Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta Pedagogická
Katedra Matematiky

Bakalářská práce

Zlatý řez okolo nás

Vypracoval: Čadková Andrea
Vedoucí práce: Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Zlatý řez okolo nás jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... …………………………….

Poděkování

Tímto způsobem bych chtěla poděkovat panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za poskytnuté informace, vážené rady a odbornou pomoc při psaní bakalářské práce.

Anotace

Problematika Zlatého řezu je neznámá spoustě lidí, proto mým hlavním cílem bylo zjistit a jistým způsobem přijatelně zformulovat základní informace o Zlatém poměru a jeho výskytu kolem nás. Zlatý řez se vyskytuje v různých podobách v našich životech. Součástí práce jsou kapitoly s podrobným popisem výskytu Zlatého řezu kolem nás. Zároveň je v práci popsána konstrukce Zlatého řezu a to v různých geometrických obrazcích. Tyto konstrukce jsou znázorněny i graficky a to především v programu GeoGebra. Jedna z kapitol je zaměřena na souvislost Fibonacciho posloupnosti se Zlatým číslem.

Klíčová slova: Zlatý řez, Zlatý poměr, geometrie, Fibonacciho posloupnost

Annotation (Golden section around us)

The issue of the golden section is unknown for many people and that is the reason why my main aim was to find out and acceptably define basic information about the golden ratio and its occurrence around us. The golden section occurs in different forms in our lives. The chapters describing a detailed description of an occurrence of the golden section around us are the part of the work. The constructions of the golden section in different geometrical shapes are also the part of the work. These constructions are illustrated mainly by geometrical program GeoGebra. One of the chapters focuses on relationship between Fibonacci sequence and the golden number.

Key words: golden section, golden ratio, geometry, Fibonacci sequence

Obsah

1. Úvod

Zlatý řez, jedno z nejznámějších čísel, je přírodní úkaz, který se vyskytuje v běžném životě každého z nás. Toto číslo znali již naši předci a hojně ho využívali při budování kultur, které se dochovaly dodnes. Zlaté číslo úzce souvisí s problematikou Fibonacciho posloupnosti, jednou z nejznámějších posloupností na světě.

Práce je rozdělena do pěti hlavních kapitol. Každá kapitola detailně rozebírá Zlatý řez a souvislosti úzce spjaté s tímto tématem. Některé kapitoly jsou vhodně doplněny výpočty nebo obrázky, znázorňujícími různé konstrukce. Většina těchto obrázků vznikla v matematicko-geometrickém programu GeoGebra.

První kapitola je zaměřena na představení Zlatého řezu společně s jeho historií. Dále je v této kapitole proveden obecný výpočet a je zde zmíněna obecná definice Zlatého řezu. Definice je doplněna obrázkem, znázorňujícím rozdělení úsečky ve Zlatém poměru.

Druhá kapitola obsahuje několik variant konstrukcí Zlatého řezu. Zlatý řez je zde zobrazen pomocí rozdělení úsečky, pomocí Zlatého obdélníku, jehož strana je rozdělena ve Zlatém řezu a v neposlední řadě pomocí pravidelného pětiúhelníku, v němž je poměr strany a úhlopříčky zlatý. Dále jsou v této kapitole zmíněny vybrané vlastnosti pravidelného pětiúhelníku včetně Zlatého trojúhelníku, který je v pravidelném pětiúhelníku obsažen. Kapitola je ještě doplněna konstrukcí logaritmické spirály a to jak ve Zlatém obdélníku, tak i ve Zlatém trojúhelníku.

Třetí kapitola se zaměřuje na souvislost Zlatého řezu s Fibonacciho posloupností. Zároveň je v této kapitole zmíněna historie Fibonacciho posloupnosti. Dále je zde zmíněn výpočet členů Fibonacciho posloupnosti a vybrané vlastnosti posloupnosti. K těmto vlastnostem jsou uvedeny konkrétní příklady.

Ve čtvrté hlavní kapitole je detailně popsán výskyt Zlatého řezu v přírodě a v lidském těle. V kapitole jsou uvedeny konkrétní případy výskytu Zlatého řezu a také ilustrační obrázky k danému tématu.

V poslední hlavní kapitole je popsán výskyt Zlatého řezu okolo nás, tedy v architektuře, kultuře a také umění. Tato kapitola je také doplněna o ilustrační obrázky a to především obrázky z knihy *Záhadný Zlatý řez* od Scotta Olsena.

2. Zlatý řez v literatuře

2.1 Historie Zlatého řezu

Zlatý řez, též známý pod latinským názvem *Sectio Aurea*, vyjadřuje poměr o velikosti iracionálního čísla, často zaokrouhleného přibližně na tři až na pět desetinných míst. Hodnota zlatého řezu se tedy přibližně rovná hodnotě 1,61803. První zmínky o tzv. Božské proporci pocházejí již z dob přibližně 3. století př. n. l. Zároveň byl v této době Zlatý řez poprvé definován známým matematikem a geometrem Euklidem.

Postupem času se odhalovaly různé skutečnosti a zajímavosti o Zlatém řezu, avšak za nejstarší pojednání je považována kniha *Divina Proportia* (česky Božská proporce) napsaná italským matematikem Lucem Paciolim v průběhu let 1496 - 1498. Zajímavostí je, že tuto knihu ilustroval Leonardo da Vinci, který sám našel zalíbení v používání Zlatého poměru při své tvorbě.

Zlatý řez, respektive jeho hodnota, bývá označována velkým písmenem Φ („fí“) řecké abecedy. Označuje se písmenem Φ podle počátečního písmena jména řeckého sochaře Feidia. Tento sochař se zasloužil o postavení významné řecké památky Parthenonu. Při vykreslení plánu budoucího chrámu zasvěcenému bohyni Athéně použil Feidias své znalosti Zlatého poměru.

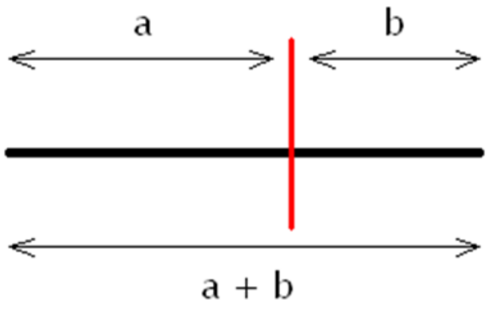
Zkoumáním Zlatého řezu a zákonitostí s ním spojených se zabýval také další významný řecký matematik Platón. Sám své pokusy spíše než početně prováděl geometricky. Snažil se rozdělit úsečku na dvě nestejnoměrné části a zkoumal, v jakém poměru se jednotlivé části nacházejí. Zabýval se tím, že se snažil z poměru vytvořit úměru. Našel pouze jediný možný způsob - Zlatý řez. Tedy, že poměr celku k delší části úsečky se rovná poměru delší části úsečky ke kratší části úsečky. Tento jev označujeme jako spojitá geometrická úměra.

Vhodnou otázkou by bylo, proč se Platón rozhodl rozdělit právě úsečku? Odpověď na tuto otázku je jednoznačná. Zlatý řez je iracionální číslo, které nelze vyjádřit jednoduchým zlomkem, ale může být geometricky odvozeno z úsečky.

2.2 Definice Zlatého řezu

Definice podle Euklida, zaznamenaná Mariem Liviem v knize *Zlatý řez* [5]:

„Úsečka se rozdělí v krajním a středním poměru tehdy, když se celá má k delšímu dílu jako delší díl ke kratšímu.“ ([5], s. 11)



Obr. 1 Rozdělení úsečky ve Zlatém poměru

2.3 Výpočet Zlatého řezu

Po označení částí úsečky například delší část = a, kratší část = b si sestavíme rovnici

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

dále si označíme a upravíme poměr

$$\Phi = \frac{a}{b}$$

$$a = \Phi b$$

nyní dosadíme do původní rovnice

$$\frac{\Phi b + b}{\Phi b} = \frac{\Phi b}{b}$$

rovnici vykrátíme hodnotou b

$$\frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi$$

tuto rovnici vynásobíme hodnotou Φ a zároveň upravíme na tvar kvadratické rovnice

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \tag{1}$$

za kořen rovnice považujeme řešení větší než 1, tedy

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887 \ldots$$

Poznámka:

Kvadratickou rovnici (1) můžeme upravit na rovnici v tomto tvaru

$$\Phi(\Phi - 1) = 1 \tag{2}$$

z rovnice (2) vyplývá vztah, který nesplňuje žádné jiné číslo kromě Zlatého čísla

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

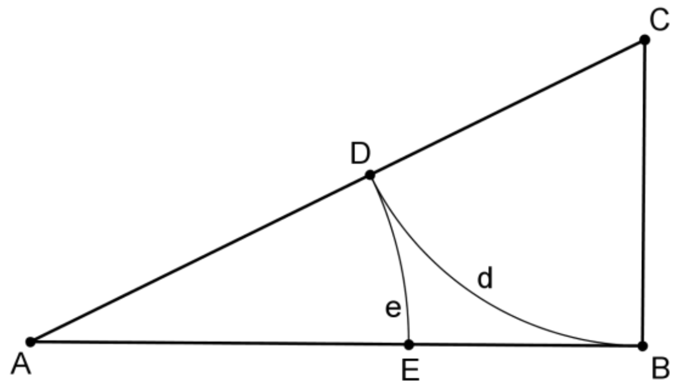
tzn., že hodnota Zlatého čísla zmenšená o jedna je rovna převrácené hodnotě Zlatého čísla.

3. Konstrukce Zlatého řezu, Zlatý poměr

3.1 Herónova konstrukce (rozdělení úsečky)

Tuto a další konstrukce čerpám z knihy *The divine proportion* od H. Huntleyho [3].

Nejprve sestrojíme úsečku *AB* o libovolné délce. Pak z bodu *B* vztyčíme polopřímku kolmou na úsečku *AB*. Sestrojíme bod *C*, který leží na kolmici z bodu *B* a to ve vzdálenosti ½ /*AB*/. Nyní sestrojíme trojúhelník *ABC*. Dále sestrojíme kružnici *d*, se středem v bodě *C* a poloměrem /*BC*/. Bod *D* leží tam, kde kružnice *d* protne úsečku *AC*. Nyní sestrojíme kružnici *e*, se středem v bodě *A* a poloměrem /*AD*/. Vznikne bod *E*, ležící na průniku kružnice *e* a úsečky *AB*. Bod *E* rozděluje úsečku *AB* ve Zlatém poměru.



Obr. 2 Geometrické zobrazení Zlatého poměru

Důkaz:

Označme si délku úsečky /*AB*/ jako *a*, dále pak délka úsečky /*BC*/ = $\frac{a}{2}$. Z Pythagorovy věty si vypočteme délku úsečky /*AC*/=$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

Dále víme, že /*CD*/ = $\frac{a}{2}$ a tudíž /*AD*/ = /*AC*/ - /*CD*/ = $\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. Jelikož platí vztah /*AD*/ = /*AE*/, můžeme si vypočítat délku úsečky /*BE*/ = /*AB*/ - /*AE*/ = $\frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

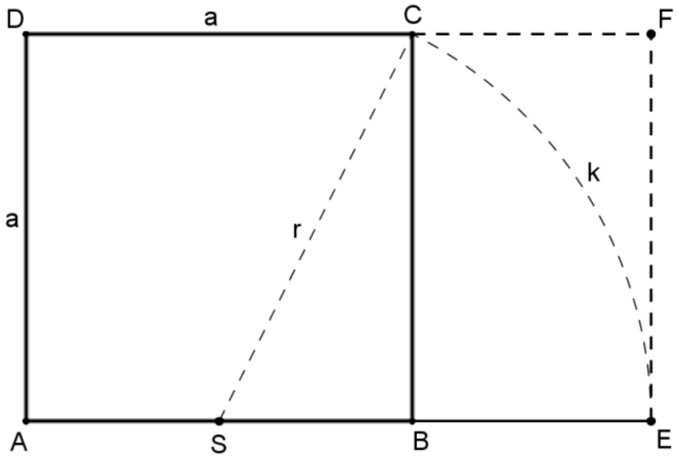
Nyní chceme dokázat, že $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|BE|} = \Phi$.

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\frac{a}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+2}{9-5} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

3.2 Konstrukce Zlatého obdélníku

Nejprve sestrojíme libovolný čtverec *ABCD*. Dále sestrojíme střed *S* úsečky *AB*. Poté sestrojíme kružnici *k*, se středem *S* a poloměrem *r*. Pak prodloužíme úsečku *AB* na polopřímku. Bod *E* vznikne průnikem kružnice *k* a polopřímky *AB*. Nakonec sestrojíme Zlatý obdélník *AEFD*. Bod *B* dělí stranu obdélníku ve Zlatém poměru.



Obr. 3 Sestrojení Zlatého obdélníku

Důkaz:

Nejprve si označme délku strany čtverce *ABCD* jako *a*. Dále pak víme, že $|AS|=|BS|=\frac{a}{2}$.

Z Pythagorovy věty si vypočteme délku úsečky $|CS|$, která je stejná jako

$|ES| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$

Nyní si vypočteme délku úsečky $|AE| = |AS| + |ES| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right).$

Nakonec si vypočteme délku úsečky $|BE| = |ES| - |BS| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$

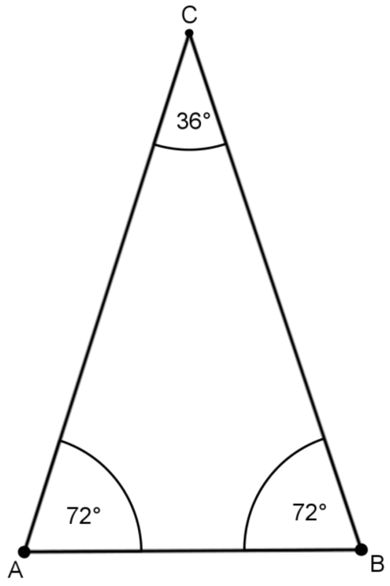
Nyní chceme dokázat, že $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \Phi.$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

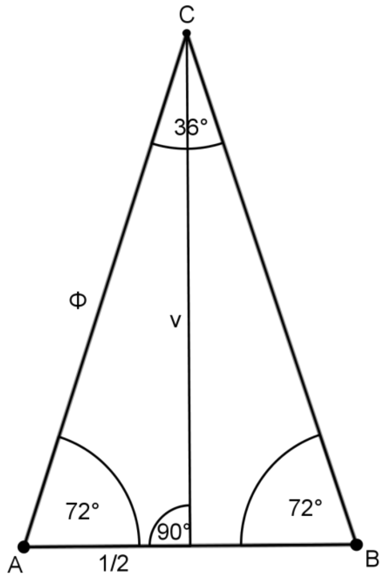
$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{a}{\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{5 - 1} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

3.3 Konstrukce Zlatého trojúhelníku

Zlatý trojúhelník lze sestrojit velmi snadno. Zlatým trojúhelníkem totiž rozumíme libovolný rovnoramenný trojúhelník, jehož úhly při základně měří 72° a tudíž úhel u vrcholu *C* měří 36°. U každého takto zkonstruovaného trojúhelníku je poměr mezi základnou *AB* a ramenem *AC* označován jako Zlatý a platí, že $\frac{|AB|}{|AC|} = \Phi.$



Obr. 4 Zlatý trojúhelník



Obr. 5 Zlatý řez v trojúhelníku

Důkaz:

Zvolíme si libovolnou délku základny *AB*. Výhodné bude zvolit si délku základny /*AB*/ = 1. Aby byl trojúhelník *ABC* zlatý, musí platit, že délka ramen je rovna $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. Poté si trojúhelník *ABC* rozdělíme výškou *v* na základnu, abychom získali pravoúhlý trojúhelník. Úhel při vrcholu *A* označme jako α.

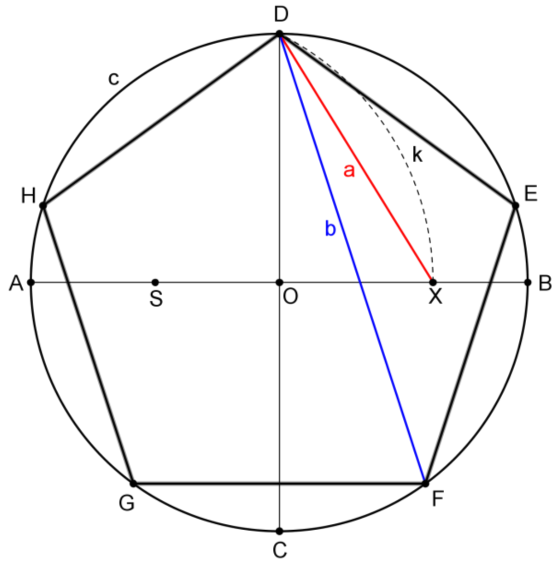
Potom platí, že $\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$.

V následující kapitole si dokážeme, že velikost úhlu α = 72° (viz *obr. 8*).

3.4 Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Tuto konstrukci pravidelného pětiúhelníku společně s jeho vlastnostmi čerpám z knihy *The geometry of art and life* od M. Ghyky [2].

Nejprve sestrojíme libovolnou úsečku *AB* se středem *O*. Poté sestrojíme kružnici *c* se středem *O* a poloměrem */AO/*. Kružnice *c* je zároveň kružnicí opsanou pravidelného pětiúhelníku. Body *C* a *D* leží na průniku kružnice *c* s kolmicí na úsečku *AB* procházející středem *O*. Dále sestrojíme střed *S* úsečky *AO*. Bod *X* vznikne průnikem kružnice *k*, se středem *S* a poloměrem */SD/* s úsečkou *AB*. Délka *a* úsečky *DX* je zároveň délka strany pravidelného pětiúhelníku. Nakonec sestrojíme pravidelný pětiúhelník *DEFGH*.

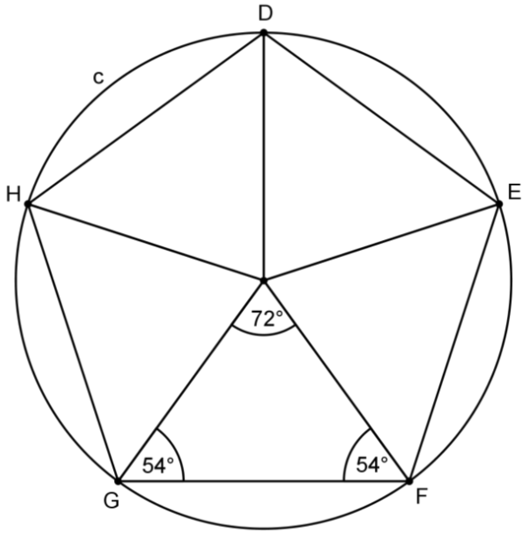


Obr. 6 Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku *b* a délka jeho strany *a* jsou ve Zlatém poměru.

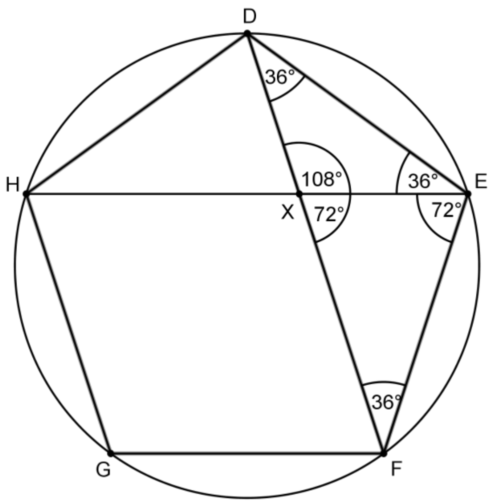
3.4.1 Vlastnosti pravidelného pětiúhelníku

Pravidelný pětiúhelník může být rozdělen do pěti rovnoramenných trojúhelníků. Tyto trojúhelníky mají společný hlavní vrchol a základnami trojúhelníků jsou pak strany pětiúhelníku. Každý trojúhelník svírá u společného vrcholu úhel roven 72° (360°/5 = 72°) a úhly při základnách jsou rovny 54° (180° - 72° = 108°/2 = 54°). Délka ramen trojúhelníků je rovna poloměru kružnice opsané.

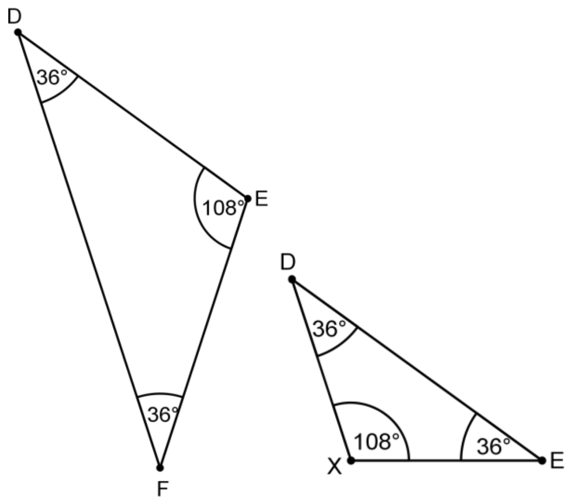


Obr. 7 Rovnoramenné trojúhelníky v pětiúhelníku

Další vlastností v pravidelném pětiúhelníku je výskyt podobných trojúhelníků. Tyto podobné trojúhelníky mají stejně velké vnitřní úhly. Pokud větší trojúhelník rozdělíme pomocí další úhlopříčky pětiúhelníku, pak vzniknou dva rovnoramenné trojúhelníky, z nichž jeden je Zlatý a druhý je podobný původnímu trojúhelníku. Tedy trojúhelník *DFE* je podobný s trojúhelníkem *DXE*. Pokud trojúhelník *DFE* rozdělíme úhlopříčkou pětiúhelníku, pak vznikne podobný trojúhelník *DXE* a Zlatý trojúhelník *XFE* (viz *obr. 8*). [1]

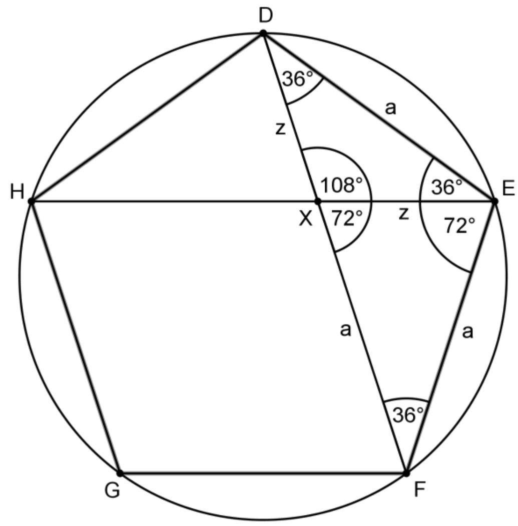


Obr. 8 Podobné trojúhelníky v pětiúhelníku



Obr. 9 Zobrazení vnitřních úhlů podobných trojúhelníků

Další zajímavou vlastností je fakt, že úhlopříčka *DF* je rozdělena úhlopříčkou *HE* ve Zlatém řezu, tedy bod *X* leží ve Zlatém řezu (viz *obr. 10*).



Obr. 10 Zlatý řez v pětiúhelníku

Důkaz, že X leží ve Zlatém řezu:

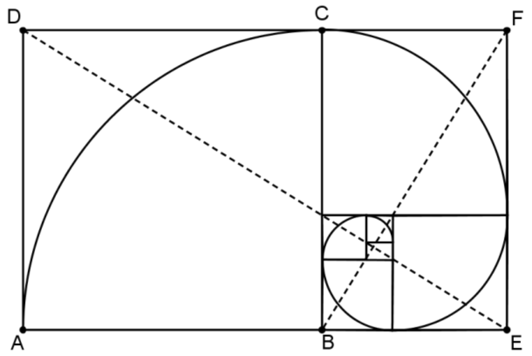
Chceme dokázat, že $\frac{|DF|}{|XF|} = \frac{|XF|}{|DX|} = \Phi$.

Po dosazení do rovnice podle obrázku č. 10 a z definice podobných trojúhelníků vyjde vztah $\frac{a+z}{a} = \frac{a}{z} = \Phi$. Podle definice Zlatého řezu (viz kapitola 2.2) víme, že tento vztah opravdu platí.

3.5 Konstrukce logaritmické spirály

3.5.1 Zlatý obdélník

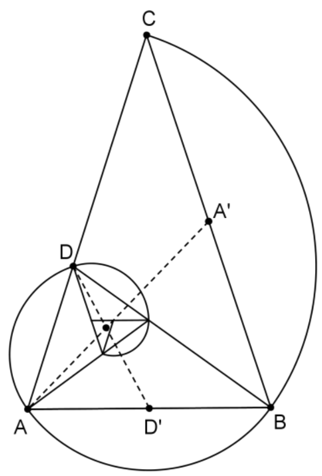
Logaritmická spirála ve Zlatém obdélníku vznikne postupným oddělováním čtverců od obdélníků. Nově vzniklé obdélníky se vždy otočí o 90°. Logaritmická spirála vznikne spojením vrcholů čtverců, ležících vždy na stejné úhlopříčce. Důležité je také určit pól spirály, neboli průsečík úseček *DE* a *BF*. [3]



Obr. 11 Spirála ve Zlatém obdélníku

3.5.2 Zlatý trojúhelník

U Zlatého trojúhelníku vznikne logaritmická spirála postupným oddělováním trojúhelníků. Trojúhelníky, které vznikají, jsou rovnoramenné a zároveň zlaté. Rameno vzniklého trojúhelníku je shodné se základnou předchozího trojúhelníku a spirálu tvoří vrcholy vzniklých trojúhelníků. Pól spirály je průsečík úseček *AA´* a *DD´*. [3]



Obr. 12 Spirála ve Zlatém trojúhelníku

4. Souvislost Zlatého řezu s Fibonacciho posloupností

Definice: Fibonacciho posloupností rozumíme nekonečnou posloupnost zadanou rekurentním předpisem,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \, , n \geq 1$$

kde si první dva členy posloupnosti pevně určíme $F_1 = 1, F_2 = 1$.

4.1 Výpočet n-tého členu posloupnosti:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$(n = 0,1,2,3\ldots)$

Tuto rovnici zformuloval francouzský matematik Jacques Binet a je zmíněna v knize *The divine proportion* spisovatele H. Huntleyho. ([3], s. 56)

U rovnice si můžeme povšimnout podobnosti členů rovnice s výsledkem výpočtu Zlatého řezu.

Fibonacciho posloupnost je řada přirozených čísel - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 … Každý následující člen posloupnosti vzniká součtem dvou předchozích členů. Tato řada je nekonečná a poměry dvou po sobě jdoucích čísel konvergují k hodnotě Zlatého řezu, tedy Φ.

Z již zmíněných informací o Fibonacciho posloupnosti vyplývají následující vlastnosti. Tato posloupnost má aditivní charakter, tzn. každé následující číslo je součtem dvou předchozích a zároveň je tato posloupnost multiplikativního charakteru, tzn. každý člen Fibonacciho posloupnosti se po vynásobení hodnotou Φ limitně blíží hodnotě předchozího členu [6].

První zmínky o Fibonacciho posloupnosti pocházejí již od starověkých Egypťanů a jejich řeckých žáků. Nejsou však dochovány žádné písemné důkazy a proto se oficiálně hovoří o objevení Fibonacciho posloupnosti až v souvislosti se středověkem.

V té době nebyla posloupnost ještě přesně pojmenována. S názvem „Fibonacciho posloupnost“ poprvé přišel Edouard Lucas a to až v 19. století. Posloupnost pojmenoval na počest italského matematika Leonarda Pisánského, který byl znám též pod přezdívkou Fibonacci. Tento italský matematik, žijící na přelomu 12. - 13. století, proslavil posloupnost svou velmi známou úlohou o množení králíků.

4.2 Vlastnosti posloupnosti

Posloupnost má řadu významných vlastností, ale ráda bych uvedla pouze několik z nich.

4.2.1 První vlastnost

Pokud sečteme libovolných deset po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti, je výsledek dělitelný jedenácti. Zároveň pokud vynásobíme sedmý člen z libovolných deseti po sobě jdoucích členů jedenácti, výsledkem bude součet všech těchto deseti čísel.

Příklad:

$5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 = 979$

$979 \div 11 = 89$

89 je sedmým číslem z vybraných deseti po sobě jdoucích čísel

4.2.2 Druhá vlastnost

Tuto vlastnost objevil francouzský matematik Joseph L. Lagrange. Zjistil, že číslice na místě jednotek se opakují s periodou šedesáti míst. Je nutno podotknout, že v tomto případě uvažujeme posloupnost začínající 1,2,3,5,8,13…

Příklad 1:

$F_5 = \mathbf{8}$ $\qquad$ $F_{65} = 27\,777\,890\,035\,28\mathbf{8}$

Příklad 2:

$F_6 = \mathbf{13}$ $\qquad$ $F_{66} = 44\,945\,570\,212\,85\mathbf{3}$

4.2.3 Třetí vlastnost

Pokud sečteme druhé mocniny dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti, výsledkem je opět číslo náležící posloupnosti.

Příklad 1:

$(F_3)^2 + (F_4)^2 = \check{c}len\ posloupnosti$

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13\ (F_6)$

Příklad 2:

$(F_9)^2 + (F_{10})^2 = \check{c}len\ posloupnosti$

$34^2 + 55^2 = 1156 + 3025 = 4181\ (F_{19})$

4.2.4 Čtvrtá vlastnost

Tato vlastnost dokazuje, že poměry dvou po sobě jdoucích čísel konvergují k hodnotě *Φ*. Obecně tedy platí vztah $\frac{a_{n+1}}{a_n} \cong \Phi$ [4].

$\frac{1}{1} = \mathbf{1}\ \frac{2}{1} = \mathbf{2}\ \frac{3}{2} = \mathbf{1,5}\ \frac{5}{3} \cong \mathbf{1,667}\ \frac{8}{5} = \mathbf{1,6}\ \frac{13}{8} \cong \mathbf{1,625}\ \frac{21}{13} \cong \mathbf{1,615}\ \frac{34}{21} \cong \mathbf{1,619}$

$\frac{55}{34} \cong \mathbf{1,618}\ \frac{89}{55} \cong \mathbf{1,618}\ \frac{144}{89} \cong \mathbf{1,618}\ \frac{233}{144} \cong \mathbf{1,618}\ \frac{377}{233} \cong \mathbf{1,618}$

4.2.5 Pátá vlastnost

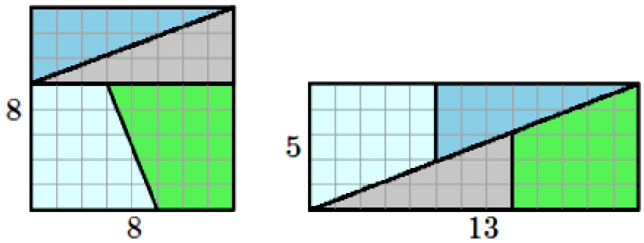
Tuto vlastnost objevil německý astronom Johannes Kepler. Dokázal, že platí vztah

$$|F_n \cdot F_{n+2} - (F_{n+1})^2| = 1$$

Příklad:

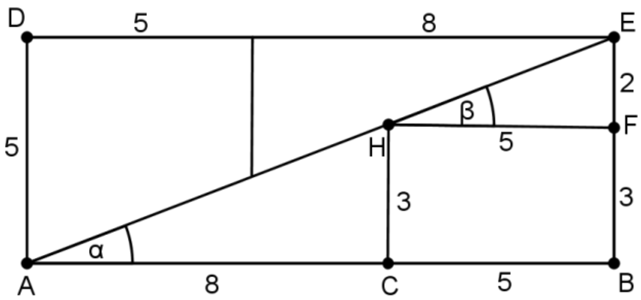
$|F_4 \cdot F_6 - (F_5)^2| = |3 \cdot 8 - 5^2| = |24 - 25| = |-1| = 1$

S touto vlastností souvisí jeden paradox, který se dá snadno definovat pomocí skládání papíru. Vezmeme-li v úvahu například čtverec o straně 8 s obsahem 64. Tento čtverec můžeme rozdělit na 2 trojúhelníky a 2 lichoběžníky se stranami 5 a 3. Po rozstříhání papíru a přeskládání těchto částí vznikne obdélník se stranami 5 a 13 (viz *obr. 13*). Snadno lze spočítat, že obsah takového obdélníku je roven 65. Vysvětlení tohoto paradoxu zmínil H. Huntley ve své knize *The divine proportion* [3].



Obr. 13 Paradox

Paradoxem je, že úhlopříčka v nově vzniklém obdélníku není přímkou, ale rovnoběžníkem. Pouhým okem je tento rovnoběžník nepatrný, ale můžeme si snadno provézt důkaz.



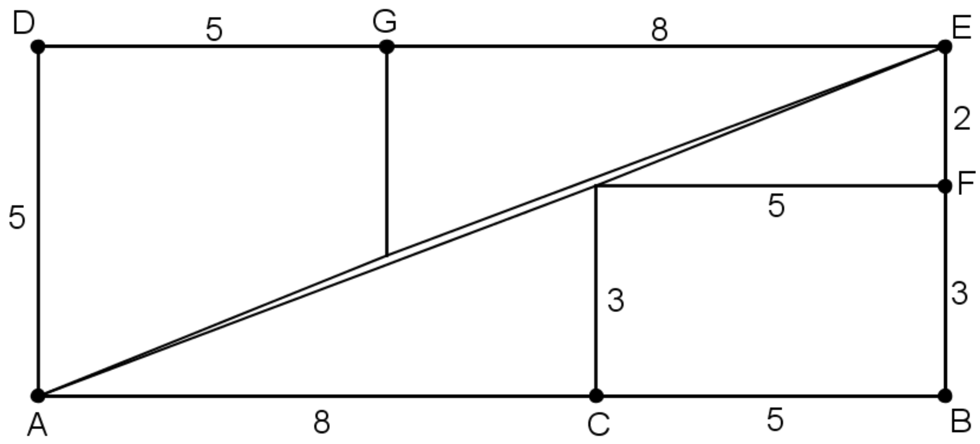
Obr. 14 Důkaz tvrzení $\alpha \neq \beta$

Důkaz:

Trojúhelník *ACH* a trojúhelník *HFE* jsou podobné, proto úhel α a úhel β by měly být totožné, tedy α = β.

$$\tan\alpha = \frac{3}{8} = \frac{15}{40} \qquad\qquad \tan\beta = \frac{2}{5} = \frac{16}{40}$$

Z výpočtu vyplývá, že velikost úhlu α a úhlu β se liší o $\frac{1}{40}$. Tedy $\alpha \neq \beta$.



Obr. 15 Zobrazení rovnoběžníku

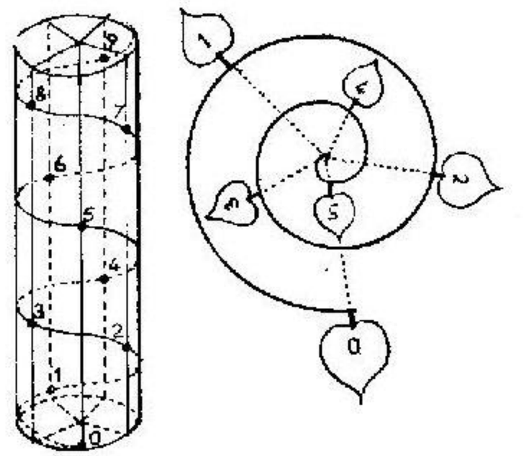
Obrázek č. 15 ukazuje rovnoběžník, který vznikne přeskládáním jednotlivých částí čtverce do obdélníku. Jednotlivé části složené do obdélníku tvoří tento rovnoběžník s obsahem 1. Je pouhým okem téměř neviditelný a může se jevit jako úhlopříčka *AE*.

5. Zlatý řez okolo nás - výskyt v přírodě a v lidském těle

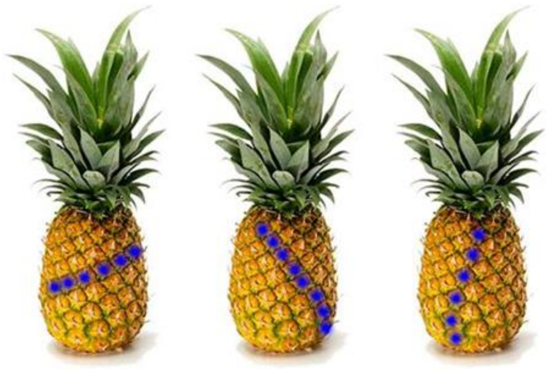
5.1 Výskyt posloupnosti v přírodě

Fibonacciho posloupnost můžeme také detailně spatřit na mnoha příkladech jak ve fauně, tak ve flóře. U zvířat lze pozorovat posloupnost například u počtu článků páteře nebo u počtu zubů, či počtu nohou. Například páteř zmije gabunské se skládá ze 144 obratlů, v ústech hyeny bychom našli 34 zubů a v ústech delfína 233 zubů. U většiny pavouků bychom napočítali 4 páry končetin, přičemž každá z nich má 5 článků nemluvě o tom, že jejich tělo se skládá z 8 článků. Dalším zářným příkladem výskytu Fibonacciho čísel jsou rodokmeny včel, respektive trubců.

U zástupců flóry je výskyt Fibonacciho řady přirozených čísel ještě intenzivnější. Studií listů rostlin se zabývá samostatná věda - fylotaxe. Tato věda je poměrně „mladá“, vyvinula se teprve v 19. století. Uspořádání listů rostlin pozoroval již v 15. století Leonardo da Vinci, který si povšiml, že u většiny z nich jsou listy uspořádány do spirál. Listy rostlin se vyskytují v přírodě pouze ve třech formách, přičemž struktura spirály je nejčastější (cca 80% z přibližně 250 000 druhů vyšších rostlin). Díky uspořádání listů do spirály probíhá fotosyntéza u rostlin snáze.



Obr. 16 Rozložení listů do spirály



Obr 17. Tři typy spirál na ananasu

Na Leonarda da Vinciho navázal v 16. století Johannes Kepler. Ten poznamenal, že většina polních rostlin je strukturována do pětiúhelníků. Název vědy „fylotaxe“ byl zaveden roku 1754 Charlesem Bonnetem. Název vznikl spojením dvou řeckých slov *fylom* = list a *taxis* = uspořádání. Mezi konkrétní příklady Fibonacciho čísel u rostlin můžeme řadit například uspořádání šupinek ananasu, kde bychom našli 3 typy spirál (21:13:8). Dalším příkladem jsou protisměrné spirály slunečnicových semínek. Tyto spirály se nacházejí v počtech rovnajících se dvěma po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti (55:34 nebo 89:55).

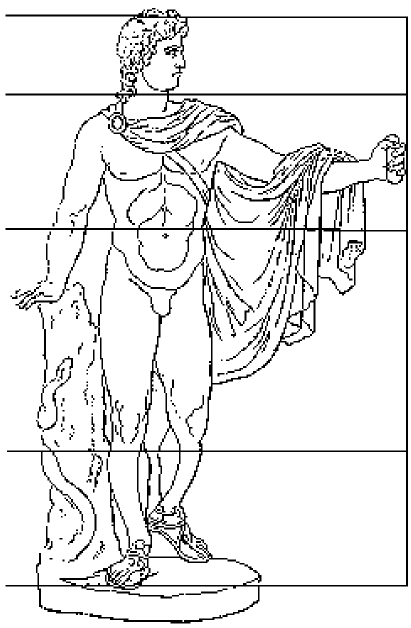
V přírodě bychom nalezli Zlatý řez také v podobě logaritmických spirál. Tyto logaritmické spirály jsou nejlépe vidět na schránkách měkkýšů, tedy ulitách. Ulita měkkýše roste tzv. gnómicky. To znamená, že se zvětšuje, prodlužuje a zároveň rozšiřuje, aniž by měnila své proporce. Křivka takovéto logaritmické spirály vypadá v každém svém měřítku naprosto stejně a jakákoliv spojnice, vedená ze středu, protíná spirálu v totožném úhlu.

U některých druhů fylotaxe bychom našli i další typ posloupnosti. Tentokrát se jedná o Lucasovu posloupnost, která se skládá z následujících čísel - 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199 … Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti každý následující člen vznikne součtem dvou předchozích členů. Čísla Lucasovi posloupnosti bychom našli přibližně u 1,5% zjištěných struktur fylotaxe například u slunečnice, cedru či sekvoje.

5.2 Výskyt posloupnosti na lidském těle

Jak hodnota Zlatého řezu, tak čísla Fibonacciho posloupnosti vytvářejí a formují naše postavy, dokonce i naši DNA. Vědci zjistili spojitost mezi Fibonacciho čísly a vzorky DNA. Většina lidí o tomto faktu vůbec neví. Jistý řecký sochař Polykleitos se zabýval studií lidského těla již v 5. století př. n. l. Tuto studii zaznamenal do svého spisu *Kánon.* Studii se tehdy podrobili jeho studenti (muži) a byli pozorováni dlouhých dvacet let. Studie se zabývala měřením, které zkoumalo poměr mezi výškou těla a polohou pupíku. Polykleitos se domníval, že pupík dělí tělo ve Zlatém řezu. Po dvaceti letech zjistil, že Zlatý řez se vyskytoval pouze u několika jedinců, zatímco poměry čísel Fibonacciho posloupnosti se u studentů vyskytovali daleko častěji například 8:5 a 5:3.

Dnes si již snadno spočítáme, že naše tělo je doslova rozděleno či uspořádáno podle Fibonacciho čísel a Zlatého řezu. Například každý dospělý člověk by měl mít 32 zubů, to znamená 8 zubů v každé čtvrtině chrupu. Děti mají celkem 20 mléčných zubů, to znamená 5 zubů v každé čtvrtině chrupu. Dohromady se nám tedy vystřídá v každé čtvrtině chrupu 13 zubů. Zlatý poměr se vyskytuje mezi třemi články našich prstů a zároveň zápěstí dělí naší ruku s prsty od předloktí ve Zlatém řezu. Bylo zjištěno, že pupík dítěte se nachází přibližně ve středu těla, zatímco genitálie se nachází ve Zlatém řezu. V dospělosti se tato skutečnost obrací, tzn. že pupík leží ve výši Zlatého řezu a genitálie se stávají středem těla.



Obr. 18 Zlatý řez v lidském těle

6. Zlatý řez v umění - umění, obrazy, stavitelství, architektura

6.1 Architektura

Obr. 19 Denderský zvěrokruh

Je třeba zmínit, že znalosti o Zlatém řezu využívali lidé už od pradávna. Starověcí Egypťané používali tuto proporci při stavbě pyramid. Nejenom Egypťané, ale i starověcí Řekové využívali těchto znalostí při stavbě velkolepých chrámů. Většina z nich se mimochodem dochovala až dodnes. K výstavbě těchto chrámů využívali především Zlatý řez ve formě Zlatého obdélníku, případně Zlatého trojúhelníku. Snáze si tak dokázali představit, jak bude stavba ve finále vypadat. Často se také využíval Zlatý řez v pětiúhelníkové podobě. Například při zobrazení Denderského zvěrokruhu s poměrem 5:3, který bychom nalezli na zdech Denderského chrámu v Egyptě nebo na Arše úmluvy s poměrem 5:3.

Zlatá proporce se vyskytuje v mnoha památkách, například půdorys egyptského chrámu Osirion, socha faraona Menkaurea a nebo pohřební maska faraona Tutanchamona. Tato proporce se rozšířila i do „Nového světa“ na Americký kontinent. Známé kultury, jako například Olmékové nebo Mayové, využívaly proporci při vyřezávání svých plastik a při výstavbě chrámů.

Výskyt Zlatého řezu se rozšířil i na východ od nás. Čínské posvátné Zakázané město je komplexem budov uprostřed Pekingu. V podstatě je to město uprostřed města, vybudované kompletně podle Zlatého řezu. Město bylo vybudováno v 15. století na základě Zlatých obdélníků a je obklopeno příkopem, který je také započítán do obdélníků. Tyto obdélníky jsou zobrazeny v půdorysu města celkem třikrát.

6.2 Kultura

Jak zmínil moudrý Plótínos v jednom ze svých spisů: „Moudří starých dob, kteří budovali chrámy a sochy v touze mít bohy vedle sebe, vzhlíželi k přirozenosti Všeho a věděli, že v přirozenosti duše je snadné nechat se přivábit, avšak že kdyby někdo vytvořil něco, s čím by duše souzněla a byla schopna část toho přijmout, přijala by to ze všech věcí nejsnáze. To, co s duší souzní, je to, co ji napodobuje na způsob zrcadla, které dokáže zachytit odraz podoby.“ Tuto citaci zmínil ve své knize Scott Olsen [6]. Takto se Plótínos v podstatě vyjádřil k používání Zlatého řezu lidmi při různých činnostech.

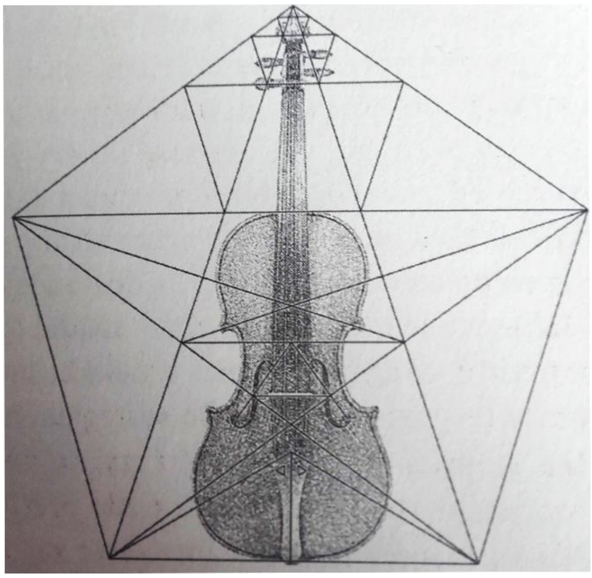
Porovnáváním Zlaté proporce s Bohem se zabýval Klement Alexandrijský. Zkoumal tento jev po duševní stránce a to především z pohledu křesťanství. V Evangeliu podle Jana si v původním znění můžeme přečíst: „Na začátku byl Logos, ten Logos byl u Boha, ten Logos byl Bůh.“ [6] Logos znamená slovo či poměr a jedině Zlatý poměr je zároveň jedno a u jednoho.

Lidé dokonce vynalezli i vědu, která se zabývá přiřazováním čísel k písmenům hebrejské abecedy. Tato věda se nazývá gematrie a symbolizuje posvátná čísla přiřazená k posvátným písmenům, případně ke jménům. Tak například jménu Ježíš je přiřazena hodnota 888 a jménu Kristus hodnota 1480. Pokud se čísla sečtou, vyjde nám hodnota 2368. Všechny tyto hodnoty jsou v poměru 3:5:8, všimněme si podobnosti s Fibonacciho posloupností. Jméno Kristus tedy tvoří Zlatý průměr.

Jak jsme si již demonstrovali na mnoha příkladech, Zlatý řez se hojně využíval ve starodávných kulturách, avšak nezapomeňme i na dnešní svět plný moderních technologií. I v dnešní době bychom našli mnoho příkladů znázorňujících Zlatý řez v „praxi." Například obyčejná platební karta, kterou dnes vlastní téměř každý, má v sobě ukrytou Zlatou proporci. Standardní platební karta má totiž rozměry 86 x 54 mm a tvoří právě Zlatý obdélník s poměrem 8:5.

Mezi další příklady s výskytem Zlatého řezu bych ráda uvedla věci, které většina z nás běžně, každodenně využívá. Například jízdní kolo, počítačový monitor nebo třeba hrací karty.

6.3 Umění



Obr. 20 Stradivariho housle

Podobně jako v přírodě má Zlatý řez své hojné zastoupení i v umění, kde bychom nalezli tuto Božskou proporci nesčetněkrát. Z výše uvedených informací již víme, že Zlatý řez využívalo mnoho sochařů a malířů. Avšak Zlatý poměr používali i slavní hudebníci při komponování různých skladeb. Dokonce některé hudební nástroje jsou zhotoveny podle Zlaté proporce jako například Stradivariho housle, nad kterými lze snadno zkonstruovat Zlatý pentagram [6].

Asi nejvýznamnějším malířem, který využíval Zlatý řez, je Leonardo da Vinci. Na několika jeho obrazech bylo zpozorováno využití Zlatého poměru (obdélníku). Mezi tyto obrazy patří i slavná *Mona Lisa*, kolem jejíž tváře lze zkonstruovat Zlatý obdélník. Podobně u dalšího obrazu *Hlava starce* je nejvýše pravděpodobné, že da Vinci měl jisté vědomosti o Zlatém řezu. [2]

Kromě malířství a sochařství se vyskytuje Zlatý řez v určité podobě i v hudbě. Bylo zjištěno, že Zlatý řez používali při své tvorbě umělci a skladatelé jako Bach, Schubert, Beethoven nebo Mozart. Podle ruského muzikologa je Zlatý řez zakomponován přibližně v 97% skladeb napsaných Beethovenem, v 92% skladeb od Chopina a cca 91% skladeb od Mozarta. Také rytmus lze rozdělit do určitých intervalů na základě jistých poměrů. Například nejjednodušší intervaly jsou oktáva, zastoupená poměrem 2:1 a kvinta, zastoupená poměrem 3:2. Mezi složitější intervaly pak patří velká a malá sexta, založená na poměru 5:3 a 8:5. Celá stupnice se pak rozkládá v poměru 13:8. Všechna čísla patří do Fibonacciho posloupnosti.

7. Literatura

[1] Belejová, Lenka: *Problematika zlatého řezu a jeho výskyt okolo nás,* České Budějovice, 2015, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, Vedoucí práce prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

[2] Ghyka, Matila C.: *The geometry of art and life*, New York: Sheed and Ward, 1946

[3] Huntley, H.: *The divine proportion: a study in mathematical beauty*, New York: Dover Publications, 1970

[4] Chmelíková, Vlasta: *Zlatý řez*, Praha, 2006, Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky, Vedoucí práce PhDr. Alena Šarounová, CSc.

[5] Livio, Mario.: *Zlatý řez: příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě,* Praha: Argo, 2006

[6] Olsen, Scott Anthony.: *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*, Praha: Dokořán, 2009