Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vyšetřování množin bodů daných vlastností s užitím software dynamické geometrie

Vypracoval: Jan Váňa

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Vyšetřování množin bodů daných vlastností s užitím software dynamické geometrie jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích …………….. Podpis:…………………..

ANOTACE

Cílem bakalářské práce *Vyšetřování množin bodů daných vlastností s užitím software dynamické geometrie* je zkoumání několika vybraných křivek, které vznikají jako množina bodů dané vlastnosti pomocí matematických programů GeoGebra a CoCoA. U každé křivky je popsán postup odvození obecné rovnice a obrázky ukazující vznik dané křivky.

ABSTRACT

The aim of the bachelor thesis *Investigation of loci of points with given properties using dynamic geometry software* is exploration of a few selected curves, witch are created as a locus of points with given properties using mathematical software GeoGebra and CoCoA. For each curve the process of determination of the locus equation and realated figures is described.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu své bakalářské práce, panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení při řešení bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod

Matematický software dynamické geometrie pomáhá při konstrukčních úlohách při výuce matematiky. S jeho použitím lze ověřovat vztahy mezi objekty a názorně je ukázat pro lepší pochopení. Pro svou práci jsem si vybral ověřování množin bodů daných vlastností v programu GeoGebra, který je volně k dispozici. Jeho pracovní prostředí je velmi přehledné a intuitivní. Velkou výhodou je možnost práce s posuvníky, díky nimž lze jednoduše měnit hodnoty jednotlivých konstrukcí a vytvářet potřebné úlohy. Pro složitější případy odvození rovnice křivky jsem používal matematický program CoCoA, který je uživatelsky nenáročný a velmi rychlý.

Práce je rozdělena do pěti základních kapitol, po úvodním oddílu následuje druhá kapitola, kde se seznámíme s funkcí *množina bodů* programu GeoGebra.

V další části práce jsou popisovány jednotlivé křivky jako množiny bodů. U každé křivky je popsán alespoň jeden příklad odvození obecné rovnice, několik způsobů jak křivka vzniká, a to jako množina bodů, které mají určenou vlastnost, nebo jako obalová křivka. Dále je uvedena zmínka o její historii a základních vlastnostech.

Ve třetí kapitole popisuji strofoidu, její vznik jako průsečík výšek trojúhelníka, odvození obecné a parametrické rovnice. Dále uvádím vznik strofoidy jako průsečík přímky procházející středem kružnice a jako množinu ohnisek elips vznikajících při řezu válce.

Čtvrtá kapitola pojednává o kardioidě. Tato velice zajímavá algebraická křivka vzniká jako množina pat kolmic spuštěných na tečnu kružnice. Dále se v kapitole nachází postup odvození obecné rovnice křivky a další tři případy vzniku této křivky.

V páté kapitole se zabývám asteroidou, kterou vytváří množina pat kolmic spuštěných na úhlopříčku obdélníka, odvozením obecné rovnice křivky, vytvořením křivky jako hypocykloidy a obálky množiny elips a úseček pevné délky.

Práci nechybí závěr a seznam použitých zdrojů, ze kterých jsem čerpal.

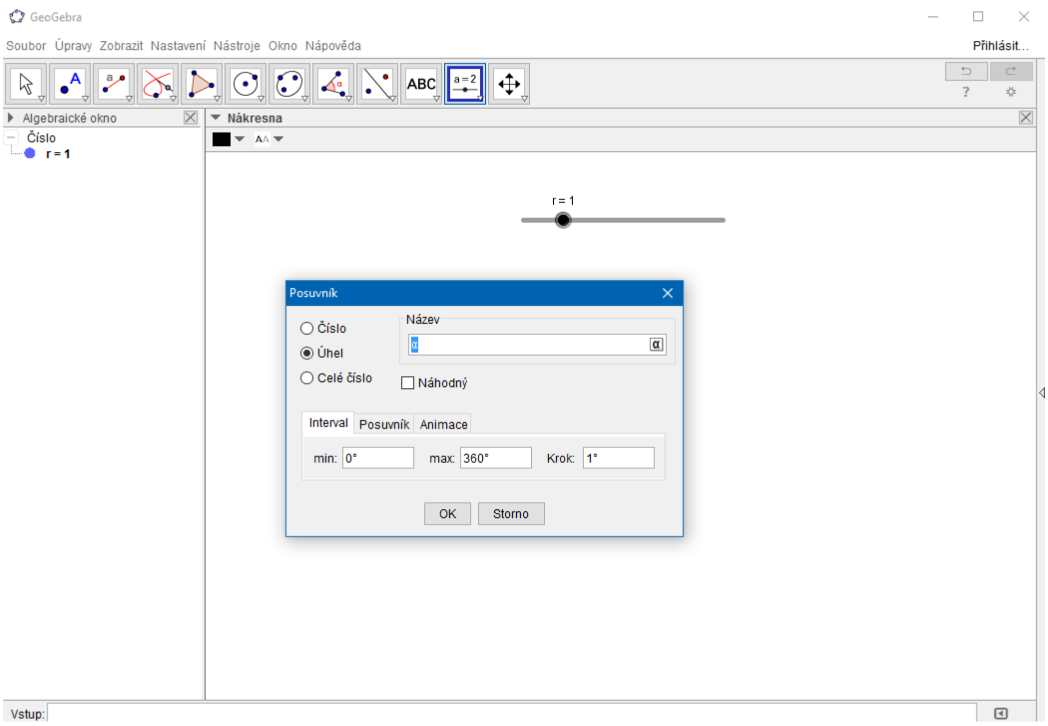
2 Vyšetřování množin bodů daných vlastností

V programu GeoGebra je k dispozici funkce „množina bodů“, díky které lze ověřovat závislost polohy bodu na jiném bodě.

Na modelovém příkladu si ukážeme, jak tato funkce funguje.

Vyšetřete množinu všech bodů, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost r. Symbolicky v rovině ρ lze zapsat $M = \{X \in \rho; |XS| = r\}$, tuto vlastnost splňuje kružnice $k\,(S; r)$, což si později dokážeme.

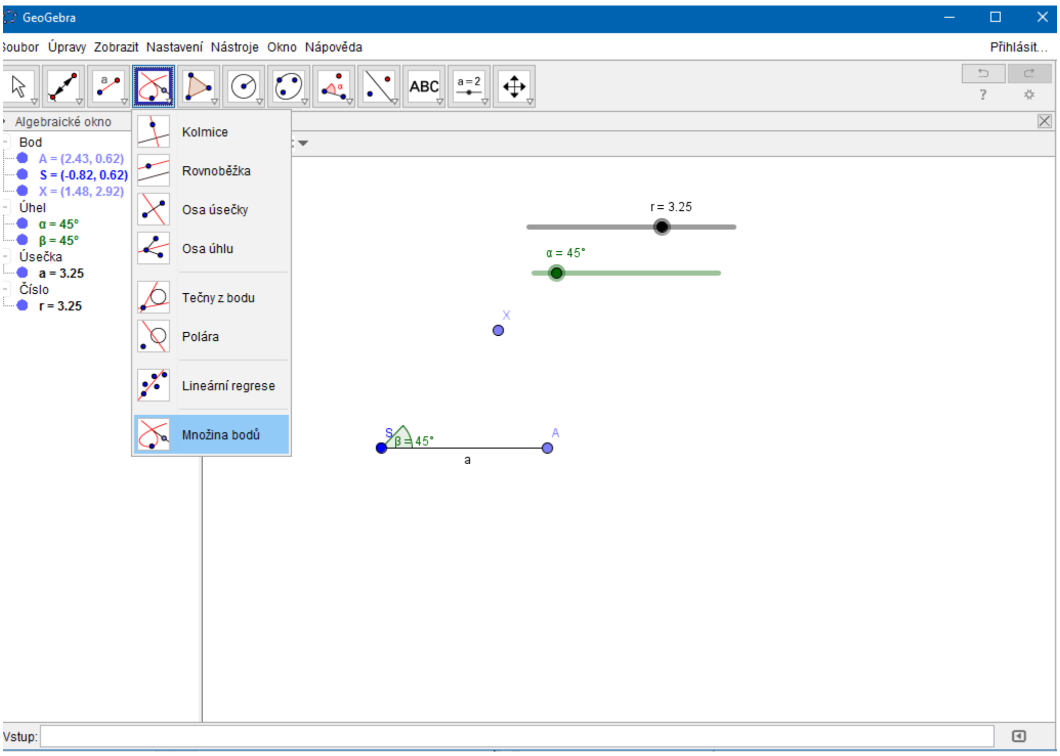
V programu GeoGebra si nejprve sestrojíme bod S, program GeoGebra nám automaticky označí bod písmenem A. Klikneme pravým tlačítkem myši na bod A, v nabídce vybereme možnost *přejmenovat* a přepíšeme bod A na S. Pak pomocí nástroje posuvník vytvoříme rozmezí hodnot pro vzdálenost bodu r a pro vyšetření celé roviny úhel α.



Obrázek 2-1 Vytvoření posuvníků

Dále si vytvoříme *„úsečku pevné délky“* z bodu S s délkou r, úhel, díky kterému nám vznikne množina bodů, pomocí bodu A vytvoříme úhel $\sphericalangle ASX$ dané velikosti α.

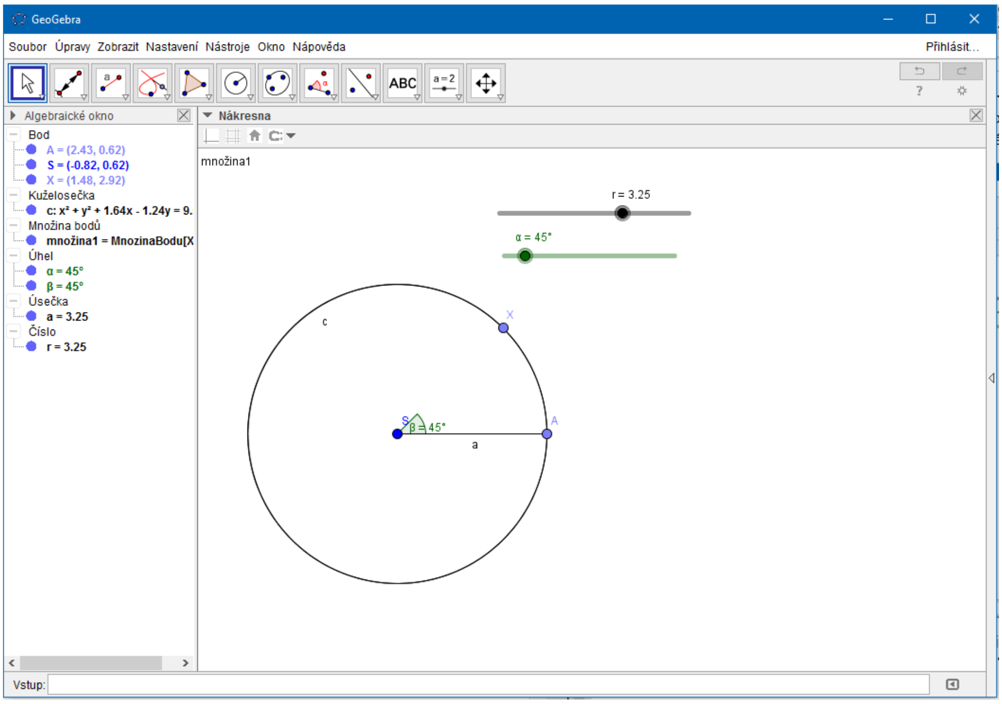
Získáme bod A‘, který přejmenujeme na bod X. Nyní si v nabídce vybereme nástroj „množina bodů“ s jeho pomocí vytvoříme námi hledanou množinu bodů. Jako první se vybírá bod, který množinu tvoří (bod X), jako druhý se volí bod, v našem případě posuvník (α), v jehož závislosti množina vzniká.



Obrázek 2-2 Množina bodů

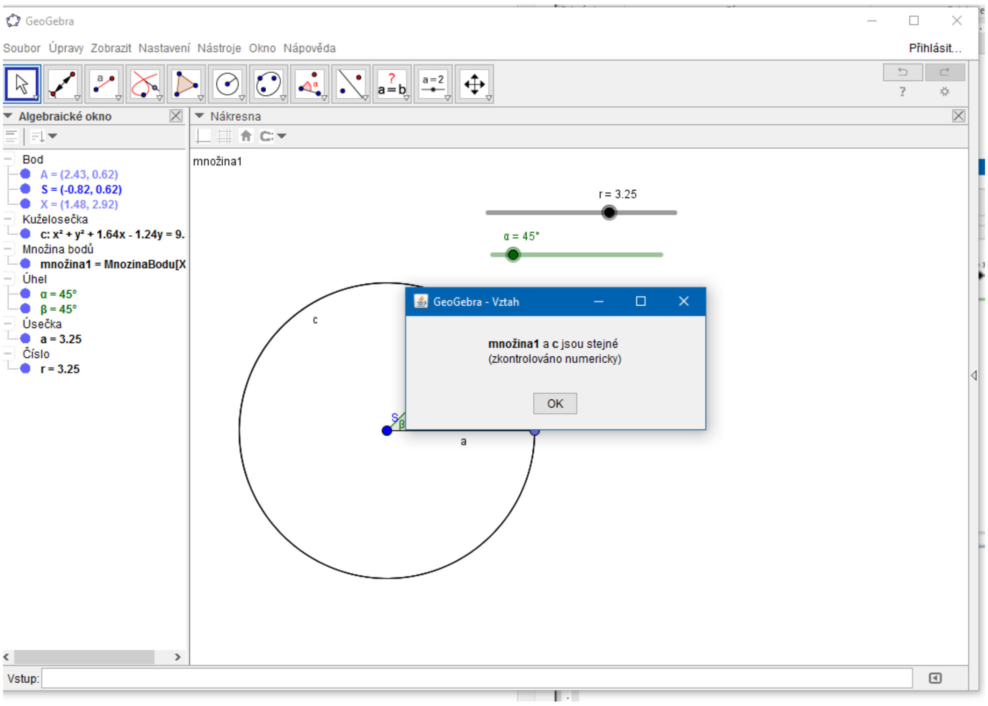
Získali jsme množinu bodů, která se automaticky pojmenovala jako *množina1*. V dalším kroku si ověříme, že námi získaná množina bodů je totožná s kružnicí $k\ (S; r)$.

V programu GeoGebra zvolíme nástroj *„kružnice daná středem a poloměrem“* jako střed volíme bod S a jako poloměr číslo r. Vzniká nám kružnice označená jako c, v okně *nákresna* je vidět pouze popisek, protože kružnice splývá s množinou bodů získanou v předešlém kroku. Můžeme ji ale vidět v okně *Algebraické okno*, kde je zastoupena rovnicí kuželosečky.



Obrázek 2-3 Kružnice

Pomocí funkce *„vztah mezi objekty“* zjistíme, že tyto dva objekty získané různými způsoby jsou totožné. Po označení kružnice *c* a množiny bodů *množina1* touto funkcí vyskočí dialogové okno s tvrzením, že námi zadané objekty jsou stejné.



Obrázek 2-4 Vztah mezi objekty

Tato verifikace probíhá na základě matematických výpočtů, v našem případě ji lze považovat za postačující. Nyní si ještě odvodíme rovnici námi získané křivky.

Obrázek si umístíme do soustavy souřadnic tak, že bod $S\ [0;0]$ a bod $A\ [a;0]$, pohyblivý bod $X\ [x;y]$; $|XS| = a$. Odvození rovnice vychází z Pythagorovy věty.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Rovnice odpovídá kružnici se středem $S\ [0;0]$ a poloměrem a.

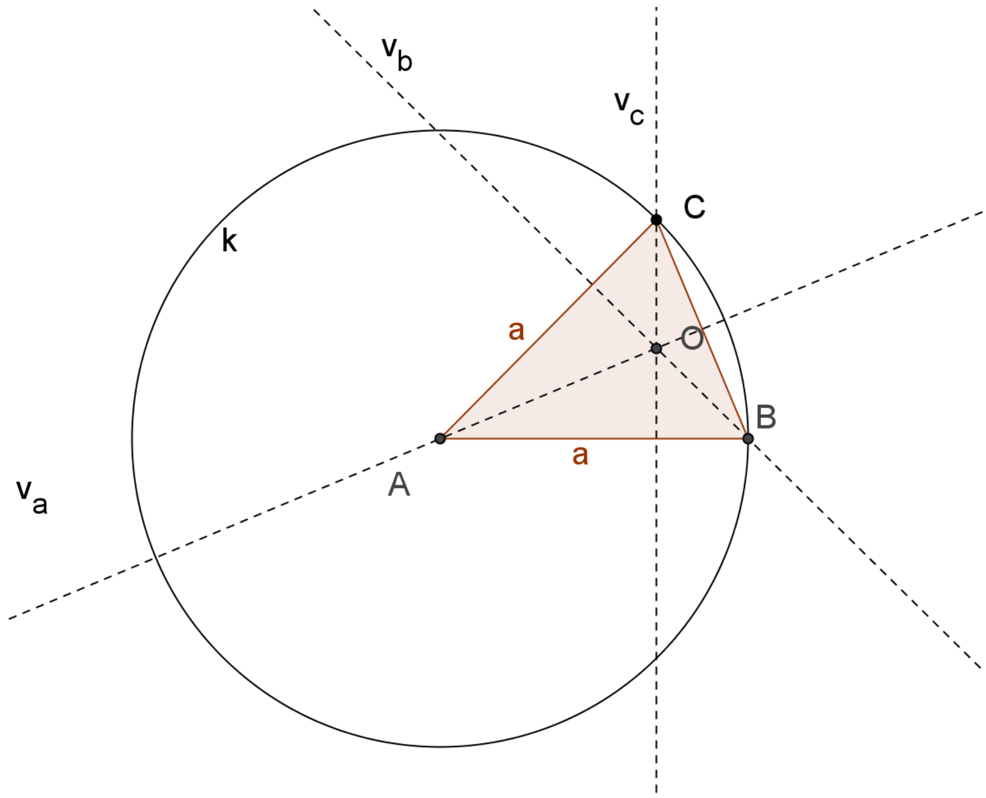
3 Strofoida

Strofoida je rovinná algebraická křivka třetího stupně, vzniká například jako množina bodů průsečíků výšek v rovnoramenném trojúhelníku. [10]

3.1 Demonstrace problému

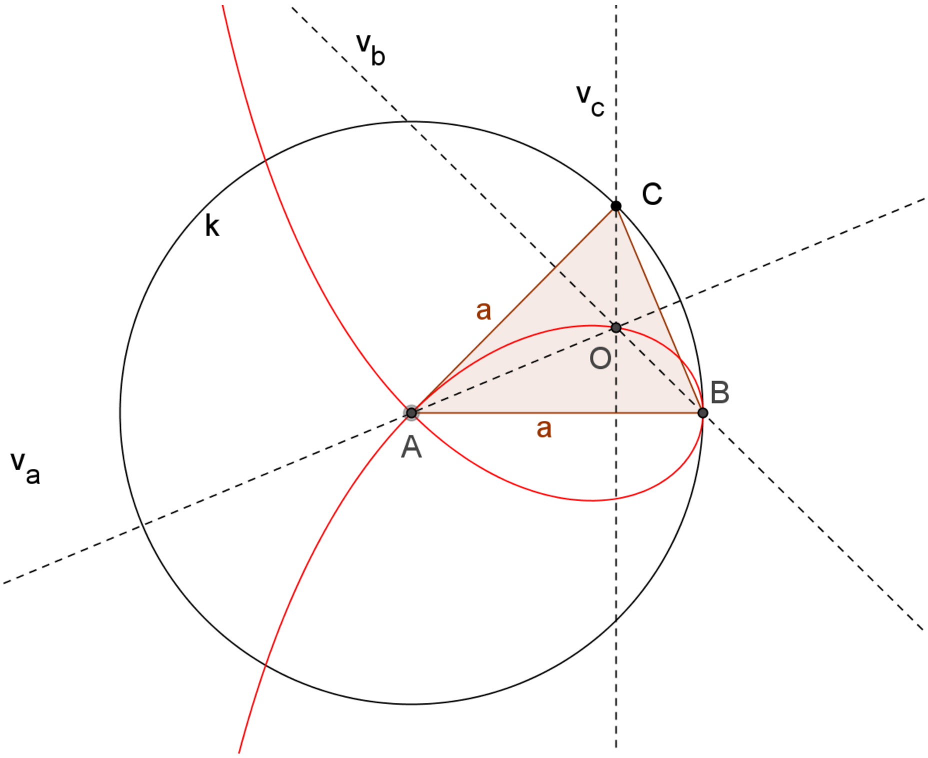
Je dána kružnice $k(A; a)$, úsečka $|AB| = a$. Sestrojme libovolný rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby body $B, C \in k; |AB| = |AC| = a$.

Dále sestrojíme výšky v_a, v_b, v_c. Jejich průsečík nazveme O.



Obrázek 3-1 Strofoida, průsečík výšek trojúhelníku

Posouváme-li bodem C po kružnici, můžeme se pomocí programu GeoGebra přesvědčit, že množinou bodů průsečíků výšek O rovnoramenného trojúhelníku ABC je křivka.



Obrázek 3-2 Strofoida, množina bodů průsečíků výšek

3.2 Odvození obecné rovnice křivky

Trojúhelník umístíme do soustavy souřadné tak, aby bod $A = [\,0; 0]$ a bod $B = \ [0; 0]$.

Rovnice kružnice k, po které se ohybuje bod C:

$$k: x^2 + y^2 - \ a^2 = 0$$

Bod C náleží kružnici a splňuje rovnici:

$$O \ \in k: u^2 + v^2 - \ a^2 = 0$$

Souřadnice bodu C

$$C \in k; \ \ C = \ [u; v]$$

Bod O leží na výškách trojúhelníku:

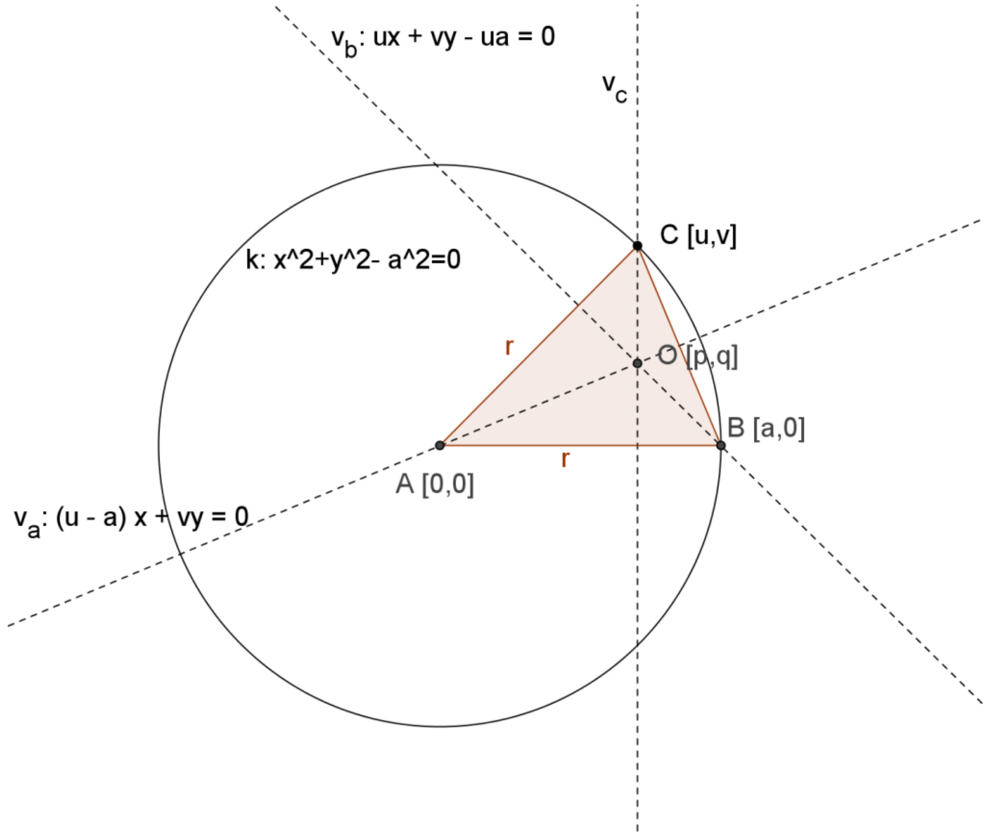
$$v_a: (u-a)x + vy = 0$$

$$v_b: ux + vy - ua = 0$$

Bod O [p;q] náleží těmto přímkám a splňuje rovnice:

$$O \in v_a: (u-a)p + vq = 0$$

$$O \in v_b: up + vq - ua = 0$$



Obrázek 3-3 Závislost bodu O

Získáváme soustavu tří rovnic:

$$u^2 + v^2 - a^2 = 0$$
$$(u-a)p + vq = 0$$
$$up + vq - ua = 0$$

Eliminací proměnných *u,v* z těchto rovnic dostaneme rovnici křivky.

Z druhé rovnice si vyjádříme u $\left(u = \frac{ap-vq}{p}\right)$ a dosadíme do první a třetí rovnice.

$$\left(\frac{ap - vq}{p}\right)^2 + v^2 - a^2 = 0$$

$$\frac{ap - vq}{p}p + vq - \frac{ap - vq}{p}a = 0$$

Obě rovnice vynásobíme $p\backslash p^2$ a upravíme

$$a^2p^2 - 2apvq + v^2q^2 + v^2p^2 - a^2p^2 = 0$$

$$ap^2 - vpq + vpq - a^2p - avq = 0$$

Ze druhé rovnice si vyjádříme v $\left(v = \frac{a^2p-ap^2}{aq}\right)$ a dosadíme do první a upravujeme

$$-2apq\frac{a^2p - ap^2}{aq} + \left(\frac{a^2p - ap^2}{aq}\right)^2 q^2 + \left(\frac{a^2p - ap^2}{aq}\right)^2 p^2 = 0$$

$$-2p(a^2p - ap^2)a^2q^2 + (a^2p - ap^2)^2q^2 + (a^2p - ap^2)^2p^2 = 0$$

$$-2a^4p^2q^2 + 2a^3p^3q^2 + a^4p^2q^2 - 2a^3p^3q^2 + a^2p^4q^2 + a^4p^4 -$$

$$-2a^3p^5 + a^2p^6 = 0$$

$$-a^2q^2 + p^2q^2 + a^2p^2 - 2ap^3 + p^4 = 0$$

$$p^4 + p^2q^2 - ap^3 + apq^2 - ap^3 - apq^2 + a^2p^2 - a^2q^2 = 0$$

$$p(p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) - a(p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) = 0$$

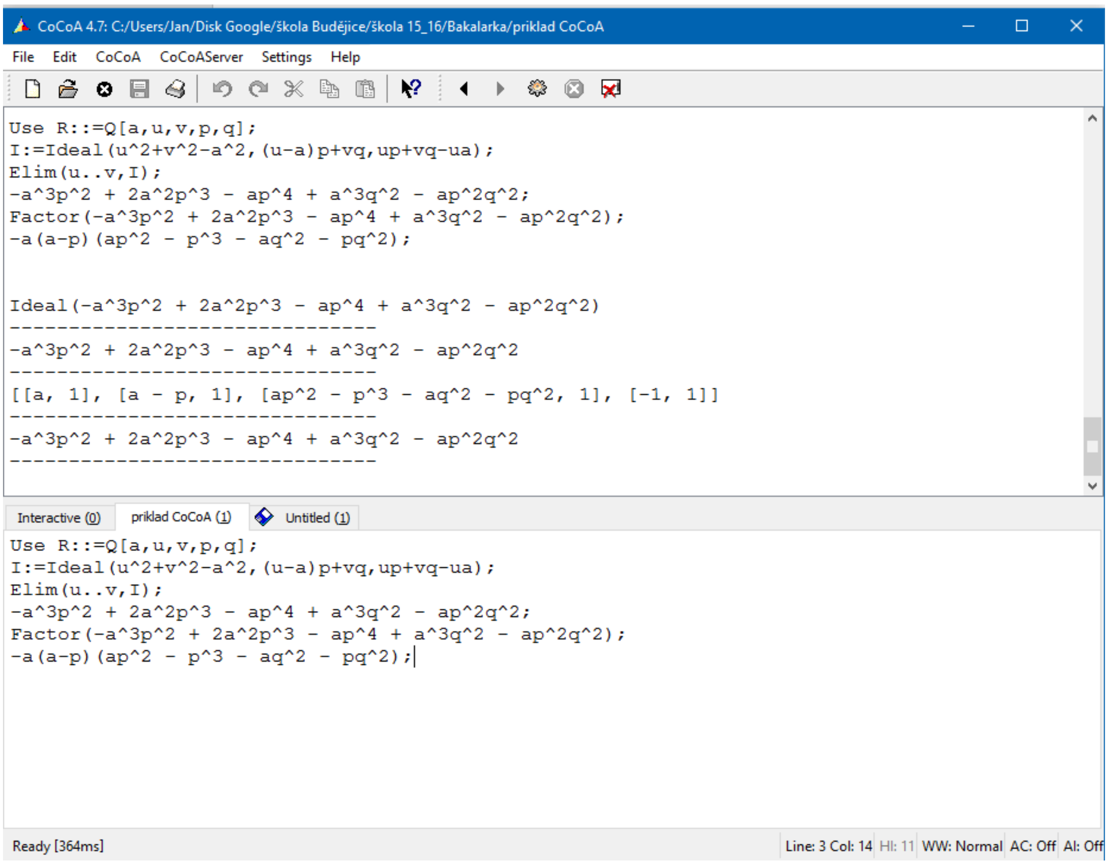
$$(p - a)(p^3 + pq^2 - ap^2 + aq^2) = 0$$

Rovnici dále upravíme a získáme

$$p(p^2 + q^2) - a(p^2 - q^2) = 0$$

$$p(p^2 + q^2) = a(p^2 - q^2)$$

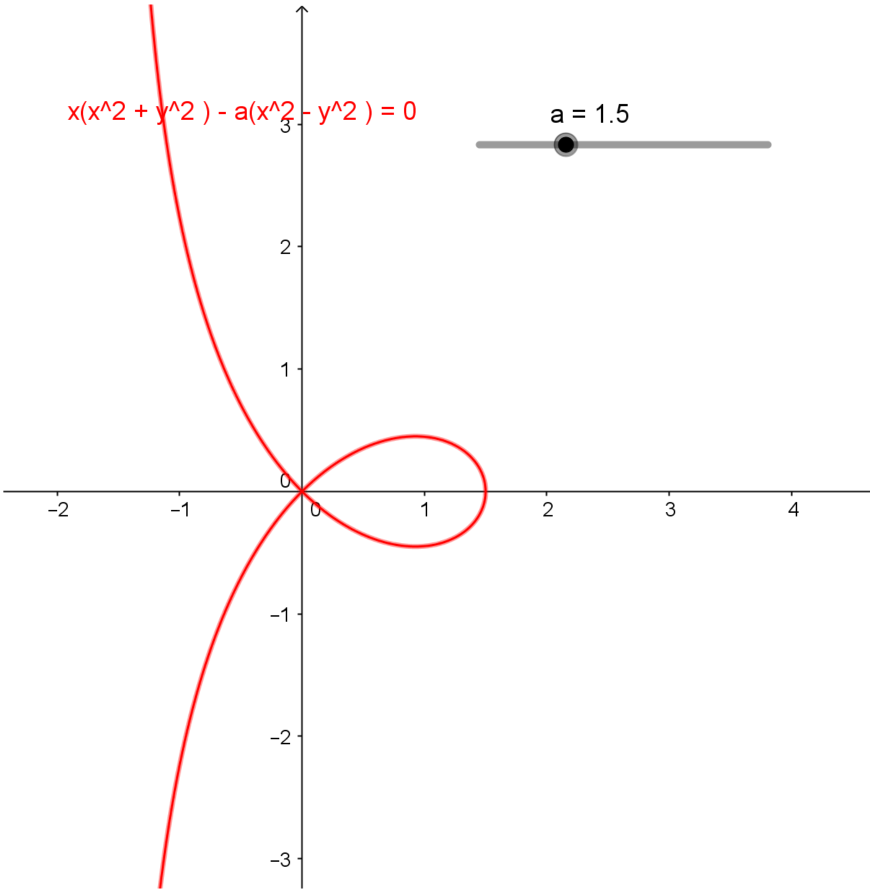
Pro složitější výpočty si můžeme využít program CoCoA:



Obrázek 3-4 Eliminace pomocí programu CoCoA

Proměnné p,q nahradíme x,y a získáváme rovnici křivky, kterou vložíme do programu GeoGebra.

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$



Obrázek 3-5 Implicitní rovnice – Geogebra

Rovnici, kterou jsme získali, dále upravíme pro získání závislosti proměnné y

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

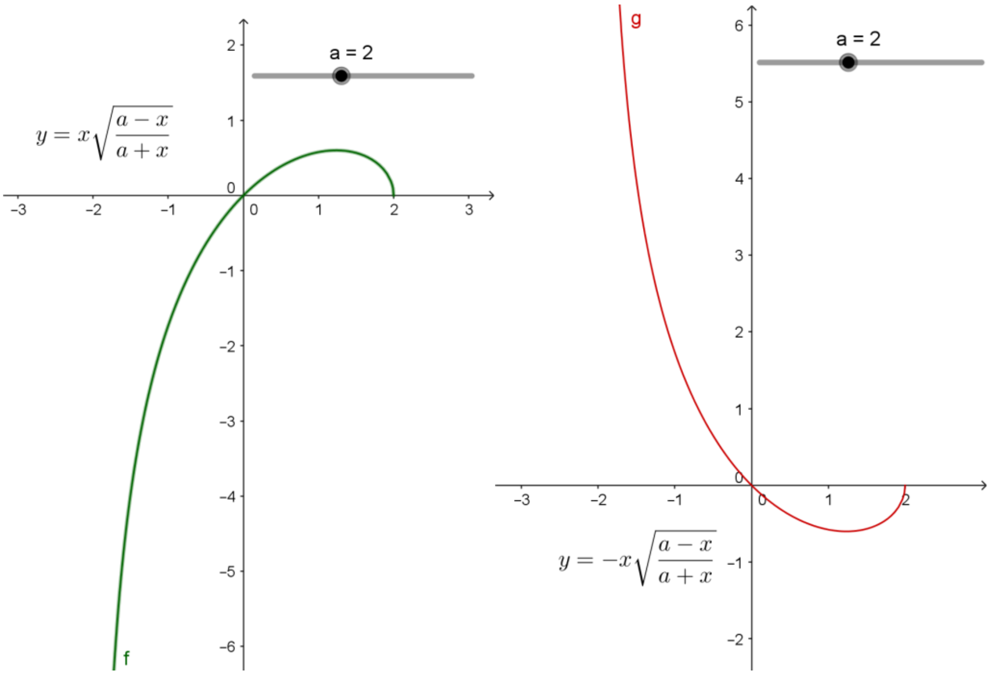
$$ay^2 + xy^2 = ax^2 - x^3$$

$$y^2(a + x) = ax^2 - x^3$$

$$y^2 = \frac{ax^2 - x^3}{a + x}$$

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

Výslednou funkci $y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ je možné převzít do matematické analýzy a zkoumat její vlastnosti.

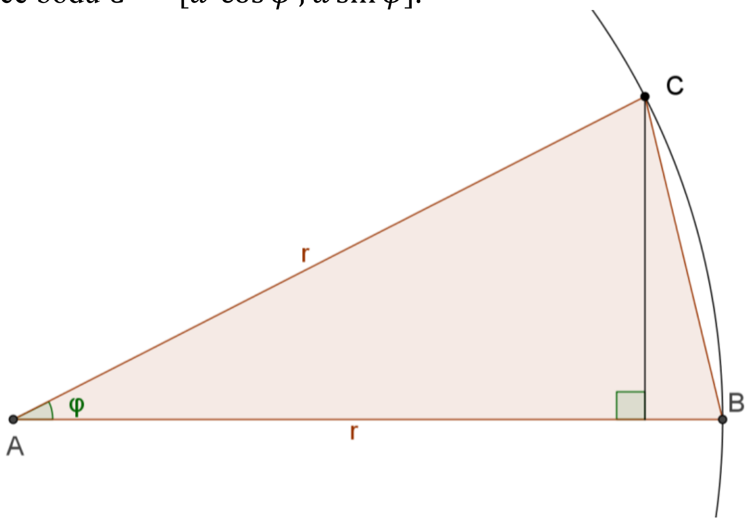


Obrázek 3-6 Matematická analýza křivky

3.3 Odvození parametrické rovnice křivky

Zvolme si souřadnicový systém tak, aby bod $A = [0; 0]$ a bod $B = [a; 0]$.

Souřadnice bodu $C = [a \cos\varphi\, ; a \sin\varphi]$.



Obrázek 3-7 Strofoida, závislost bodu C

Výška v_c prochází bodem $C = [a \cos\varphi ; a \sin\varphi]$ a je kolmá na osu x.

Rovnice přímky:

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

Výška v_a prochází bodem $A = [0; 0]$, jelikož je ΔABC rovnoramenný, výška půlí úhel φ.

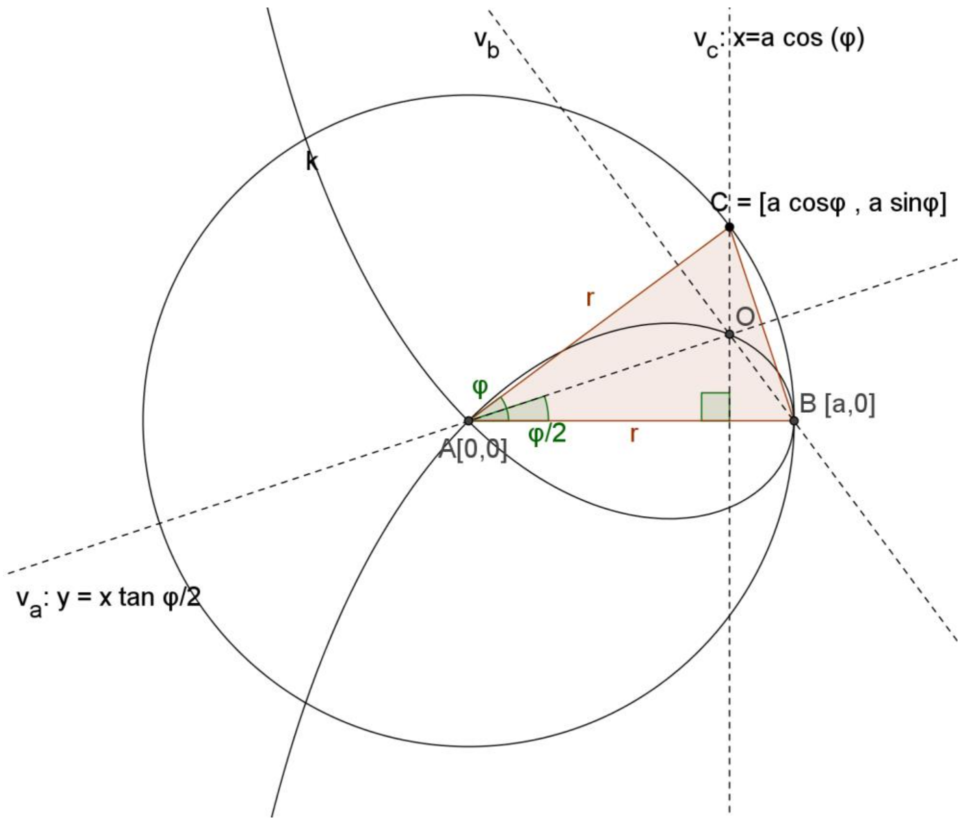
Rovnice přímky:

$$y = \tan\frac{\varphi}{2}\, x$$

Bod O vzniká jako průsečík výšek v_c a v_a.

$$v_c: x = a \cdot \cos\varphi$$

$$v_a: y = \tan\frac{\varphi}{2}\, x$$



Obrázek 3-8 Popis bodu C parametricky

Souřadnici *y* bodu *O* získáme dosazením rovnice v_c do rovnice v_a.

$$O = \left[a \cdot \cos\varphi \ ; \mathrm{a} \cdot \tan\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\varphi\right]$$

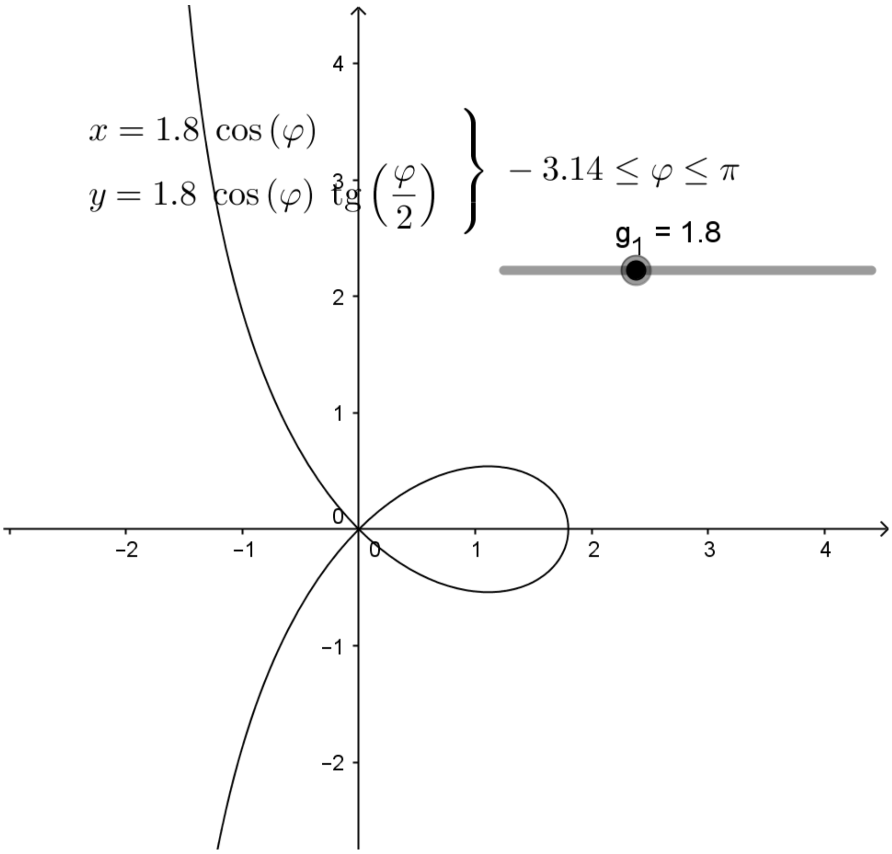
Strofoida je množina všech bodů průsečíků výšek trojúhelníka *ABC*.

Parametrické vyjádření:

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

$$y = a \cdot \tan\frac{\varphi}{2} \cos\varphi$$

$$\varphi \in (-\pi; \pi)$$



Obrázek 3-9 Parametrické vyjádření

Získali jsme stejnou křivku jako při odvození obecné rovnice.

3.3.1 Získání obecné rovnice z parametrických rovnic

Při odvozování parametrických rovnic jsme získali rovnice

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

$$y = a \cdot \tan\frac{\varphi}{2}\cos\varphi$$

Při použití vzorce pro poloviční úhel $\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right| = \frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$ získáme

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

$$y = a \cdot \cos\varphi \frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$$

Z první rovnice si vyjádříme $\cos\varphi = \frac{x}{a}$ a dosadíme do rovnice druhé

$$y = a \cdot \frac{x}{a} \frac{\sqrt{1-\frac{x}{a}}}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}}$$

Po úpravě získáme

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a} \cdot \frac{a}{a+x}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

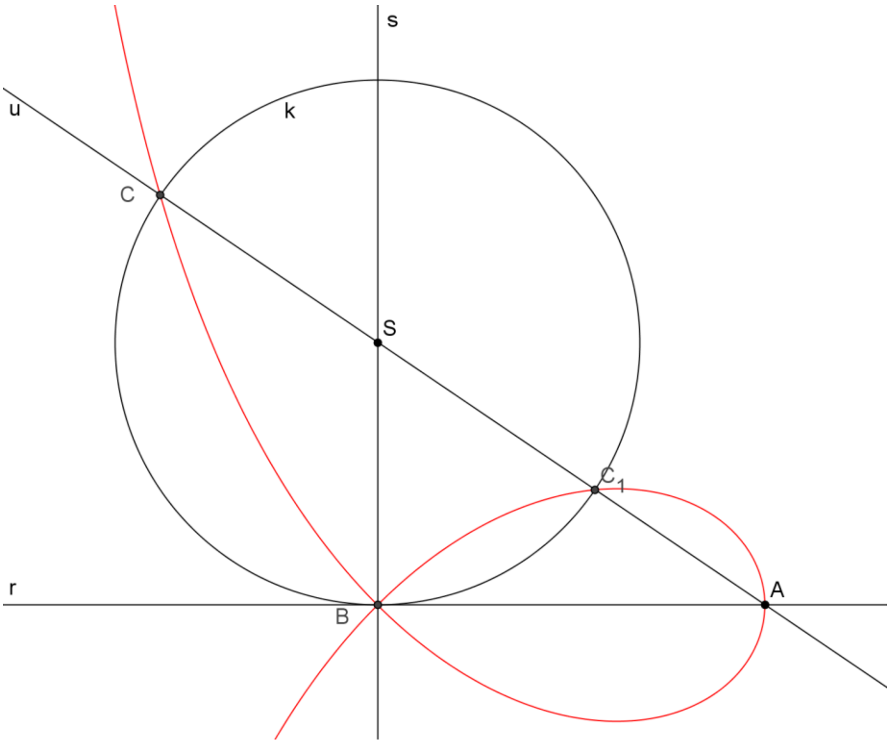
Jelikož vzorec pro poloviční úhel je v absolutní hodnotě, získali jsme pouze část křivky. Viz výše *Obrázek 3-6 Matematická analýza křivky*.

3.4 Další možnosti sestrojení strofoidy

Nyní si ukážeme jiné případy vzniku této křivky.

3.4.1 Strofoida – průsečík kružnice s přímkou

Je dána kružnice *k*, která se dotýká přímky *r* v bodě *B*. Označme *s* přímku, která je kolmá k tečně *r* v bodě *B* a nechť *u* je přímka jdoucí bodem $A \in r$ a středem *S* kružnice *k*. Pohybuje-li se *S* po přímce *s*, potom množina průsečíků *C* kružnice *k* a přímky *u* je strofoida. [10]



Obrázek 3-10 Strofoida, kružnice s přímkou

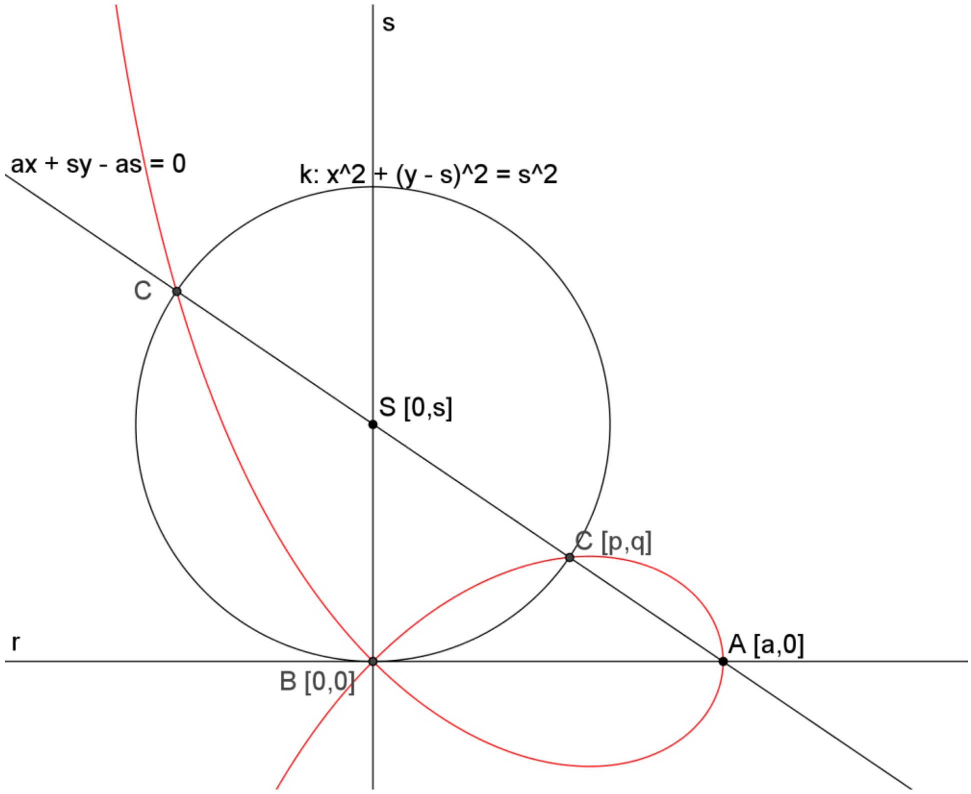
V programu Geogebra si obrázek umístíme tak, aby $A = [a;0], B = [0;0]\ S = [0;s]$.

Dále popíšeme

Přímku $\quad u: ax + sy - as = 0$

Kružnici $\quad k: x^2 + (y-s)^2 = s^2, \big(k(S;s)\big)$

Bod $\quad C = [p;q]$



Obrázek 3-11 Strofoida - přímka, kružnice, závislost bodů

Nyní si dokážeme, že se jedná o strofoidu.

Bod C náleží kružnici k a přímce u:

$$C \in u : sp + aq - as = 0$$

$$C \in k : p^2 + (q - s)^2 - s^2 = 0$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic:

$$sp + aq - as = 0$$

$$p^2 + (q - s)^2 - s^2 = 0$$

Eliminujeme proměnou s. Z první rovnice vyjádříme s $\left(s = \frac{aq}{a-p}\right)$, druhou rovnici si upravíme.

$$p^2 + q^2 - 2qs + s^2 - s^2 = 0$$

Nyní do rovnice dosadíme s $\left(s = \frac{aq}{a-p}\right)$

$$p^2 + \ q^2 - 2q\frac{aq}{a-p} = 0$$

Rovnici vynásobíme $(a - q)$ a upravujeme

$$p^2(a-p) + \ q^2(a-p) - 2aq^2 = 0$$

$$ap^2 - p^3 + \ aq^2 - pq^2 - 2aq^2 = 0$$

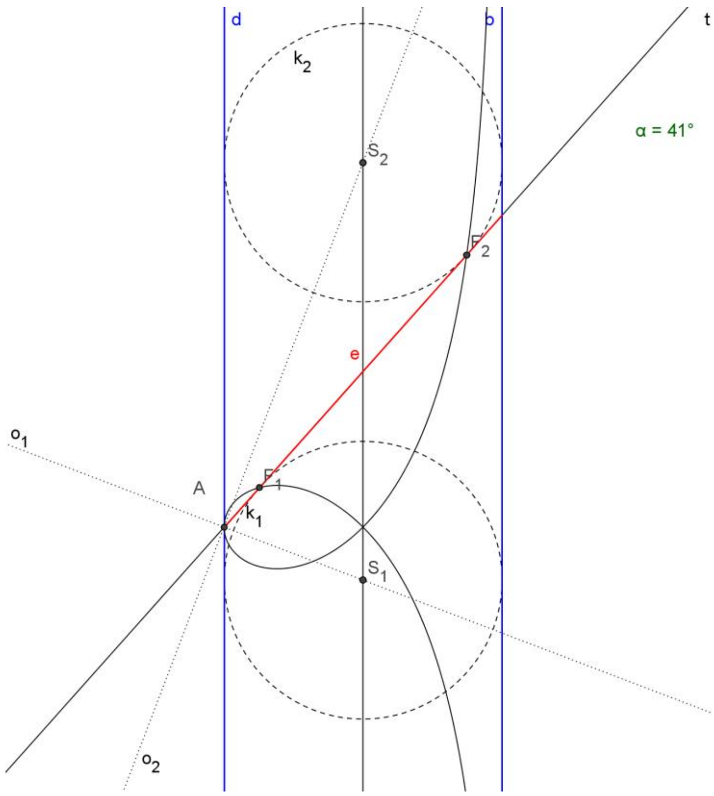
$$p^3 + pq^2 = ap^2 - aq^2$$

$$p(p^2 + q^2) = a\,(p^2 - \ q^2\,)$$

Získali jsme stejnou rovnici jako v případě průsečíků výšek v trojúhelníku. Zkoumaná křivka je tedy strofoida.

3.4.2 Strofoida – ohniska elips ve válci

Při řezu válce svazkem rovin, které jsou dány pevným bodem *A* a přímkou *t*, nám vznikne elipsa *e*, případně kružnice. Množina všech ohnisek elipsy F_1, F_2, případně střed kružnice, nám vytvoří strofoidu. [10]



Obrázek 3-12 Strofoida - ohniska elips ve válci

Obrázek si v programu GeoGebra umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, aby pevný bod otáčení roviny$A = [0; 0]$.

Bod $S_1 = [a; s]$, bod *S* náleží ose válce a ose úhlu *t*, *d*

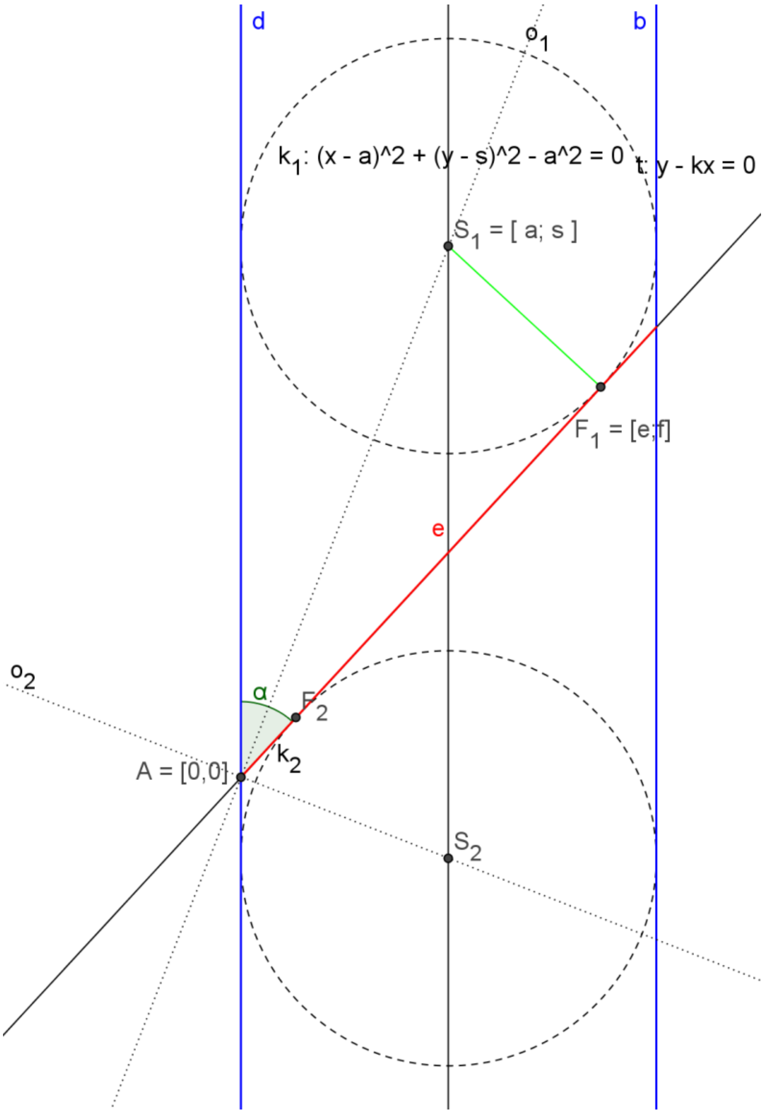
Přímka $t: y - kx = 0$

Kružnice $k_1: (x-a)^2 + (y-s)^2 - a^2 = 0$

Bod $F_1 = [e; f]$, bod F_1 náleží kružnici k_1 a přímce *t*

Úsečka $|F_1S_1|$ je kolmá na přímku t, její vektor:

$|S_1F_1|: \ F_1 - S_1 = (e - a; f - s); n = (1; k)$



Obrázek 3-13 Strofoida

Měníme-li úhel roviny řezu α, vidíme, že množinou všech ohnisek F_1 a F_2 je křivka. Nyní si dokážeme, že křivkou je strofoida. Ohnisko elipsy náleží kružnici k_1 přímce t:

$$F_1 \in k_1 : (e - a)^2 + (f - s)^2 - a^2 = 0$$

$$F_1 \in t : f - ke = 0$$

$$F_1 \in |S_1F_1| : \ (a - e) \cdot 1 + (f - s) \cdot k = 0$$

Máme soustavu tří rovnic:

$$(e-a)^2+(f-s)^2-\ a^2=0$$

$$f-ke=0$$

$$(a-e)\cdot 1+(f-s)\cdot k=0$$

Eliminací proměnných k a s z těchto rovnic získáme rovnici hledané křivky. První rovnici upravíme, z druhé rovnice vyjádříme k $\left(k=\frac{f}{e}\right)$ a dosadíme do třetí rovnice

$$e^2-2ae+\ a^2+f^2-2fs+s^2-\ a^2=0$$

$$ae-e^2+sf-f^2=0$$

Ze druhé rovnice si vyjádříme $s=\left(\frac{e^2+f^2-ae}{f}\right)$ a dosazením do první rovnice získáme:

$$e^2-2ae+f^2-2f\left(\frac{e^2+f^2-ae}{f}\right)+\left(\frac{e^2+f^2-ae}{f}\right)^2=0$$

Rovnici vynásobíme f^2 a upravujeme

$$e^2f^2-2aef^2+f^4-2f^2(e^2+f^2-ae)+(e^2+f^2-ae)^2=0$$

$$e^2f^2-2aef^2+f^4-2e^2f^2-2f^4+2aef^2+(e^2+f^2-ae)^2=0$$

$$-e^2f^2-f^4+(e^2+f^2-ae)^2=0$$

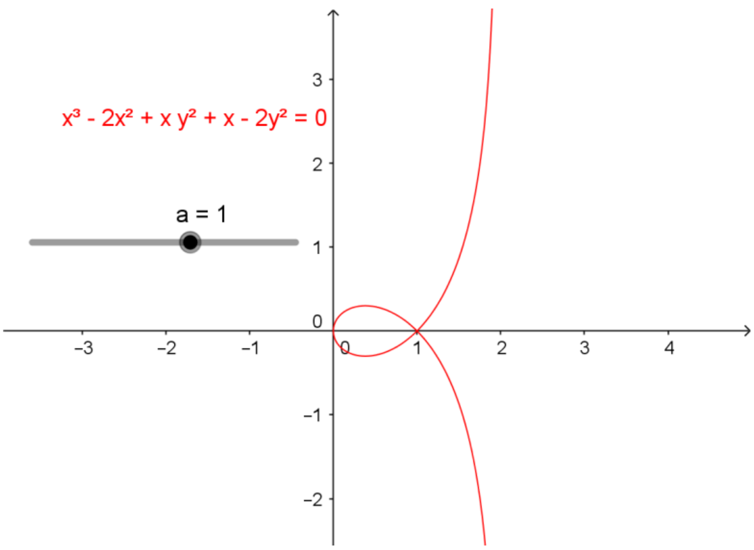
$$-e^2f^2-f^4+e^4+e^2f^2-ae^3+e^2f^2+f^4-aef^2-ae^3-aef^2+a^2e^2=0$$

$$+e^4+e^2f^2\ -2ae^3-2aef^2+a^2e^2=0$$

$$e(e^3+ef^2\ -2ae^2-2af^2+a^2e)=0$$

$$e^3+ef^2\ -2ae^2-2af^2+a^2e=0$$

Výslednou rovnici si zobrazíme v programu GeoGebra pomocí funkce *implicitní křivka* a vidíme, že se jedná o rovnici strofoidy.



Obrázek 3-14 Strofioda, implicitní křivka

3.5 Přehled rovnic strofoidy

Strofoida je algebraická křivka třetího stupně, můžeme ji popsat následujícími rovnicemi:

Kartézské souřadnice

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

Parametrické vyjádření

$$x = a \cdot \cos\varphi$$

$$y = a \cdot \tan\frac{\varphi}{2}\cos\varphi$$

$$\varphi \in (-\pi; \pi)$$

Polární souřadnice

$$r = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$$

3.6 Základní geometrické vlastnosti

Asymptota $x = -a$

Osa souměrnosti $y = 0$

Plocha smyčky $A = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$ [5]

3.7 Historie strofoidy

Strofoidu poprvé popsal ve svých dopisech *Evangelista Torricelli* (1608 -1647) kolem roku 1645. Také se objevila v práci *Isaaca Baroowa* (1630 – 1677) v roce 1670. Název strofoida navrhl *Montucci* v roce 1846, vychází z latinského „*strophos*“, což znamená „*pás s rotací*“. [15]

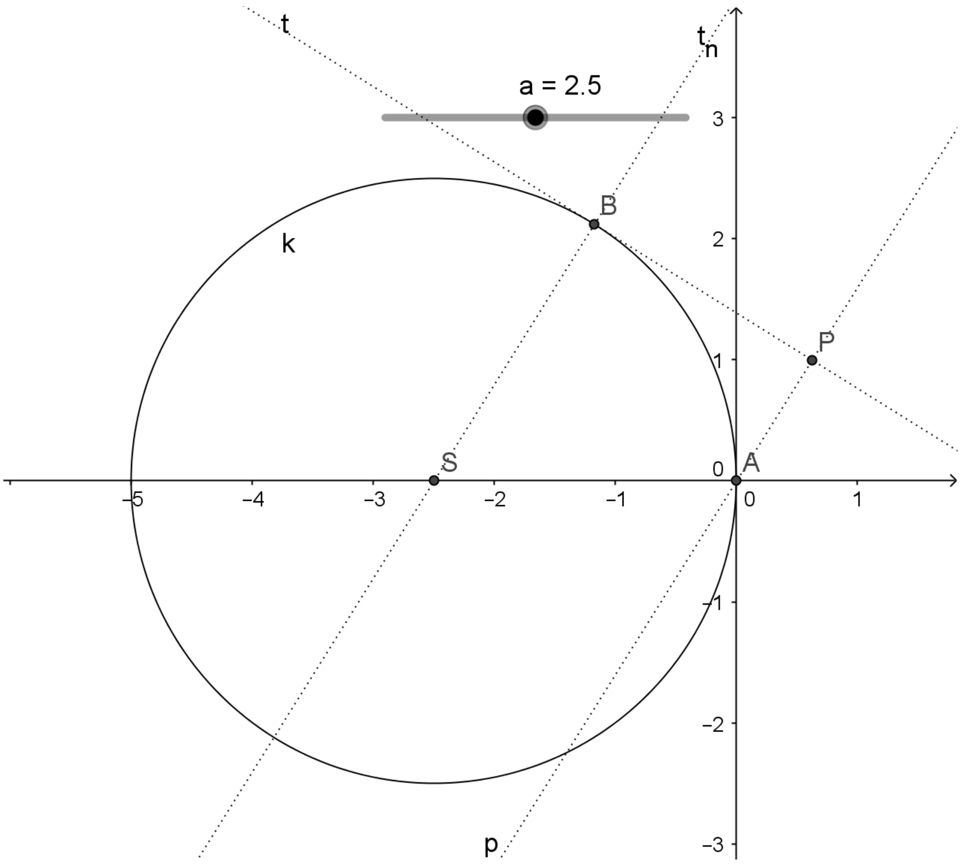
4 Kardioida

Kardioida neboli srdcovka je algebraická křivka čtvrtého stupně, která byla studována matematiky již v 17. století. Jméno kardioida (*„srdčitého tvaru“*) bylo poprvé použito *Castillonim* v publikaci *Philosophical Transactions of the Royal Society* roku 1741. *Castilloni* ale nebyl první, kdo se zabýval touto křivkou. [14]

4.1 Demonstrace problému

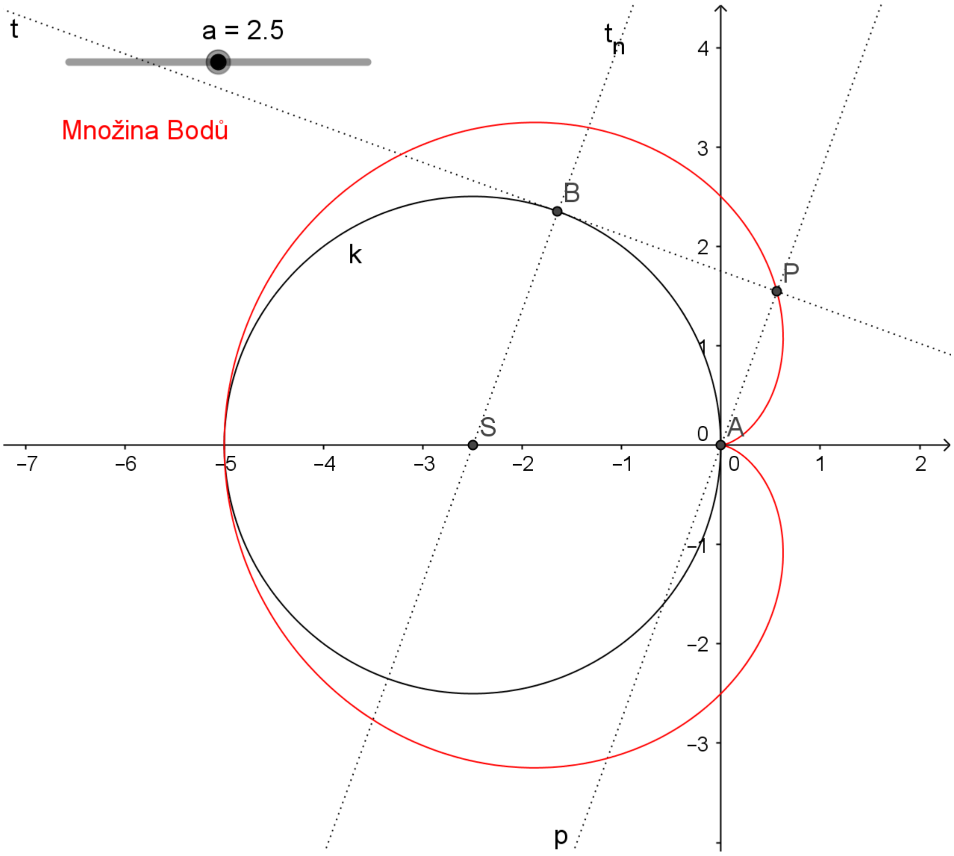
Kardioidu tvoří množina všech pat kolmic spuštěných z bodu (pólu) na tečny kružnice.

Je dána kružnice $k\ (S; a)$ pevný bod $A\ \in k$ (pól) a pohyblivý bod $B\ \in k$. Sestrojíme tečnu *t* ke kružnici, která prochází bodem *B*, dále sestrojíme kolmici *p* na tečnu *t*, tak že $A\ \in p$. Průsečík vzniklý průnikem *p* a *t* nazveme P, $(P\ \in p\ \cap t)$.



Obrázek 4-1 Kardioida, kolmice na tečnu kružnice

Při pohybu bodem B získáváme v programu GeoGebra množinu bodů, která tvoří křivku.



Obrázek 4-2 Kardioida, množina bodů

4.1.1 Odvození rovnice křivky

Obrázek umístíme do soustavy souřadnic, tak že $S\ [-a; 0]$ a bod $A\ [0; 0]$.

Rovnice kružnice k, po které se pohybuje bod $B\ [u; v]$:

$$k: (x+a)^2 + y^2 = a^2$$

Bod B náleží kružnici a splňuje rovnici:

$$B \epsilon k: (u+a)^2 + v^2 - a^2 = 0$$

Bodem B prochází přímka t_n, která má rovnici:

$$B \in t_n: -vx + (u+a)y - va = 0$$

Tečna *t* ke kružnici *k*, která prochází bodem *B* je kolmá na přímku t_n:

$$t: (u + a)x + vy - (u^2 + au + v^2) = 0$$

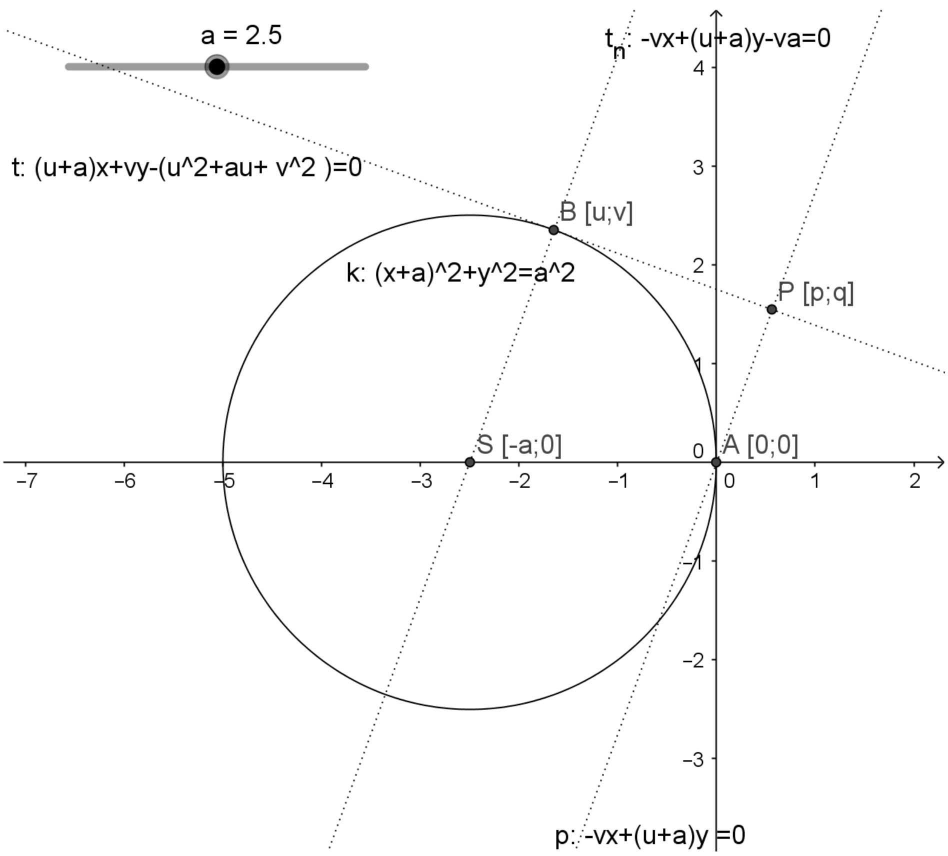
Přímka *p* prochází bodem *A* a je rovnoběžná s přímkou t_n:

$$p: -vx + (u + a)y = 0$$

Bod C $[p; q]$ leží na přímkách *p* a *t* a splňuje rovnice:

$$C \in p: -vp + (u + a)q = 0$$

$$C \in t: (u + a)p + vq - (u^2 + au + v^2) = 0$$



Obrázek 4-3 Kardioida, popis

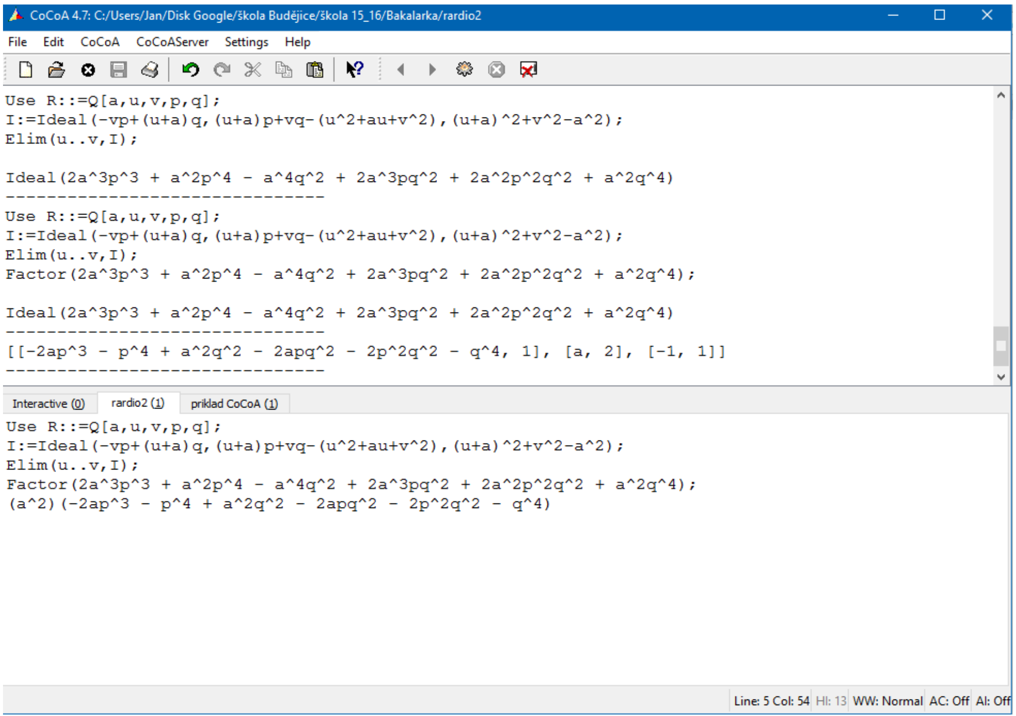
Dostáváme soustavu tří rovnic:

$$(u+a)^2 + v^2 - a^2 = 0$$

$$-vp + (u+a)q = 0$$

$$(u+a)p + vq - (u^2 + au + v^2) = 0$$

Eliminací proměnných u, v z těchto rovnic získáme rovnici křivky.



Obrázek 4-4 Kardioida, eliminace CoCoA

Eliminaci jsme provedli pomocí programu CoCoA, výsledná rovnice je

$$-2ap^3 - p^4 + a^2q^2 - 2apq^2 - 2p^2q^2 - q^4 = 0$$

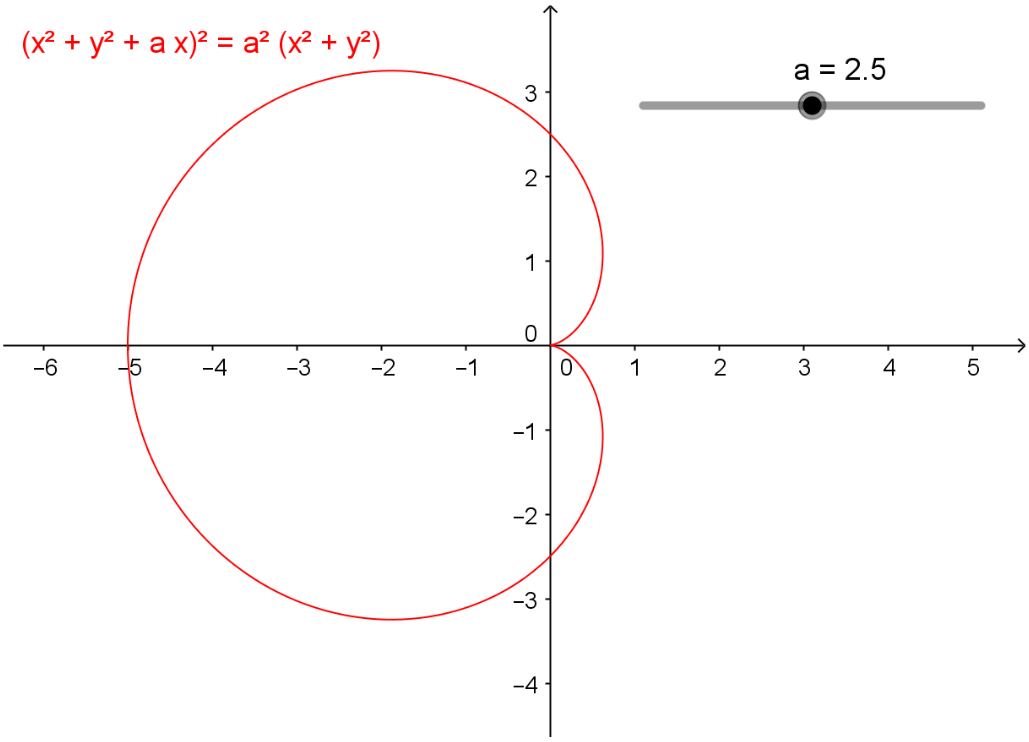
Rovnici si upravíme pro jednodušší postup získání konečné rovnice

$$p^4 + p^2q^2 + ap^3 + q^4 + p^2q^2 + apq^2 + ap^3 + apq^2 + a^2q^2 = a^2q^2 + a^2q^2$$

$$(p^2 + q^2 + ap)^2 = a^2(q^2 + q^2)$$

Nyní proměnné p, q nahradíme x, y a získanou rovnici vložíme do programu GeoGebra pro porovnání s křivkou.

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

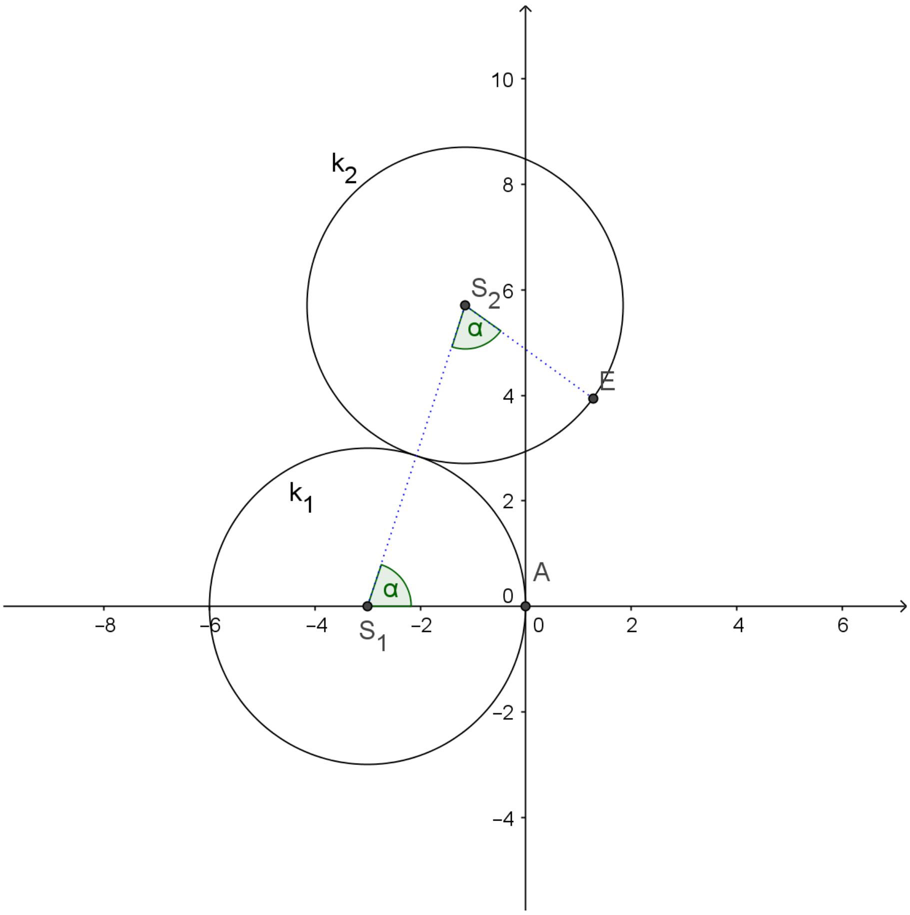


Obrázek 4-5 Kardioida, implicitní křivka

4.2 Kardioida jako epicykloida

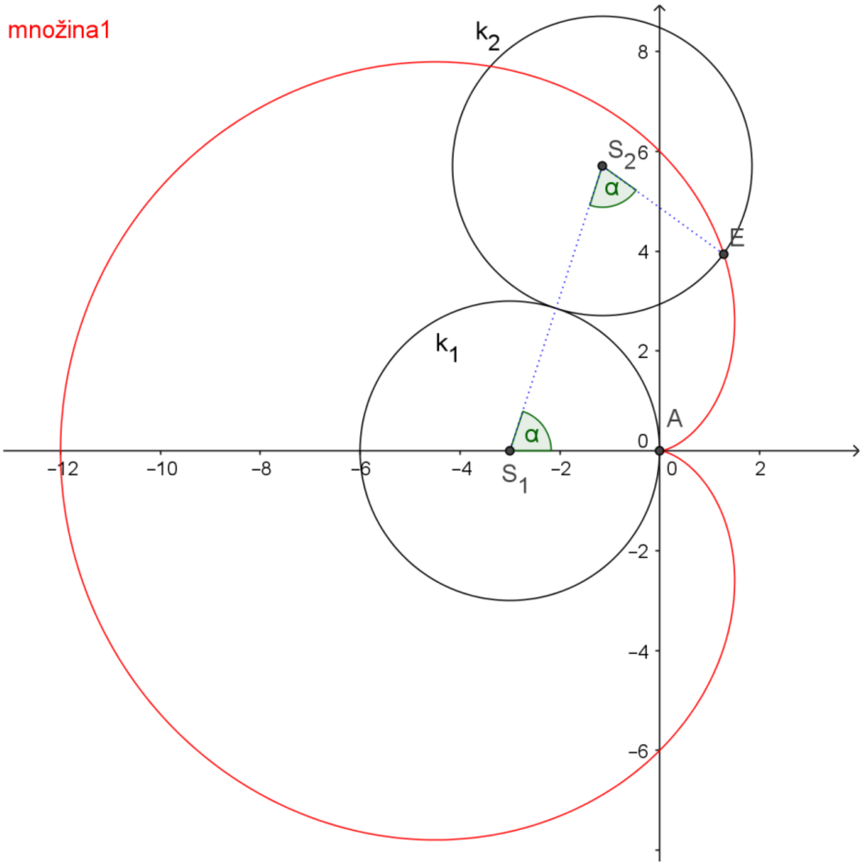
Epicykloida, je křivka, která vzniká jako trajektorie bodu při odvalování kružnice z venku po jiné kružnici bez smýkání. [12]

Je dáno: kružnice $k_1\ (S_1; r)$, kružnice $k_2\ (S_2; r)$ a bod $E\ \in\ k_2$. Kružnice k_1 a kružnice k_2 mají jeden vnější dotyk. Kružnici k_2 necháme odvalovat bez smýkání po kružnici k_1. Množinou všech bodů E je epicykloida.



Obrázek 4-6 Kardioida, epicykloida

Při odvalování kružnice k_2 po kružnici k_1 nám bod E vytváří křivku, která je trajektorií pevného bodu kružnice k_2 kotálející se po kružnici k_1. V programu GeoGebra získáme tuto křivku jako množinu bodů.



Obrázek 4-7 Kardioida, epicykloida, množina bodů

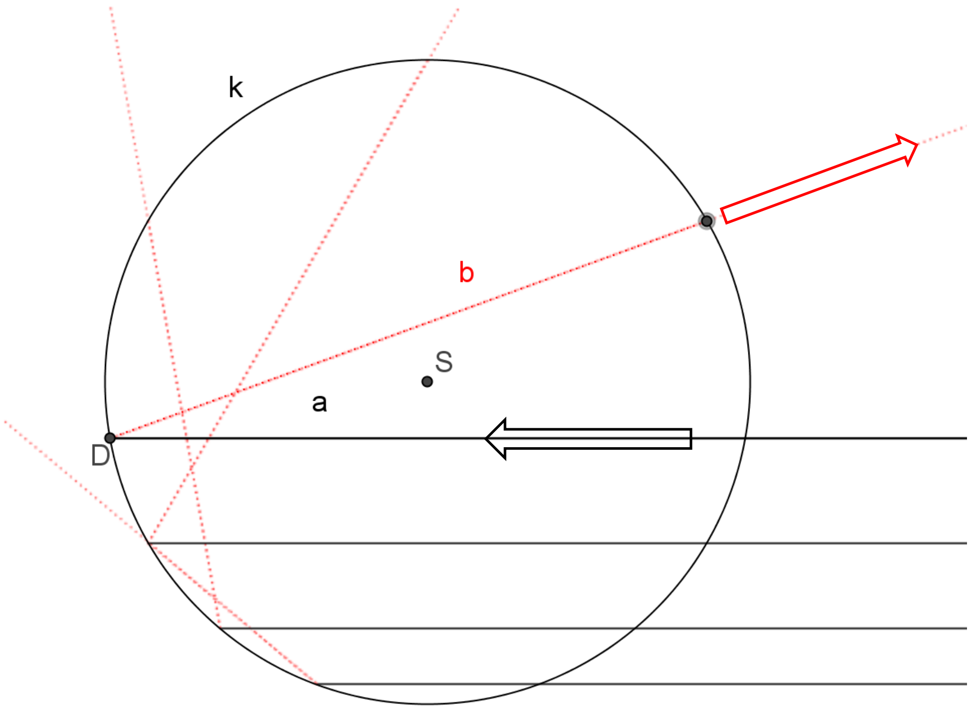
4.3 Kardioda jako obalová křivka

Kardioida vzniká také jako obalová křivka, ukážeme si dva případy vzniku.

4.3.1 Kardioida - odraz paprsků v kruhu

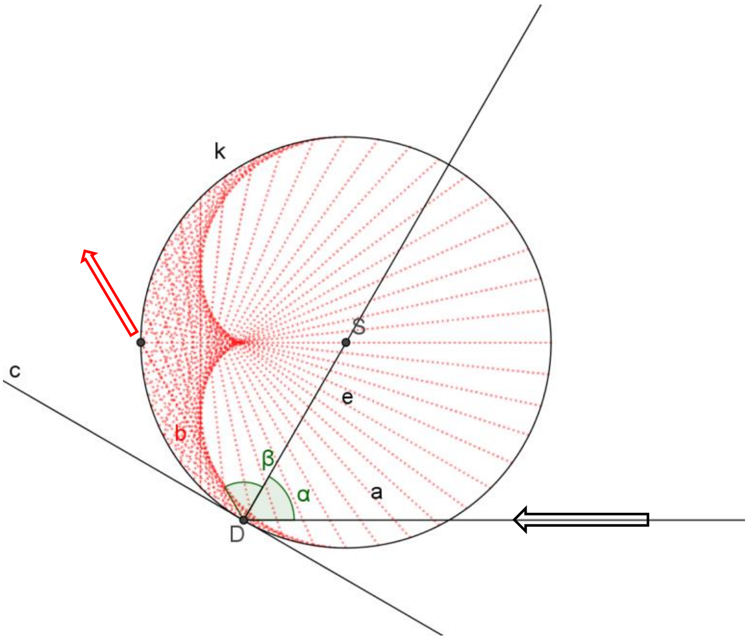
Křivka vzniká při odrazu rovnoběžných paprsků v kruhu. [8]

Je dána kružnice $k\ (S; r)$, směr dopadajících paprsků je dán přímkou a, odražený paprsek je reprezentován úsečkou b. Úhel dopadu α a úhel odrazu β jsou si rovny. Při posouvání místa dopadu D po kružnici k vzniká množina přímek b. Obalová křivka této množiny je kardioida.



Obrázek 4-8 Kardioida, odraz paprsků v kruhu

Pohybujeme-li bodem *D* po kružnici *k*, mění se úhel dopadu paprsků. Stopa přímky *b* nám vytvoří kardioidu.



Obrázek 4-9 Kardioida, obalová křivka

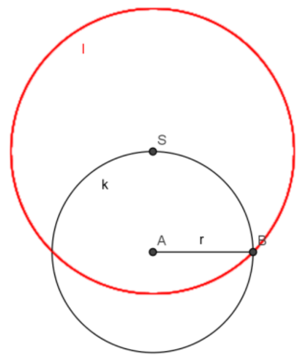
Tento jev můžeme pozorovat při odrazu slunečních paprsků do kruhové nádoby, případně prstence.

Obrázek 4-10 Odraz slunečních paprsků

4.3.2 Kardioida - množina kružnic

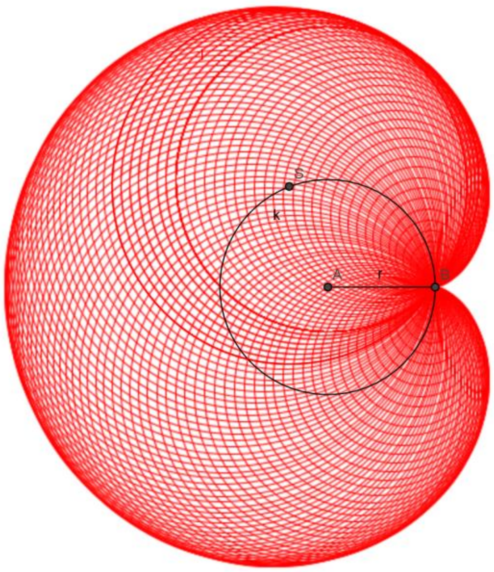
Je dána kružnice $k(A, r)$, pevný bod B a pohyblivý bod S, $B \in k; S \in k$, dále kružnice l se středem S a poloměrem $|BS|$. [8]

Pohybem bodu S po kružnici k vzniká množina kružnic l.



Obrázek 4-11 Kardioida, množina kružnic

V programu GeoGebra vymodelujeme danou situaci. Zapneme si funkci stopa a pohybujeme-li bodem S , získáme množinu křivek. Obalová křivka této množiny je *kardioida.*

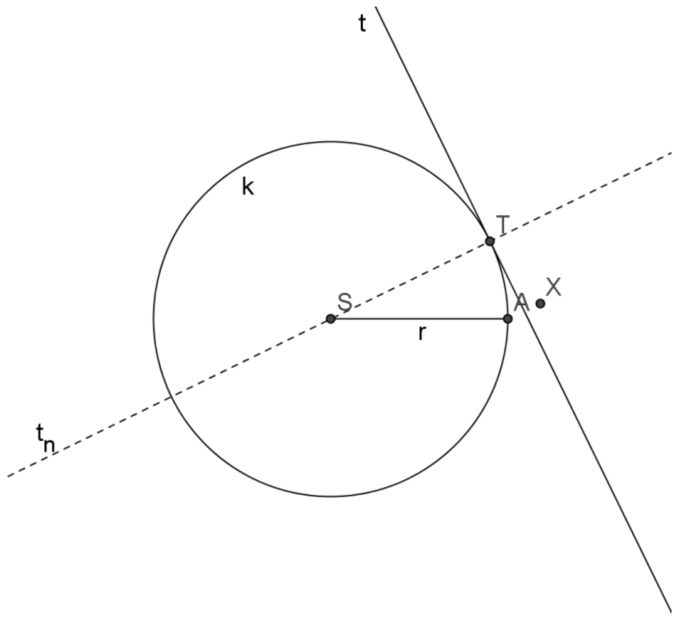


Obrázek 4-12 Kardioida, obalová křivka množiny kružnic

4.4 Kardioida – množina souměrných bodů

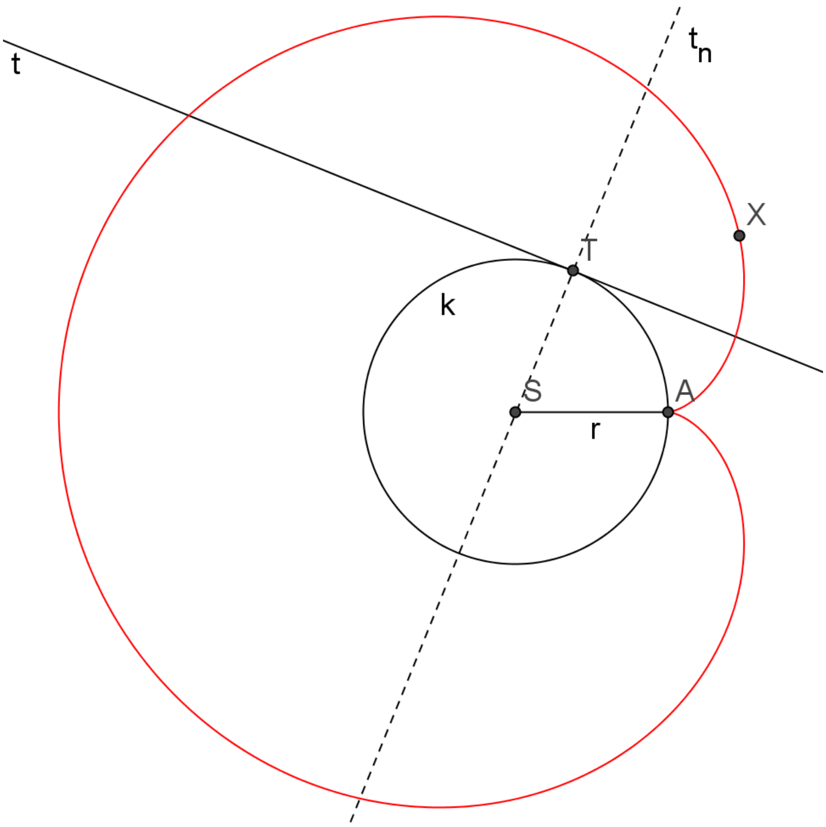
Kardioida vzniká jako množina bodů osově souměrných s pevně daným bodem *A* podle všech tečen kružnice. Pevná kružnice prochází bodem *A*. [8]

Je dána kružnice $k(r; S)$, pevný bod $A \in k$, tečna *t* ke kružnici *k* procházející bodem T ($T \in k; t \perp ST$), bod X ($O(t): A \rightarrow X$).



Obrázek 4-13 Kardioida, souměrné body podle tečny

Při pohybu bodu *T* po kružnici *k* se mění poloha tečny *t*. Se změnou polohy tečny se mění i poloha bodu *X*, jak se můžeme přesvědčit v programu Geogebra. Trajektorie bodu *X* nám vytváří kardioidu.

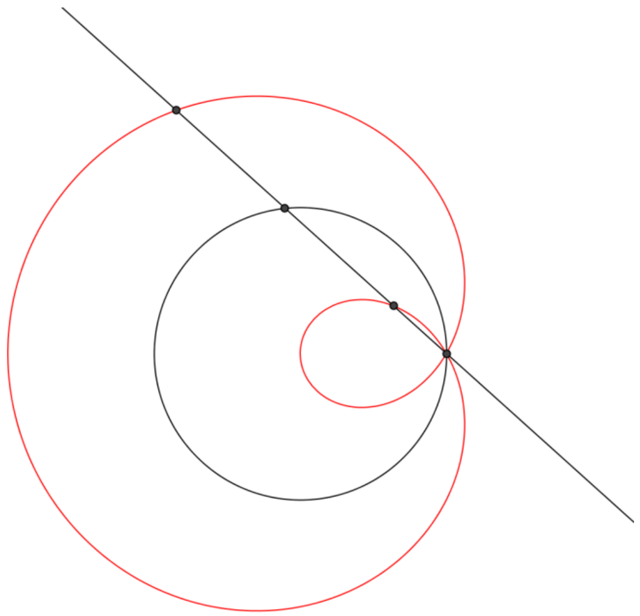


Obrázek 4-14 Kardioida, množina bodů

4.5 Historická konstrukce

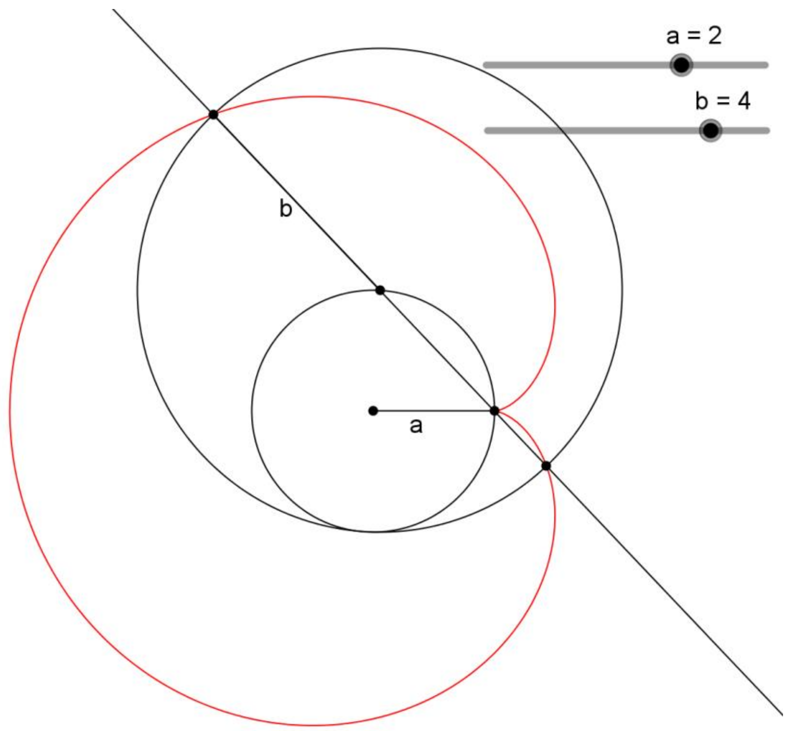
„Vytvoří se způsobem tímto: Na kružnici vytčen budiž bod-pól. Na každý paprsek tímto bodem vedený nanese se od druhého jeho průsečníku s kružnicí na obě strany délka průměru této kružnice; geometrickým místem krajních bodů těchto délek jest kardioida (Carré: Mémoires de l'Acad. des Sciences 1705).“ [1]

[1] http://archive.org/stream/ottvslovnknauni17ottogoog#page/n1066/mode/1up)



Obrázek 4-15 Kardioida, historická konstrukce

Při konstrukci této úlohy pomocí programu GeoGebra nám vznikla křivka nazývaná *limacon.* Pro získání kardioidy tímto postupem je třeba od druhého průsečíku přímky s kružnicí nanést na obě strany dvojnásobek poloměru (průměr) původní kružnice.



Obrázek 4-16 Historická konstrukce, úprava

4.6 Přehled rovnic

Kartézské souřadnice

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Parametrické vyjádření

$$x = 2a\cos\varphi - a\cos 2\varphi$$

$$y = 2a\sin\varphi - a\sin 2\varphi$$

$$\varphi \in \langle -\pi; \pi \rangle; a > 0$$

Polární souřadnice

$$r = a(1 - \cos\varphi)$$

4.7 Základní geometrické vlastnosti

Osa souměrnosti $y = 0$

Délka křivky $L = 8a$

Plocha křivky $A = \frac{3}{2}\pi a^2$ [2]

4.8 Historie

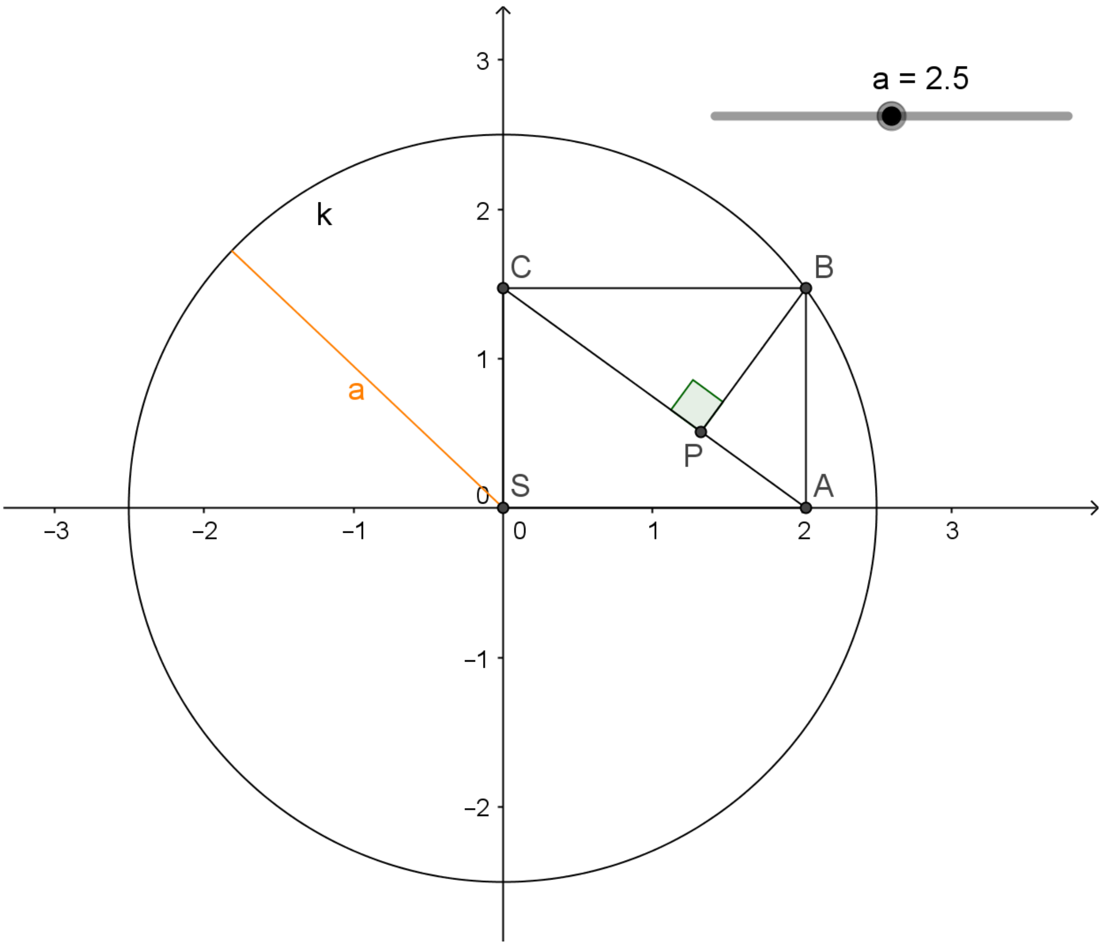
Kardioida byla poprvé studována dánským matematikem *Olem Christensenem Römerem* (1644 - 1710), následoval jej *Vaumeslem* (1678). Její délka byla roku 1708 určena matematikem *Philippem de La Hirem*. [6]

5 Asteroida

Asteroida je rovinná křivka šestého stupně, která vzniká jako množina bodů pat kolmic na úhlopříčku obdélníka určeného středem kružnice a bodem na kružnici. [9]

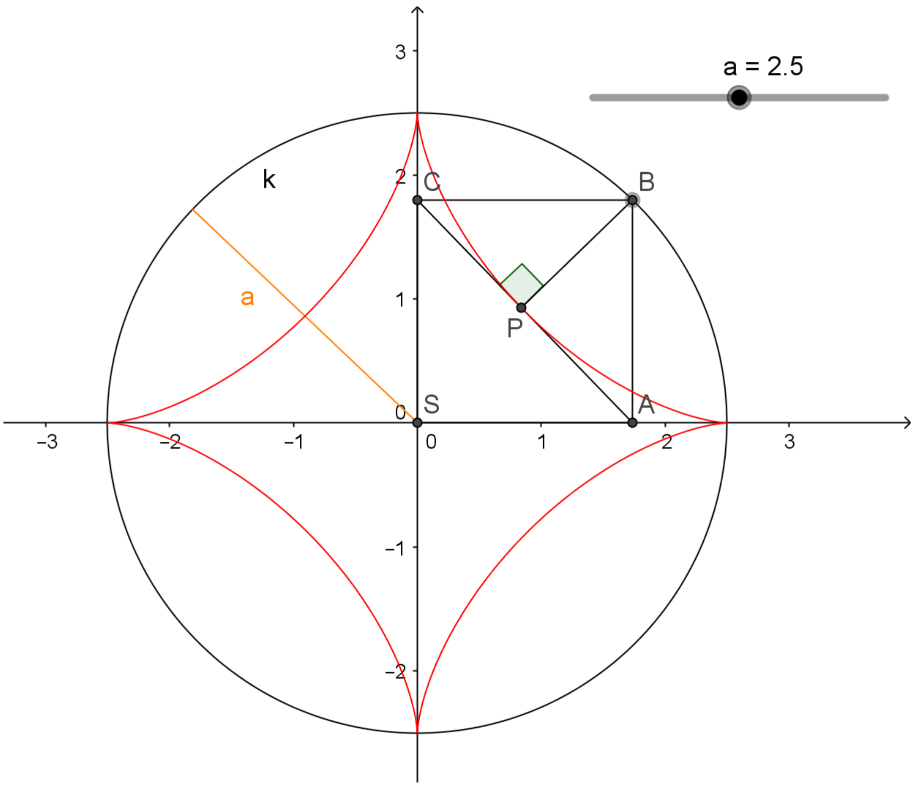
5.1 Demonstrace problému

Je dána kružnice $k(S; a)$ a bod B. Sestrojíme obdélník $ABCS$ daný středem kružnice S a bodem B na kružnici. Dále sestrojíme kolmici z bodu B na úhlopříčku AC a jejich průsečík nazveme P.



Obrázek 5-1 Asteroida, kolmice na úhlopříčku obdélníka

Posunujeme-li bodem *B* po kružnici *k*, množina všech pat kolmic na úhlopříčku *AC* nám vytvoří křivku. V programu GeoGebra jsme pomocí funkce množina bodů získali křivku.



Obrázek 5-2 Asteroida, množina bodů pat kolmic

5.2 Odvození rovnice křivky

Obrázek jsme si umístili do soustavy souřadnic tak že S $[0; 0]$ a bod B $[u; v]$, tímto umístěním získáme bod A $[u; 0]$ a bod C $[0; v]$.

Dále si popíšeme kružnici *k*

$$k: x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Bod B $[u; v]$ náleží kružnici a splňuje rovnici

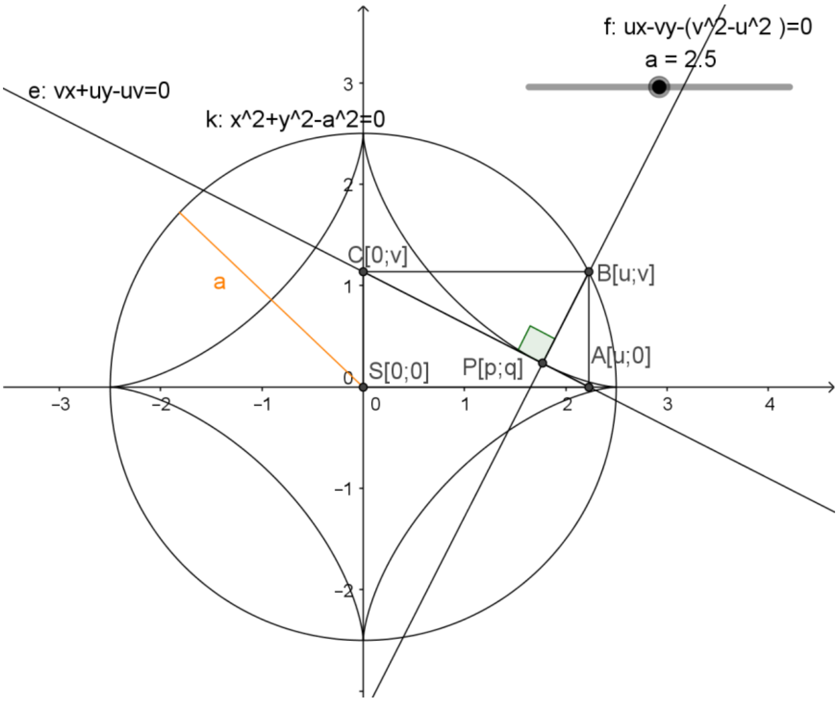
$$B \in k: u^2 + v^2 - a^2 = 0$$

Přímka e, která prochází body AC a při výpočtu nám nahradí uhlopříčku

$$e: vx + uy - uv = 0$$

Kolmici f na přímku e, která prochází bodem B

$$f: ux - vy - (v^2 - u^2) = 0$$



Obrázek 5-3 Asteroida, popis

Bod $P\ [p; q]$ leží na přímkách e, f a splňuje rovnice

$$P \in e: vp + uq - uv = 0$$

$$P \in f: up - vq - (v^2 - u^2) = 0$$

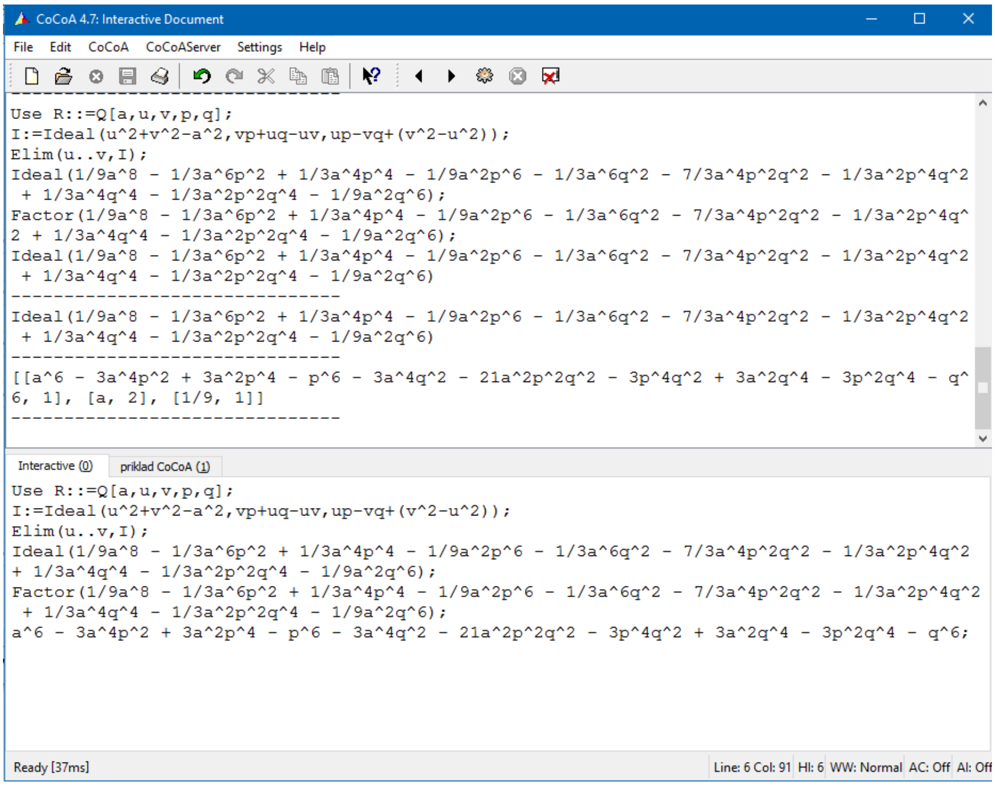
Dostáváme soustavu tří rovnic

$$u^2 + v^2 - a^2 = 0$$

$$vp + uq - uv = 0$$

$$up - vq - (v^2 - u^2) = 0$$

Eliminací proměnných u, v získáme rovnici námi hledané křivky



Obrázek 5-4 Asteroida, eliminace CoCoA

Na eliminaci jsme použili program CoCoA a získali jsme rovnici křivky, kterou dále upravíme

$$a^6 - 3a^4p^2 + 3a^2p^4 - p^6 - 3a^4q^2 - 21a^2p^2q^2 -$$

$$-3p^4q^2 + 3a^2q^4 - 3p^2q^4 - q^6 = 0$$

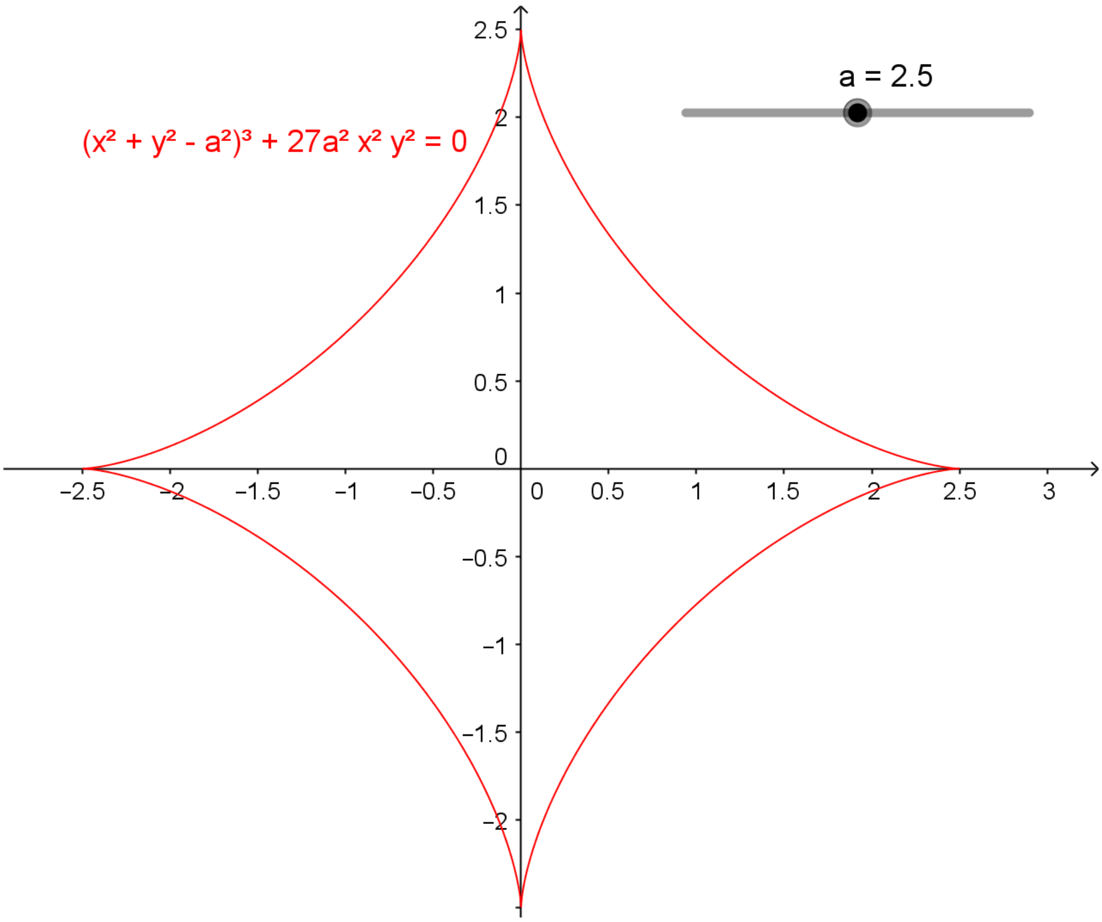
Tato rovnice se dá zapsat také jako

$$(p^2 + g^2 - a^2)(p^4 + g^4 + a^4 + 2p^2q^2 - 2q^2a^2 - 2p^2a^2) + 27a^2p^2q^2 = 0$$

$$(p^2 + g^2 - a^2)^3 + 27a^2p^2q^2 = 0$$

Nyní proměnné *p*, *q* nahradíme *x*, *y* a pomocí programu GeoGebra ověříme, že se jedná o *asteroidu.*

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$$

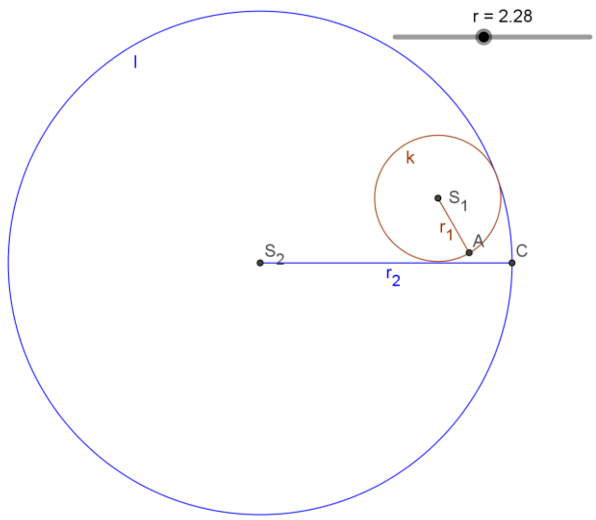


Obrázek 5-5 Asteroida, implicitní křivka

5.3 Asteroida jako hypocykloida

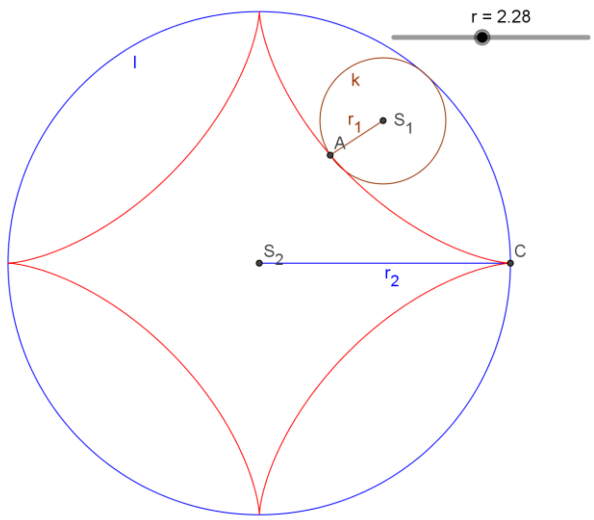
Hypocykloida je rovinná křivka, která vznikne opisováním bodu pohyblivé kružnice $k(S_1; r_1)$, která se bez prokluzu kotálí zevnitř po větší kružnici $l(S_2; r_2)$. Je-li poměr poloměrů kružnic $p = \frac{r_2}{r_1}$ racionální číslo, hypocykloida se uzavře. Je-li poměr $p = 4$ vzniká asteroida. [13]

Je dána kružnice $k(S_1; r_1)$ a $l(S_2; r_2)$ a bod $A \in k$. Kružnice k a l mají právě jeden vnitřní dotyk a platí $p = \frac{r_2}{r_1} = 4;\ r_2 = 4r_1$. Kružnici k necháme zevnitř odvalovat po kružnici *l*. Trajektorie bodu *A* je *asteroida.*



Obrázek 5-6 Asteroida, hypocykloida

Vymodelovali jsme si tuto situaci v programu GeoGebra. Při pohybu kružnice *k* v kružnici *l* vidíme pohyb bodu *A*. Při použití nástroje množina bodů se nám vznikne asteroida.



Obrázek 5-7 Asteroida, množina bodů hypocykloidy

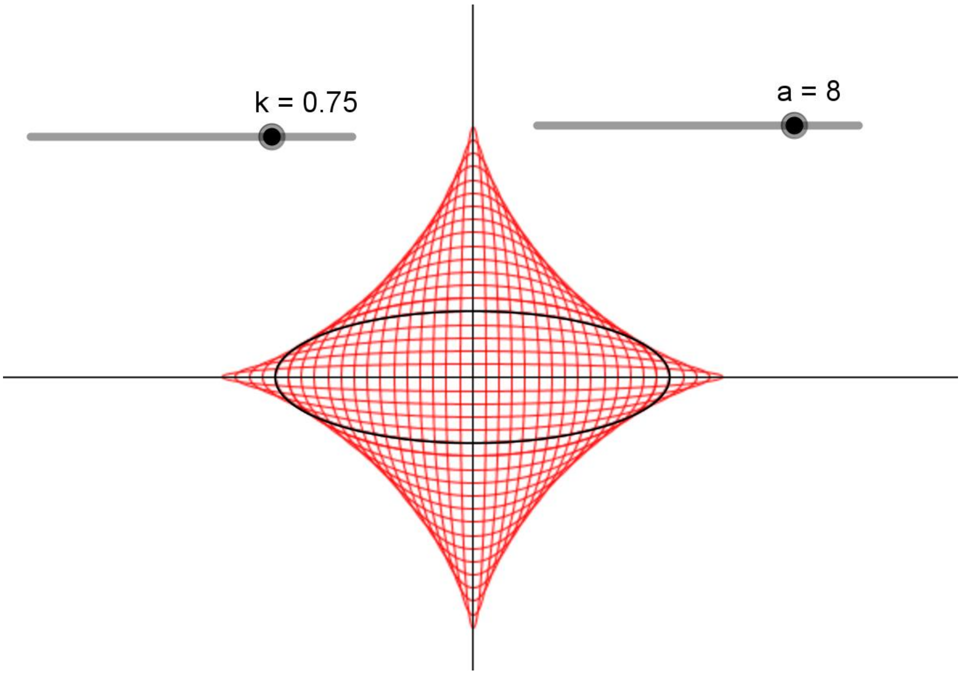
5.4 Asteroida jako obalová křivka

Asteroida vzniká také jako obalová křivka, ukážeme si na následujících příkladech.

5.4.1 Asteroida – množina elips

Obalovou křivkou množiny všech elips, kterým měníme jejich excentricitu při pevně dané maximální délce hlavní a vedlejší poloosy, je asteroida. [9]

V programu GeoGebra si vymodelujeme danou situaci - maximální délku měníme pomocí posuvníku a, excentricitu pomocí posuvníku k. Vztah mezi excentricitou a poloosami je $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, kde a a b jsou poloosy a e excentricita. Množina elips odpovídá rovnici $\frac{x^2}{(k \cdot a)^2} + \frac{y^2}{((1-k)a)}$ =1, kde $0 < k < 1$.

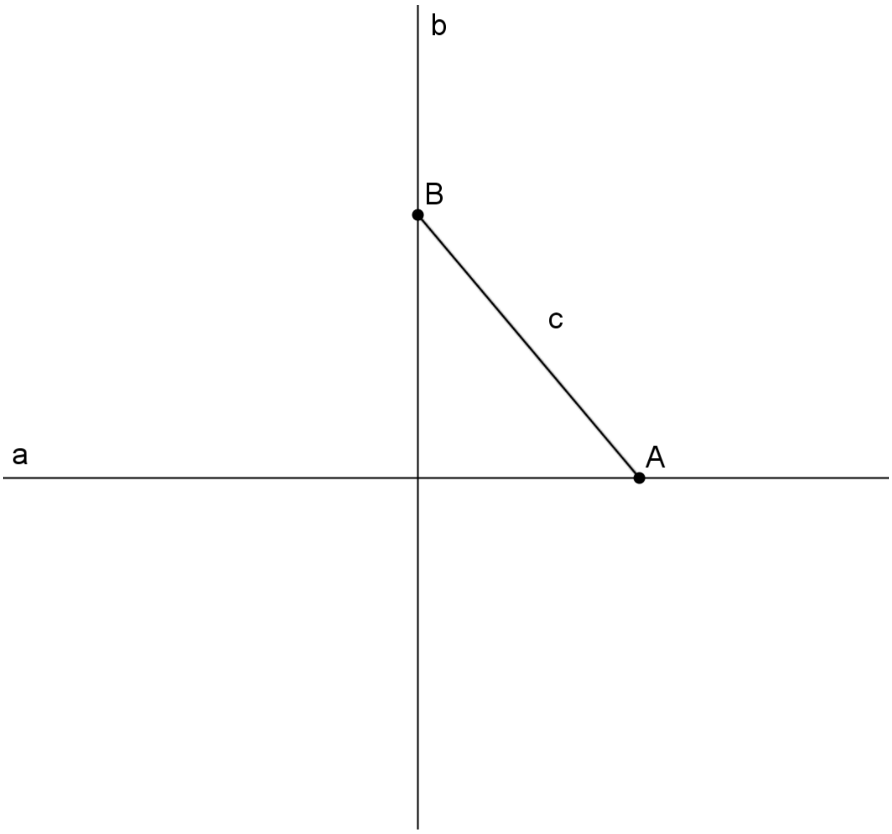


Obrázek 5-8 Asteroida, množina elips

5.4.2 Asteroida – množina úseček

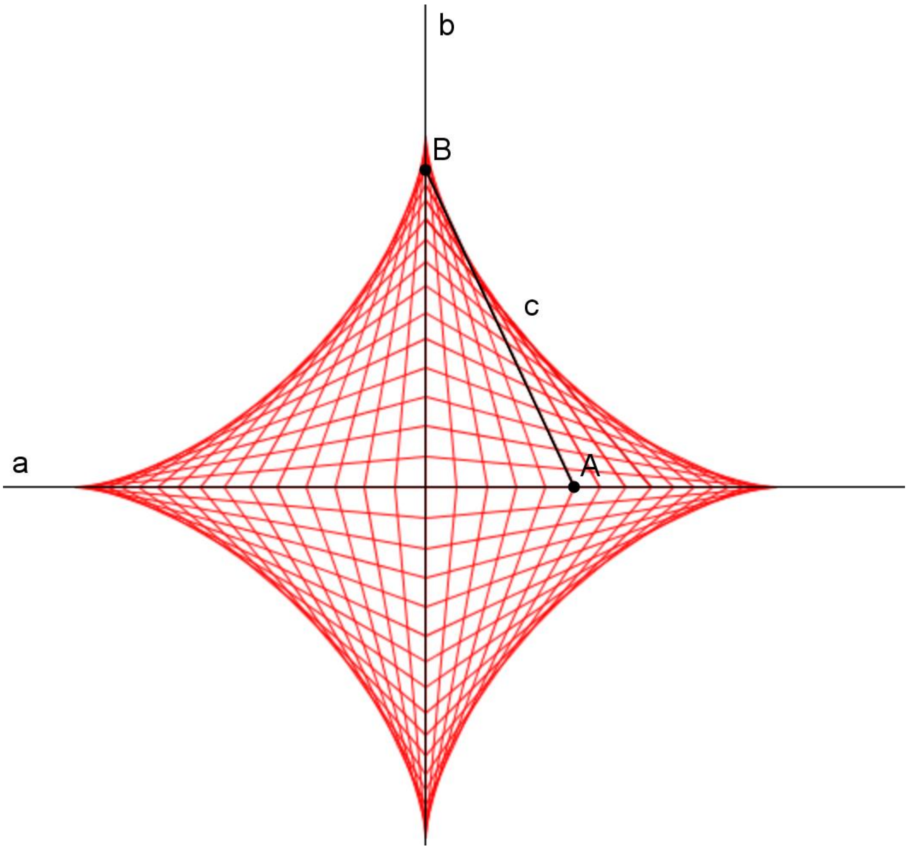
Obalovou křivkou množiny všech úseček, které vzniknou pohybem dané úsečky pevné délky c, jejíž krajní body se pohybují po přímkách na sebe kolmých, je asteroida. [11]

V programu GeoGebra vytvoříme danou situaci, bod A leží na přímce a a bod B leží na přímce b, přímky a a b jsou na sebe kolmé ($A \in a; B \in b; a \perp$ b).



Obrázek 5-9 Asteroida, množina úseček

Pohybujeme-li bodem *A*, mění se poloha bodu *B* a poloha úsečky *c*. Stopa úsečky *c* nám vytvoří asteroidu.



Obrázek 5-10 Asteroida, množina úseček

5.5 Přehled rovnic

Kartézské souřadnice

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0$$

Parametrické vyjádření

$$x = 2a\cos\varphi - a\cos 2\varphi$$

$$y = 2a\sin\varphi - a\sin 2\varphi$$

$$\varphi \in \langle -\pi; \pi \rangle; a > 0$$

Polární souřadnice

$$r = a\frac{|\sec\varphi|}{\left(1 + tg^{\frac{2}{3}}\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5.6 Základní geometrické vlastnosti

Osy souměrnosti $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$

Délka křivky $L = 6a$

Plocha křivky $A = \frac{3}{8}\pi a^2$

Singulární body $[\pm a; 0], [0; \pm a]$ [1]

5.7 Historie

Asteroida patří mezi cykloidní křivky. Byla poprvé zkoumána *Olem Christensenem Roemerem* (1644 – 1710) roku 1674 při hledání ideálního tvaru ozubení převodů. Studoval ji také *Johann Bernoulli* (1667 – 1748). O asteroidě píše ve své korespondenci také *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716) kolem roku 1715. [13]

V literatuře byl název asteroida poprvé použit v roce 1836 *Karlem Ludwigem von Littrowem*, vychází z řeckého *aster* nebo-li hvězda.

6 Závěr

V této bakalářské práci jsem vytvořil přehled možností, jak získat jednotlivé algebraické křivky (strofoida, kardioida, asterida) pomocí různých konstrukčních metod v programu GeoGebra, jak odvodit obecné rovnice těchto křivek. Současně jsem využíval program CoCoA, který mi pomohl získat rovnice křivek. Obecné rovnice křivek jsem odvozoval, základní geometrické vlastnosti jsem popisoval.

Křivky řádů vyšších než tři se v základních kurzech matematiky nevyučují, a proto si myslím, že tento přehled objasní, že konstrukce pomocí matematických programů je jednoduchá.

Vytvoření této práce mi přineslo nový pohled na geometrii a obohatilo mé poznatky z analytické geometrie.

7 Seznam použité literatury a ostatních zdrojů

7.1 Literatura

[1] LOCKWOOD, E. H. *Book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

[2] LAWRENCE, J. *A catalog of special plane curves*. New York: Dover Publications, 1972. ISBN 04-866-0288-5.

[3] SHIKIN, E. *Handbook and atlas of curves*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995, ISBN 08-493-8963-1.

7.2 Internetové zdroje

[4] Kardioida [on line Ottův slovník naučný] 2015-01-27 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://archive.org/stream/ottvslovnknauni17ottogoog#page/n1066/mode/1up>

[5] Right Strophoid [on line] 1997-January [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Right.html>

[6] Cardioid [on line] 1997-January [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Cardioid.html>

[7] Astroid [on line] 1997-January [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Curves/Astroid.html>

[8] Cardioid [on line] 2012 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: < http://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml>

[9] Astroid [on line] 2006 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: < http://www.mathcurve.com/courbes2d/astroid/astroid.shtml>

[10] Strophoid [on line] 2011 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www.mathcurve.com/courbes2d/strophoiddroite/strophoiddroite.shtml>

[11] Astroid [on line] 2016 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Astroid_dir/astroid.html>

[12] Cardioid [on line] 2016 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Cardioid_dir/cardioid.html>

[13] Astroid [on line] 2013-09-21 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www.2dcurves.com/roulette/roulettea.html>

[14] Cardioid [on line] 2013-09-21 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www.2dcurves.com/roulette/rouletteca.html>

[15] Strophoid [on line] 2013-09-21 [cit. 2016-04-12] Dostupné na internetu: <http://www.2dcurves.com/cubic/cubicst.html>

7.3 Stažené obrázky

Obrázek 4-10 https://pbs.twimg.com/media/BpPHa2eCMAA33s7.jpg