



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

Diplomová práce  
Matematické a fyzikální aplikace  
vícerozměrného Riemannova  
integrálu

Vypracoval: Bc. Pavel Brdlík

Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková Ph.D.

České Budějovice

Duben 2015

## Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematické a fyzikální aplikace ví-  
cerozměrného Riemannova integrálu jsem vypracoval samostatně pouze s použitím  
pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím  
se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou ces-  
tou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou  
v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého  
autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím,  
aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č.  
111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu  
a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé  
kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním  
registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ..... ..

## Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat Mgr. Haně Štěpánkové Ph.D., která byla vedoucí mé diplomové práce. Zejména bych chtěl ocenit její rady a ochotu při spolupráci, se kterou mi pomáhala při obstarávání zdrojů i při samotném vyhotovení diplomové práce.

**Anotace:**

Diplomová práce je věnována tématu vícerozměrný Riemannův integrál. Cílem práce je poskytnout přehledné shrnutí teorie vícerozměrného Riemannova integrálu, na vhodně zvolených řešených příkladech popsat základní metody výpočtu a seznámit s praktickým užitím v matematice a v přírodních vědách.

**Summary:**

The diploma thesis surveys the problematics of multidimensional Riemann integral. The goals of the thesis are, firstly, to provide a clear summary of the Multidimensional Riemann Integration Theory, secondly, to describe the basic calculation methods on carefully chosen examples, and, thirdly, to demonstrate its practical use in mathematics and natural sciences in general.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Historie Riemannova integrálu</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Dvojný Riemannův integrál</b>	<b>11</b>
2.1	Zavedení dvojného Riemannova integrálu . . . . .	11
2.2	Vlastnosti dvojného Riemannova integrálu . . . . .	13
2.3	Metody výpočtu dvojného Riemannova integrálu . . . . .	14
2.3.1	Výpočet přes obdélník . . . . .	14
2.3.2	Výpočet přes „křivočarý obdélník“ a Fubiniova Věta . . . . .	16
2.3.3	Substituce ve dvojném integrálu . . . . .	19
2.4	Aplikace dvojného Riemannova integrálu . . . . .	22
2.4.1	Výpočet obsahu uzavřené oblasti . . . . .	22
2.4.2	Výpočet objemu třírozměrného tělesa . . . . .	24
2.4.3	Určení těžiště rovinných těles . . . . .	25
2.4.4	Určení momentu setrvačnosti rovinných těles . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Trojný Riemannův integrál</b>	<b>29</b>
3.1	Zavedení trojného Riemannova integrálu . . . . .	29
3.2	Vlastnosti trojného Riemannova integrálu . . . . .	31
3.3	Metody výpočtu trojného Riemannova integrálu . . . . .	32
3.3.1	Užití Fubiniovy Věty pro trojný Riemannův integrál . . . . .	32
3.3.2	Substituce v trojném integrálu . . . . .	34
3.4	Aplikace trojného Riemannova integrálu . . . . .	39
3.4.1	Výpočet objemu třírozměrného tělesa . . . . .	39
3.4.2	Výpočet hmotnosti těles . . . . .	39
3.4.3	Výpočet těžiště a statických momentů . . . . .	40
3.4.4	Výpočet momentů setrvačnosti . . . . .	42
<b>4</b>	<b>N-rozměrný Riemannův integrál</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Sbírka příkladů na dvojný a trojný integrál</b>	<b>45</b>
5.1	Řešené příklady . . . . .	45
5.2	Příklady s výsledky . . . . .	55
5.3	Příklady bez výsledků . . . . .	56

# Úvod

Diplomová práce je věnována tématu vícerozměrný Riemannův integrál.

Cílem práce je poskytnout čtenáři přehledné shrnutí základní teorie vícerozměrného Riemannova integrálu, na vhodně zvolených řešených příkladech popsat základní metody výpočtu a seznámit s praktickým užitím v matematice a v přírodních vědách.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole „Historie integrálního počtu“ se čtenář dočte o objevech významných matematiků, které byly základem pro vznik integrálního nebo-li infinitezimálního počtu. Druhá a třetí kapitola seznamuje čtenáře se zavedením a metodami výpočtu dvojného, resp. trojného Riemannova integrálu. Dále se v těchto kapitolách může čtenář dočíst o praktickém využití dvojného, resp. trojného Riemannova integrálu v matematice a v přírodních vědách. To znamená: výpočet obsahu, objemu, hmotnosti, momentu setrvačnosti, statických momentů, těžiště a dalších matematických a fyzikálních aplikací. Ve čtvrté kapitole se čtenář seznámí se zavedením a využitím  $n$ -rozměrného Riemannova integrálu.  $N$ -rozměrný Riemannův integrál můžeme využít v teorii relativity a kvantové fyzice. Pátá kapitola slouží jako sbírka řešených a neřešených příkladů.

Tato diplomová práce by měla být užitečná všem čtenářům, kteří chtějí pochopit základní problematiku vícerozměrného Riemannova integrálu. Pro větší nároky čtenáře, práce poskytuje důležité odkazy na literaturu, která se touto problematikou zabývá.

U čtenáře se předpokládá znalost pojmů ze středoškolské matematiky a znalost integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné.

Věty jsou uvedeny bez důkazů, jelikož důkazy jsou u většiny z nich technicky náročné. Důkazy je možné vyhledat v použité literatuře. Řada ilustračních obrázků a řešených typových příkladů z kapitoly druhé, třetí a páté má čtenáři pomoci k pochopení teoretického výkladu.

# 1 Historie Riemannova integrálu

Historie matematických věd sahá hluboko do minulosti. Velký rozvoj byl zaznamenán již ve starověkém Egyptě, Mezopotámii, v Číně, Indii a arabských zemích. Matematika byla využívána pro řešení praktických problémů například při výběru daní, budování cest, příbytků, chrámů, mechanismu zavlažování půdy, atd. Objevily se první myšlenky výpočtu objemů a obsahů zejména při výměře půdy a stavitelství. Stavba pyramid, které byly zřejmě postaveny kolem 3. století před n.l., nám dokazuje, že Egypťané ovládali matematické vědy na vysoké úrovni.

Řeckými matematiky, kteří se zabývali problematikou obsahů a objemů byli Hippokrates (460 – 370 před n.l.), Démokritos (460 – 370 před n.l.) a Eudoxos (asi 408 – 355 před.n.l.). Hippokrates dokázal, že *poměr obsahů dvou kruhů je roven poměru druhých mocnin jejich průměrů* [citováno z [13], s.11]. Hippokrates tuto matematickou úvahu vysvětlil tak, že vepsal do obou kruhů pravidelný  $n$ -mnohoúhelník a počet vrcholů  $n$  postupně zvyšoval.

Další jeho matematickou úvahou bylo, že *kužel může být podobně „vyčerpáván“ jehlany s pravidelnou mnohoúhelníkovou základnou vepsanou do kruhové základny kužele* [citováno z [13], s.11]. Společně s Démokritem se domníval, že *objem kužele je jedna třetina válce s toutéž základnou a výškou* [citováno z [13], s.11].

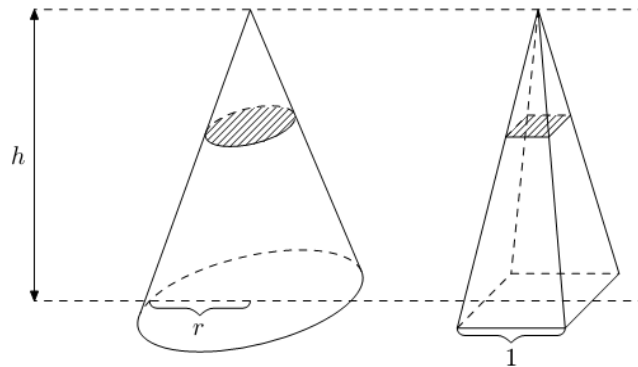
Eudoxos pomocí svojí exhaustivní (vyčerpávací) metody dokázal matematické myšlenky, které vyslovili Démokrates a Hippokrates. Hlavní myšlenkou této metody bylo obsahy a objemy „rozdělit“ na nekonečný počet tvarů, pro které byl obsah nebo objem známý. Eudoxos tvrdil: *„Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina“* [citováno z [13], s.13]. Eudoxovu metodu využil a zdokonalil Archimedes ze Syrakus (287 – 212 před n.l.). Použil jí k výpočtu plochy kruhu, paraboly, objemu a obsahu koule, válce a jiných těles<sup>[13]</sup>.

Podobné metody objevil nezávisle v Číně v 3. století našeho letopočtu Liu Hui (Liou Chuej 220 – 280 n.l.) a užil je k hledání plochy kruhu. Tuto metodu později použili v 5. století Zu Chongzhi ( 429 – 500 ) a Zu Geng (450 – 520) k nalezení objemu koule<sup>[12]</sup>.

Další významný pokrok v integrálním počtu učinili až v 16. století německý astronom a matematik Johannes Kepler (1571-1630), toskánský astronom a fyzik Galileo Galilei (1564 – 1642) a italský matematik, žák Galilea, Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647). *Všichni tři určovali obsahy nebo objemy pomocí součtu tzv. indivisibilí. Šlo o nedělitelné části (úsečky), ze kterých se utvářely plošné útvary, nebo o části ploch (např. kruhy), ze kterých se vytvářela tělesa* [citováno z [13], s.25].

Bonaventura Cavalieri objevil metodu nedělitelnosti, které dnes říkáme Cavalieriho princip. Cavalieriho princip říká: „*když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají též poměr*“ [citováno z [13], s.25].

**Poznámka:** Na obrázku 1 je naznačeno užití Cavalieriho principu. Blíže se o tomto principu může čtenář dočíst v [13] na straně 23 až 28.



Obrázek 1: Cavalieriho princip (Obrázek převzat z [13] s. 26)

Další krok v infinitezimálním počtu provedli v 17. století anglický technolog a matematik Isaac Barrow (1630 – 1677) a italský fyzik a matematik Evangelista Torricelli (1608-1647), kteří zjistili první náznaky spojení mezi integrací a diferenciací<sup>[12]</sup>.

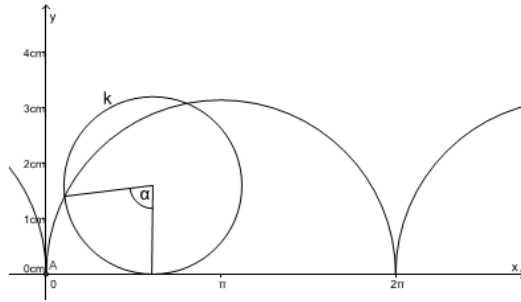
Torricelli byl zastáncem metody indivisibilí. Současně s nedělitelnými úsečkami používal i „nedělitelné“ části křivek a jako Isaac Barrow používal řecké metody spočívající na geometrických úvahách. Tyto metody byly nepřesné<sup>[13]</sup>.

Dále byly využívány algebraické metody. Tyto metody využili francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 – 1665), francouzský filosof, matematik a fyzik René Descartes (1596 – 1650) a anglický matematik John Wallis (1616 - 1703). Používali je při hledání těžišť těles, výpočtu obsahů a objemů těles. Descartes vývoj infinitezimálního počtu urychlil vydáním svého díla „*Géométrie*“, ve které vyložil klasickou geometrii pomocí algebraických metod<sup>[13]</sup>.

Francouzský fyzik, matematik, spisovatel a teolog Blaise Pascal (1623 – 1662) se zabýval cykloidy. Určil obsah a těžiště její úseče a objem tělesa vzniklého rotací pomocí této úseče. Uvědomil si, že *veškeré integrování vede k výpočtu jistých aritmetických součtů mocnin* [citováno z [13], s.33].

Významný pokrok v integraci učinili anglický fyzik, matematik a astronom Sir Isaac Newton (1642 – 1727) a německý filosof, matematik a teolog Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), nezávisle na sobě vytvořili diferenciální a integrální počet. Vybudovali ucelenou teorii, do které zahrnuli všechny objevy svých předchůdců<sup>[13]</sup>.





Obrázek 2: Obecná cykloida

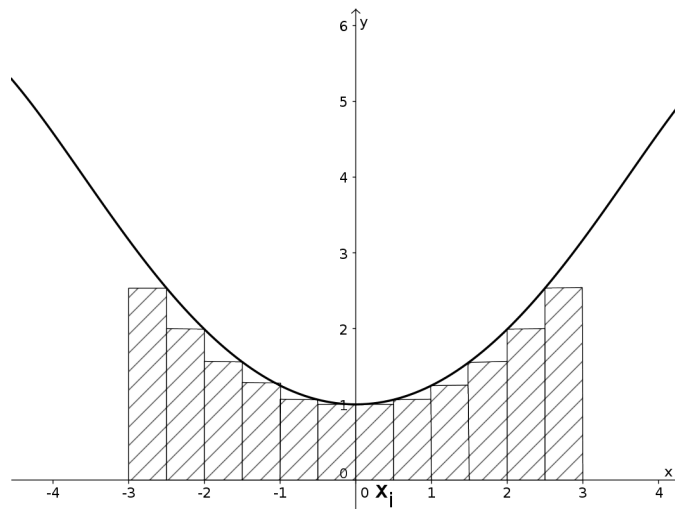
Zatímco Newton a Leibniz provedli systematický přístup k integraci, jejich práce postrádá míru přísnosti (rigoróznosti). Biskup Berkeley (1685 – 1753) nezapomenutelně napadl mizející přírůstky užívané Newtonem, nazýval je „*duchové zemřelých veličin*“<sup>[12]</sup>.

V devatenáctém století nastupuje období "zpřesňování matematické analýzy". Jedním z matematiků, kteří se věnovali upřesnění pojmu integrálu, byl francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). *V roce 1823 Cauchy formuloval definici integrálu a zabýval se jeho existencí pro poměrně širokou třídu funkcí. Cauchy se snažil pro funkci  $f : [a,b] \rightarrow R$  určit obsah plochy vymezené osou  $x$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a grafem funkce  $f$*  [citováno z [13], s.55].

Cauchyovým úmyslem bylo definovat integrál  $\int_a^b f(x)dx$  jako limitu součtů tvaru

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

když maximum délek „*dělicích*“ intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  bude konvergovat k nule [citováno z [13],s.56].



Obrázek 3: Cauchyův integrální součet

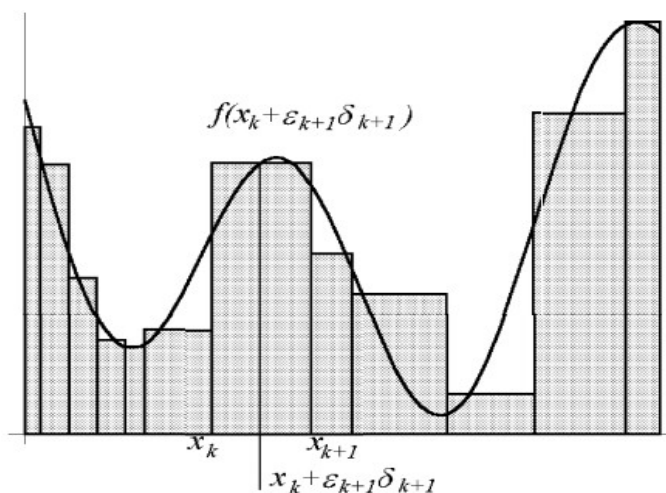
Integraci upřesnil německý matematik Bernhard Riemann (1826 – 1866) pomocí limit. *Riemann volí libovolný bod  $\xi_i = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$  v  $i$ -tém intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  v dělení  $D$  intervalu  $[a, b]$  a podobně jako Cauchy definuje integrál vztahem:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde  $\delta$  znamená maximum délek  $\delta_i$  intervalů  $[x_{i-1}, x_i]$  v dělení  $D$  [citováno z [13], s.59, s.60].

Cauchy pracoval se spojitou funkcí, Riemann žádné požadavky na funkci neměl. Na (obrázku 4) je znázorněn Riemannův integrální součet<sup>[13]</sup>.

Riemann rozlišil vlastní a nevlastní určitý integrál. *U nevlastního integrálu jde o situaci, kdy je funkce  $f(x)$  integrovatelná mezi  $a + \varepsilon$  a  $b$  pro jakkoli kladné  $\varepsilon$  a není integrovatelná mezi  $a$  a  $b$ . Když pak v této situaci existuje limita  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ , pak se pod pojmem nevlastního určitého integrálu  $\int_a^b f(x)dx$  rozumí právě tato limita [citováno z [13], s.61, s.62].*



Obrázek 4: Riemannův integrální součet. Obrázek převzat z ([13], s.60).

Na poněkud jiných integrálních součtech a na pojmu míry je založen postup, vedoucí k obecnějším typům určitého integrálu. Riemannův integrál první zobecnil francouzský matematik Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941)<sup>[12]</sup>.

*Lebesgueův integrál je obecnější než integrál Riemannův v tom smyslu, že každá funkce  $f$ , která má na intervalu  $[a, b]$  Riemannův integrál, má rovněž Lebesgueův integrál na tomto intervalu a oba integrály mají stejnou hodnotu. Opačně toto tvrzení neplatí [citováno z [13], s.94].*

Lebesgueova integrálu se využívá například v moderní teorii Fourierových řad, prostory integrovatelných funkcí ve funkcionální analýze, v teorii pravděpodobnosti, atd. Ve dvacátém století byly zavedeny ještě obecnější integrály než je Lebesgueův integrál. Jde o tzv. Perronův integrál a Denjoyův totál<sup>[13]</sup>.

První česky napsanou učebnici s názvem „*O počtu integrálním*“, vydanou v roce 1871, napsal český matematik a spisovatel František Josef Studnička (1836 – 1903). Tato učebnice se prakticky věnuje Newtonově integrálu. Další čeští matematici, kteří se zabývali integrálním počtem, byli Karel Petrov (1868-1950), Vojtěch Jarník (1897 – 1970), Otakar Borůvka (1899 – 1995) a Jan Mařík (1920 – 1994)<sup>[13]</sup>.

## 2 Dvojný Riemannův integrál

V této kapitole se čtenář seznámí se stručným zavedením dvojného Riemannova integrálu, jeho vlastnostmi a se základními metodami výpočtu. Věty jsou uvedeny bez důkazů. Pro hlubší seznámení s dvojným Riemannovým integrálem a dalšími pojmy této kapitoly, včetně důkazů jednotlivých vět, doporučuji čtenáři literaturu [2], [4], [5], [8], [9], [11], [15].

### 2.1 Zavedení dvojného Riemannova integrálu

Mějme spojitou funkci  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  omezenou na dvojrozměrném uzavřeném intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , kde  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ;  $a < b$ ,  $c < d$ , pak musí existovat číslo  $l \in \mathbf{R}^+$  takové, že pro každé  $(x, y) \in I$  je  $|f(x, y)| \leq l$ .

Vytvořme libovolné dělení

$$\begin{aligned} D_x &: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b \\ D_y &: c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d \end{aligned}$$

intervalů  $\langle a, b \rangle$  a  $\langle c, d \rangle$ .

Pro libovolná dělení  $D_x$  a  $D_y$  definujme dělení  $D = (D_x, D_y)$  intervalu jako systém uzavřených dvojrozměrných intervalů

$$I_{mn} = \langle x_{m-1}, x_m \rangle \times \langle y_{n-1}, y_n \rangle, \text{ kde } m \in \{1, \dots, r\}, n \in \{1, \dots, p\},$$

a označme

$$\lambda(I_{mn}) = (x_m - x_{m-1}) \cdot (y_n - y_{n-1})$$

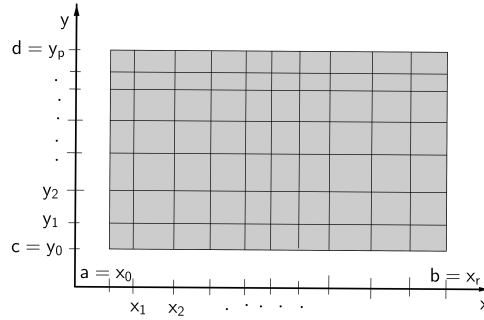
obsahy obdélníků  $I_{mn}$  (obrázek 5).

Pro každé takovéto dělení  $D$  intervalu  $I$  definujeme součty

$$\begin{aligned} s(D) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^p \inf_{(x,y) \in I_{mn}} f(x, y) \cdot (\lambda I_{mn}), \\ S(D) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^p \sup_{(x,y) \in I_{mn}} f(x, y) \cdot (\lambda I_{mn}), \end{aligned}$$

kde  $s(D)$  je dolní součet a  $S(D)$  je horní součet a pomocí nich dolní a horní dvojný Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $I$

$$\begin{aligned} \int\int_I f(x, y) dx dy &= \sup\{s(D); D \text{ je dělení } I\}, \\ \int\int_{\bar{I}} f(x, y) dx dy &= \inf\{S(D); D \text{ je dělení } I\}. \end{aligned}$$



Obrázek 5: znázornění obsahu obdélníků  $I_{mn}$

Říkáme, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$  (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{I}} f(x, y) dx dy.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme  $\iint_I f(x, y) dx dy$  a nazýváme **dvojným Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $I$** .

Dvojný integrál můžeme definovat i pro jiné obory než je obdélník.

Nechť  $O$  je "uzavřený obdélník", který obsahuje uzavřenou oblast  $M$ . Jestliže v  $O$  definujeme funkci  $g(x, y)$  tak, že

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in M, \\ 0; & (x, y) \notin M, \end{cases}$$

pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy \stackrel{def.}{=} \iint_I g(x, y) dx dy.$$

Pro měřitelnou oblast platí: Je-li funkce  $f$  spojitá na uzavřené měřitelné oblasti  $M \subset \mathbf{R}^2$ , pak je  $f$  integrovatelná na  $M$ .

**Poznámka:** Měřitelná oblast je oblast, která má konečný obsah.

Nechť  $\Delta M_i$  je element měřitelné integrační oblasti  $M \subset \mathbf{R}^2$  a  $D$  její dělení, které můžeme vytvořit z elementů  $\Delta M_i$ . Normou  $v(D)$  každého takového dělení  $D$  množiny  $M$  nazveme největší z obsahů  $\Delta S_i > 0$ . Funkce  $f(x, y)$  je pak integrovatelná na měřitelné integrační oblasti  $M \subset \mathbf{R}^2$ , právě když k libovolnému  $a > 0$  existuje  $b > 0$  takové, že pro libovolné dělení  $D$  množiny  $M$  s normou dělení  $v(D) < b$  pro součet

$$\sum_{i=1}^k f(\alpha_i, \beta_i) \Delta S_i,$$

platí

$$|S - \iint_M f(x, y) dx dy| < a.$$

**Poznámka:** Pokud je daná funkce na  $M$  integrovatelná, platí:

$$\iint_M f(x, y) dx dy \cong \sum_{i=1}^k f(\alpha_i, \beta_i) \Delta S_i.$$

## 2.2 Vlastnosti dvojného Riemannova integrálu

V této podkapitole jsou uvedeny základní vlastnosti dvojného Riemannova integrálu bez důkazů. Podrobnější teorii včetně důkazů, může čtenář najít v této literatuře [4], [11].

**Věta 2.2.1.:** Je-li  $f(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbf{R}$  pro všechna  $[x, y] \in M$ , pak  $\iint_M f(x, y) dx dy = c \cdot m(M)$ , kde  $m(M)$  je míra množiny  $M$ .

**Poznámka:** Míra množiny je pojem, který zobecňuje pojem obsah množiny. U Riemannova integrálu pracujeme s Jordanovou teorií míry. Více je uvedeno v literatuře [4], [5].

**Věta 2.2.2.:** Je-li  $m(M) = 0$  pro omezenou funkci  $f$ , pak  $\iint_M f(x, y) dx dy = 0$ .

**Věta 2.2.3.:** Jsou-li  $f_1, f_2$  funkce integrovatelné na množině  $M$ , pak jsou integrovatelné i funkce  $c_1 f_1 + c_2 f_2$ , kde  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ . To znamená:

$$\iint_M (c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)) dx dy = c_1 \iint_M f_1(x, y) dx dy + c_2 \iint_M f_2(x, y) dx dy.$$

**Poznámka:** Tuto vlastnost označujeme jako **linearitu integrálu**.

**Věta 2.2.4.:** Jsou-li  $f_1, f_2$  funkce integrovatelné na množině  $M$  a pro všechna  $[x, y] \in M$  platí  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ , pak platí

$$\iint_M f_1(x, y) dx dy \leq \iint_M f_2(x, y) dx dy.$$

**Poznámka:** Této vlastnosti říkáme **monotonie dvojného integrálu**.

**Věta 2.2.5.:** Je-li funkce  $f$  integrovatelná na množině  $M$  a existuje měřitelná množina  $E$ ,  $E \subseteq M$ , pak je funkce  $f$  také integrovatelná na  $E$ .

**Věta 2.2.6.:** Je-li funkce  $f$  integrovatelná na množině  $M$  a  $E$ , pak je funkce  $f$  integrovatelná na  $M \cup E$ . Pokud  $M \cap E = \emptyset$ , pak

$$\iint_{M \cup E} f(x, y) dx dy = \iint_M f(x, y) dx dy + \iint_E f(x, y) dx dy.$$

**Věta 2.2.7.:** Je-li funkce  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  omezená a spojitá pro všechna  $[x, y] \in M \setminus E$ , kde  $M$  je množina měřitelná a  $m(E) = 0$ , pak funkce  $f$  je na  $M$  integrovatelná.

## 2.3 Metody výpočtu dvojného Riemannova integrálu

V této podkapitole jsou na řešených příkladech vysvětleny základní metody výpočtu dvojného Riemannova integrálu. Pro bližší seznámení s těmito metodami se může čtenář podívat do literatury [2], [4], [5], [8], [9], [11], [15].

### 2.3.1 Výpočet přes obdélník

Nechť  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $M \subset \mathbf{R}^2$ ;  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  a platí

$M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ . Předpokládejme, že  $f$  je na množině  $M$  integrovatelná a pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  existuje funkce  $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ .

Pak funkce  $I : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  je na  $\langle a, b \rangle$  integrovatelná a platí:

$$\int_a^b I(x) dx = \iint_M f(x, y) dx dy.$$

#### Poznámka:

Pokud je  $f$  spojitá, jsou splněny předpoklady této věty automaticky.

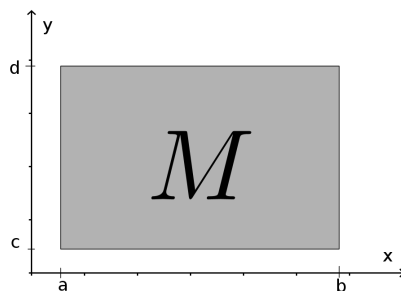
Analogicky můžeme říci, že pokud za stejných předpokladů pro  $\forall y \in \langle c, d \rangle$  existuje funkce  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ . Pak funkce  $I : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  je na  $\langle c, d \rangle$  integrovatelná. To znamená, že platí:

$$\int_c^d I(y) dy = \iint_M f(x, y) dx dy.$$

**Úmluva:** Dvojný integrál budeme zapisovat v těchto tvarech:

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Na obrázku 6 je znázorněna množina  $M$ .



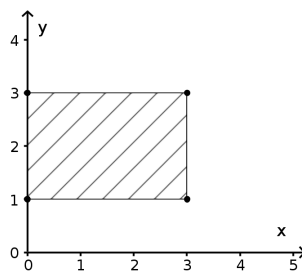
Obrázek 6: Znázornění množiny  $M$

**Příklad 1:** Integrujte v obou pořadích:

$$\iint_M (x^3 + 1 + y^2) dx dy; M = \{[x, y] \in \mathbf{R}; 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}.$$

**Řešení:**

Množinu  $M$  znázorníme v souřadnicovém systému  $x, y$  (obrázek 7).



Obrázek 7: Znázornění množiny  $M$

Určíme meze integrálu  $x \in \langle 0, 3 \rangle$ ,  $y \in \langle 1, 3 \rangle$ .

Máme dva způsoby integrace:

a) Prvně integrujeme podle proměnné  $y$  a poté integrujeme podle proměnné  $x$ :

$$\begin{aligned} \iint_M (x^3 + 1 + y^2) dx dy &= \int_0^3 \int_1^3 (x^3 + 1 + y^2) dx dy = \int_0^3 \left[ x^3 y + y + \frac{y^3}{3} \right]_1^3 dx = \\ &= \int_0^3 (3x^3 + 3 + 9 - (x^3 + 1 + \frac{1}{3})) dx = \int_0^3 (2x^3 + \frac{32}{3}) dx = \\ &= \left[ \frac{x^4}{2} + \frac{32}{3}x \right]_0^3 = \frac{145}{2}. \end{aligned}$$

b) Prvně integrujeme podle proměnné  $x$  a poté integrujeme podle proměnné  $y$ :

$$\begin{aligned} \iint_M (x^3 + 1 + y^2) dx dy &= \int_1^3 \int_0^3 (x^3 + 1 + y^2) dx dy = \int_1^3 \left[ \frac{x^4}{4} + x + y^2 x \right]_0^3 dy = \\ &= \int_1^3 \left( \frac{81}{4} + 3 + 3y^2 \right) dy = \int_1^3 \left( \frac{93}{4} + 3y^2 \right) dy = \left[ \frac{93}{4}y + y^3 \right]_1^3 = \frac{145}{2}. \end{aligned}$$



### 2.3.2 Výpočet přes „křivočarý obdélník“ a Fubiniova Věta

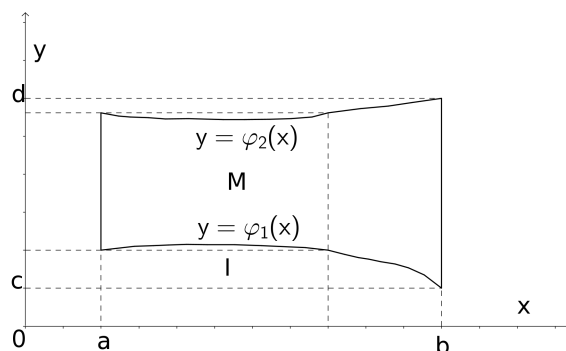
Nechť  $M$  je uzavřená elementární oblast typu  $[x, y]$ , která je popsána nerovnicemi:

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ \varphi_1(x) &\leq y \leq \varphi_2(x). \end{aligned}$$

Nechť  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , kde

$$c \leq \inf_{x \in \langle a, b \rangle} \varphi_1(x), \quad \sup_{x \in \langle a, b \rangle} \varphi_2(x) \leq d.$$

Interval  $I$  obsahuje množinu  $M$ . (Obrázek 8).



Obrázek 8: Znázornění oblasti  $M$  a intervalu  $I$

**Věta 2.3.2.1. (Zobecněná Fubiniova věta):** Nechť funkce  $f(x, y)$  je integrovatelná na množině  $M$ , která je obsažena v intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Existuje-li pro

každé číslo  $x \in \langle a, b \rangle$  integrál  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ , pak existuje integrál

$$I_1 = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \text{ a platí:}$$

$$I_1 = \iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

**Poznámka:** Větu 2.3.2.1. je možné vyslovit i pro oblast typu  $[y, x]$ , tj. je-li oblast  $M$  dána nerovnicemi

$$\begin{aligned} c &\leq y \leq d, \\ \varphi_1(y) &\leq x \leq \varphi_2(y). \end{aligned}$$

Existuje-li pro každé číslo  $y \in \langle c, d \rangle$  integrál  $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$ , pak existuje integrál

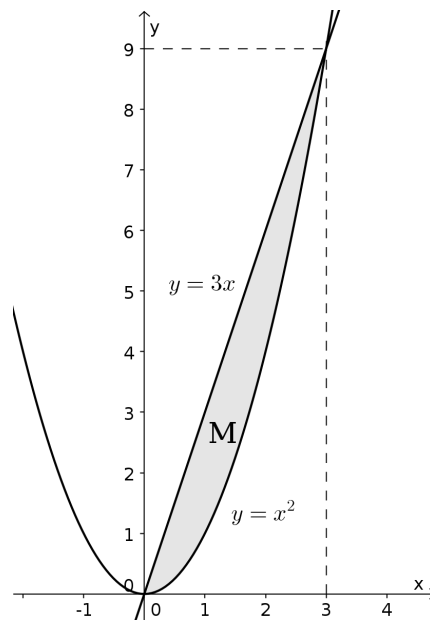
$$I_2 = \int_c^d \left[ \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \text{ a platí:}$$

$$I_2 = \iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[ \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

**Příklad 2:** Integrujte v obou pořadích  $\iint_M x^2 \, dx \, dy$ . Oblast  $M$  je ohraničena křivkami:  $y = x^2$ ;  $y = 3x$ .

**Řešení:**

Nejprve znázorníme integrační oblast  $M$  (obrázek 9).



Obrázek 9: Znázornění integrační oblasti  $M$

Z obrázku 9 je vidět, že pro ohraničení integrační oblasti  $M$  platí:

$$x^2 \leq y \leq 3x, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Pak

$$\begin{aligned} \iint_M x^2 \, dx \, dy &= \int_0^3 \int_{x^2}^{3x} x^2 \, dx \, dy = \\ &= \int_0^3 [x^2 y]_{x^2}^{3x} dx = \int_0^3 (3x^3 - x^4) \, dx = \left[ \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = 12, 15. \end{aligned}$$

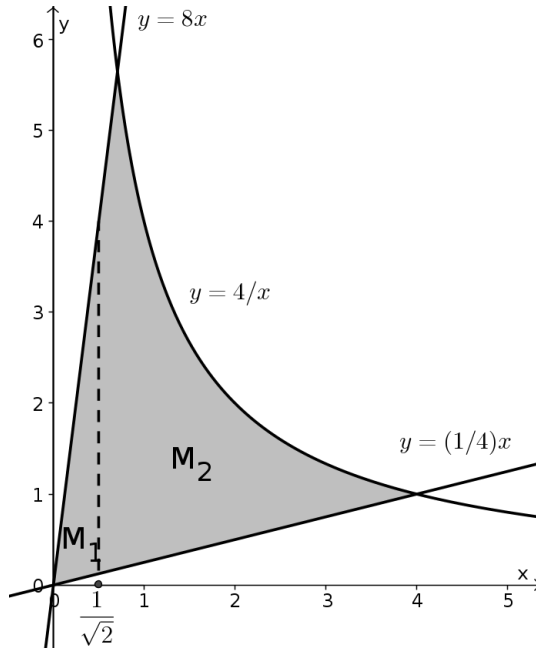
Zaměníme-li pořadí integrace, dostaneme:

$$\begin{aligned} \iint_M x^2 \, dx \, dy &= \int_0^9 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^9 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^9 \left( \frac{\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y^3}{81} \right) dy = \left[ \frac{2}{15} \sqrt{y^5} - \frac{y^4}{324} \right]_0^9 = 12, 15. \end{aligned}$$

**Příklad 3:** Vypočtete integrál  $\iint_M (x+y) dx dy$ , kde oblast  $M$  je ohraničena křivkami:  $y = \frac{1}{4}x$ ;  $y = 8x$ ;  $\frac{xy}{4} = 1$  a nerovnicí  $x \geq 0$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $M$  (obrázek 10).



Obrázek 10: Znázornění integrační oblasti  $M$

Integrační oblast typu  $[x, y]$  můžeme rozdělit na dvě části  $M_1, M_2$ . Z obrázku 10 je vidět, že pro ohraničení integrační oblasti platí:

$$M_1 : 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{4}x \leq y \leq 8x$$

$$M_2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 4; \frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{4}{x}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \iint_M (x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{x}{4}}^{8x} (x+y) dx dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^4 \int_{\frac{x}{4}}^{\frac{4}{x}} (x+y) dx dy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{4}}^{8x} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^4 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{4}}^{\frac{4}{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( 8x^2 + 32x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{32} \right) dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^4 \left( 4 + \frac{8}{x^2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{32} \right) dx = \left[ \frac{1271}{96} x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[ 4x - \frac{8}{x} - \frac{3}{32} x^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^4 = \frac{28\sqrt{2}}{3} + 8. \end{aligned}$$

### 2.3.3 Substituce ve dvojném integrálu

**Věta 2.3.3.1.:** Nechť uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $u, v$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = x(u, v)$ ;  $y = y(u, v)$  vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y$ ). Nechť funkce  $x(u, v)$  a  $y(u, v)$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a necht' Jacobiův determinant (Jakobián)

$$D(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

je v  $N$  různý od nuly. Nechť funkce  $f(x, y)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \iint_N f(x(u, v), y(u, v)) |D(u, v)| du dv, \quad (2.3.1)$$

jakmile jeden z integrálů existuje.

#### Substituce pomocí polárních souřadnic

Nejčastěji se jako substituce ve dvojném integrálu používá transformace na polární souřadnice. Pro transformaci polárních souřadnic na kartézské platí tyto vztahy:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (2.3.2)$$

kde

$$\rho \in (0, \rho_0), \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

**Věta 2.3.3.2.:** Nechť uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $\rho, \varphi$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = x(\rho, \varphi)$ ,  $y = y(\rho, \varphi)$  vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y$ ). Nechť funkce  $x(\rho, \varphi)$ ,  $y(\rho, \varphi)$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a necht' Jacobiův determinant

$$D(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \geq 0.$$

Nechť funkce  $f(x, y)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

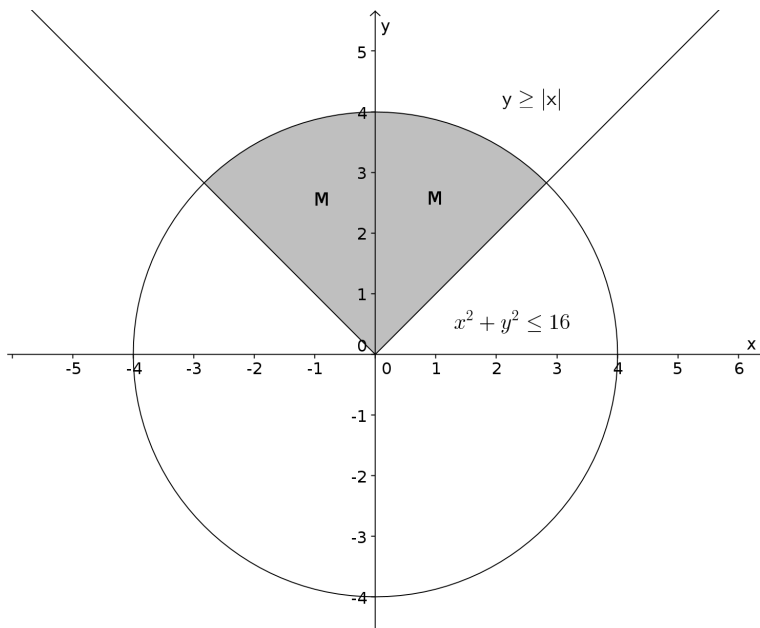
$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= \iint_N f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) |D(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi = \\ &= \iint_N f(x(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)) \rho d\rho d\varphi, \end{aligned}$$

jakmile jeden z integrálů existuje.

**Příklad 4:** Vypočtete integrál  $\iint_M (x+1) dx dy$ , kde oblast  $M$  je dána těmito nerovnicemi:  $x^2 + y^2 \leq 16$ ,  $y \geq |x|$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $M$  (Obrázek 11).



Obrázek 11: Znázornění integrační oblasti  $M$

Pro polární souřadnice dané vztahem (2.3.2) pro oblast  $M$  platí:

$$\rho \in \langle 0, 4 \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle.$$

Pak

$$\begin{aligned} \iint_M (x+1) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^4 (\rho \cos \varphi + 1) \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^4 \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^4 \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^4 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^4 d\varphi = \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi + 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi = \\ &= \frac{64}{3} [\sin \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + 8 [\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 4\pi. \end{aligned}$$

### Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Substituce do zobecněných polárních souřadnic se používá u dvojného integrálu, pokud hranice oblasti přes který integrujeme, má eliptický tvar. Pro transformaci zobecněných polárních souřadnic na kartézské platí tyto vztahy:

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad (2.3.3)$$

kde  $a, b > 0$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$  jsou poloosy elipsy a  $\rho \in (0, \rho_0)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ .

**Věta 2.3.3.3.:** Nechť uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $\rho, \varphi$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = x(\rho, \varphi)$ ,  $y = y(\rho, \varphi)$  vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y$ ). Nechť funkce  $x(\rho, \varphi)$ ,  $y(\rho, \varphi)$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a necht' Jacobiův determinant

$$D(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho \geq 0.$$

Nechť funkce  $f(x, y)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

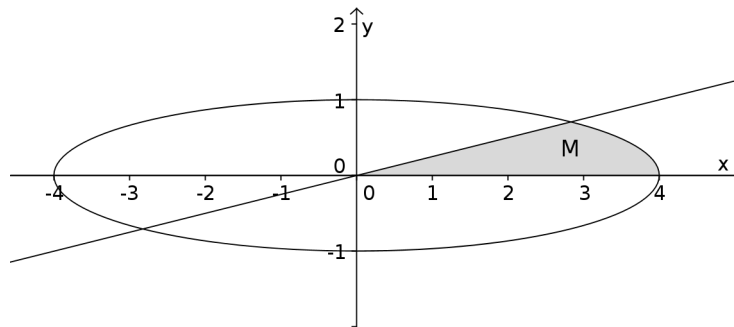
$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= \iint_N f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) |D(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi = \\ &= \iint_N f(x(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi)) ab\rho d\rho d\varphi, \end{aligned}$$

jakmile jeden z integrálů existuje.

**Příklad 5:** Vypočtete integrál  $\iint_M (x+y) dx dy$ , kde oblast  $M$  je dána těmito nerovnicemi:  $\frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1$ ;  $0 \leq 4y \leq x$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $M$  (Obrázek 12).



Obrázek 12: Znázornění integrační oblasti  $M$

Pro transformaci do zobecněných polárních souřadnic na kartézské platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos \varphi = 4\rho \cos \varphi, \\ y &= b\rho \sin \varphi = \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro určení meze integrálu pro  $\varphi$ , dosadíme vztahy pro transformaci zobecněných polárních souřadnic na kartézské do nerovnice  $0 \leq 4y \leq x$ , to znamená:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4\rho \sin \varphi \leq 4\rho \cos \varphi \\ \tan(\varphi) &\leq 1 \\ \varphi &\in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Pro určení meze integrálu pro  $\rho$ , dosaďme vztahy pro transformaci zobecněných polárních souřadnic na kartézské do nerovnice  $\frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1$ , to znamená:

$$\frac{16\rho^2 \cos^2 \varphi}{16} + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 1$$

$$\rho^2 \leq 1$$

a z podmínky pro  $\rho \geq 0$  platí  $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Pro Jakobián dostaneme:

$$D(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cos \varphi & -4\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = 4\rho.$$

Pak

$$\begin{aligned} \iint_M (x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (4\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) 4\rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (4 \cos \varphi + \sin \varphi) 4\rho^2 \, d\rho \, d\varphi = \left[ \frac{4\rho^3}{3} \right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos \varphi + \sin \varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} [4 \sin \varphi - \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

## 2.4 Aplikace dvojného Riemannova integrálu

V této podkapitole seznamuji čtenáře s aplikacemi dvojného Riemannova integrálu. Čtenář se s touto problematikou může například seznámit v této literatuře [3], [5], [6].

### 2.4.1 Výpočet obsahu uzavřené oblasti

Nechť existuje uzavřená oblast  $M$ , ležící v rovině  $x, y$ , pak pro obsah  $S$  platí:

$$S = \iint_M dx \, dy. \quad (2.4.1)$$

**Příklad 6:** Vypočtete obsah pravoúhlého trojúhelníka, který je v kartézském systému souřadnic dán těmito body:  $A [0, 0]$ ;  $B [4, 0]$ ;  $C [0, 5]$ .

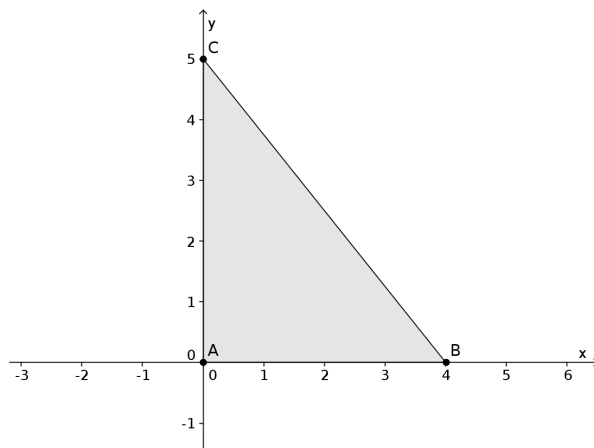
Výsledek udejte v  $cm^2$ .

**Řešení:**

Zadaný útvar můžeme zobrazit pomocí programu GeoGebra (obrázek 13).

Nyní určíme meze integrační oblasti.

$$\begin{aligned} x &\in \langle 0; 4 \rangle, \\ y &\in \langle 0; 5 - \frac{5}{4}x \rangle. \end{aligned}$$



Obrázek 13: Zobrazení útvaru

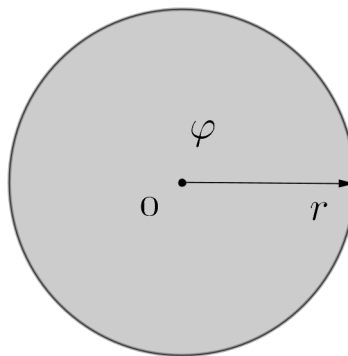
Výsledný obsah útvaru bude:

$$S = \iint_M dx dy = \int_0^4 dx \int_0^{5-\frac{5}{4}x} dy = \int_0^4 (5 - \frac{5}{4}x) dx = \left[ 5x - \frac{5x^2}{8} \right]_0^4 = 10 \text{ cm}^2.$$

**Příklad 7:** Pomocí substituce na polární souřadnice odvoďte vztah pro výpočet obsahu kruhu.

**Řešení:**

V programu GeoGebra znázorníme kruh s poloměrem  $r$  (obrázek 14). Tuto integrační oblast výhodně vyjádříme polárními souřadnicemi  $\varphi$  a  $\rho$ .



Obrázek 14: Zobrazení integrační oblasti

Je vidět, že meze integrační oblasti jsou:

$$\rho \in \langle 0; r \rangle, \text{ kde } r \text{ je poloměr kruhu,}$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$

Pro výsledný obsah kruhu platí:

$$S = \iint_M dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{r^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = \pi r^2.$$



### 2.4.2 Výpočet objemu třírozměrného tělesa

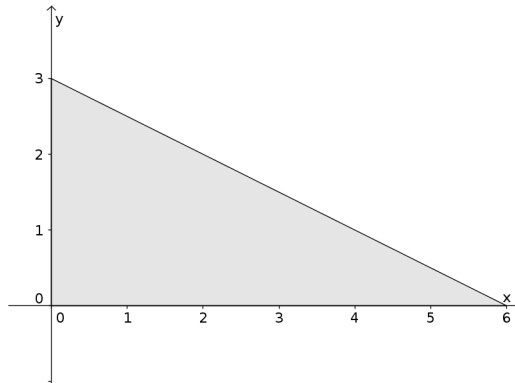
Objem tělesa ohraničeného shora spojitou funkcí  $f(x, y)$ , zdola rovinou  $z = 0$  a ze stran plochou, která vytíná v rovině  $z = 0$  měřitelnou oblast  $M$  je daný vztahem:

$$V = \iint_M f(x, y) \, dx \, dy. \quad (2.4.2)$$

**Příklad 8:** Vypočítejte objem tělesa vymezeného plochami  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;  $x + 2y = 6$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast, která je ohraničena křivkami  $x + 2y = 6$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  (obrázek 15).



Obrázek 15: Znázornění integrační oblasti

Určíme meze integrační oblasti. Integrační oblast má tyto meze:

$$\begin{aligned} x &\in \langle 0, 6 \rangle, \\ y &\in \langle 0, \frac{6-x}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Pro objem  $V$  bude platit:

$$\begin{aligned} V &= \iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \int_0^6 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{3-\frac{x}{2}} dx = \\ &= \int_0^6 \left( -\frac{13}{24}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 \right) dx = \left[ -\frac{13}{96}x^4 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 9x \right]_0^6 = \frac{135}{2} \text{ o.j.} \end{aligned}$$

**Poznámka:** Zkratka o.j. je objemová jednotka.

### 2.4.3 Určení těžiště rovinných těles

Těžiště tělesa je působíště tíhové síly. Těžiště tělesa můžeme určit experimentálně, například zavěšováním, jako průsečík těžnic. Těžiště tělesa můžeme určit také matematicky. Pomocí dvojného Riemannova integrálu můžeme určit například těžiště rovinné desky.

#### Těžiště rovinné desky:

Nechť  $x_0, y_0$  jsou souřadnice těžiště rovinné desky  $M$  a  $\rho = \rho(x, y)$  je její hustota v bodě  $[x, y]$ , pak platí:

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_M x \rho(x, y) dx dy, \quad (2.4.3)$$

$$y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_M y \rho(x, y) dx dy, \quad (2.4.4)$$

kde  $m = \iint_M \rho(x, y) dx dy$  je celková hmotnost rovinné desky,  $S_x$  je statický moment vzhledem k ose  $x$  a  $S_y$  je statický moment vzhledem k ose  $y$ .

Je-li deska homogenní, pak  $\rho(x, y) = 1$ . Pro těžiště homogenní desky bude platit:

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_M x dx dy, \quad (2.4.5)$$

$$y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_M y dx dy, \quad (2.4.6)$$

kde  $S_x$  je statický moment vzhledem k ose  $x$  a  $S_y$  je statický moment vzhledem k ose  $y$ .

**Poznámka:** Homogenní těleso je těleso, které má ve všech částech stejné vlastnosti (stejná hustota, stejné rozmístění částic, atd.).

Statický moment je součin síly a nejkratšího kolmého ramene síly.

Blíže se čtenář může dočíst o určení těžiště těles například v [3].

**Příklad 9:** Určete polohu těžiště homogenní polokruhové a kruhové desky o poloměru  $r$ .

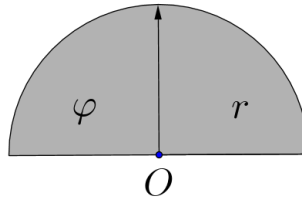
#### Řešení:

Nejprve se zaměříme na určení těžiště polokruhové desky. Homogenní polokruhovou desku znázorníme v programu GeoGebra (obrázek 16). Příklad budeme řešit pomocí substituce na polární souřadnice.

Meze pro polovinu kruhu v polárních souřadnicích (2.3.2) tedy jsou:

$$\rho \in \langle 0; r \rangle, \text{ kde } r \text{ je poloměr polokruhové desky;}$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle.$$



Obrázek 16: Zobrazení polokruhové desky

Dále určíme hmotnost desky. Pro hmotnost  $m$  desky bude platit:

$$m = \iint_M \rho(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^r \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^r d\varphi = \frac{r^2}{2} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Nyní určíme těžiště  $T[x_0, y_0]$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \iint_M x dx dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^r \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^r \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3\pi} r [\sin \varphi]_0^\pi = 0 \\ y_0 &= \frac{1}{m} \iint_M y dx dy = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^r \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^r \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{2}{3\pi} r [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{4}{3\pi} r. \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště pro polokruhovou desku jsou  $T = \left[ 0, \frac{4}{3\pi} r \right]$ .

Souřadnice těžiště pro kruhovou desku jsou  $T = [0, 0]$ . Výpočet ponecháme čtenáři jako cvičení.

#### 2.4.4 Určení momentu setrvačnosti rovinných těles

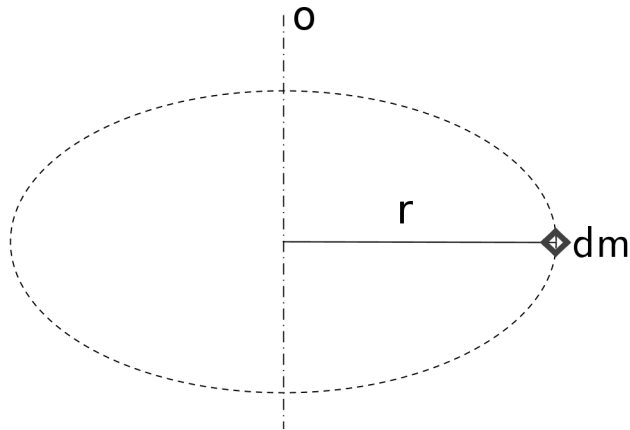
Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Jednotkou momentu setrvačnosti je  $kg \cdot m^2$ .

Moment setrvačnosti tuhého tělesa můžeme určit jednoduchým Riemannovým integrálem

$$I = \int_{(m)} r^2 dm, \quad (2.4.7)$$

kde  $r$  je vzdálenost hmotnostního elementu  $dm$  od osy rotace (obrázek 17).

Dvojný Riemannův integrál můžeme užít k určení momentu setrvačnosti rovinného tělesa (například rovinné desky  $M$ ). Pokud je hmota spojitě rozložená, platí tyto vztahy:



Obrázek 17: Moment setrvačnosti tuhého tělesa

$$I_x = \iint_M y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (2.4.8)$$

$$I_y = \iint_M x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad (2.4.9)$$

$$I_p = \iint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy, \quad (2.4.10)$$

kde  $I_x$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose  $x$ ,  $I_y$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose  $y$ ,  $I_p$  je moment setrvačnosti vzhledem k počátku (tzv. polární moment),  $\rho(x, y)$  je hustota materiálu.

**Poznámka:** Jedná-li se o homogenní rovinné těleso je  $\rho(x, y) = 1$ .

Bližší se čtenář může dočíst o určení momentu setrvačnosti v [3] nebo v nějaké další vysokoškolské učebnici fyziky.

**Příklad 10:** Určete polární moment tenkého homogenního kotouče o poloměru  $r$ . Hmota v kotouči je spojitě rozložena.

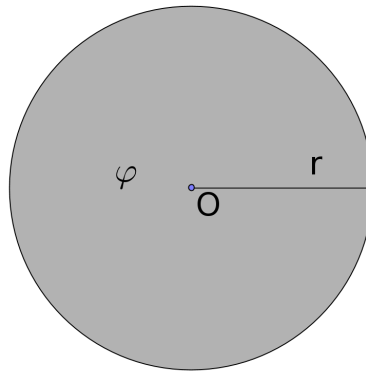
**Řešení:**

Kotouč je znázorněn na obrázku 18. Příklad budeme řešit pomocí substituce na polární souřadnice, vztah (2.3.2).

Meze pro  $\rho$  a  $\varphi$  jsou:

$$\rho \in \langle 0, r \rangle, \text{ kde } r \text{ je poloměr kotouče,}$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obrázek 18: Moment setrvačnosti kotouče

Pro polární moment bude platit:

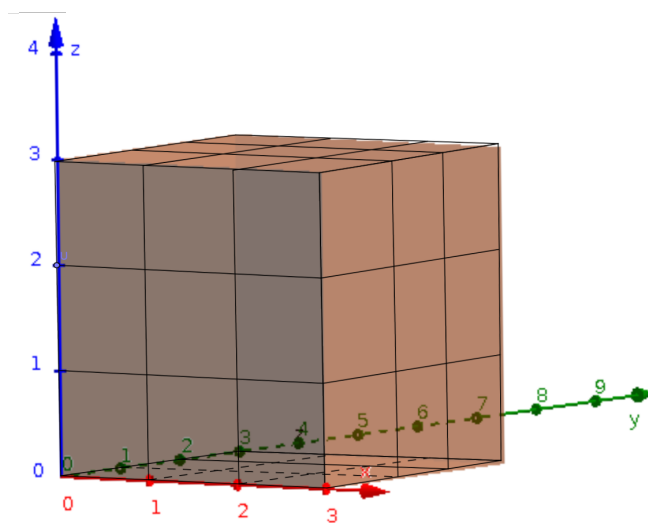
$$\begin{aligned} I_p &= \iint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r (\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 \, d\rho \, d\varphi = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^4}{2} \pi. \end{aligned}$$

### 3 Trojný Riemannův integrál

V této kapitole se čtenář seznámí se stručným zavedením trojného Riemannova integrálu, jeho vlastnostmi a se základními metodami výpočtu. Pro hlubší seznámení s trojným Riemannovým integrálem a dalšími pojmy této kapitoly doporučuji čtenáři literaturu [2], [4], [5], [8], [9], [11], [15].

#### 3.1 Zavedení trojného Riemannova integrálu

Trojný Riemannův integrál lze zavést zcela analogicky jako dvojný Riemannův integrál, s jediným rozdílem, že obdélníkovou síť nahradíme kvádřovou, (obrázek 19).



Obrázek 19: Kvádřová síť

Mějme funkci  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  omezenou na trojrozměrném uzavřeném intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$ , kde  $a, b, c, d, e, g \in \mathbf{R}$ ;  $a < b$ ,  $c < d$ ,  $e < g$ , pak musí existovat číslo  $l \in \mathbf{R}^+$  takové, že pro každé  $(x, y, z) \in I$  je  $|f(x, y, z)| \leq l$ .

Vytvořme libovolné dělení  $D_x : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ ,  
 $D_y : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$ ,  $D_z : e = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_m = g$  intervalů  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle c, d \rangle$  a  $\langle e, g \rangle$ .

Pro libovolná dělení  $D_x, D_y, D_z$  definujeme dělení  $D = (D_x, D_y, D_z)$  intervalu jako systém uzavřených trojrozměrných intervalů  $I_{mno} = \langle x_{m-1}, x_m \rangle \times \langle y_{n-1}, y_n \rangle \times \langle z_{o-1}, z_o \rangle$ , kde  $m \in \{1, \dots, r\}$ ,  $n \in \{1, \dots, p\}$ ,  $o \in \{1, \dots, t\}$ , a označme  $\lambda(I_{mno}) = (x_m - x_{m-1}) \cdot (y_n - y_{n-1}) \cdot (z_o - z_{o-1})$  objemy kvádrů  $I_{mno}$ .

Pro každé takovéto dělení  $D$  intervalu  $I$  definujeme součty

$$s(D) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^p \sum_{o=1}^t \inf_{(x,y,z) \in I_{mno}} f(x, y, z) \cdot (\lambda I_{mno}),$$

$$S(D) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^p \sum_{o=1}^t \sup_{(x,y,z) \in I_{mno}} f(x, y, z) \cdot (\lambda I_{mno}),$$

kde  $s(D)$  je dolní součet a  $S(D)$  je horní součet. Pomocí těchto součtů definujeme trojný Riemannův integrál funkce  $f$  na intervalu  $I$

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \sup\{s(D); D \text{ je dělení } I\},$$

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \inf\{S(D); D \text{ je dělení } I\}.$$

Řekneme, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$  (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme  $\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz$  a nazýváme **trojným Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $I$** .

Trojný integrál můžeme definovat i pro jiné obory než je kvádr.

Nechť  $K$  je "uzavřený kvádr", který obsahuje uzavřenou oblast  $M$ . Jestliže v  $K$  definujeme funkci  $g(x, y, z)$  tak, že

$$g(x) = \begin{cases} f(x, y, z); & (x, y, z) \in M, \\ 0; & (x, y, z) \notin M, \end{cases}$$

pak

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{def.}{=} \iiint_I g(x, y, z) dx dy dz.$$

Pro měřitelnou oblast, platí: Je-li funkce  $f$  spojitá na uzavřené měřitelné oblasti  $M \subset \mathbf{R}^3$ , pak je  $f$  integrovatelná na  $M$ .

**Poznámka:** Měřitelnou oblastí v tomto případě myslíme oblast s konečným objemem.

Nechť  $\Delta M_i$  je element měřitelné integrační oblasti  $M \subset \mathbf{R}^3$  a  $D$  je její dělení. Normou  $v(D)$  každého dělení  $D$  množiny  $M$  nazveme největší z objemů  $\Delta V_i > 0$ . Funkce  $f(x, y, z)$  je pak integrovatelná na měřitelné integrační oblasti  $M \subset \mathbf{R}^3$ , jestliže k libovolnému  $a > 0$  existuje  $b > 0$  takové, že pro libovolné dělení  $D$  množiny  $M$  s normou dělení  $v(D) < b$  pro součet

$$\sum_{i=1}^k f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \Delta V_i,$$

platí

$$|V - \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz| < a.$$

**Poznámka:** Pokud je daná funkce na  $M$  integrovatelná, platí:

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \cong \sum_{i=1}^k f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \Delta V_i.$$

### 3.2 Vlastnosti trojného Riemannova integrálu

V této podkapitole jsou uvedeny základní vlastnosti trojného Riemannova integrálu bez důkazů. Důkazy těchto vět a další vlastnosti trojného Riemannova integrálu, může čtenář najít například v literatuře [4], [11]. Bystrý čtenář si jistě všimne analogie mezi vlastnostmi dvojného a trojného integrálu.

**Věta 3.2.1.:** Je-li  $f(x, y, z) = c$ ,  $c \in \mathbf{R}$  pro všechna  $[x, y, z] \in M$ , pak  $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = c \cdot m(M)$ , kde  $m(M)$  je míra  $M$ .

**Věta 3.2.2.:** Je-li  $m(M) = 0$  pro omezenou funkci  $f$ , pak  $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = 0$ .

**Věta 3.2.3.:** Je-li  $f(x, y, z) = c$ ;  $c \in \mathbf{R}$ , pak platí, že

$$\iiint_M c dx dy dz = c \iiint_M dx dy dz.$$

**Věta 3.2.4.:** Jsou-li  $f_1, f_2$  funkce integrovatelné na množině  $M$ , pak je integrovatelná i funkce  $(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ , kde  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ . A platí:

$$\begin{aligned} & \iiint_M (c_1 f_1(x, y, z) dx dy dz + c_2 f_2(x, y, z) dx dy dz) = \\ & = c_1 \iiint_M f_1(x, y, z) dx dy dz + c_2 \iiint_M f_2(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

**Poznámka:** Tuto vlastnost nazýváme **linearitou integrálu**.

**Věta 3.2.5.:** Jsou-li  $f_1, f_2$  funkce integrovatelné na množině  $M$  a pro všechna  $[x, y, z] \in M$  platí  $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$ , pak

$$\iiint_M f_1(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_M f_2(x, y, z) dx dy dz.$$



**Poznámka:** Tuto vlastnost nazýváme **monotonie integrálu**.

**Věta 3.2.6.:** Je-li funkce  $f$  integrovatelná na množině  $M$  a existuje měřitelná množina  $E$ ,  $E \subseteq M$ , pak je funkce  $f$  také integrovatelná na  $E$ .

**Věta 3.2.7.:** Je-li funkce  $f$  integrovatelná na množině  $M$  a  $E$ , pak je funkce  $f$  integrovatelná na  $M \cup E$ . Pokud  $M \cap E = \emptyset$ , můžeme psát:

$$\iiint_{M \cup E} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz.$$

**Věta 3.2.8.:** Je-li funkce  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  omezená a spojitá pro všechna  $[x, y, z] \in M \setminus E$ , kde  $M$  je množina měřitelná a  $m(E) = 0$ , pak funkce  $f$  je na  $M$  integrovatelná.

### 3.3 Metody výpočtu trojného Riemannova integrálu

V této podkapitole jsou na řešených příkladech vysvětleny základní metody výpočtu trojného Riemannova integrálu. Pro bližší seznámení s těmito metodami se může čtenář podívat do literatury [2], [4], [5], [8], [9], [11], [15].

#### 3.3.1 Užití Fubiniovy Věty pro trojný Riamannův integrál

Níže uvedená Fubiniova věta nám dává návod, jak trojný Riemannův integrál převést na integrál trojnásobný. Výpočet trojného integrálu pak vedeme trojnásobnou integrací funkce vždy jen jedné proměnné.

**Fubiniova věta pro trojný Riamannův integrál:** Nechť  $f(x, y, z)$  je spojitá funkce na intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$ . Pak platí:

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_a^b \left[ \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dy dz \right] dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[ \int_e^g f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx. \end{aligned}$$

**Poznámka:** Kromě těchto vztahů platí obdobné vzorce, které dostaneme, permutujeme-li vhodně diferenciály  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

**První zobecněná Fubiniova věta:** Nechť  $M$  je oblast v rovině  $xy$ , nechť existují funkce  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , které jsou spojitě na oblasti  $M$  a nechť existuje funkce  $f(x, y, z)$  v oblasti  $V$ , která se skládá z bodů  $[x, y, z]$ , pro které platí:

$$\varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y); [x, y] \in M.$$

Pak platí:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_M dx dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Je-li oblast  $M$  dána nerovnicemi  $a \leq x \leq b$ ,  $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ , kde  $a, b \in \mathbf{R}$  a  $\phi_1, \phi_2$  jsou spojité funkce. Pak platí:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

**Druhá zobecněná Fubiniova věta:** Mějme funkci  $f(x, y, z)$  v oblasti  $V$ , která se skládá z bodů  $[x, y, z]$ , pro které platí:

$$a \leq x \leq b, [y, z] \in M(x),$$

kde množina  $M(x)$  je množina v rovině  $yz$ , závislá na  $x$  a  $a, b \in \mathbf{R}$ . Pak platí:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{M(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

**Poznámka:** Analogicky se druhá zobecněná Fubiniova věta formuluje pro množinu v rovině  $xz$  závislou na  $y$  a pro množinu v rovině  $xy$  závislou na  $z$ .

**Příklad 1:** Vypočtěte trojný integrál  $\iiint_M (x + y + z) dx dy dz$ , kde oblast  $M$  je omezená těmito intervaly:  $x \in \langle 0, 3 \rangle, y \in \langle 0, 3 \rangle, z \in \langle 0, 3 \rangle$ .

**Řešení:**

Proměnné  $x, y, z$  nejsou na sobě závislé. Zvolíme například tento způsob integrace:

$$\begin{aligned} \iiint_M (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^3 \int_0^3 \int_0^3 (x + y + z) dx dy dz = \\ &= \int_0^3 \int_0^3 \left[ \frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_0^3 dy dz = \int_0^3 \int_0^3 \left( \frac{9}{2} + 3y + 3z \right) dy dz = \\ &= \int_0^3 \left[ \frac{9}{2}y + \frac{3y^2}{2} + 3yz \right]_0^3 dz = \left[ 27z + \frac{9z^2}{2} \right]_0^3 = \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

**Příklad 2:**

Vypočtěte trojný integrál  $\iiint_M dx dy dz$ , kde:

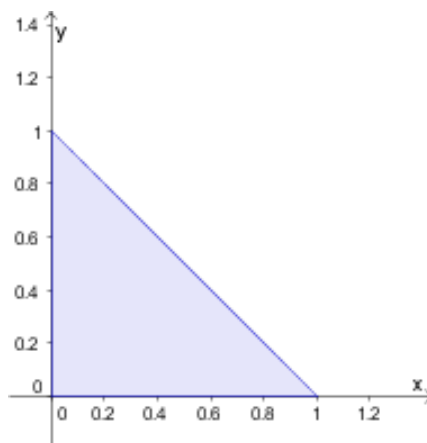
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq z \leq 1\}.$$

**Řešení:**

Nejprve určíme meze integrační oblasti. Integrační mez pro proměnnou  $z$  je určena jednoznačně  $z \in \langle x + y, 1 \rangle$ . Integrační meze pro proměnné  $y$  a  $x$  určíme z podmínek  $x \geq 0, y \geq 0$  a  $x + y \leq 1$  (obrázek 20).

Integrační meze pro proměnné  $y$  a  $x$  jsou  $y \in \langle 0, 1 - x \rangle, x \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Pro integraci bude platit:



Obrázek 20: Znázornění integrační oblasti

$$\begin{aligned}
 \iiint_M dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+y}^1 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \\
 &= \int_0^1 \left[ y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Substituce v trojném integrálu

**Věta 3.3.2.1.:** Nechť uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $u_1, u_2, u_3$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = x(u_1, u_2, u_3)$ ;  $y = y(u_1, u_2, u_3)$ ;  $z = z(u_1, u_2, u_3)$  vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y, z$ ). Nechť funkce  $x(u_1, u_2, u_3)$ ,  $y(u_1, u_2, u_3)$  a  $z(u_1, u_2, u_3)$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a nechť Jacobiův determinant (Jakobián)

$$D(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

je v  $N$  různý od nuly. Nechť funkce  $f(x, y, z)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \\
 &= \iiint_N f(x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3)) |D(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3.
 \end{aligned}$$

### Substituce pomocí válcových (cylindrických) souřadnic

Pro transformaci válcových souřadnic na kartézské platí tyto vztahy:

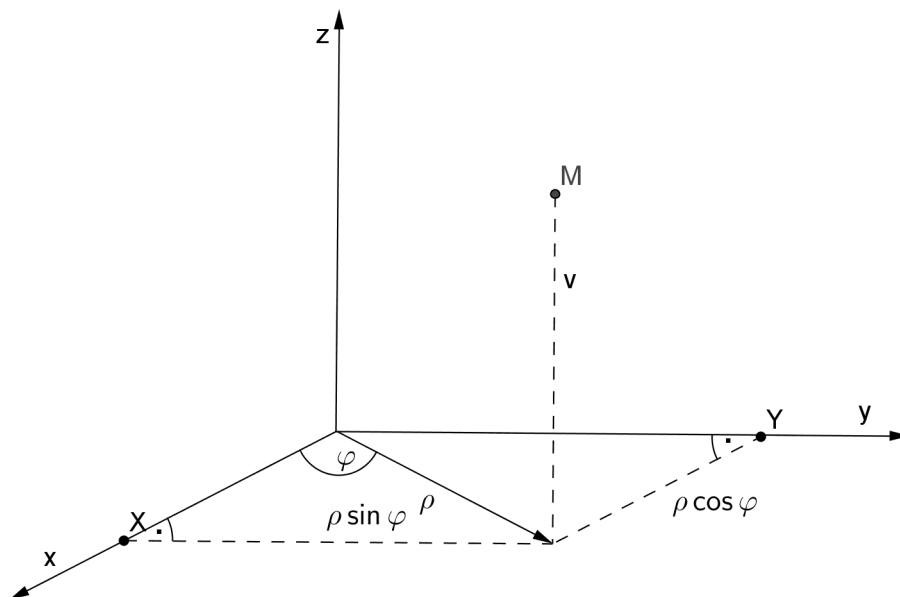
$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = v, \tag{3.3.1}$$

kde

$$\rho \in (0, \infty), \varphi \in (0, 2\pi), v \in (-\infty, \infty).$$

**Poznámka:** Vztahy (3.3.1) jsou znázorněny na obrázku 21.

Můžeme si všimnout, že válcové souřadnice jsou vztahy pro transformaci kvádrů na válec. Pokud je oblast integrace válec nebo jeho část, je velice vhodné válcové souřadnice k výpočtu integrálu využít.



Obrázek 21: Cylindrické souřadnice

**Věta 3.3.2.2.:** Necht uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $\rho, \varphi, v$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $z = v$  vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y, z$ ).

Necht funkce  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $z = v$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a necht Jacobiův determinant

$$D(\rho, \varphi, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Necht funkce  $f(x, y, z)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

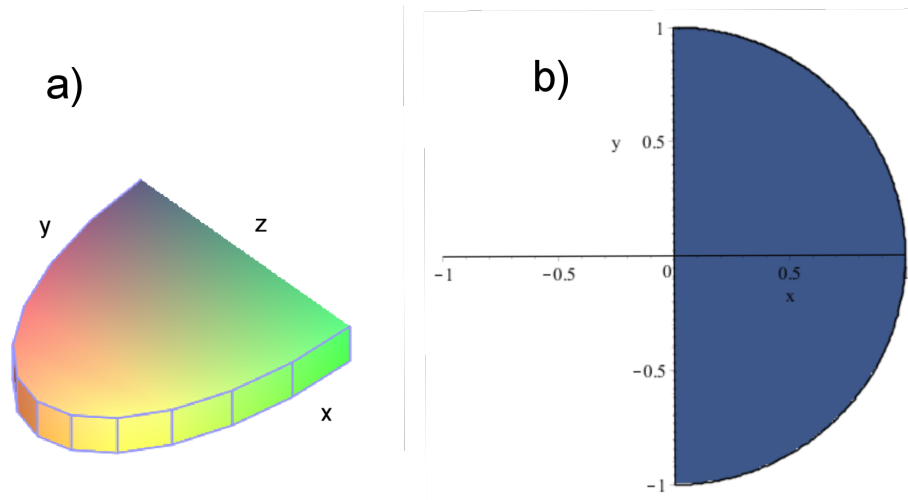
$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_N f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, v) |D(\rho, \varphi, v)| d\rho d\varphi dv = \\ &= \iiint_N f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, v) \rho d\rho d\varphi dv. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

**Příklad 3:** Vypočtete trojný integrál  $\iiint_M dx dy dz$ , kde:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 6\}.$$

**Řešení:**

Množina  $M$  je polovina válce (obrázek 22a) s podstavou půlkruhu (obrázek 22b).



Obrázek 22: Znázornění integrační oblasti  $M$

Pro výpočet integrálu využijeme transformaci pro převod na cylindrické souřadnice. Pro určení integračních mezí proměnných  $\rho$ ,  $\varphi$  a  $v$  vyřešíme nerovnice

$$x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 6$$

tím, že za jednotlivé proměnné  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dosadíme vztahy (3.3.1). Potom bude platit:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 1 \wedge \rho \cos \varphi \geq 0 \wedge 0 \leq v \leq 6.$$

Po vyřešení těchto nerovnic dostaneme tyto integrační meze:

$$\rho \in (0, 1); \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); v \in (0, 6).$$

Nyní můžeme dosadit do vztahu (3.3.2). Bude platit:

$$\begin{aligned} \iiint_M f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, v) \rho d\rho d\varphi dv &= \int_0^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho d\rho d\varphi dv = \\ &= \int_0^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 d\varphi dv = \frac{1}{2} \int_0^6 [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv = 3\pi. \end{aligned}$$

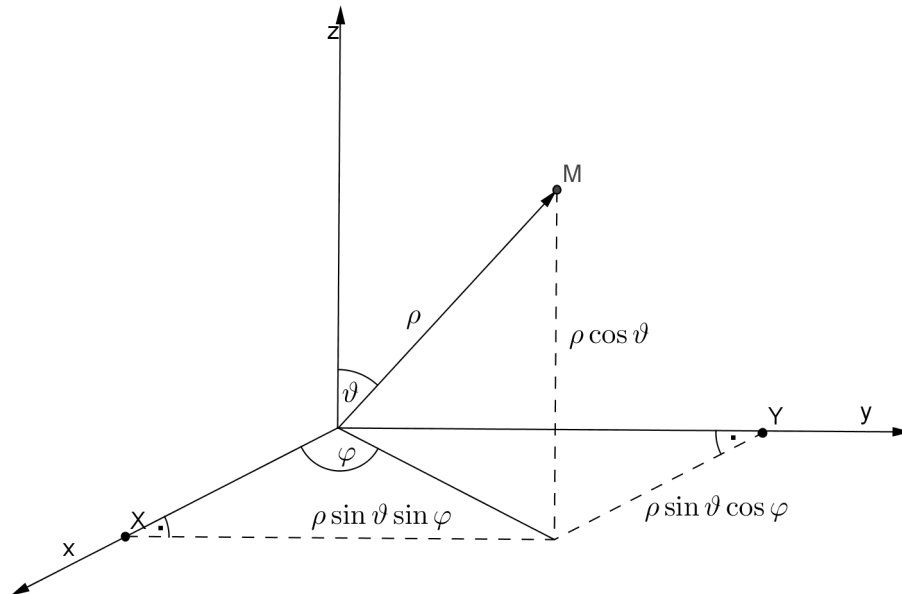
### Substituce pomocí sférických souřadnic

Pro transformaci sférických souřadnic na kartézské platí tyto vztahy:

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = \rho \cos \vartheta, \quad (3.3.3)$$

kde  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ .

**Poznámka:** Vztahy (3.3.3) jsou znázorněny na obrázku 23.



Obrázek 23: Sférické souřadnice

**Věta 3.3.2.2.:** Necht' uzavřená oblast  $N$  (proměnných  $\rho, \varphi, \vartheta$ ) se zobrazí pomocí rovnic  $x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$ ;  $z = \rho \cos \vartheta$ , vzájemně jednoznačně na uzavřenou oblast  $M$  (proměnných  $x, y, z$ ).

Necht' funkce  $x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$ ;  $z = \rho \cos \vartheta$  mají v  $N$  spojitě první parciální derivace a necht' Jacobiův determinant

$$D(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\rho \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -\rho \sin \vartheta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \vartheta < 0.$$

Necht' funkce  $f(x, y, z)$  je v oblasti  $M$ , pak platí:

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_N f(x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi; y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi; z = \rho \cos \vartheta) |D(\rho, \varphi, \vartheta)| d\rho d\varphi d\vartheta =$$

$$= \iiint_N f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta. \quad (3.3.4)$$

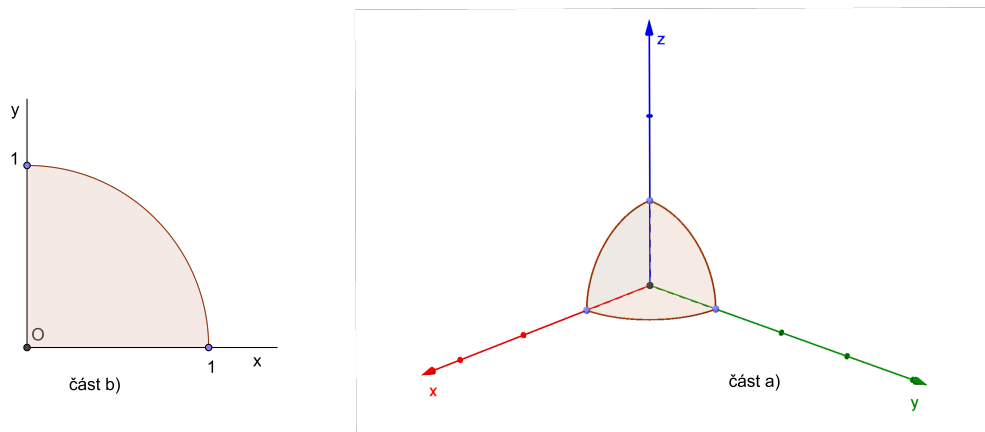
**Poznámka:** Podobně jako u válcových souřadnic si i zde můžeme všimnout, že sférické souřadnice popisují transformaci kvádrů na kouli. Používáme je zpravidla tehdy, když oblast integrace je koule nebo její část.

**Příklad 4:** Vypočtěte trojný integrál  $\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , kde:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

**Řešení:**

Množina  $M$  je "osmina koule" (obrázek 24a) s podstavou čtvrtkruhu (obrázek 24b).



Obrázek 24: Znázornění množiny  $M$

Pro výpočet integrálu využijeme transformaci pro převod na sférické souřadnice. Pro určení integračních mezí proměnných  $\rho$ ,  $\varphi$  a  $\vartheta$  vyřešíme nerovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0$$

tím, že za jednotlivé proměnné  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dosadíme vztahy (3.3.3). Potom bude platit:

$$\begin{aligned} \rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \vartheta &\leq 1 \wedge \rho \sin \vartheta \cos \varphi \geq 0 \wedge \\ &\wedge \rho \sin \vartheta \sin \varphi \geq 0 \wedge \rho \cos \vartheta \geq 0. \end{aligned}$$

Po vyřešení těchto nerovnic dostaneme tyto integrační meze:

$$\rho \in (0, 1); \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nyní můžeme dosadit do vztahu (3.3.4). Bude platit:

$$\begin{aligned} &\iiint_M (\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^4 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} d\varphi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

### 3.4 Aplikace trojného Riemannova integrálu

V této podkapitole seznamuji čtenáře s aplikacemi trojného Riemannova integrálu. Čtenář se s touto problematikou může například seznámit v této literatuře [3], [5], [6].

#### 3.4.1 Výpočet objemu třírozměrného tělesa

Uvažujme integrál  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ . Množinu  $D$  nazveme třírozměrné těleso. Pro funkci  $f(x, y, z)$  platí  $f(x, y, z) = 1$ . Pak všechny integrální součty funkce  $f(x, y, z)$  se rovnají objemu  $V$  množiny  $D$ . Platí:

$$V = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.4.1)$$

**Příklad 5:** Vypočtete objem tělesa ohraničeného těmito nerovnostmi  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 3$ .

**Řešení:**

Určíme meze integrační oblasti:

$$x \in \langle 0, 3 \rangle; y \in \langle x, 3 \rangle; z \in \langle y, 3 \rangle.$$

Pro objem  $V$  bude platit:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^3 \int_x^3 \int_y^3 dz dy dx = \int_0^3 \int_x^3 [z]_y^3 dy dx = \\ &= \int_0^3 \int_x^3 (3 - y) dy dx = \int_0^3 \left[ 3y - \frac{y^2}{2} \right]_x^3 dx = \left[ \frac{9x}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^3 = \frac{9}{2} \text{ o.j.} \end{aligned}$$

#### 3.4.2 Výpočet hmotnosti těles

Uvažujme třírozměrné těleso  $D$ . Hmotnost  $m$  tělesa  $D$ , která má v bodě  $[x, y, z] \in D$  hustotu  $\rho(x, y, z)$  vypočteme podle vztahu:

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.4.2)$$

**Příklad 6:** Vypočtete objem tělesa  $D$  v  $dm^3$  a hmotnost tělesa  $D$  v  $kg$ , kde  $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 6\}$ . Těleso je homogenní. Je vyrobeno z kovu. Hustota tělesa je  $5000 \text{ kg} \cdot m^{-3}$ .

**Řešení:**

Využijeme příkladu 3 z kapitoly "Substituce pomocí válcových (cylindrických) souřadnic". Množina  $D$  je polovina válce (obrázek 22a) s podstavou půlkruhu (obrázek 22b). Integrační meze jsou:

$$\rho \in (0, 1); \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); v \in (0, 6).$$



Vypočítáme objem:

$$V = \int_0^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dv =$$

$$\int_0^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\varphi \, dv = \int_0^6 \frac{1}{2} [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi \, dm^3.$$

Protože je těleso vyrobeno z homogenního materiálu, stačí dosadit, po převedení objemu na  $m^3$ , do známého vztahu pro výpočet hmotnosti:

$$m = V \cdot \rho = 3\pi \cdot 10^{-3} \cdot 5000 = 15\pi \, kg.$$

Hmotnost tělesa je  $15\pi \, kg$ .

### 3.4.3 Výpočet těžiště a statických momentů

Uvažujme těleso, ve kterém je hmota spojitě rozložena (homogenní těleso).  $\rho(x, y, z)$  je spojitou funkcí. Bod  $T[x_0, y_0, z_0]$  je **těžiště tělesa**. Platí:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint_M x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.3)$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iiint_M y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.4)$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_M z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.5)$$

kde  $m$  je hmotnost daného tělesa  $M$ .

Vztah  $\iiint_M x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  se nazývá **statický moment** tělesa  $M$  k rovině  $S_{yz}$ . Pro statické momenty tělesa  $M$  vzhledem k rovinám  $S_{yz}$ ,  $S_{xz}$ ,  $S_{xy}$  platí tyto vztahy:

$$S_{yz} = \iiint_M x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.6)$$

$$S_{xz} = \iiint_M y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.7)$$

$$S_{xy} = \iiint_M z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (3.4.8)$$

**Příklad 7:** Vypočítejte objem, těžiště a statické momenty tělesa  $D$ . Objem počítejte v  $dm^3$ .

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}.$$

Těleso je homogenní. Je vyrobeno z umělé hmoty o hustotě  $3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Řešení:**

Využijeme řešení příkladu 4 z kapitoly "Substituce pomocí sférických souřadnic" a určíme integrační meze. Množina  $D$  je "osmina koule" (obrázek 24a) s podstavou čtverťkruhu (obrázek 24b).

Integrační meze ve sférických souřadnicích máme:

$$\rho \in (0, 1); \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}); \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Využijeme vztahu (3.4.1) a transformace do sférických souřadnic. Bude platit

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\varphi = \frac{\pi}{6} \, dm^3. \end{aligned}$$

Těleso je homogenní. Po převedení objemu z  $dm^3$  na  $m^3$ , dosadíme do vztahu pro hmotnost:

$$m = V \cdot \rho = \frac{\pi}{6} \cdot 10^{-3} \cdot 3000 = \frac{\pi}{2} \text{ kg}.$$

Nyní dosadíme do vztahů pro statické momenty (3.4.6), (3.4.7) a (3.4.8). Bude platit

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 3000 \rho^3 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = 3000 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \frac{3000}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta = 750 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = 750 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta = \\ &= 750 \left[ \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{750\pi}{4} = \frac{375\pi}{2}; \\ S_{yz} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 3000 \rho^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{3000}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= 750 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = 750 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta = \\ &= 750 \left[ \frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin(2\vartheta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{375\pi}{2}; \\ S_{xy} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 3000 \rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{3000}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \frac{750\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{750\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{375\pi}{4} [-\cos(2\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{375\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pokud známe statické momenty, dosadíme do vztahů pro těžiště (3.4.3), (3.4.4) a (3.4.5).

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m} \cdot S_{yz} = \frac{\frac{375\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 375; \\
y_0 &= \frac{1}{m} \iiint_D y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m} \cdot S_{xz} = \frac{\frac{375\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 375; \\
z_0 &= \frac{1}{m} \iiint_D z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m} \cdot S_{xy} = \frac{\frac{375\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 375.
\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště jsou  $T [375; 375; 375]$ .

### 3.4.4 Výpočet momentů setrvačnosti

Moment setrvačnosti tělesa  $M$  vzhledem k ose  $o$  je definován:

$$I = \iiint_M r^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (3.4.9)$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu  $R [x, y, z]$  od osy  $o$  a  $\rho(x, y, z)$  je hustota.

Moment setrvačnosti vzhledem k osám souřadnic je definován:

$$I_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \quad (3.4.10)$$

$$I_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \quad (3.4.11)$$

$$I_z = \iiint_M (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (3.4.12)$$

Polární moment (moment setrvačnosti vzhledem k počátku) je definován:

$$I_p = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (3.4.13)$$

**Příklad 8:** Vypočtěte polární moment tělesa  $D$  ve tvaru čtvrtiny koule.

$$D = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbf{R}^3; 0 < \rho < 1 \wedge 0 < \varphi < \pi \wedge 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}.$$

Těleso je homogenní. Hustota materiálu je  $2000 \, \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Řešení:**

Integrační meze sférických souřadnic (3.3.3) jsou:

$$\rho \in (0, 1); \varphi \in (0, \pi); \vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Dosadíme do vztahu (3.4.13)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^1 2000 (\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \\ & = 2000 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^4 \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = 2000 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 400 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \\ & = 400\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \, d\vartheta = 400\pi \, \text{kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Polární moment čtvrtiny koule je  $400\pi \, \text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

## 4 N-rozměrný Riemannův integrál

N-rozměrný Riemannův integrál lze zavést zcela analogicky jako dvojný a trojný Riemannův integrál, s jediným rozdílem, že obdélníkovou a kvádrovou síť nahradíme "n-rozměrnou sítí".

Vlastnosti n-rozměrného Riemannova integrálu a metody výpočtu jsou analogické jako u dvojného a trojného Riemannova integrálu.

**Příklad:** Vypočtete čtyř rozměrný integrál  $\int \int \int \int_M dx dy dz du$ ,

kde  $M = \{(x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4; 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 1 \wedge 0 \leq u \leq 1\}$ .

**Řešení:**

Určíme meze integrační oblasti:

$$x \in \langle 0, 1 \rangle; y \in \langle 0, 2 \rangle; z \in \langle 0, 1 \rangle; u \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podle Fubiniho věty platí:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 dx dy dz du &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 [x]_0^1 dy dz du = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 dy dz du = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [y]_0^2 dz du = 2 \int_0^1 \int_0^1 dz du = 2 \int_0^1 [z]_0^1 du = 2. \end{aligned}$$

### Využití n-rozměrného Riemannova integrálu v přírodních vědách

N-rozměrný Riemannův integrál můžeme využít v teorii relativity, kvantové fyzice, topologii.

V teorii relativity se dá využít n-rozměrný Riemannův integrál např.: v Einsteinově teorii geometrického unitárního pole. Blíže se čtenář dočte o této teorii v [14].

Dále můžeme využít Riemannův integrál v astrofyzice při výpočtu gravitace černé díry. Blíže se čtenář dočte v [14].

## 5 Sbíрка příkladů na dvojný a trojný integrál

Tato část diplomové práce slouží čtenáři jako malá sbírka řešených a neřešených příkladů. Čtenář si procvičí základní teorii vícerozměrného Riemannova integrálu. Při psaní této kapitoly jsem se nechal inspirovat těmito sbírkami [1],[5], [7], [10].

### 5.1 Řešené příklady

**Příklad 1:** Vypočtete integrál  $\int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} xy^3 \, dy \, dx$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} xy^3 \, dy \, dx &= \int_0^1 x \left[ \frac{y^4}{4} \right]_{x^2}^{x^3} dx = \int_0^1 \left( \frac{x^{13}}{4} - \frac{x^9}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^{14}}{14} - \frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 = \left( -\frac{1}{140} \right). \end{aligned}$$

**Příklad 2:** Vypočtete integrál  $\int_0^{2\pi} \int_0^{a^2} r^3 \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{a^2} r^3 \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{a^2} d\varphi = \frac{a^8}{4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^8}{4} \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{a^8 \pi}{4}. \end{aligned}$$

**Příklad 3:** Vypočtete integrál  $\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x^2} \, dx \, dy$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x^2} \, dx \, dy &= \int_0^2 y^3 [\arctan(x)]_0^1 dy = \frac{\pi}{4} \int_0^2 y^3 \, dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

**Příklad 4:** Vypočtete integrál  $\int_0^1 \int_3^4 \frac{2}{x^2-3x+2} dx dy$ .

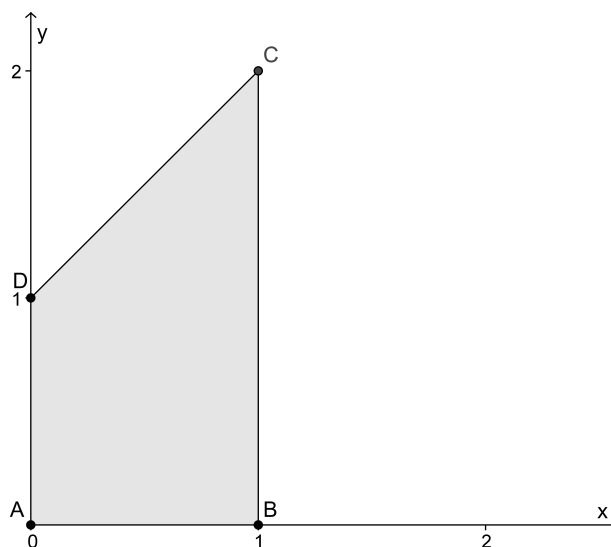
**Řešení:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_3^4 \frac{2}{x^2-3x+2} dx dy &= \int_0^1 \int_3^4 \frac{2}{(x-2)(x-1)} dx dy = \int_0^1 \int_3^4 \left( \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} \right) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_3^4 \left( \frac{2}{x-2} \right) dx dy - \int_0^1 \int_3^4 \left( \frac{2}{x-1} \right) dx dy = \int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{x-2}{x-1} \right)^2 \right]_3^4 dy = \int_0^1 \ln \left( \frac{16}{9} \right) dy = \\ &= \ln \left( \frac{16}{9} \right) [y]_0^1 = \ln \left( \frac{16}{9} \right). \end{aligned}$$

**Příklad 5:** Vypočtete integrál  $\iint_M (x+y) dx dy$ , kde  $M$  je lichoběžník s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$ ,  $[1, 2]$ . Určete všechny možnosti integračních mezí obou možných proměnných.

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $M$  (obrázek 25).



Obrázek 25: Znázornění množiny  $M$

1) Integrační meze v prvním případě budou:

$$x \in \langle 0, 1 \rangle; y \in \langle 0, 1+x \rangle.$$

Bude platit:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1+x} (x+y) dy dx &= \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1+x} dx = \int_0^1 \left( \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

II) Ve druhém případě bude mít integrační oblast tyto meze:

II)  $x \in \langle 0, 1 \rangle; x \in \langle y - 1, 1 \rangle; y \in \langle 0, 1 \rangle; y \in \langle 1, 2 \rangle$ .

Bude platit:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy + \int_1^2 \int_{y-1}^1 (x+y) dx dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + yx \right]_0^1 dy + \int_1^2 \left[ \frac{x^2}{2} + yx \right]_{y-1}^1 dy =$$

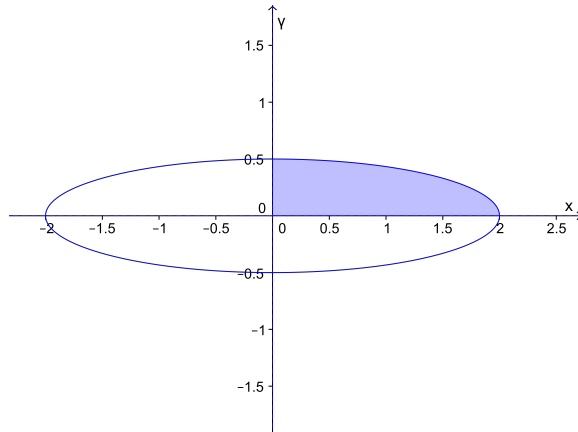
$$= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y \right) dy + \int_1^2 \left( 3y - \frac{3y^2}{2} \right) dy = 2.$$

**Příklad 6:** Vypočtěte hodnotu integrálu  $\iint_D xy dx dy$ , kde

$$D = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 16y^2 \leq 4 \wedge x > 0 \wedge y > 0\}.$$

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $D$ . (obrázek 26). Integrační oblastí je první kvadrant



Obrázek 26: Znázornění obrazce  $D$

elipsy. Pro určení integračních mezí můžeme využít substituce na zobecněné polární souřadnice. Z nerovnice  $x^2 + 16y^2 \leq 4$  vyjádříme velikost hlavní a vedlejší poloosy.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} \leq 1$$

$$a = 2; b = \frac{1}{2}.$$

Zobecněné polární souřadnice jsou:

$$x = 2\rho \cos \varphi;$$

$$y = \frac{1}{2}\rho \sin \varphi.$$

Do nerovnic pro integrační oblast  $D$  dosadíme zobecněné polární souřadnice. Bude platit:

$$4\rho^2 \cos^2 \varphi + \frac{16}{4}\rho^2 \sin^2 \varphi \leq 4 \wedge \rho \cos \varphi > 0 \wedge \rho \sin \varphi > 0.$$



Úpravou těchto nerovnic vyjádříme integrační meze pro  $\rho$  a  $\varphi$ .  $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$ ;  $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ .  
Pro Jakobián dostaneme:

$$D(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \varphi & -2\rho \sin \varphi \\ \frac{1}{2} \sin \varphi & \frac{1}{2}\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

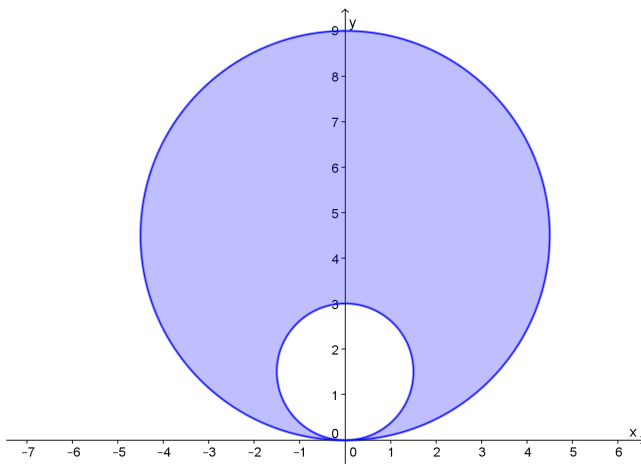
Pro výpočet hodnoty integrálu bude platit:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \left[ -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Příklad 7:** Vypočítejte obsah obrazce  $D$ , kde  $D = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 3y \leq x^2 + y^2 \leq 9y\}$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $D$  (obrázek 27). Příklad můžeme vyřešit pomocí pře-



Obrázek 27: Znázornění obrazce  $D$

vodu na polární souřadnice. Integrační meze určíme dosazením polárních souřadnic (2.3.2) do nerovnice, která platí pro obrazec  $D$ .

$$3\rho \sin \varphi \leq \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi \leq 9\rho \sin \varphi$$

Po úpravě nerovnice dostaneme tento tvar:

$$3 \sin \varphi \leq \rho \leq 9 \sin \varphi$$

Z této nerovnice můžeme určit integrační meze pro  $\rho$  a  $\varphi$

$$\rho \in \langle 3 \sin \varphi, 9 \sin \varphi \rangle; \varphi \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Pro obsah obrazce bude platit:

$$\int_0^{\pi} \int_{3 \sin \varphi}^{9 \sin \varphi} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\pi} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{3 \sin \varphi}^{9 \sin \varphi} d\varphi = 36 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 18\pi \text{ os.j.}$$

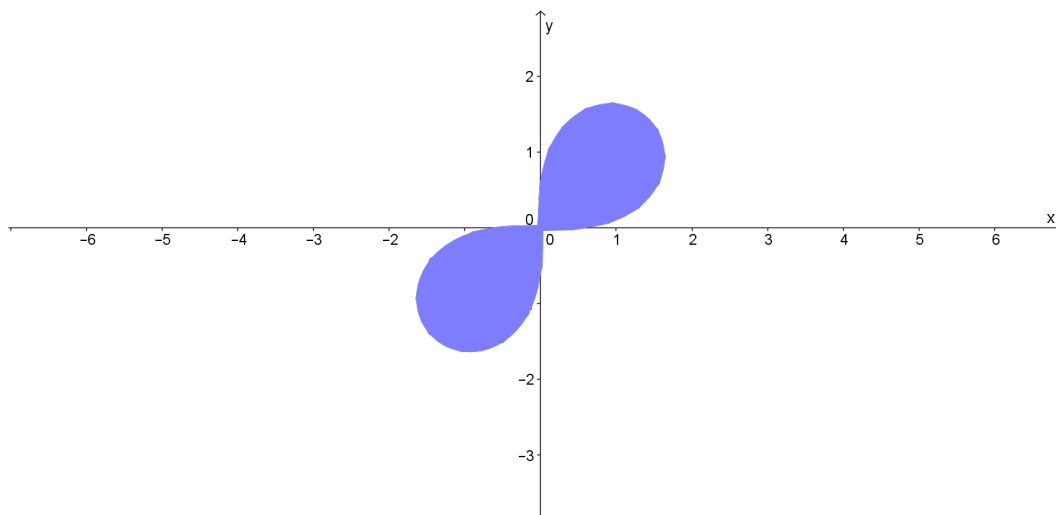
Obsah obrazce je  $18\pi \text{ os.j.}$  (obsahových jednotek).

**Příklad 8:** Vypočítejte obsah obrazce  $P = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = 8xy\}$ .

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast  $P$  (obrázek 28).

Obrazec  $P$  je souměrný podle počátku. Obsah obrazce je v prvním kvadrantu stejný



Obrázek 28: Znázornění obrazce  $P$

jako ve třetím kvadrantu. Stačí tedy vypočítat obsah obrazce v prvním kvadrantu a hodnotu obsahu vynásobit dvěma.

Příklad můžeme vyřešit pomocí převodu na polární souřadnice. Integrační meze určíme dosazením polárních souřadnic do nerovnice

$0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 8xy$ . Bude platit:

$$0 \leq (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \leq 8\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\rho^2 \leq \frac{8\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} = 4\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

Po konečných úpravách budou integrační meze pro  $\rho$  a  $\varphi$ :

$$\rho \in \langle 0, 2\sqrt{\sin(2\varphi)} \rangle; \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Pro obsah obrazce bude platit:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sqrt{\sin(2\varphi)}} \rho \, d\rho \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{2\sqrt{\sin(2\varphi)}} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(2\varphi) d\varphi =$$

$$= 4 \left[ \frac{-\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ os.j.}$$

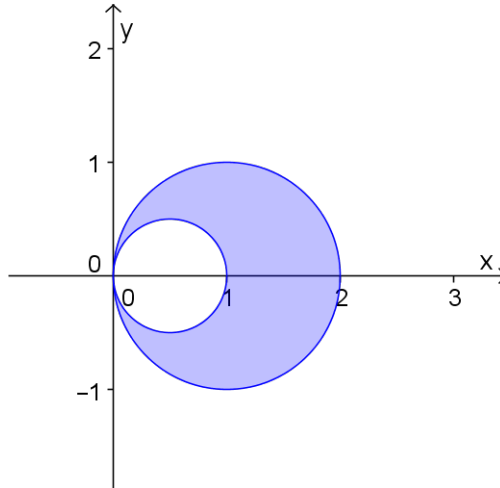
Obsah obrazce je 4 os.j.

**Příklad 9:** Pomocí přechodu k polárním souřadnicím vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0. \quad [[1],s.338].$$

**Řešení:**

Znázorníme integrační oblast (obrázek 29). Příklad můžeme vyřešit pomocí převodu



Obrázek 29: Znázornění integrační oblasti

na polární souřadnice. Integrační meze určíme dosazením polárních souřadnic (2.3.2) do nerovnic

$x \leq x^2 + y^2$  a  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$ . Bude platit:

$$\rho \cos \varphi \leq (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \leq \rho \cos \varphi \wedge 0 \leq (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \leq 2\rho \cos \varphi.$$

Po úpravách budou integrační meze pro  $\rho$  a  $\varphi$ :

$$\rho \in \langle \cos \varphi, 2 \cos \varphi \rangle; \varphi \in \langle 0, \pi \rangle; \text{Jakobián } J = \rho$$

Nyní můžeme dosadit do vztahu pro objem (2.4.2):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^\pi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho^3 \, d\rho \, d\varphi = \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{15}{4} \int_0^\pi \cos^4 \varphi = \frac{15}{16} \int_0^\pi (1 + 2 \cos(2\varphi) + \cos^2(2\varphi)) \, d\varphi = \frac{15}{16} \left[ \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_0^\pi = \\ &= \frac{45\pi}{32} \text{ o.j.} \end{aligned}$$

Objem obrazce bude  $\frac{45\pi}{32}$  o.j.

**Příklad 10:** Vypočítejte objem tělesa  $M$  ohraničeného plochami

$$z = x^2 + y^2; z = 4x^2 + 4y^2 - 4; y = \frac{1}{2}x; y = 2x.$$

**Řešení:**

Těleso  $M$  je ohraničeno rotačními paraboloidy  $z = x^2 + y^2$  a  $z = 4x^2 + 4y^2 - 4$  a rovinami  $y = \frac{1}{2}x$  a  $y = 2x$  (obrázek 30a).

Průmětem tělesa  $M$  do roviny  $xy$  je oblast  $P$  ohraničená přímkami  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = 2x$  a kružnicí  $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$  (obrázek 30b).

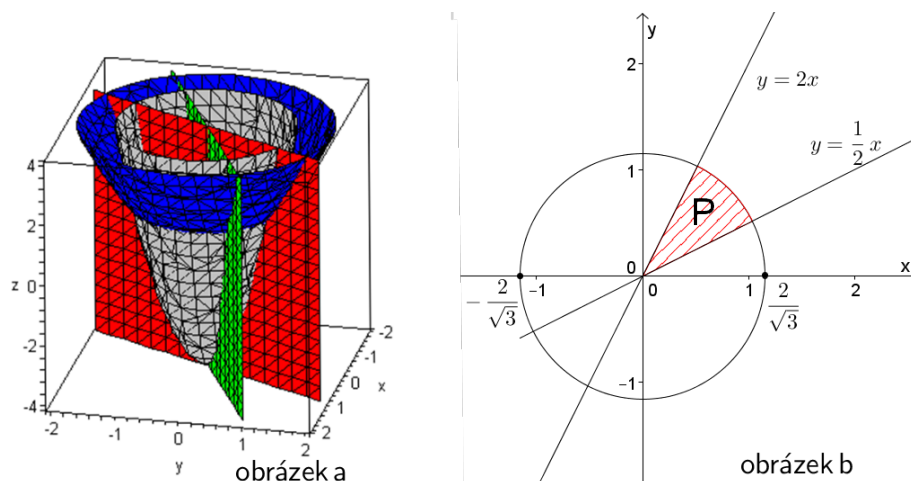
Rovnici kružnice jsme získali z průniku zadaných dvou rotačních paraboloidů

$$x^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4.$$

**Výpočet přes dvojný integrál:**

Vzhledem k tomu, že oblast integrace je část kruhu (obrázek 30b), výhodné je využít polární souřadnice, vztah (2.3.2). Pro souřadnice libovolného bodu tělesa  $M$  platí tyto nerovnice:

$$4\rho^2 - 4 \leq z \leq \rho^2; \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \varphi \leq \arctan 2; 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$



Obrázek 30: Znárodnění tělesa  $M$

Pro objem  $V$  bude platit:

$$\begin{aligned} V &= \iint_P (x^2 + y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 4) \, dx \, dy = \iint_P (4 - 3x^2 - 3y^2) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \int_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} (4 - 3\rho^2) \rho \, d\varphi \, d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (4 - 3\rho^2) \rho [\varphi]_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} \, d\rho = (\arctan 2 - \arctan(\frac{1}{2})) \cdot \left[ 4\frac{\rho^2}{2} - 3\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ o.j.} \end{aligned}$$

### Výpočet přes trojný integrál:

Vzhledem k tomu, že oblast integrace  $M$  je prostor mezi dvěma paraboloidy (obrázek 30a), je výhodné využít transformaci do válcových souřadnic, vztah (3.3.1). Pro souřadnice libovolného bodu tělesa  $M$  platí tyto nerovnice:

$$4\rho^2 - 4 \leq v \leq \rho^2; \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \varphi \leq \arctan 2; 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Podle vztahu (3.4.1) pro objem  $V$  bude platit:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \int_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} \int_{4\rho^2-4}^{\rho^2} \rho dv d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \int_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} \rho(\rho^2 - 4\rho^2 + 4) d\varphi d\rho = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \int_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} (4 - 3\rho^2) \rho d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (4 - 3\rho^2) \rho [\varphi]_{\arctan(\frac{1}{2})}^{\arctan 2} d\rho = (\arctan 2 - \arctan(\frac{1}{2})) \cdot \left[4\frac{\rho^2}{2} - 3\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \text{ o.j.} \end{aligned}$$

**Příklad 11:** Vypočítejte hmotnost tenké lichoběžníkové desky a určete těžiště. Lichoběžník má vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$ ,  $[1, 2]$ . Hustota  $\rho(x, y)$  je v každém bodě této desky dána funkcí  $\rho(x, y) = e^x$ .

### Řešení:

Pro určení integračních mezí využijeme (obrázek 25) z příkladu 5.

Integrační meze budou:

$$x \in \langle 0, 1 \rangle; y \in \langle 0, 1 + x \rangle.$$

Nyní vypočítáme hmotnost  $m$ . Ve výpočtu uijeme metodu Per partes. Bude platit:

$$\begin{aligned} m &= \iint_M \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1+x} e^x dy dx = \\ &= [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x+1)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 2e - 1 - e + 1 = e. \end{aligned}$$

Nyní určíme těžiště  $T$  podle vztahů (2.4.5) a (2.4.6). Bude platit:

$$x_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 \int_0^{1+x} x dy dx = \frac{1}{e} \int_0^1 (x + x^2) dx = \frac{1}{e} \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{6e}.$$

$$y_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 \int_0^{1+x} y dy dx = \frac{1}{e} \int_0^1 \left( \frac{1+2x+x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2e} \left[ x + x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{6e}.$$

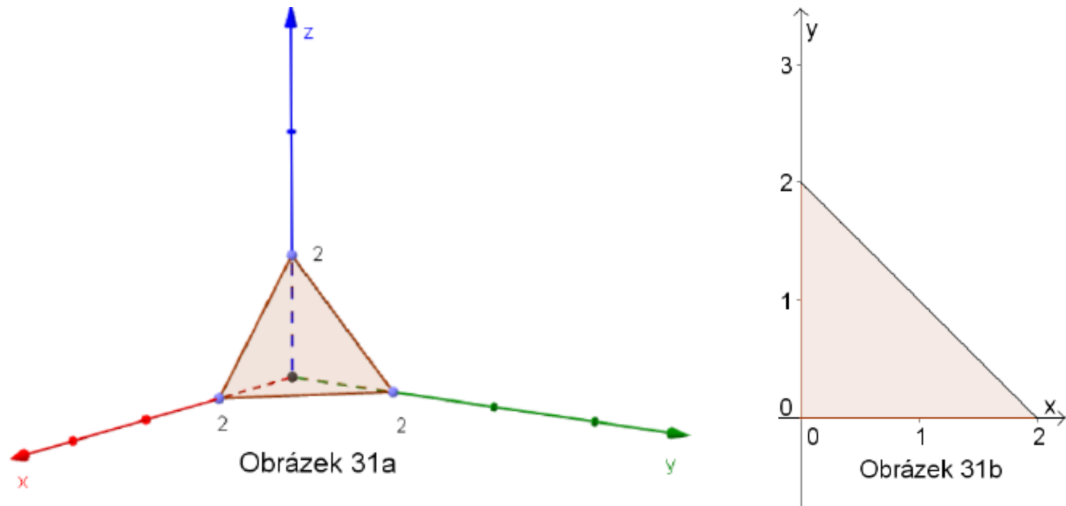
Hmotnost lichoběžníkové desky je  $e$  jednotkách hmotnosti. Těžiště  $T$  je určeno

$$T = \left[ \frac{5}{6e}, \frac{7}{6e} \right].$$

**Příklad 12:** Určete hodnotu integrálu  $\iiint_M \frac{x+y}{2} dx dy dz$ , kde  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 2\}$ .

**Řešení:**

Množina  $M$  je čtyřstěn (obrázek 31a) s podstavou trojúhelníka (obrázek 31b). Vyřešením



Obrázek 31: Znázornění integrační oblasti

nerovnic  $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 2$  dostaneme tyto integrační meze:

$$x \in \langle 0, 2 \rangle; y \in \langle 0, 2 - x \rangle; z \in \langle 0, 2 - y - x \rangle.$$

Pro integraci bude platit:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-y-x} \frac{x+y}{2} dz dy dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y)(2-x-y) dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2-x} (2x - x^2 - 2yx + 2y - y^2) dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ 2xy - x^2y - y^2x + y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^{2-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \frac{4}{3} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right]_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

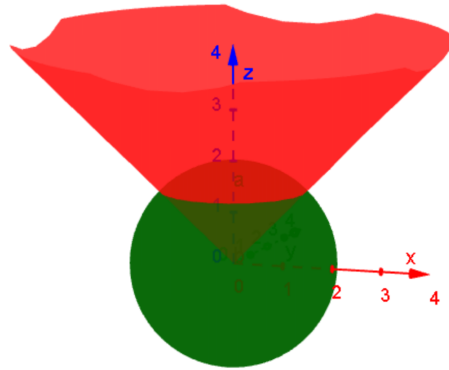
**Příklad 13:** Vypočtete objem tělesa  $T$ , kde

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}.$$

**Řešení:**

Těleso je část koule se středem v počátku a poloměru 2, kterou z ní vyřízne kuželová plocha  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (obrázek 32).

Pro výpočet objemu uijeme převodu na sférické souřadnice. Do nerovnic pro  $T$  dosadíme vztahy (3.3.3) a vyjádříme integrační meze pro  $\rho, \varphi, \vartheta$ . Bude platit:



Obrázek 32: Znázornění tělesa  $T$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq 4 \wedge \\ &\wedge \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta} \leq \rho \cos \vartheta \\ 0 &\leq \rho^2 \leq 4 \wedge \tan \vartheta \leq 1 \\ 0 &\leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Integrační meze jsou:

$$\rho \in \langle 0, 2 \rangle; \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle; \varphi \in (0, 2\pi).$$

Nyní dosadíme do vztahu pro objem (3.4.1). Bude platit:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} \, d\varphi = \frac{8}{3} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ o.j.} \end{aligned}$$

Objem tělesa  $T$  je  $\frac{16\pi}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  o.j.

**Příklad 14:** Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose  $z$  homogenního rotačního válce o výšce  $h$  a poloměru  $r$ , kde osa  $z$  prochází středem horní a dolní podstavy.

**Řešení:**

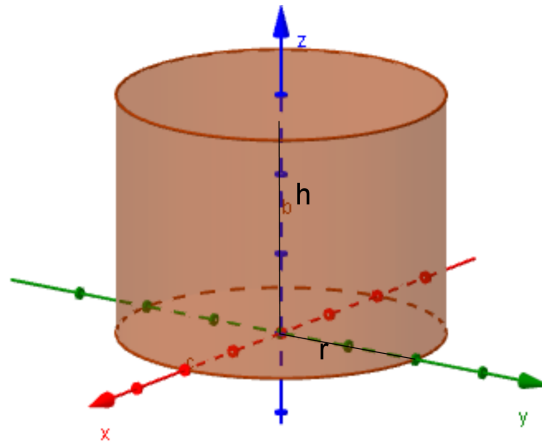
Znázorníme zadání příkladu (obrázek 33).

K výpočtu užitíme substituce na válcové souřadnice.

Integrační meze jsou:

$$\rho \in (0, r); z \in (0, h); \varphi \in (0, 2\pi).$$

Pro výpočet momentu setrvačnosti na osu  $z$  užitíme vztahu (3.4.12). Protože válec je homogenní bude  $\rho(x, y, z) = 1$ . Bude platit:



Obrázek 33: Znázornění příkladu 14

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r \rho^3 \, d\rho \, dz \, d\varphi \\
 &= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^h dz \, d\varphi = \frac{hr^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi hr^4}{2}.
 \end{aligned}$$



## 5.2 Příklady s výsledky

**Příklad 1:** Vypočtěte následující integrály:

$$I) \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \ln(y^2) \, dx \, dy \quad \left[ \frac{2}{3} \pi \ln(4) - \frac{7\pi}{18} \right]$$

$$II) \int_1^2 \int_0^1 x^2 y^2 \ln(y^2) \, dx \, dy \quad \left[ \frac{8}{9} \ln(4) - \frac{14}{27} \right]$$

$$III) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 \left( \frac{yx}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{y^2+1} \right) \, dx \, dy \quad \left[ \frac{15\pi^2}{8} \ln(2) - \frac{9\pi^2}{8} \ln(3) - \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \arctan(\pi) \right]$$

**Příklad 2:** Změňte pořadí integrace

$$\int_0^1 \int_0^{2x} f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^3 \int_0^{3-x} f(x, y) \, dy \, dx. \quad \left[ \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) \, dx \, dy \right].$$

**Příklad 3:** Vypočtěte obsah plochy obrazce  $M$ , kde

$$M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 12y^2 \leq 3 \wedge x > 0 \wedge y > 0\}. \quad \left[ \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \text{s.j.} \right]$$

**Poznámka:** s.j. je zkratka objemové jednotky.

**Příklad 4:** Určete hodnotu integrálu  $\iint_D (b + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$ , kde

$$D = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = b^2\}. \quad \left[ \frac{5\pi b^3}{3} \right].$$

**Příklad 5:** Určete hodnotu integrálu  $\iiint_M xy^2 z \, dx \, dy \, dz$ , kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 2\}. \quad [36].$$

**Příklad 6:** Vypočtete objem tělesa  $T$ , kde

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = x^2 + y^2 \wedge z = 4x^2 + 4y^2 \wedge y = (x-2)^2 \wedge y = x-2\}. \quad \left[ \frac{114}{35} o.j. \right].$$

**Příklad 7:** Vypočtete objem tělesa  $M$ , kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; y + z \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 9 \wedge z \geq 0; \}. \quad [24\pi o.j.].$$

**Příklad 8:** Vypočtete hmotnost koule o poloměru 2, jejíž hustota je dána  $\rho(x, z, y) = x^2 + y^2$ .

Hmotnost koule je  $\frac{64}{5}\pi$ .

### 5.3 Příklady bez výsledků

**Příklad 1:** Určete hodnotu integrálu  $\iint_M y(\arcsin x)^2 dx dy$ , kde

$$M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \wedge a \leq y \leq b\}.$$

**Příklad 2:** Určete hodnotu integrálu  $\iint_M e^{\frac{-1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$ , kde

$$M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 36\}.$$

**Příklad 3:** Vypočtete hodnotu integrálu  $\iint_P xy dx dy$ , kde

$$P = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

**Příklad 4:** Přepište integrační meze:

$$a) \int_0^2 \int_0^{2x} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{3-x} f(x, y) dy dx.$$

$$b) \int_0^3 \int_0^{2x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^4 \int_0^{\frac{4-x}{4}} f(x, y) dy dx.$$

$$c) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dy dx.$$

**Příklad 5:** Určete integrační meze v obou možných pořadích proměnných :

1.  $M$  je trojúhelník s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[3, 0]$ ,  $[3, 3]$ ;
2.  $P$  je ohraničena křivkami  $y = x^2$ ;  $y = \sqrt{x}$ ;
3.  $D$  je kruh zadaná nerovnicí  $x^2 + y^2 \leq 25$ ;
4.  $P = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0\}$ ;

**Příklad 6:** Určete hmotnost tenké desky s hustotou  $\rho(x, y) = x + y$ , která má tvar trojúhelníka s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[1, 4]$ ,  $[1, 0]$ .

**Příklad 7:** Vypočtete objem tělesa  $M$ , kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = 3 - x - y; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}.$$

**Příklad 8:** Vypočtete objem tělesa  $M$ , kde

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; y + z \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}.$$

**Příklad 9:** Určete hmotnost a těžiště homogenního rotačního válce o výšce  $h$  a poloměru  $r$ , kde osa  $z$  prochází středem horní a dolní podstavy.

## Závěr

Tato diplomová práce byla zaměřena na základní teorii vícerozměrného Riemannova integrálu, jeho aplikace v přírodních vědách a může být užita i jako malá sbírka řešených a neřešených příkladů.

Integrální počet je velice rozsáhlý tematický celek vysokoškolské matematiky, proto v této práci nebyla uvedena celá problematika vícerozměrného Riemannova integrálu. Řešené typové příklady byly voleny tak, aby nebyly příliš obtížné a technicky náročné na provedení.

V technických oborech, zejména fyzice, se při náročnějších problémech využívá Lebesgueuv integrál, křivkové integrály a další druhy integrálů. Lebesgueuv integrál například téměř nevyžaduje, oproti Riemannovu integrálu, aby integrovatelnou funkcí byla spojitá funkce. V celé této práci se předpokládalo, že integrovaná funkce je spojitá. Pokud by integrovaná funkce nebyla spojitá, byl by postup při řešení některých příkladů mnohem komplikovanější.

Text byl psán počítačovým softwarem Texmaker. Na tvorbu obrázků a složitější výpočty jsem použil GeoGebru 4.2 a 5.0, Maple 7.00 a GNU Octave.

## Seznam literatury

- [1] Děmidovič B. P. *Sbírka příkladů z matematické analýzy*. Fragment, Havlíčkův Brod, 2003. 80-7200-587-1.
- [2] Hamhalter J., Tišer J. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vydání, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2000. ISBN: 80-01-01527-0.
- [3] Hlavička A. *Fyzika pro pedagogické fakulty*. 1.díl, Praha SPN, 1971.
- [4] Jarník V. *Integrální počet II*. 7. Vydání: Praha: Academia, 1976.
- [5] Jirásek F., Čípera S., Vacek M. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*. Vydání: Praha. SNTL, 1989. ISBN: 80-03-00187-0.
- [6] D. Kluvanec. *Matematika pre fyzikov*. Bratislava, Slovenské pedagogické nakladatelství, 1969.
- [7] Macháčová L., Míčka J., Krajňáková D.; *Zbierka úloh z matematiky*. 1. vydání, Bratislava, Alfa, 1988.
- [8] Nagy J., Taufer J. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Praha: ČVUT, 1999. ISBN 80-01-01959-4.
- [9] Rektorys K. *Přehled užití matematiky I*. Ročník C, Číslo spisů 487, Praha, Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-180-9.
- [10] Tesař J. *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky*. 1.vydání, České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 1995, 80-7040-133-8.
- [11] Vlasov A. K. *Učebnice vyšší matematiky II*. Vydání: Praha, SNTL, 1955.

## Internetové odkazy

[12] *Integral - Wikipedia, the free encyclopedia.* (online). (cit.2015-15-02). Dostupné z <http://en.wikipedia.org/wiki/Integral>.

[13] Schwabik Š. *Malý průvodce historií integrálu - Czech Digital Mathematics Library.* (online). 1996. (cit.2015 – 15 – 02). Dostupné z <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400862>.

[14] *Unitární teorie pole a kvantová gravitace - AstroNuklFyzika .* (online). (cit.2015-15-02). Dostupné z <http://astronuklfyzika.cz/GravitaceB-7.htm>.

[15] Vodstrčil a Bouchala; *Integrální počet funkcí více proměnných.* (online). (cit.2015-15-02). Dostupné z <http://homel.vsb.cz/bou10/archiv/ip2.pdf>.