazýval zlatý řez poměrem krajním středním. V úvodu šesté knihy Základů je uvedena následující definice, cituji z českého překladu Františka Servítka z roku 1907: *„Pravíme, že přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší.“*

4.1 Zlatý obdélník

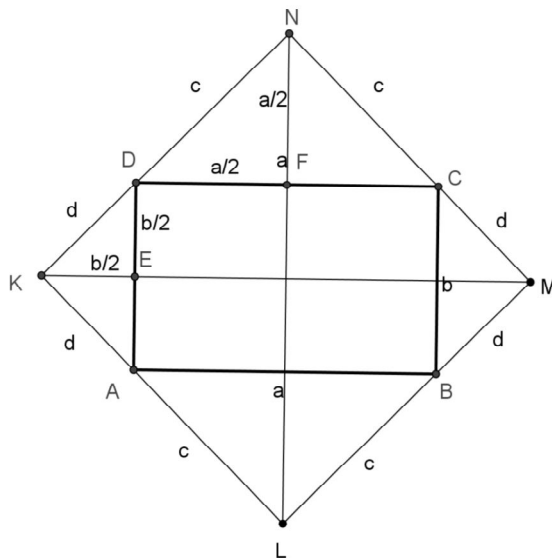
Obdélník nazveme zlatý, jsou-li jeho strany v poměru zlatého řezu. Jeho konstrukci jsme již naznačili v konstrukci 2 zlatého řezu. Na polopřímce $\rightarrow AC$ jsme našli bod B tak, že bod C dělí úsečku $|AB|$ zlatým řezem. Nyní zbývá sestrojiti bod G tak, abychom dostali obdélník $ABGE$, který je zlatý.



Obrázek 11 zlatý obdélník – konstrukce

Zlatý obdélník má několik zajímavých vlastností:

- 1) Vepíšeme-li zlatý obdélník čtverci, obr. 12, pak vrcholy obdélníku dělí strany čtverce v poměru zlatého řezu.



Obrázek 12 zlatý obdélník čtverci

Důkaz, [9]:

Chceme ukázat, že $\frac{c}{a} = \varphi$.

Pro trojúhelník ALB (stejně jako pro trojúhelník DCN) musí dle Pythagorovy věty platit $c^2 + c^2 = a^2$. Odtud $c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Analogicky pro trojúhelník BMC (stejně jako pro trojúhelník KAD) musí dle Pythagorovy věty platit $d^2 + d^2 = b^2$. Pak $d = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Tedy

$$\frac{c}{d} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Pozn.

Toto tvrzení neplatí pouze pro zlatý obdélník, ale i pro obdélník, jehož strany jsou v libovolném poměru $a:b$.

Důkaz, [8]:

Daný čtverec označíme $KLMN$, obdélník $ABCD$. $|AB| = a$, $|BC| = b$, strana obdélníku jsou v poměru $\frac{a}{b}$. Úsečky, na které dělí vrcholy obdélníku jednotlivé strany čtverce, označme c, d . Průsečík úseček CD a LN označme F , průsečík úseček AD a KM písmenem E , obr. 12. Trojúhelník KED a DFN jsou podobné (dle věty uu). Oba jsou pravoúhlé a rovnoramenné. Platí:

$$\begin{aligned} |DN| &= c, \\ |DF| &= |FN| = \frac{a}{2}, \\ |DK| &= d, \\ |EK| &= |DE| = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

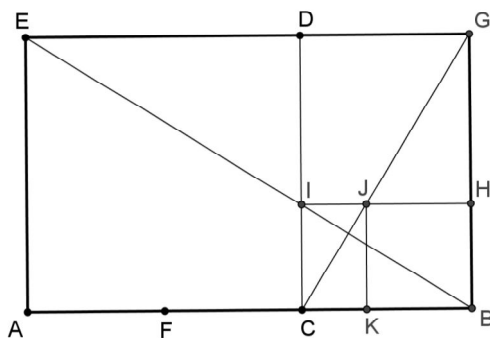
Z podobnosti trojúhelníků KDE a DFN plyne:

$$\frac{|DF|}{|EK|} = \frac{|DN|}{|DK|}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{c}{d}$$

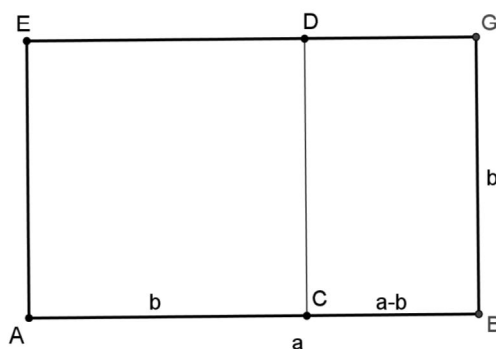
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- 2) Kowal, [13] například uvádí, že pokud od obdélníka $ABGE$ odřízneme čtverec $ACDE$, dostáváme obdélník $CBGD$, který bude rovněž zlatý. Stejně tak můžeme oddělit od obdélníku $CBGD$ opět čtverec $IHGD$ a zbývající část bude opět zlatým obdélníkem, takto bychom mohli pokračovat dál a získali bychom nekonečně mnoho zlatých obdélníků, které se při každém odříznutí otočí o 90° .



Obrázek 13 Zlatý obdélník

Soubor takto vytvořených čtverců, jejichž velikosti stran jsou právě Fibonacciho čísla, nazýváme Fibonacciho čtyřúhelníky.



Obrázek 14 oddělení čtverce od zlatého obdélníka

Výše uvedené pravidlo platí pouze pro zlatý obdélník (neexistuje jiný poměr délek stran obdélníku, který by po odebrání čtverce zachoval zlaté číslo), [8].

Důkaz:

Mějme libovolný obdélník s rozměry $a \times b$, kde $a > b$. Poměr $\frac{a}{b}$ označme m .

Hledáme m takové, že:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b - a'}$$

Což je ekvivalentní výrazu

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

Dosadíme $\frac{a}{b} = m$ (respektive $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$):

$$\frac{1}{m} = m - 1,$$

$$0 = m^2 - m - 1.$$

Tato rovnice má dva kořeny m_1, m_2 :

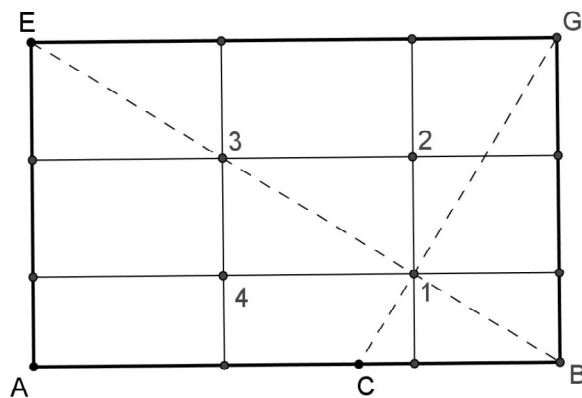
$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

druhý kořen řešením není, m značí poměr délek stran a nesmí být záporný. Získali jsme tedy jedno řešení:

$$m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Uvedená vlastnost platí pouze pro obdélník, jehož strany jsou v poměru φ , [8].

3) Další zajímavou vlastnost zlatého obdélníku nám popisuje Livio [14], uvádí, že průsečík úhlopříček libovolného páru původního obdélníku a nově získaného menšího obdélníku je bodem zlatého řezu. Každý zlatý obdélník má takovéto zlaté body čtyři a platí, že se tyto body přibližně nacházejí v pomyslných průsečících třetin stran.



Obrázek 15 Konstrukce zlatého řezu pomocí třetin

Zvolíme-li čtverec, jehož strany rozdělíme v poměru zlatého řezu, tyto body nám tvoří vrcholy zlatého obdélníka.

4.2 Konstrukce zlatého obdélníku

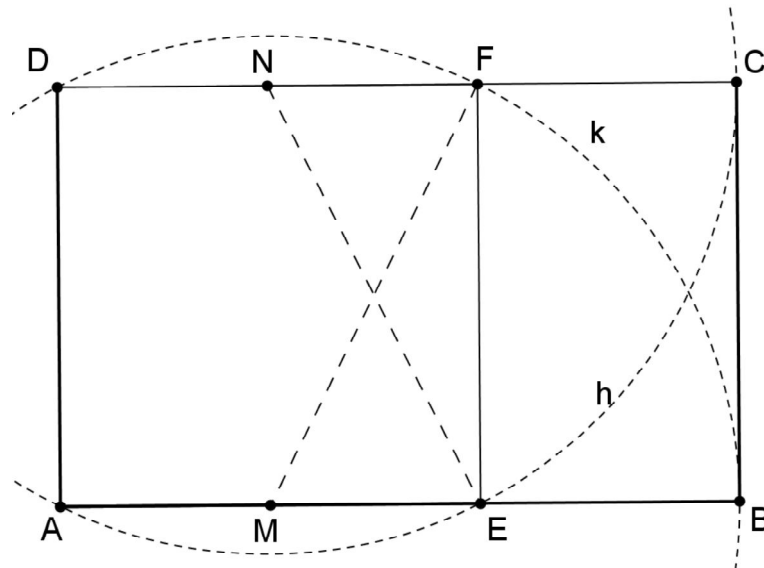
Můžeme využít mnoho způsobů. Stačí narýsovat dvě úsečky v poměru zlatého řezu a tyto úsečky vytvoří strany hledaného obdélníku. Zaměříme se však na konstrukce směřující přímo k nalezení zlatého obdélníku.

4.2.1 Konstrukce 1:

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD , [8].

Řešení:

1. E, F ; $AEFD$ je čtverec,
2. M ; $M \in \frac{1}{2}|AE|$,
3. N ; $N \in \frac{1}{2}|DF|$,
4. k ; $k(M; |FM|)$,
5. h ; $h(N; |EN|)$,
6. B ; $B \in (\rightarrow AE \cap k)$,
7. C ; $C \in (\rightarrow DF \cap h)$,
8. obdélník $ABCD$.



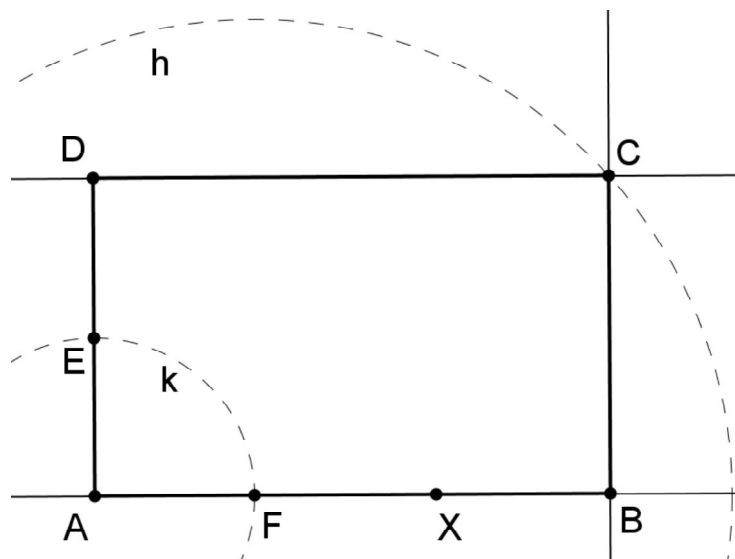
Obrázek 16 Konstrukce 1 [8]

4.2.2 Konstrukce 2:

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD , [8].

Řešení:

1. $\rightarrow AX; AX \perp AD$,
2. $\rightarrow DY; DY \perp AD$,
3. $E; E \in \frac{1}{2}|AD|$,
4. $k; k(A; |AE|)$,
5. $F; F \in (\rightarrow AX \cap k)$,
6. $h; h(F, 3|AE|)$,
7. $C; C \in (\rightarrow DY \cap h)$,
8. $B; B \in \rightarrow AX, |AB| = |DC|$,
9. Obdélník $ABCD$.



Obrázek 17 Konstrukce 2 [8]

Ověření:

Nechť $|AD| = b$, potom:

$$|AE| = |AF| = \frac{b}{2},$$

$$|CF| = 3 \cdot |AE| = \frac{3b}{2},$$

$$|BC| = |AD| = b.$$

$$|BF| = \sqrt{|CF|^2 - |CB|^2} = \sqrt{\frac{9b^2}{4} - b^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5},$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

A poměr stran narysovaného obdélníku je skutečně v poměru zlatého řezu.

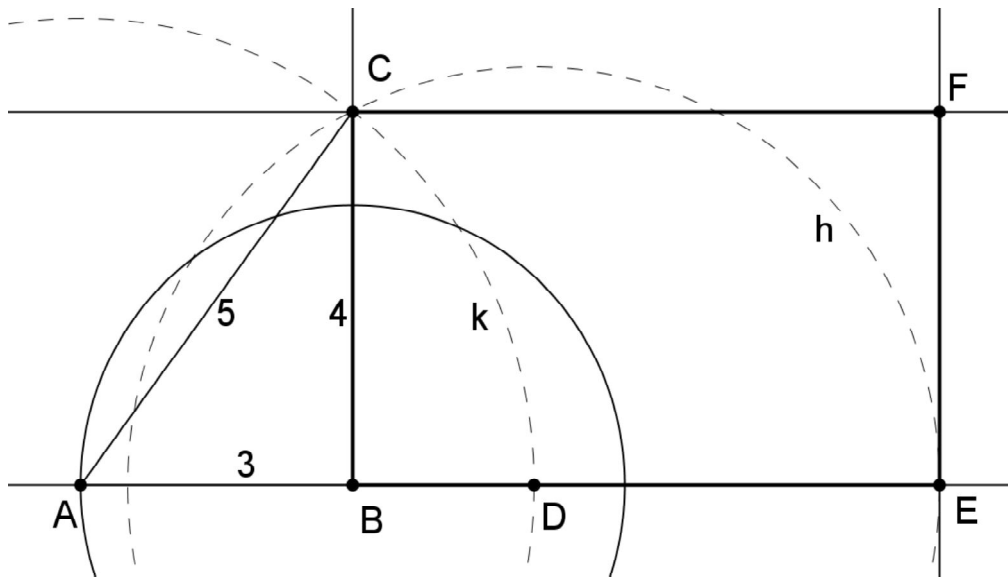
4.2.3 Konstrukce 3:

Mějme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 3 a 4 cm a s přeponou dlouhou 5 cm. Připíšme zlatý obdélník tak, aby jeho kratší strana byla shodná s delší odvěsnou, [10].

Řešení:

Pravoúhlý trojúhelník popíšeme ABC , kde BC je delší odvěsna a AC přepona. K odvěsně BC připíšme dle postupu níže obdélník $BEFC$.

1. $k; k(A, |AC|)$,
2. $D; D \in (\rightarrow AB \cap k)$,
3. $h; h(D, |CD|)$,
4. $E; E \in (\rightarrow AB \cap h)$,
5. $\leftrightarrow p, p \perp BE, E \in p$,
6. $m; m(E, |BC|)$,
7. $F; F \in (p \cap m)$,
8. Obdélník $BEFC$.



Obrázek 18 Konstrukce 3

Ověření:

Ujistíme se, že obdélník $BEFC$ je opravdu zlatý. Víme, že $|AB| = 3, |BC| = 4, |AC| = 5$. Pak platí:

$$|AD| = 5,$$

$$|BD| = |AD| - |AB| = 5 - 3 = 2,$$

$$|CD| = |DE| = \sqrt{|BC|^2 + |BD|^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$|BE| = |BD| + |DE| = 2 + 2\sqrt{5} = 2(1 + \sqrt{5}),$$

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Poměr délek kratší ku delší straně obdélníku je roven φ , obdélník je tedy zlatý.

4.3 Zlatá spirála

Spirálu tvořenou čtvrtinami kružnic a zakreslenou do Fibanacciho čtyřúhelníků způsobem znázorněným na obr. 19 nazýváme zlatá spirála. Zlatá spirála je vepisována do obdélníků, jejichž poměry stran se blíží zlatému řezu, [9].

Spirála, kterou nazýváme zlatá, je speciálním případem logaritmické spirály. Proto stručně popíši, co je logaritmická spirála a spirála vůbec.

Spirála je křivka, která lze zavést jako trajektorie bodu pohybujícího se předepsaným způsobem po polopřímce, přičemž se tato polopřímky zároveň otáčí okolo svého počátku. Část polopřímky ohraničená jejím počátkem a bodem spirály se nazývá průvodič bodu. Počátkem otáčející se polopřímky bývá nazýván pólem spirály, [8].

Definice logaritmické spirály má v polárních souřadnicích (r, θ) tvar:

$$r = a \cdot e^{b \cdot \theta}.$$

r ... vzdálenost od počátku soustavy souřadnic P

θ ... úhel, který svírá polopřímky PA s kladným směrem osy x .

a, b ... kladné reálné konstanty

e ... základ přirozeného logaritmu

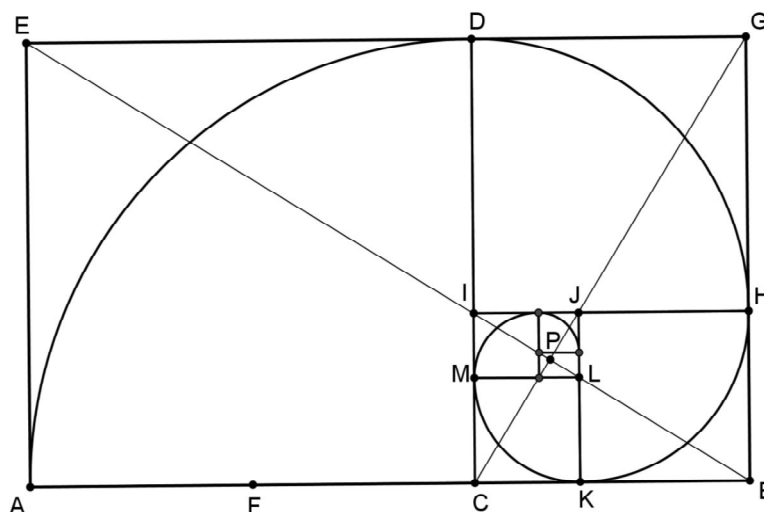
S rostoucí hodnotou úhlu θ se křivka vzdaluje od svého pólu, naopak s klesající hodnotou úhlu θ se k pólu přibližuje. Vezmeme-li část blízko pólu a zvětšili bychom ji, dostali bychom stejnou část logaritmické spirály, jen vzdálenější od pólu. Má tedy stále stejný tvar.

Zlatou spirálu získáme speciální volbou konstanty b , tak aby platilo pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ a $e^{b \cdot \theta} = \varphi$. Pak $b = \frac{2 \ln \varphi}{\pi}$.

Zlatá spirála upoutala už Bernoulliho, který ji neváhal označit za „spira mirabilis“ – neobyčejná, obdivuhodná spirála.

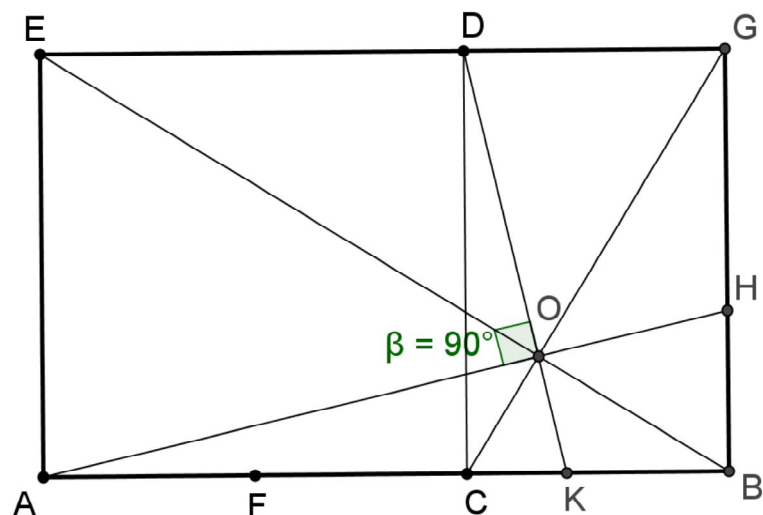
Spirálu lze vkreslit do obrázku, který jsme získali vepisováním stále menších zlatých obdélníků do sebe. Spirála bude postupně procházet body A, D, H, K, M, \dots , obr. 19. Její pól P je průsečík úseček EB a CG . Při změně úhlu o 90° se změni délka průvodiče φ krát. [8]

Konstrukci spirály lze provést pomocí čtvrtkružnic. Sestrojíme oblouk AD se středem C , k němu připojíme oblouk DH se středem v I , pokračujeme obloukem HK se středem v J atd., tímto postupem získáme křivku. Která je na první pohled téměř totožná se zlatou spirálou, obr. 19. Skutečná spirála se nedotýká stran čtverců, ale protíná je pod velmi malým úhlem.



Obrázek 19 zlatá spirála

Délka průvodičů logaritmické spirály je závislá na úhlu β , který průvodič svírá s pevnou osou.

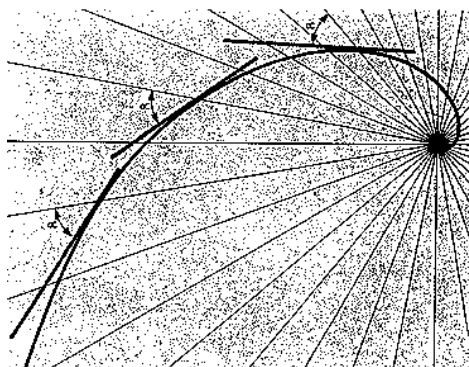


Obrázek 20 konstrukce zlaté spirály [9]

$$\beta = n \frac{\pi}{2},$$

$$r = \frac{1}{\varphi^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Úhel mezi tečnou této křivky v jejím libovolném bodě a přímkou, spojující tento bod se středem spirály, je stálý. Střed spirály O je průsečík úhlopříček BE a GC , které jsou k sobě kolmé. AH a DK se protínají v bodě O a jsou osami úhlů mezi BE a GC , [12].



Obrázek 21 tečny logaritmické spirály [12]

Zlatá spirála nemění svůj tvar a roste stejně do délky i do šířky. Tuto vlastnost využívají i živočichové či rostliny při stavbě ulit či postavení listů. Jako jediná křivka zachovává tvar a poměr částí. Zajímavé je, že asymetrická křivka vyjadřuje symetrický růst.

Logaritmickou spirálu lze konstruovat i vrcholy do sebe vepsaných zlatých trojúhelníků.

4.4 Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je rovnoramenný s ramenem délky r a základnou délky z , pro který platí:

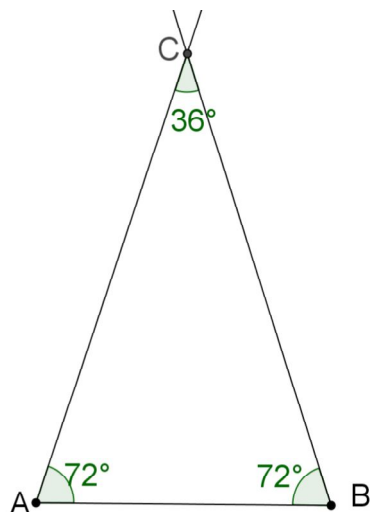
$$\frac{r}{z} = \varphi.$$

Vrcholový úhel zlatého trojúhelníka je roven 36° a úhly při základně 72° , obr. 22. Toto tvrzení dokážeme.

Za jednotku délky zvolíme základnu trojúhelníka. Nyní, aby byl trojúhelník zlatý, musí mít ramena délku $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Velikost úhlu při základně označme α a trojúhelník rozdělíme výškou k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Pro úhel α platí:

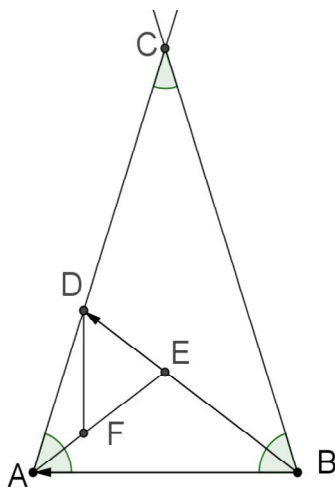
$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Nyní zbývá ukázat, že $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$. Tento důkaz lze elegantně provést pomocí pravidelného pětiúhelníku. Jeho platnost prokážeme v kapitole 4.5.2.



Obrázek 22 zlatý trojúhelník

Můžeme pokračovat podobně jako u zlatého trojúhelníka a zmenšovat původní trojúhelník. Vepíšeme do zlatého trojúhelníku nový rovnoramenný trojúhelník tak, že bude mít rameno shodné s původní základnou. Pokračujeme-li dále, můžeme vytvořit nekonečně mnoho trojúhelníků, obr. 23.



Obrázek 23 zlatý trojúhelník - vepsané trojúhelníky

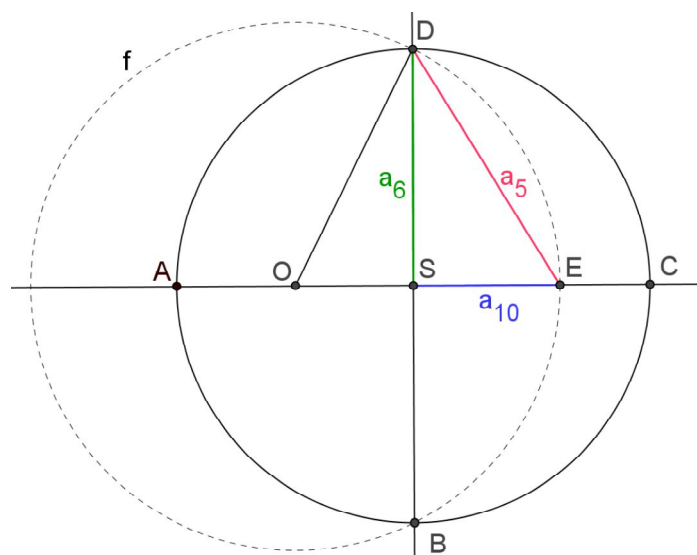
Jednou z překvapivých vlastností takto získaných zlatých trojúhelníků je fakt, že jejich vrcholy leží na tzv. zlaté logaritmické spirále. Pól takovéto spirály se nachází v průsečíku těžnic AA' a DD' se stranami BC a AB . Je zajímavé, že ať spirálu zvětšíme nebo zmenšíme na jakýkoli rozměr, svůj tvar nemění, pouze roste stejnoměrně do délky a šířky, [13].

4.5 Pravidelný pětiúhelník

Je jedním z pravidelných rovinných útvarů, tj. všechny jeho strany a všechny vnitřní úhly jsou shodné. Lze jej vepsat do kružnice a rovněž mu lze kružnice vepsat. Je však jediný mnohoúhelník, který má stejný počet úhlopříček jako stran. Navíc lze sestavit včetně úhlopříček nakreslit jedním tahem.

Nejpoužívanější je konstrukce pravidelného pětiúhelníku, známe-li poloměr kružnice opsané. My konstrukci provedeme tzv. eukleidovsky, tj. pouze pomocí kružítka a pravítka (bez měřítka a úhloměru).

4.5.1 Konstrukce 1:



Obrázek 24 Konstrukce stran

V kružnici se středem v S sestojíme průměr AC a průměr BD na něj kolmým. Bod O je středem úsečky AS . Z bodu O opišeme kružnici o poloměru OD , která protne úsečku AC v bodě E . Vzdálenost DE je rovna velikosti strany pravidelného pětiúhelníku. Pro zajímavost: úsečka SE je stranou pravidelného desetiúhelníka a úsečka SD je stranou pravidelného šestiúhelníka.

$\triangle SED$ je pravoúhlý, tudíž platí:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2,$$

kde a_5, a_6, a_{10} značí strany pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku a desetiúhelníku vepsaného stejnému kruhu.

4.5.2 Konstrukce 2:

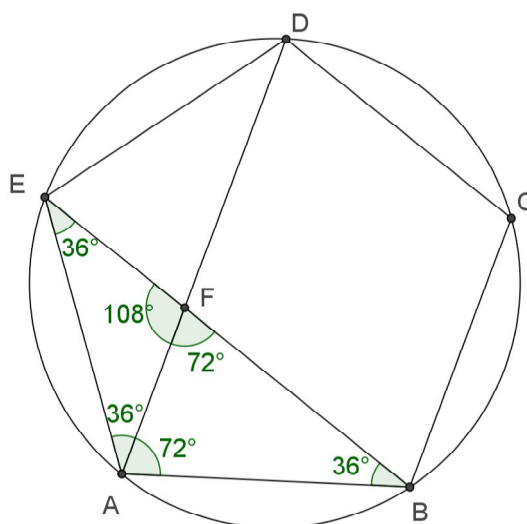
Další možná konstrukce je pomocí úhломěru. Libovolný pravidelný n -úhelník je sjednocením n shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu n -úhelníku. Velikost vnitřního úhlu u vrcholu je rovna $\frac{180^\circ}{n}$.

Pravidelný pětiúhelník můžeme rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků. Vnitřní úhel u vrcholu každého trojúhelníku je roven 72° . Úhly při základně musí být shodné, každý má velikost 54° . Známe-li vnitřní úhly trojúhelníku, můžeme jej sestavit a narýsovat tak celý pětiúhelník.

Dále uvedu několik vlastností pětiúhelníku a ukážeme si, proč je hodnota $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$ a proč je konstrukce 2 správná.

Ověříme platnost tvrzení:

1. Úhlopříčky, které nemají společný krajní bod, se v pravidelném pětiúhelníku protínají v poměru zlatého řezu, obr. 25.



Obrázek 25 Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka

$$\Delta ABE \sim \Delta FAE$$

$$|BE| : |AB| = |AE| : |FA|$$

$$|AB| = |BF| = |AE|$$

$$|AF| = |EF|$$

$$|BE| : |BF| = |BF| : |BE| = \varphi.$$

Důkaz:

Mějme pětiúhelník $ABCDE$. Průsečík úhlopříček AD a EB označme F . Pak trojúhelník ABE je rovnoramenný a jeho vnitřní úhel u vrcholu A je roven 108° . Úhly u základny BE musí být shodné a každý z nich měří 36° . Trojúhelník EAF je také rovnoramenný a víme, že úhel EAD je shodný s úhlem AEB . Na vnitřní úhel u vrcholu F v trojúhelníku EAF zbývá 108° . Trojúhelníky BEA, EAF jsou podobné podle věty *uu*. Platí:

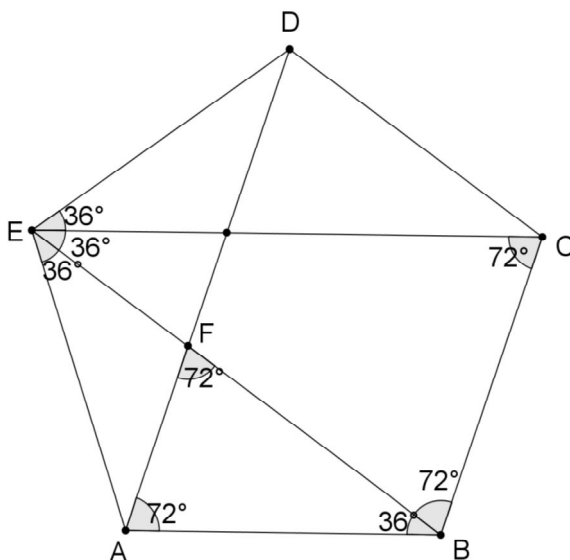
$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|EF|}$$

Po dopočítání úhlů zjistíme, že trojúhelník ABF je rovnoramenný. Pak $|AB| = |BF|$. Navíc $|AB| = |AE|$. Dosadíme do vztahu výše:

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{|BF|}{|EF|}$$

Bod F leží na úsečce BE . Bod F dělí úsečku BE zlatým řezem.

2. Z prvního odvození taktéž plyne, že poměr úhlopříčky a strany pravidelného trojúhelníku je zlatý. $|BE| : |AB| = \varphi$, obr. 26.



Obrázek 26 Tvrzení 2

Již víme, že $|\sphericalangle AEB| = 36^\circ$ a $|\sphericalangle CED| = 36^\circ$. Úhel BEC dopočítáme a je roven 36° . Trojúhelník BCE je rovnoramenný se základnou BC . Úhly při základně jsou shodně a tudíž rovny 72° . Z předchozího tvrzení víme, že úhly 72° jsou i v trojúhelníku AFB . Trojúhelníky BCE , FAB jsou podobné podle věty uu . Pak platí, [8]:

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|}.$$

Dále platí:

$$|BC| = |AB| - |BF|,$$

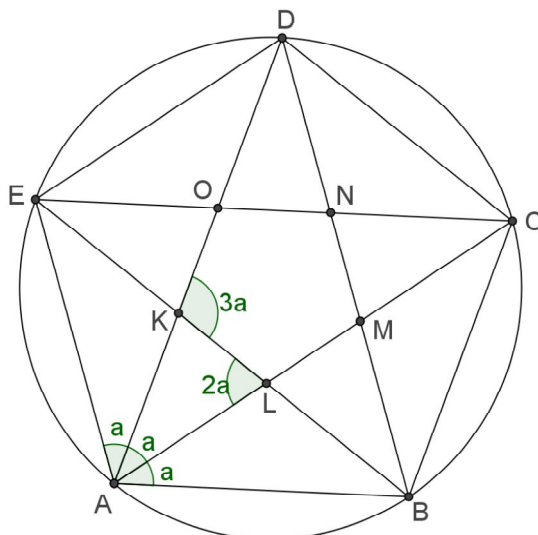
$$|FA| = |EF|,$$

$$\frac{|BC|}{|FA|} = \frac{|BF|}{|EF|}.$$

Podle tvrzení 1 platí: $\frac{|BF|}{|EF|} = \varphi$.

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|FA|} = \frac{|BF|}{|EF|} = \varphi.$$

3. Sestrojíme-li všechny úhlopříčky tohoto pravidelného trojúhelníku, dostáváme pěticípou hvězdu (pentagram), uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník. Poměr délek stran původního a nového pětiúhelníku se rovná druhé mocnině zlatého čísla, obr.27.



Obrázek 27 pentagram

Průsečíky úhlopříček pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku $KLMNO$, obr. 27. Poměr stran pětiúhelníků je roven φ^2 .

Úhlopříčky dělí každý vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníku na tři shodné úhly, velikost každého z nich označme $\alpha = 36^\circ$. Z konstrukce, obr. 27, je patrné:

$$|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle ACD| = 2\alpha = 72^\circ$$

$$|\sphericalangle OKL| = |\sphericalangle OEK| + |\sphericalangle EOK| = 3\alpha = 108^\circ$$

$$\triangle EOK \cong \triangle AKL \cong \triangle BLM \dots$$

Pětiúhelník $KLMNO$ je pravidelný. Označme délky jeho stran x . Je-li délka původního pětiúhelníku $ABCDE$ rovna jedné, platí:

$$|AE| = |AO| = 1,$$

$$|AK| = |DO| = 1 - x,$$

$$\varphi = \frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AO|}{|AK|} = \frac{|AO|}{|AO| - |KO|}$$

Po úpravě a využití rovnosti $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ získáváme:

$$\frac{|AO|}{|AK|} = \frac{\varphi}{\varphi - 1} = \varphi^2.$$

5 FIBONACCIHO POSLOUPNOST

Tato kapitola je věnována souvislosti Fibonacciho čísel a zlatého řezu. Kapitola pojednává o historii Fibonacciho posloupnosti a postupu jak Fibonacciho posloupnost generuje zlatý řez.

Leonardo Pisano, později zvaný Fibonacci (asi 1170–1230), vyslechl legendu o vzniku života na Zemi, kdy první pramáti a praotec zplodili muže a ženu. Ti dospěli a po čase zplodili další dvojici. Mezitím však nesmrtelní prarodiče zplodili další dvojici, a tak to šlo dál a dál. Dospělá dvojice plodila generaci za generací další dvojice...

Fibonacci nad touto legendou přemýšlel a vyšlo mu, že počet dospělých párů roste následovně:

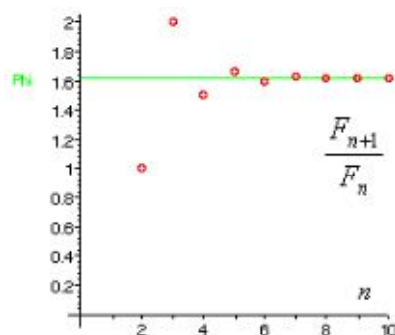
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Pravidlo této posloupnosti je jednoduché – každý další člen je součet dvou předcházejících členů. To ale zdaleka není všechno!

Uvažujme podíly dvou po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti, vydělíme každé číslo číslem předcházejícím. Hledáme čísla $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, kde $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots; n \in \mathbb{N}$. Nalezneme níže uvedenou posloupnost čísel:

n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	$\frac{1}{1} = 1,0000000000$
2	$\frac{2}{1} = 2,0000000000$
3	$\frac{3}{2} = 1,5000000000$
4	$\frac{5}{3} = 1,6666666667$
5	$\frac{8}{5} = 1,6000000000$
6	$\frac{13}{8} = 1,6250000000$
7	$\frac{21}{13} \cong 1,6153846154$
8	$\frac{34}{21} \cong 1,6190476191$
9	$\frac{55}{34} \cong 1,6176470588$
10	$\frac{89}{55} \cong 1,6181818182$

Tuto posloupnost můžeme znázornit také graficky, obr. 28.



Obrázek 28 Grafické znázornění posloupnosti [9]

Limita této posloupnosti je rovna hodnotě zlatého čísla, nejčastěji však nazývána zlatý řez. Jak jsme již uvedli, má hodnotu přibližně 1,618034. Jedná se o iracionální číslo.

Zlaté číslo lze tedy zavést jako poměr úseček, ale i jako limitu [14]

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right).$$

6 BINETOVA FORMULE

Nezastupitelnou úlohu při analýze Fibonacciho čísel mají i konstanty φ a $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$. Generují přímo n -tý člen Fibonacciho posloupnosti.

$$F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\sqrt{5}}.$$

Tento výraz nazýváme Binetova formule pro Fibonacciho čísla.

Tuto formuli publikoval již v roce 1765 Leonhard Euler (1707–1783). V roce 1843 ji znovu objevil francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856), [1].

Úloha: Dokažte platnost Binetovy formule pro Fibonacciho čísla:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\varphi - \varphi'} = \frac{\varphi^n - (\varphi')^n}{\sqrt{5}}, \text{ pro } \forall n \in N_0,$$

$$\text{Pro } \tilde{\varphi} \text{ platí: } \tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dosadíme-li do Binetova vzorce postupně $n = 1$ a $n = 2$, musí nám vyjít (za předpokladu, že je vzorec správný) $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Dále ověříme, že pro vzorec platí rekurentní vztah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Při výpočtu je využito vlastností $\varphi + 1 = 2$, $\tilde{\varphi} + 1 = \tilde{2}$, [10].

n = 1:

$$F_1 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1.$$

n = 2:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-1} - \tilde{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-2} - \tilde{\varphi}^{n-2}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\varphi^{n-2}(\varphi+1) - \tilde{\varphi}^{n-2}(\tilde{\varphi}+1)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-2} \cdot \varphi^2 - \tilde{\varphi}^{n-2} \cdot \tilde{\varphi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

7 FIBONACCIHO ČÍSLA KOLEM NÁS

V následující kapitole se zaměřím na využití Fibonacciho čísel a jejich souvislost se světem přírody. Vynechám nejznámější úlohu tzv. Fibonacciho králíky, k nahlédnutí bude v další kapitole jako metodické zpracování pro žáky.

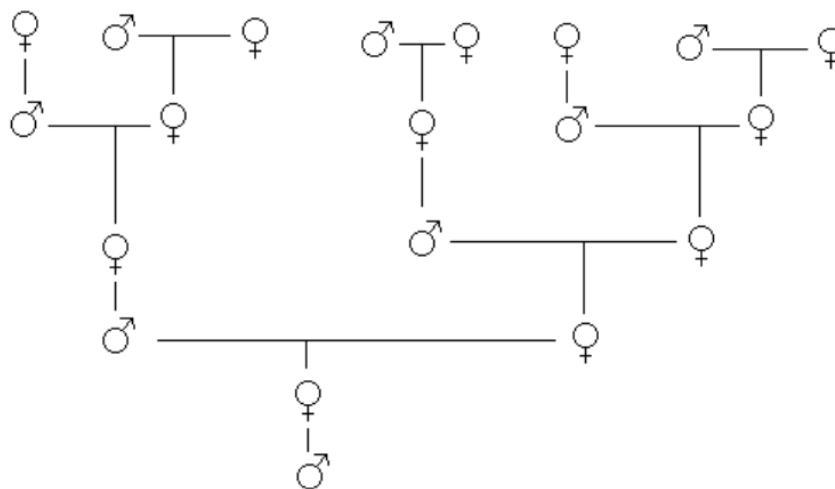
Dále čtenáře upozorňuji, že veškerá tvrzení o výskytu zlatého řezu, logaritmické spirály a dalších geometrických útvarů jsou nadnesená. Informace o výskytu a užití zlatého řezu jsou výsledkem opakovaných a aproximovaných měření. Budu-li mluvit například o pravidelném pětiúhelníku, je myšlen model, který nám ho na první pohled připomíná.

7.1 Včela medonosná (*Apis mellifera* L.) a její rodokmen

Tento druh je velmi známý a významný. Chceme-li si ukázat souvislost Fibonacciho čísel s rodokmenem včely medonosné, musíme znát některá méně známá fakta o ní. A to, že ne všechny z nich jsou potomky dvou rodičů. V kolonii včel existuje přísná hierarchie. Jedna zvláštní samice je nazývána královna a produkuje vajíčka. Dále dělnice, tedy samice, které však neprodukují vajíčka. Včelí roj má i několik samců – trubců.

Samci jsou potomky královny, ale vznikají z neoplozených vajíček. Tedy trubci mají pouze matku, žádného otce. Samice (dělnice) vznikají z oplozených vajíček, mají oba rodiče.

- Trubec má pouze matku.
- Trubec má 2 prarodiče (samici a samce).
- Trubec má 3 praprarodiče, jeho babička měla dva rodiče a dědeček jednoho,...



Obrázek 29 rodokmen včely medonosné [7]

Pro přehlednější nalezení Fibonacciho posloupnosti zapíšeme rodokmen do tabulky:

Počet	Rodiče	Prarodiče	Praprarodiče	Další předci	...	
Trubci	1	2	3	5	8	...
Včely	2	3	5	8	13	...

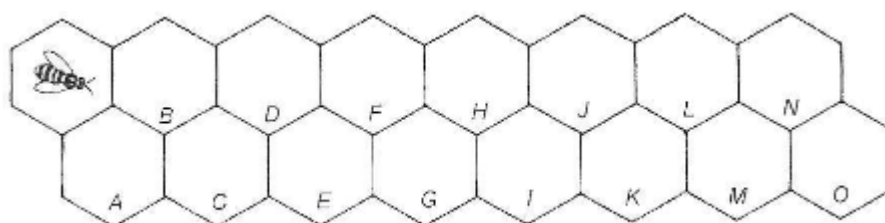
7.2 Včela medonosná a cesty v buňkách plástve

Rodokmenem včel však spojitost včel s Fibonacciho posloupností nekončíme.

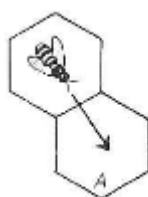
Zajímavý příklad nám uvádí Jarošová [10]. Představme si sousední řady buněk v plástvu. Pokusme se nalézt počet cest, kterými se může včela přesunout z jedné buňky do jiné skrze buňky ostatní. Může lézt pouze vpravo nebo šikmo vpravo dolů nebo šikmo vpravo nahoru.

Označme b_n počet cest k n -té buňce. Potom existuje právě jedna cesta k buňce A , viz obr. 31, $b_1 = 1$.

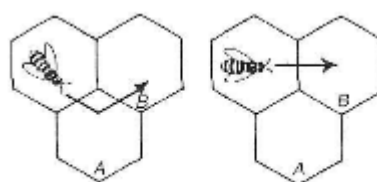
Do buňky B vedou dvě odlišné cesty, viz obr. 32. $b_2 = 2$. K buňce C se včela může dostat třemi různými způsoby, viz obr. 33, $b_3 = 3$.



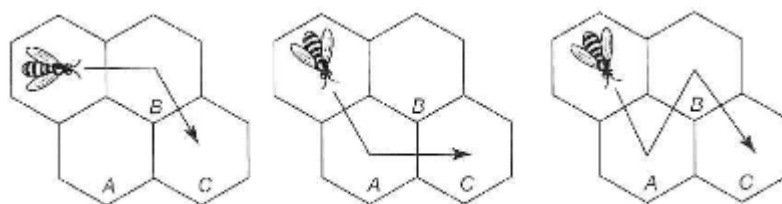
Obrázek 30 sousední řady buněk [10]



Obrázek 31 Cesta do buňky A [10]

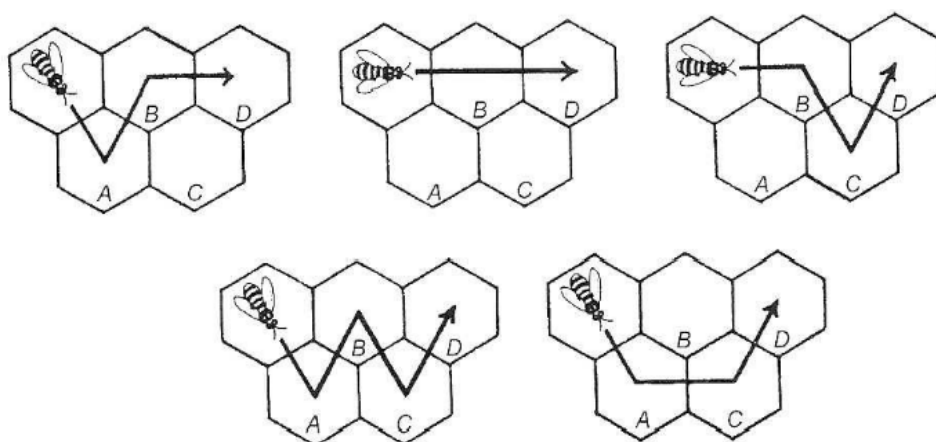


Obrázek 32 Cesta do buňky B [10]



Obrázek 33 Cesta do buňky C [10]

Mnozí již začátek Fibonacciho posloupnosti vidí, ale ukážeme ještě pro cestu do buňky D. Na obr. 34 je patrné, že do buňky D existuje pět rozdílných cest, proto $b_4 = 5$.



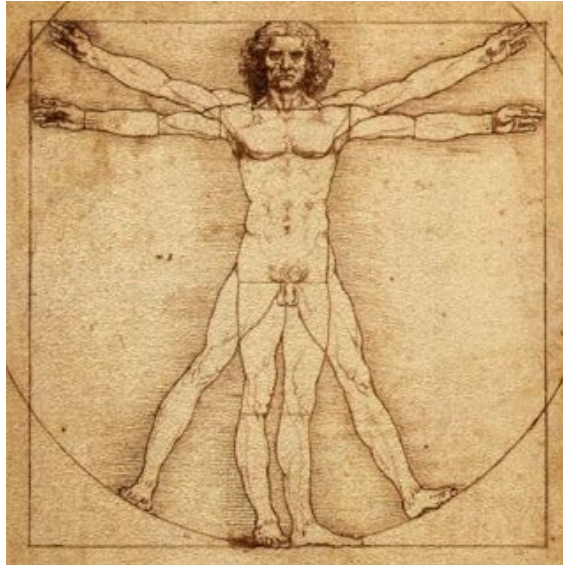
Obrázek 34 Cesta do buňky D [10]

Vývoj Fibonacciho posloupnosti uvedu přehledněji v tabulce:

n	1	2	3	4	5	...	n
b_n	1	2	3	5	8	...	?

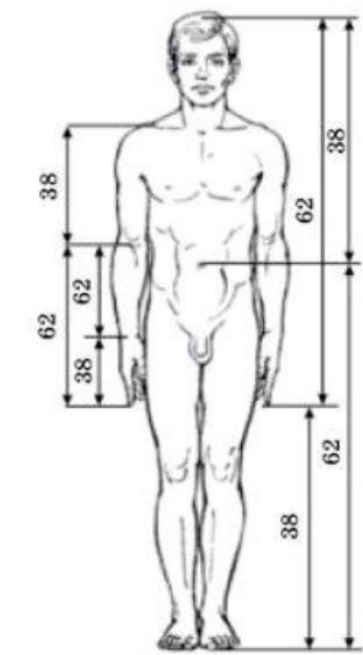
7.3 Lidské tělo

Stavbou a poměry lidského těla se zabývali zejména architekti a malíři již od antického Řecka. Úvahy dále rozvinul římský architekt a stavitel Vitruvius. Podle něho se délka rozpjatých paží rovná výšce těla a tudíž je možné lidské tělo zakreslit do čtverce. Kolem této figury opsal kružnici, jejíž střed je v pupku. Pupek je přirozeným středem, nepůlí však tělo. Jeho myšlenky graficky zpracoval Leonardo da Vinci, který tak vytvořil známý obraz Vitruviánského člověka, pbr. 35.

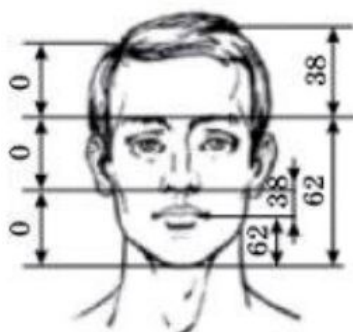


Obrázek 35 Vitruviánský člověk

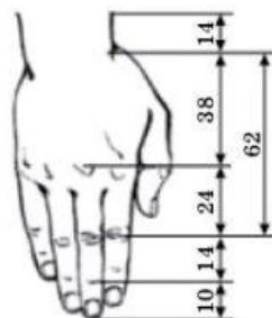
Zlatý řez na lidském těle popsal Adolf Zeising, který zlatý řez považoval za pravidlo, základní princip krásy. Podle Adolfa Zeisinga je vzdálenost od temene k pupku ke vzdálenosti pupku od podložky ve stejném poměru jako tato vzdálenost k výšce těla. Zlatý řez podle něj platí i pro končetiny, proto délka předloktí je k délce paže ve stejném poměru jako délka celé horní končetiny k předloktí s rukou, obr. 36. Tento poznatek je však málo užívaný, protože má u figury tabulku, jejíž užití je dosti komplikované. Jeho názory zřejmě ovlivnili autory poloviny 19. a 20. století.



Obrázek 36 lidské tělo [18]

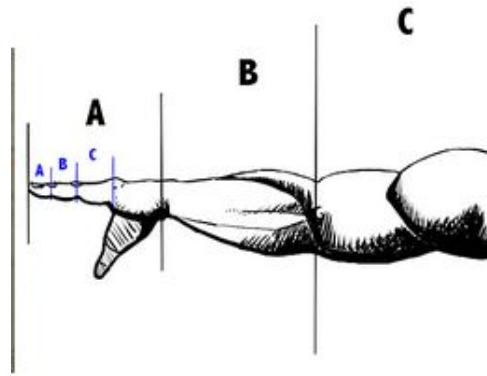


Obrázek 37 obličej [18]

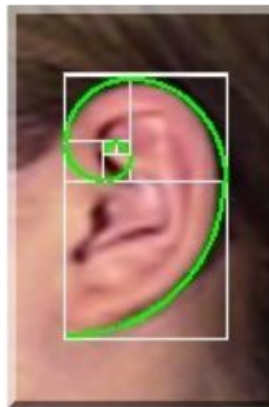


Obrázek 38 ruka [18]

Zápěstí by mělo rozdělovat ve zlatém řezu ruku s prsty od předloktí, obr. 39. Nezpochybnitelný je i fakt, že zdravý člověk má 2 ruce, na každé po 5 prstech, které jsou rozděleny třemi články. V zápěstí pak 8 kůstek. Čísla 2, 3, 5, 8 nám jistě něco říkají.

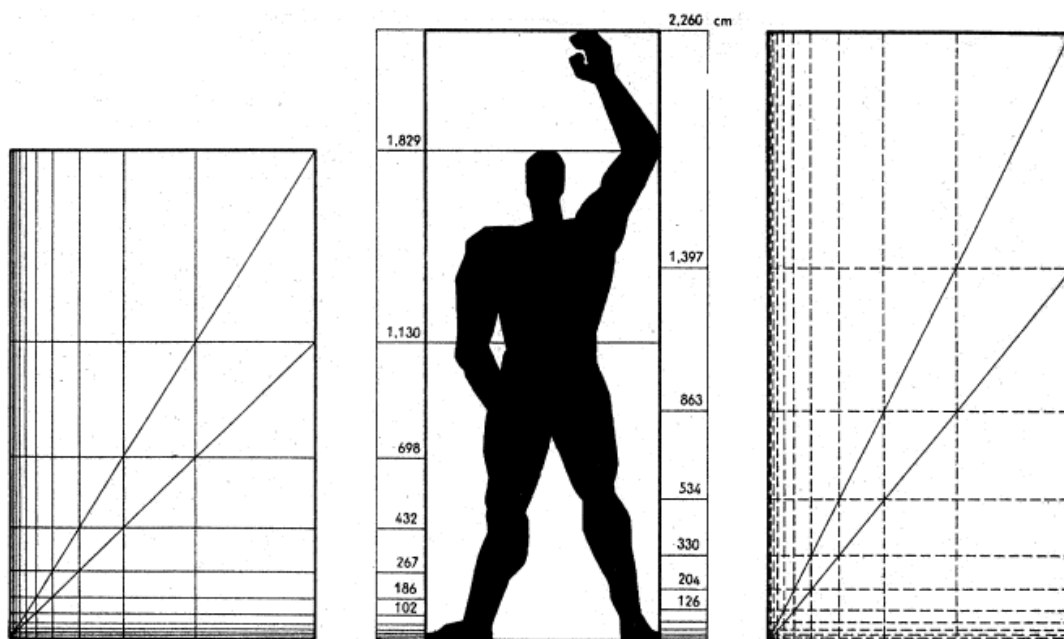


Obrázek 39 lidská paže, dostupné z <http://www.fotoknihy-mcl.cz>



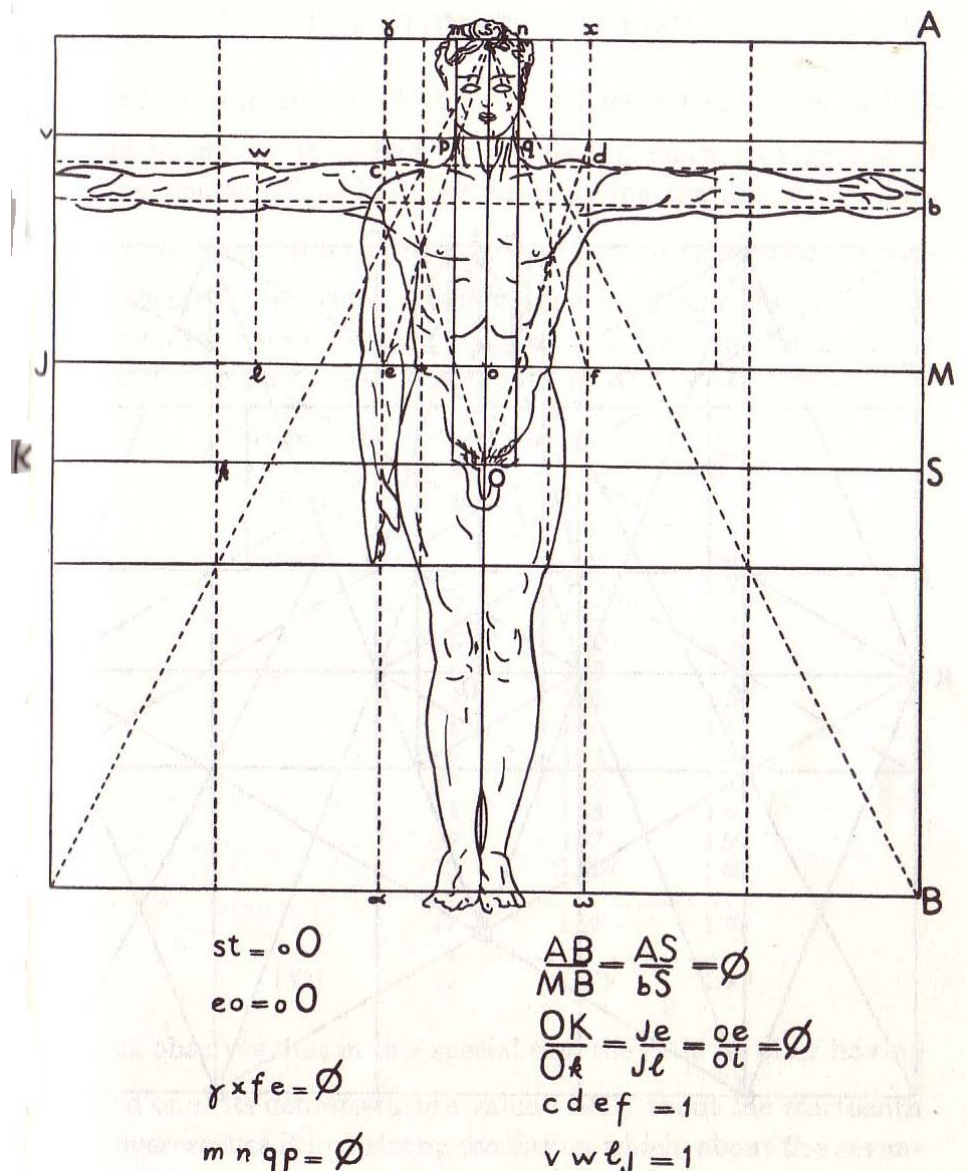
Obrázek 40 zlatá spirála a lidské ucho

Francouzský architekt Le Corbusier (1887–1965) ve své studii Modulor zformuloval systém, který se opírá o zlatý řez a míry člověka. Modulor je systém proporcí založených na poměrech výšky stojícího člověka a člověka se vzpaženou rukou. Každý úsek první série rozměrů je polovinou série druhé. Obě nakreslené do jednoho obrázku dávají rozdělení, kde mimo dělení v zlatém řezu nastává půlení, [11].



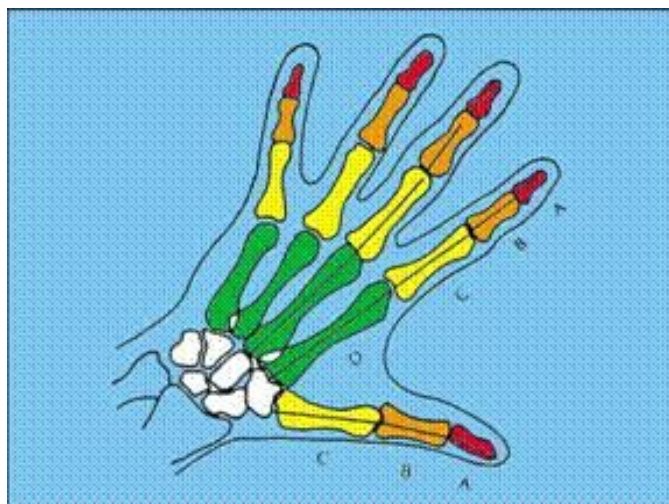
Obrázek 41 systém Modulor [11]

Harmonickou analýzu celého lidského těla nám ukazuje Huntley, obr. 42.



Obrázek 42 tělo atleta, harmonic analysis [7]

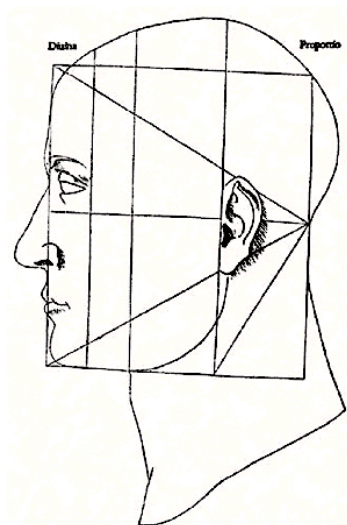
Zlatý řez nacházíme i v dnešní době, podíváme-li se na rentgen ruky, obr. 43. Vidíme, že články prstů jsou v poměru zlatého řezu. Na obr. 43 je článek prstu označený jako *A* ku článku prstu *B* v poměru zlatého řezu. Článek *B* je ve stejném poměru k dalšímu článku prstu *C* atd.



Obrázek 43 rentgen lidské ruky

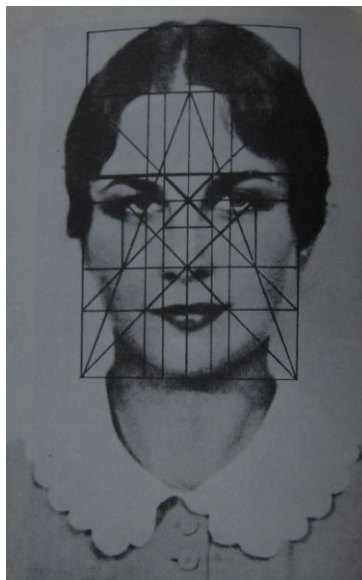
Již Leonardo da Vinci aplikoval geometrické proporce a zlatý řez na lidskou tvář. Mlčenlivý Leonardo však o svých dílech málokdy diskutoval, a tak zda vůbec a čím se přesně řídil, je jen předmětem spekulací.

Hlava by měla být jednou osminou postavy dospělého člověka, [2]. Lidský obličej nabízí mnoho kombinací, kde spatříme zlatý řez. Uvedu například, že výška a šířka lidské tváře by měla být v poměru zlatého řezu, [16]. Zlatý řez nalezneme dokonce v ústech. V každé čtvrtině chrupu se vystřídá za život 13 zubů, 5 v dětství a 8 v dospělosti

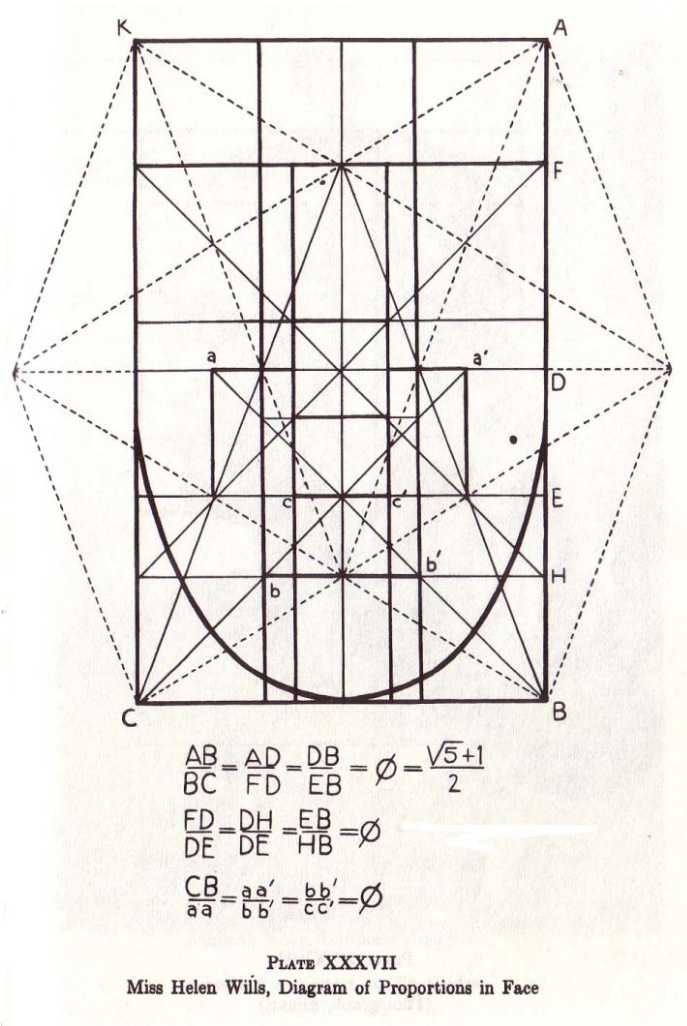


Obrázek 44 zlatý řez a lidská tvář [19]

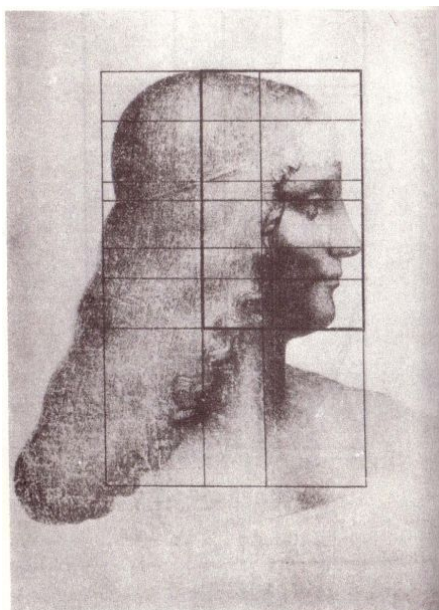
Ideální zlatý řez se objevuje v průměru mnoha měření lidského těla nebo jinak na ideálních případech. Perfektní rozdělení obličeje v poměru zlatého řezu můžeme nalézt v obličeji Helen Wills (olympijská tenisová šampiónka), obr. 45. Dalším takovým případem je profil obličeje Isabelly d'Este, obr. 46.



Obrázek 45 Miss Helen Wills, Harmonic Analysis [7]



Obrázek 46 Miss Helen Wills, Diagram proporcí obličeje [7]



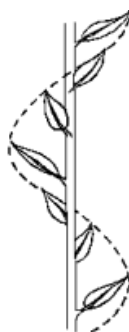
Obrázek 47 Isabella d'Este, [7]

7.4 Rostliny

7.4.1 Fylotaxe

Fibonacciho posloupnost se vyskytuje u fylotaxe rostlin – obor zabývající se uspořádáním listů na stonku. Termín zavedl Charels Bonnet. V 19. století pak vznikla matematická fylotaxe, u zrodu stáli Karl Friedrich Schimper, Alexander Braun, August Bravais a Louis Bravais.

Jak uvádí Livio [14], vertikální stonek při svém růstu vytváří listy ve zcela pravidelném rozmístění. Listy nerostou jeden nad druhým, to by bylo nevýhodné pro působení slunečního svitu a deště. Přejít jednoho listu (či větvičky) na druhý, má charakter šroubovitého vynutí kolem stonku.



Obrázek 48 uspořádání listů na stonku [11]

Listy na stonku vyrůstají nad předchozím listem posunuty o určitý úhel. Tento úhel vyjadřují botanici ve tvaru zlomku, jenž udává, jakou část obvodu kružnice vytíná.

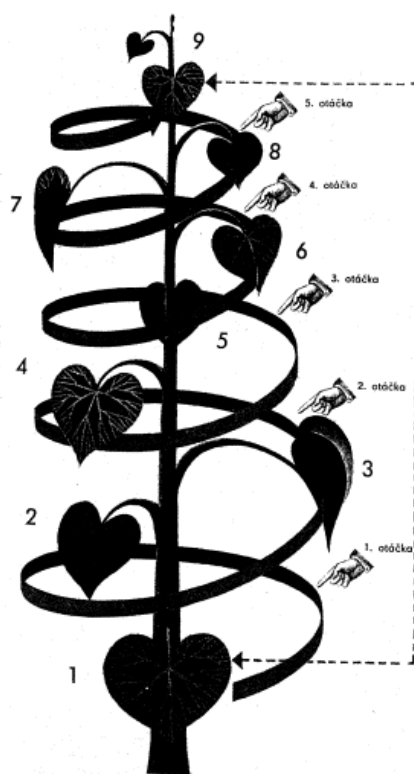
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$$

Podíváme-li se na čitatele a jmenovatele zlomků, nacházíme Fibonacciho posloupnost.

Můžeme stanovit, že listy jsou postaveny jednak ve spirále, kde určitý počet listů tvoří skupiny mezi dvěma listy stojícími nad sebou, a jednak tvoří listy určitý počet svislých řad, v nichž stojí listy vždy po určitém počtu otáček spirály kolem osy. Tedy dva sousední listy jsou od sebe vzdáleny vždy o určitou výšku - distanci d a odchýleny o úhel.

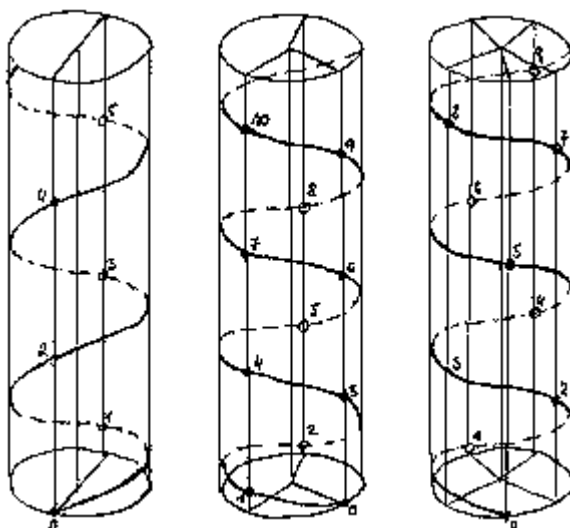
Divergence je stálá a lze ji vyjádřit zlomkem, který nám v čitateli udává počet otáček spirály kolem stonku, ve jmenovateli pak počet listů v jedné skupině.

Úhel mezi spojnicemi středu stonku rozpracovali ve své práci z roku 1837 bratři Bravaisové. Objevili, že nové listy vyrůstají zhruba ve stejném úhlu kolem středu a že tento úhel (divergenční úhel) se blíží hodnotě $137,5^\circ$. Tento úhel je určen zlatým řezem. Úhel, který dělí celou otočku ve zlatém řezu, je roven $\frac{360}{\varphi} = 222,5^\circ$. Jelikož je to více než polovina kruhu, měli bychom od 360° odečíst $222,5^\circ$ a dostáváme právě $137,5^\circ$. Tento úhel je někdy nazýván zlatý úhel.



Obrázek 49 Fylotaxe rostlin

Uvedu schématicky na obrázku střídavé postavení listů na stonku se zlomkem $\frac{1}{2}$, obr. 50, které najdeme u lípy či vinné révy. Kde stojí vždy třetí list nad prvním, přičemž celý cyklus je jediný obvod genetické spirály.



Obrázek 50 genetická spirála se zlomkem 1/2

U olše lísky tvoří genetická spirála též jeden obvod, ale přechází 3 listy, zlomek by byl roven $\frac{1}{3}$.

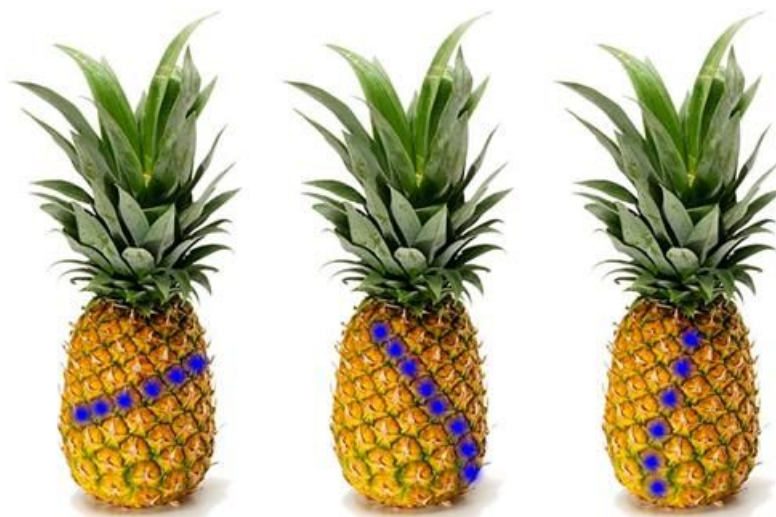
U stromů např. dub, višně, topol, akát, vrba a jabloň stojí listy v 5 řadách a genetická spirála se otočí okolo osy dvakrát, genetická spirála je vyjádřena zlomkem $\frac{2}{5}$.

Genetická spirála se zlomkem $\frac{3}{8}$ je méně častá a najdeme jej např. u lnu, ředkve, vavřínu.

O příčinách postavení listů jsou různé teorie, A. Braun ve spirále postavení listů spatřoval uskutečnění matematické myšlenky. Hanstein a později Kerner si genetickou spirálu vysvětlovali tak, že každý list se snaží zaujmout místo, kde bude mít dostatek světla, vzduchu a místa. Ve výčtu teorií bychom mohli pokračovat, je však nesporné, že rozestavení listů závisí na každém rostlinném druhu, tak na podmínkách vnějších.

7.4.2 Kůra ananasu

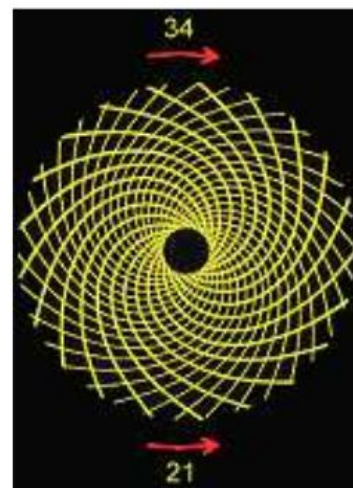
Skvostnou ukázkou fylotaxe je kůra ananasu. Každý šestiúhelníkový dílek na povrchu je součástí tří různých spirál, obr. 51. Většina ananasů má 5, 8, 13, 21 spirál o vzrůstající strmosti.



Obrázek 51 kůra ananasu [20]

7.4.3 Terč slunečnice

Německý matematik G. Van Iterson ve svém díle z roku 1907 ukázal, že seskupíme-li těsně po sobě jdoucí body, které se na hustě vinuté spirále vydělují v úhlech $137,5^\circ$. Pak lze spatřit jednu skupinu spirál směřujících podle hodinových ručiček a druhou mířící opačně.



Obrázek 52 terč slunečnice [10]

Počty těchto spirál mají tendenci být členy Fibonacciho posloupnosti. U slunečnice to bývá 34 spirál po směru hodinových ručiček a 21 proti směru (počet spirál může být i 55 a 34, 55 a 89 či 89 a 144). Vše jsou samozřejmě poměry sousedních členů Fibonacciho posloupnosti.

Na otázku, proč tomu tak je, nabízejí odpověď matematici Yves Couder a Stéphane Douady. Dle jejich názoru je to jediný možný způsob, jak se do terče vejde co nejvíce semen.

7.4.4 Šišky jehličnatých stromů

Opět zde můžeme sledovat spirály ve směru i proti směru hodinových ručiček. Po směru 8 spirál a proti směru hodinových ručiček 13 spirál, obr. 53. Opět čísla odpovídají dvěma sousedním členům Fibonacciho posloupnosti.



Obrázek 53 šiška borovice [10]

Pozn. Šišky jsou v podstatě zdřevnatělé květy, proto zde nacházíme uložení ve spirále.

7.4.5 Okvětní lístky

Podíváme se blíže na okvětní lístky rostlin. Pro mnoho z nich nalezneme počet, odpovídají Fibonacciho číslům. Např. jak uvádí Jarošová, [10]:

- 1 okvětní lístek: calla,...
- 2 okvětní lístky: euforbia,...
- 3 okvětní lístky: kosatec, lilie, trilium...
- 5 okvětních lístků: blatouch, divoká růže, karafiát, columbine...
- 8 okvětních lístků: celandine, sanguinaria canadensis...
- 13 okvětních lístků: třapatka, starček, některé sedmikrásky,...
- 21 okvětních lístků: astra, čekanka, sedmikráska,...
- 34 okvětních lístků: kopretina,...
- 55, 89 okvětních lístků: čeled' hvězdnicovitých,...



Obrázek 54 calla [VI]



Obrázek 55 euphorbia [VII]



Obrázek 56 trilium [VIII]



Obrázek 57 columbine [IX]



Obrázek 58 Sanguinaria [X]

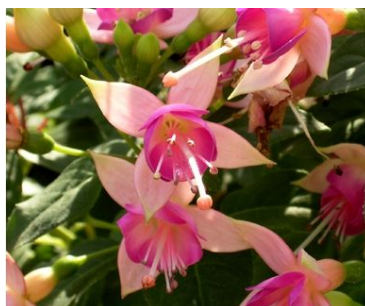


Obrázek 59 starček [X]



Obrázek 60 čekanka, Josef Dohnal [X]

Existují samozřejmě i výjimky, kde počet okvětních lístků neodpovídá Fibonacciho členu. Např. 4 okvětní lístky má fuchsie, obr. 61. Čtyřka není Fibonacciho číslo, ale je Lucasovo číslo.



Obrázek 61 Fuchsie [XI]

7.5 Zvířata

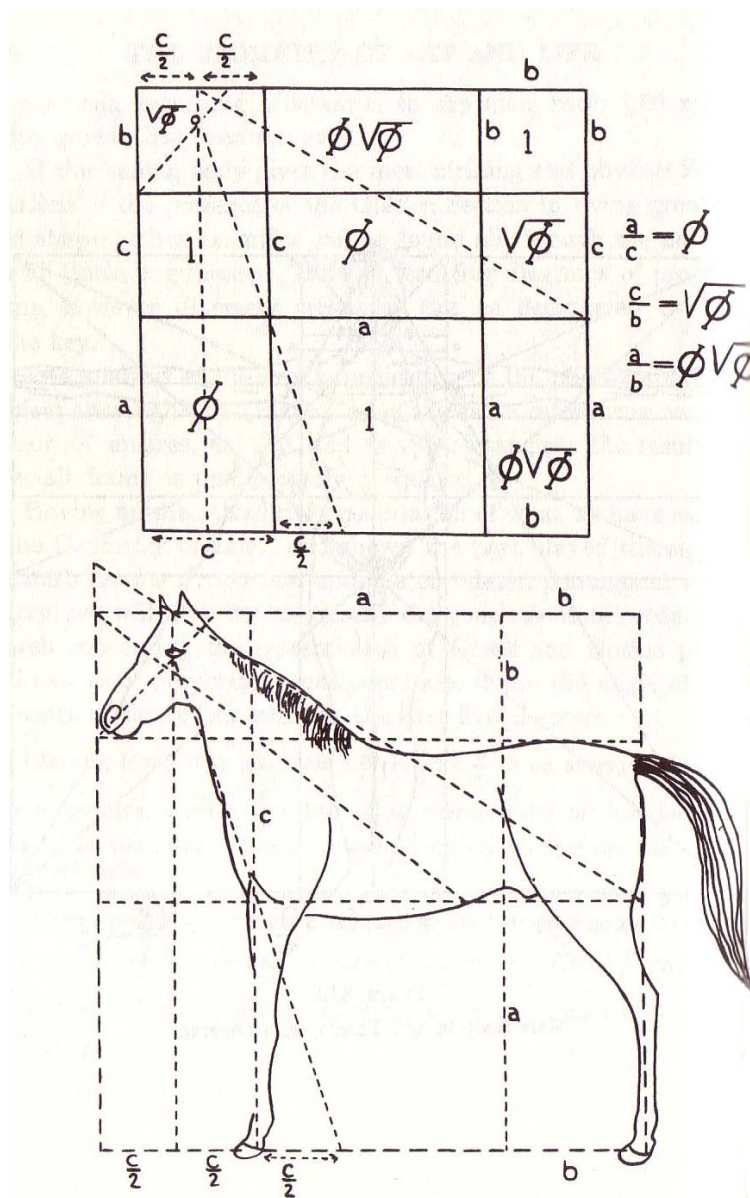
V této kapitola prozkoumáme svět zvířat. Fibonacciho čísla jsou zde velmi hojná. Spočítáme-li například rohovinové pláty na želvím krunýři, zjistíme, že jich je 13. Pět uprostřed a osm při kraji, obr. 62. Tělo pavouka je rozděleno do osmi článků, neseho osmi nohama, na každé noze je pět článků.



Obrázek 62 krunýř želvy [V]

7.5.1 Profil koně

Velmi zajímavá je analýza fotografie profilu koně perfektního plnokrevníka, obr. 63. Objevuje se zde zajímavá kombinace čtverců, φ , $\sqrt{\varphi}$ a obdélník $\varphi \cdot \sqrt{\varphi}$. Výsledný tělesný rámec koně je poté překvapivě čtverec, obr. 63.



Obrázek 63 Harmonická analýza profilu koně [7]

7.5.2 Rohy a kly

Livio [14] uvádí, že základní vlastnost, kterou má právě jen logaritmická spirála, je, že se vzrůstající velikostí se její tvar nemění. Zamyslíme-li se chvíli nad tím, je jasné, že tato vlastnost bude pasovat na mnoho růstových jevů v přírodě.

Tuto vlastnost objevíme u rohů beranů, sloních klů či rohů kudu velkého, obr. 64. Spirála vyrůstá hromaděním za sebe, s růstem se tedy rozšiřuje a vzdálenost mezi závity se prodlužuje, s tím se křivka vzdaluje od svého počátku (tzv. pólu). Otáčení pod stále stejným úhlem tak zvyšuje vzdálenost od pólu ve stejných poměrech, [14].

Pokud bychom měli optický mikroskop a přiblížili si mikroskopickou strukturu rohu, viděli bychom zlatou spirálu.

Nádhernou ukázkou zlaté spirály se pyšní samec narvala, obr. 65, který má levý špičák přeměněný v rovný kel dlouhý až 3 metry. Na povrchu klu je opět vyryta zlatá spirála.



Obrázek 64 Kudu velký [II]



Obrázek 65 zub narvala [IV]

7.5.3 Schránky měkkýšů

Podívejme se zpět na kapitolu 7.5.2, kde Livio uvádí základní vlastnost logaritmické spirály. Spirála se vzrůstající vzdáleností nemění tvar. Představme si pak ulitu měkkýše, obr. 66, zde ulita loděnky (Nautilus). Loděnka staví stále větší komůrky a uzavírá menší, které již nepoužívá. Menší opustí a přestěhuje se do větší,

nemusí tak měnit celkový tvar svého těla. Každý přírůstek skořápky je doprovázen poměrným zvýšením jejího poloměru. Tento příklad krásně ukazuje, proč příroda inklinuje k zlatému řezu.



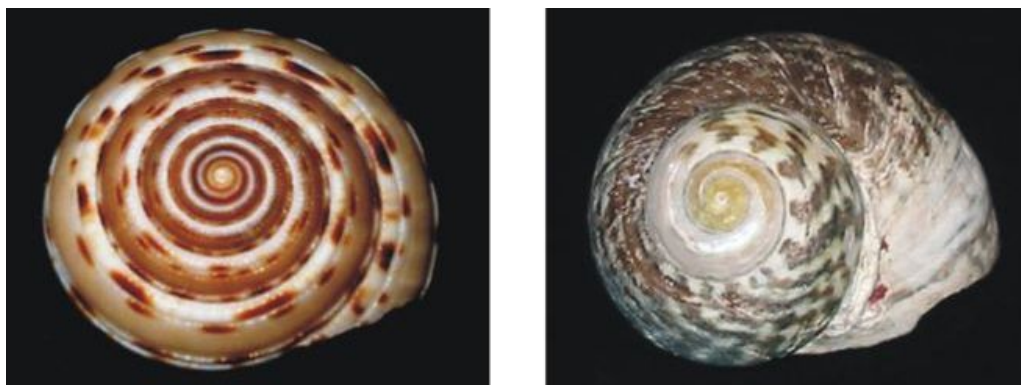
Obrázek 66 Nautilus [I]

Méně známý je živočich Oxygurus, obr. 67. Jedná se o volně plovoucího mořského živočicha. Jeho podrobnější prozkoumání zcela jistě povede k velmi podmětným závěrům.



Obrázek 67 Oxygurus [III]

Další ulity plžů, které jsou ve tvaru logaritmické spirály, uvedu na obrázcích.



Obrázek 68 ulity plžů [XII]



Obrázek 69 Ulita plže [XIII]



Obrázek 70 ulita plže [XIII]

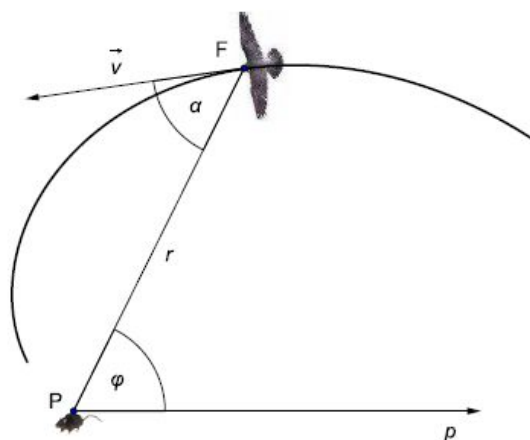
7.6 Let dravců

Logaritmická spirála je ekviangulární (rovnoúhlá) a právě této vlastnosti využívají sokoli pro svůj let. Označení ekviangulární označuje další význačnou vlastnost logaritmické spirály. Narýsujeme-li úsečku od pólu k jakémukoliv bodu této křivky, rozdělíme křivku vždy ve stejném úhlu, [14].

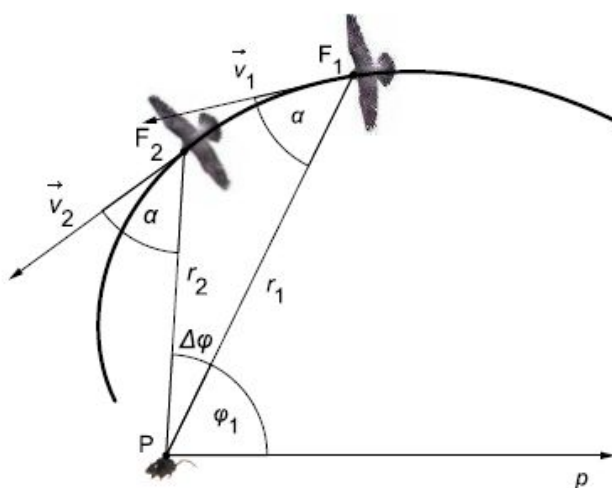
Sokol stěhovavý je jeden z nejrychlejších letců. Na svou kořist se snaží rychlostí až 300 km/h. Mohli by však létat ještě rychleji, kdyby se vrhali na kořist střemhlav a nedrželi se logaritmické spirály.

Biolog Vance A. Tuckera přemýšlel, proč sokoli nelétají nejkratší možnou cestou. Ve svém výzkumu publikované v listopadu 2000 v *Journal of Experimental Biology* ukazuje, že sokoli drží při útoku na kořist hlavu zpříma a sledují přitom logaritmickou spirálu. Díky tomu, že odchylka tečny a průvodiče je v každém bodě spirály stejná, umožňuje jim tato dráha neustále sledovat cíl při maximální možné rychlosti. Při přímé trase letu by vzhledem k postavení očí museli mít hlavu otočenou

o 40° , což by je značně zpomalovalo. Díky rovnoúhlé vlastnosti této spirály jim právě tato dráha umožňuje neustále sledovat cíl, [14].



Obrázek 71 počáteční stav letu [4]



Obrázek 72 dvě po sobě jdoucí pozice [4]

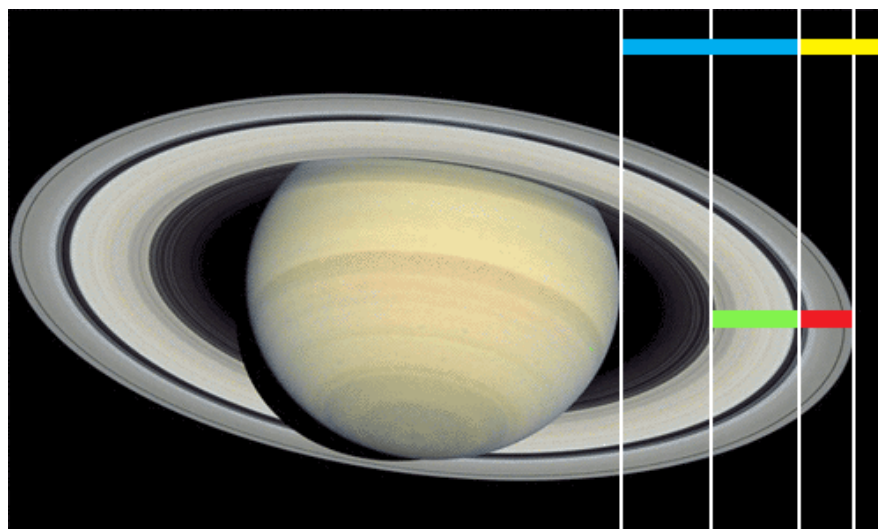
7.7 Fibonacciho posloupnost ve vesmíru

„Svět v zrníčku písku rozeznat,
 A nebe v divoké květině,
 Bezmezný prostor do vlastních dlani brát,
 A věčnost prožít jen v hodině.”

W. BLAKEA (1757–1827)

7.7.1 Prstence Saturnu

Abychom nezůstávali stále na planetě Zemi, další ukázkou jsou prstence planety Saturnu. I zde nacházíme skrytý řád a poměr vzdálenosti prstenců od planety je v poměru zlatého řezu, obr. 73.



Obrázek 73 Saturn a jeho prstence [6]

Další zajímavý výskyt zlatého řezu ve vesmíru uvádí V. Hordějčuk, [6]. Seřadíme planety a objekty mezi nimi, vypočítáme jejich střední vzdálenosti od Slunce a relativní hodnotu k planetě předchozí. Data zaneseme do tabulky a bude až překvapivé, že číslo, ke kterému vzdálenost konverguje, bude blízké zlatému řezu.

Planeta	Střední vzdálenost od Slunce	Relativní vzdálenost k předchozí planetě
Merkur	57,909,175 km	1
Venuše	108,208,930 km	1,868597
Země	149,597,870 km	1,382490
Mars	227,936,640 km	1,523662
Ceres	413,715,000 km	1,815044
Jupiter	778,412,010 km	1,881517
Saturn	1,426,725,400 km	1,832867
Uran	2,870,972,200 km	2,012281
Neptun	4,498,252,900 km	1,566805
Pluto	5,906,376,200 km	1,313028
Eris	10,210,000,000 km	1,728640

Průměr		1,629540...
Zlatý řez		1,618034...

Zůstává otázky, zda jsou v naší soustavě ještě další objekty a relativní vzdálenost by se dále blížila zlatému číslu.

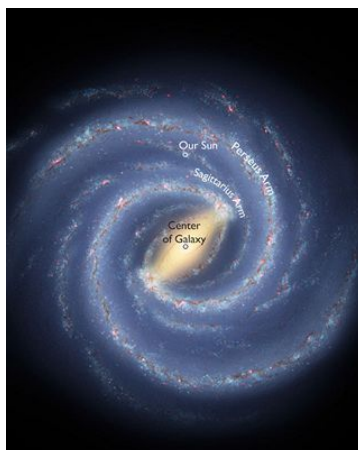
7.7.2 Mléčná dráha

Zlatý řez, jenž řídí růst slunečnice či let sokola objevíme i v uskupení hvězd do stejné roviny jako například soustavy Mléčné dráhy. Tyto gigantické galaxie obsahují miliardy hvězd jako je i naše Slunce. Pomocí Hubbleova teleskopu dnes můžeme sledovat asi sto miliard galaxií a mnohé z nich jsou spirálními galaxiemi.

Podle Newtonova gravitačního zákona zdvojnásobení vzdálenosti oslabuje gravitační sílu čtyřikrát (síla je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti). Kdyby se při zdvojnásobení vzdálenosti gravitační síla snižovala osmkrát (síla by byla nepřímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti). Pak v takovém vesmíru by se planety pohybovali po zlaté spirále, buďto ke Slunci nebo by se vzdalovali od do vesmíru, [14]. Buďme tentokrát rádi, že příroda dala přednost elipse před zlatou spirálou.

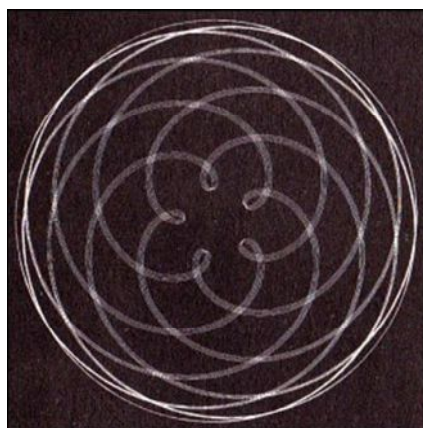
Spirální galaxie je relativně tenkým diskem, složeným z plynu, prachu a hvězd. Celý tento galaktický disk rotuje okolo jádra. Při různých vzdálenostech od jádra se rychlost rotace mění. Vyšší je blíže jádra a snižuje se směrem od jádra. Proč má tolik galaxií tvar právě spirály?

Základní otázka, kterou astrofyzikové zkoumali, bylo, jak se velkoplošný tvar, kde vnitřní části disku rotují rychleji než vnější, může udržet stabilní. Například v okolí Slunce je rychlost 220 kilometrů za sekundu a jedno otočení trvá přibližně 225 milionů let. Právě kvůli různé rychlosti rotace částí disku má galaxie tvar zlaté spirály. Jiný velkoplošný tvar by časem podlehl rozpadu, [14].



Obrázek 74 Mléčná dráha, Foto: R. Hurt

Zlatý poměr můžeme také najít ve vztahu Země - Venuše. Venuše každých osm let vykreslí okolo planety Země pětičetnou rozetu, obr. 75. Osm let na Zemi je třináct let na Venuši, [1]. Pět, osm a třináct jsou prvky Fibonacciho posloupnosti.



Obrázek 75 pětičetná roseta [15]

A nám tak nezbyvá než souhlasit s Greenem, že „vesmír dává smysl“.

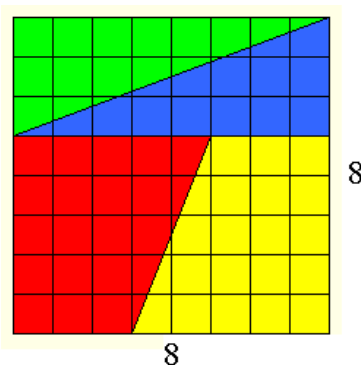
8 METODICKÉ ZPRACOVÁNÍ ZLATÉHO ŘEZU

8.1 Pracovní list č. 1

CÍL AKTIVITY: Zájmová hodina geometrie. Ukázka využití Fibonacciho posloupnosti

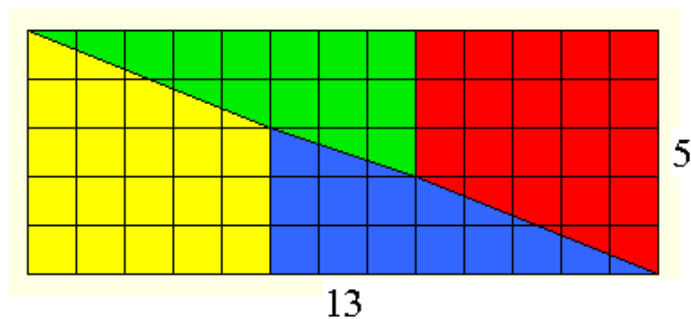
Pozn. motivačně doporučuji žákům pustit video, dostupné z <https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA>.

ÚKOL1: Na čtvercovou síť narýsujte čtverec 8 x 8 cm. Následně jej rozstříhejte dle předlohy.



Obrázek 76 rozdělení čtverce

ÚKOL 2: Vzniklé dílky přeskládejte do tvaru obdélníka, obr. 77.



Obrázek 77 předloha pro obdélník

Je možné, aby ze čtverce, který má obsah 64 cm^2 , vznikl obdélník s obsahem 65 cm^2 ?

Pokus se o vysvětlení problému (použij k podrobnějšímu narýsování program GeoGebra, k důkazu pak podobnost trojúhelníků).

ŘEŠENÍ:

Body E a F neleží v přímce. Vzniká nám mnohoúhelník $KFEH$, jenž má obsah 1 cm^2 .

Provedeme důkaz pomocí podobnosti trojúhelníků.



Obrázek 78 řešení v programu GeoGebra

Nechť bod M náleží na přímce KL a prodloužené straně EF trojúhelníka EFN . Jestli je EFK přímka a ne lomená čára, potom by bod M musel splynout s bodem K . Z podobnosti trojúhelníků EFN a EML , dostaneme:

$$|ML| : |FN| = |EL| : |EN|$$

$$|ML| : 3 = 13 : 8$$

$$|ML| = (13 : 8) \cdot 3$$

$$|ML| = 4,875$$

Délka strany ML je 4,875, zatímco KL měří 5. Body M a K nejsou proto totožné.

Zajímavost: Tento příklad je propojen s Fibonacciho posloupností, vypíšeme-li si délky stran rovinných útvarů: 8, 13, 5. Vidíme členy Fibonacciho posloupnosti:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Pozn.

Takto lze sestrojít libovolný příklad. Využijeme-li tři členy posloupnosti jdoucí po sobě a sestrojíme čtverec o délce strany prostřední cifry a obdélník ze zbývajících dvou.

8.2 Pracovní list č. 2

PŘEDPOKLÁDANÉ ZNALOSTI: Žáci znají hodnotu zlatého řezu a pojem Fibonacciho posloupnost.

CÍL AKTIVITY: Zájmová hodina matematiky. Ukázka využití zlatého řezu a Fibonacciho posloupnosti zábavnou formou.

TRIK 1:

Vyberte si libovolná dvě čísla (s libovolným počtem cifer). Nyní s použitím kalkulačky nebo vlastní hlavy vytvoříme Fibonacciho posloupnost, jejíž dva první členy jsme si zvolili. Tedy sečteme první dva členy a vytvoříme tak členy třetí. Čtvrté číslo vytvoříme sečtením druhého a třetího členu. Pátý člen součtem čtvrtého a třetího, a tak dále, dokud nevytvoříme řadu dvaceti čísel.

Ukázka řešení: Jestliže bychom jako první dvě čísla zvolili 5 a 7, dostaneme řadu čísel: 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212 ...

A nyní s pomocí kalkulačky vydělíme naše dvacáté číslo devatenáctým. Co vám výsledné číslo připomíná? Samozřejmě je to fi.

TRIK 2:

Zopakujte si dělitelnost číslem 11.

Sečtěte kterýkoli deset po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti. Získaný součet je vždy dělitelný beze zbytku 11.

Ukázka řešení: Zvolme prvních deset následujících čísel Fibonacciho posloupnosti.

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$$

Takto získaný součet je dělitelný 11. ($143 \div 11 = 13$).

Součet kterýkoli desíti následných Fibonacciho čísel se vždy rovná 11 - ti násobku sedmého čísla v pořadí. Můžeme tak snadno a rychle sčítat následných Fibonacciho čísel.

TRIK 3: (Trik bleskového sčítání)

Tímto trikem bez většího úsilí můžeme velmi rychle sečíst n -tici Fibonacciho čísel a ohromit publikum. Součet Fibonacciho čísel od prvního po n -té se rovná $(n + 2) - \text{tému}$ číslu minus 1.

Ukázka řešení: Zvolíme pro ukázkou opět prvních deset členů

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$$

Na číslo 143 můžeme přijít i rychleji, než jednotlivé členy sčítat. Součet se rovná dvanáctému číslu v pořadí Fibonacciho posloupnosti, zde 144 minus 1.

Součet prvních 56 čísel je roven 58. číslu minus 1. Požádejte spolužáka či rodiče, aby vám napsali dlouhý sloupec Fibonacciho čísel, začínající 1, 1 a každé nové číslo bude součtem dvou předchozích. Spolužák, pak může určit libovolnou hranici mezi dvěma čísly sepsaného sloupce. Vy pak můžete jednoduše určit součet všech čísel před tímto mezníkem. Výsledek se bude rovnat druhému členu za předělem minus jedna.

9 ZÁVĚR

„Jestli jsem náhodou opomenul něco více či méně náležitého nebo nezbytného, prosím o odpuštění, protože nikdo není bez chyby a nikdo nemůže myslet na všechno.“

LEONARDO FIBONACCI

Po bližším zkoumání Fibonacciho posloupnosti a zlatého řezu bych ráda uvedla, že práce není shrnutím obsahu veškeré problematiky týkající se Fibonacciho posloupnosti. Neboť tato problematika je tak spleť, a v mnoha směrech vybočuje z matematiky vůbec, že jediná práce si nemůže takový cíl vytyčit.

Užití zlatého řezu specifikuji na výskytu ve světě přírody a doufám, že až příště budeme jíst ananas, posílat růži někomu blízkému či obdivovat slunečnici, vzpomene, že i zde nalezneme zlatý řez.

Kdo hledá, ten také najde a vyhledat zlatý řez je možné na místech nepředstavitelných. Jste-li vysocí například 190 cm, pak Váš pas bude asi ve výšce 1,90/1,618, tedy asi ve výšce 1,17 m. Přeměřte se!

Poslední kapitolu věnuji tvorbě metodického zpracování, které by mohli využít i učitelé základních škol. Jak řekl Charlese F. Brown:

„Průměrný učitel vypráví. Dobrý učitel vysvětluje.

Výborný učitel ukazuje. Nejlepší učitel inspiruje.“

10 LITERATURA

- 1) BURIÁNOVÁ, N.: *Fibonacciho posloupnost*. Olomouc, 2014. bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Fakulta přírodovědecká.
- 2) FLINT, T.: *Anatomie pro výtvarníky: dynamika lidských forem: [charakteristiky a tvůrčí možnosti ztvárnění lidského těla]*. 1. české vyd. Praha: Svojtka, 2005.
- 3) GHYKA, M.: *The geometry of art and life*. New York: Dover Publications, 1977.
- 4) HAŠEK, R.: *Investigation of logarithmic spirals in nature by means of dynamic geometry and computer algebra systems*. The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 6, Number 3, 2012.
- 5) HEMENWAY, Priya: *Tajný kód: záhadný vzorec v umění, přírodě a vědě*. 1. vyd. Praha: Slovart, 2009.
- 6) HUNTLEY, H. *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. New York: Dover Publications, c1970.
- 7) HORDĚJČUK, V.: *Zlatý řez*. Dotupné na www.voho.cz.
- 8) CHMELÍKOVÁ V.: *Zlatý řez nejen v matematice*. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2009.
- 9) JAROŠOVÁ, M.: *Fibonacciho čísla a jejich aplikace*. Brno, 2010. Disertační práce. Masarykova univerzita, přírodovědecká fakulta.
- 10) JAROŠOVÁ, M.: *Fibonacciho čísla a jejich souvislost s jinými matematickými pojmy*. Brno, 2007. Rigorózní práce. Masarykova univerzita, Fakulta přírodovědecká.
- 11) JIROVSKÁ, Iveta: *Užití zlatého řezu*. Diplomová práce. České Budějovice, 1995. Jihočeská univerzita, Fakulta pedagogická.

- 12) KOTKOVÁ, K.: *Zlatý řez*. Brno, 2008. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická.
- 13) KOWAL, Stanisław. *Matematika pro volné chvíle: zábavou k vědě*. 2., vyd. Překlad Jiří Jarník. Praha: SNTL, 198
- 14) LIVIO, M.: *Zlatý řez: Příběh fi, nejpodivuhodnější čísla na světě*. Praha: Dokořán a nakladatelství Argo, 2006.
- 15) OLSEN, S. A.: *Záhadný zlatý řez*. 2. vyd. Praha: Dokořán, 2013.
- 16) VINCENT, Robert: *Geometry of the golden section*. 2nd English ed. Marseille: Chalagam publ, 2007.

Internetové zdroje:

- 17) BRITTON, J.: *Fibonacci Numbers in Nature*. [online]. poslední revize 7. 5. 2005 [cit. 10. 7. 2007].
<<http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm>>.
- 18) *Mathematics of Life in the Universe*. Dostupné na http://www.istina-fi.ryazan.ru/e_page/.
- 19) PIHAN, R.: *Kompoziční pravidla*.
http://www.fotoroman.cz/techniques3/comp8_rules4.htm.
- 20) REICHL, J., VŠETIČKA, M.: *Fibonacciho posloupnost v přírodě*. Dostupné na <http://fyzika.jreichl.com>.
- 21) ŠKORNIČKA, M.: *Živá architektura. Může být i architektura bio?* Dostupné na prkticky-život.cz.

Zdroje obrázků:

- I. Close View Of Chambered Nautilus. *Fineart america* [online]. [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://fineartamerica.com/featured/close-view-of-chambered-nautilus-victor-r-boswell-jr.html>.
- II. Antelope pictures. *African Safari Pictures* [online]. [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://www.african-safari-pictures.com/antelope-pictures.html>.
- III. Atlantidae. SEAPY. *Tree of life web project* [online]. 2010 [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://tolweb.org/Atlantidae>.
- IV. Narval jednorohý. *Nie sme tu sami* [online]. 2013 [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://www.saveme.estranky.sk/fotoalbum/narval-jednorohy/narval-jednorohy/narval-13.jpg.html>.
- V. Želvy. *GamePark* [online]. 2010 [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: http://www.gamepark.cz/zelvy_39602.htm.
- VI. <http://www.hdwallpapersinn.com/cute-calla-flower-hd-wallpapers.html>.
- VII. <https://www.flickr.com/photos/tattoovet/3382983860/in/photostream/>.
- VIII. <http://cz.forwallpaper.com/images/flowers-1848.html>.
- IX. <http://cz.forwallpaper.com/wallpaper/columbine-flower-964721.html>.
- X. <http://www.botanickafotogalerie.cz>.
- XI. <http://www.novinky.cz/bydleni/zahrada>.
- XII. <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/obrazky.htm>.
- XIII. <http://zoolo.webgarden.cz/rubriky/mekkysi/plzi>.