Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Matematika, nůžky a papír

Vypracovala: Šárka Hellerová
Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematika, nůžky a papír, jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 29. 04. 2016 ………………………….

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí mé diplomové práce doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za odborné vedení, ochotu a pomoc při sepisování práce.

Anotace

Diplomová práce je zaměřena na výuku matematiky prostřednictvím skládání papíru metodou origami, sliceforms a paperfolding. V práci jsou vypsány vybrané geometrické útvary a jejich vlastnosti, které jsou detailněji přiblíženy obrázky vytvořené v matematickém softwaru GeoGebra. Vybrané útvary jsou obohaceny o návody a postupy, jak daný útvar z vyrobit papíru. Práce obsahuje výukové aktivity, úlohy, kterými žáci prochází společně s učitelem, krok za krokem. Žáci si opakují učivo a budují tak systém základních geometrických pojmů pomocí skládání papíru. Následně své dovednosti získané skládáním papíru a termíny s tím spojené žáci využijí v pracovních listech.

Klíčová slova

geometrie, matematika, origami, paperfolding, pedagogika, práce s nůžkami a papírem, prostorová představivost, sliceforms

Abstract

The thesis deals with teaching Mathematics through folding paper using the origami, sliceforms and paperfolding methods. Selected geometric figures and their characteristics are listed in the thesis. These geometrical figures are approximated to pictures created in a mathematical software GeoGebra. Selected figures are enriched with instructions and methods of creating the given figure out of paper. The thesis includes educational tasks. The teacher and the pupils follow the task step by step. The pupils revise the schoolwork and build up a system of basic geometrical terms while folding paper. The pupils apply gained skills and acquired terms in handouts.

Key words

geometry, Mathematics, origami, paperfolding, education, teaching, using scissors and paper, three-dimensional visualization, sliceforms

Obsah

1 Úvod

Cílem této diplomové práce je vytvořit materiál pro učitele matematiky, který je vhodnou součástí výuky geometrie na základní škole, z hlediska didaktiky matematiky. Práce by měla přinést výčet modelů a metod, které vedou k rozvoji prostorové představivosti, jelikož je v současnosti její úpadek znát. Protože je patrný úbytek vyučovacích hodin geometrie a stereometrie, pokles samostatného rýsování na základních školách či nedostatek času k procvičování učiva, dokonce učitelům kolikrát chybí dostačující vyvinutá prostorová představivost nebo patřičná průprava ve výuce rýsování, rozhodla jsem se, že pro ně připravím materiál, který bude zaměřen na geometrii a práci s papírem a nůžkami. Rozhodla jsem se vytvořit učitelům přehled základních modelů pomocí skládání, a to metodou origami, sliceforms a paperfolding. Jelikož česká literatura u sliceforms a paperfolding chybí, jsou v úvodu práce popsány postupy, návody, rady a zajímavosti, jak k danému skládání přistupovat a jaká tělesa či útvary z onoho skládání vytvořit, díky mé zkušenosti a praxi.

U vybraných geometrických útvarů vypíši jejich základní vlastnosti. Cílem je, aby žáci uměli z hlediska zamýšleného kurikula pracovat s útvarem, popsat ho a na základě těchto dovedností model útvaru složit z papíru. Každá kapitola obsahuje postupy, jak geometrické útvary různými metodami lze složit.

Na základě rozvoje prostorové představivosti pomocí skládání prozkoumám současné nabídky učebnic k danému tématu a připravím pracovním listy na výuky geometrie s využitím skládání papíru origami či sliceforms skládanek tak, že navrhnu další postupy výuky, které by mohly vést žáky k neformálnímu poznání a které doplním o pracovní listy. Dále zrealizuji s pracovními listy výuku s vybranými žáky 2. stupně ZŠ a popíši průběh experimentálního vyučování.

2 Origami

Origami (japonsky psáno: 折り紙) je staré umění skládání papíru. Samotné slovo origami (z japonského *oru* – skládat, *kami* – papír), doslova „skládaný papír“, je možno vidět na obrázku číslo 1. Přestože origami bývá považováno za japonské umění, tak je zajímavé sledovat, jak se na historii skládání papíru dívají lidé v jednotlivých zemích, např. v USA, v Anglii a jinde. Například v České republice se pro skládání papíru běžně používá označení “origami“ a předpokládá se, že pochází z Japonska. Naopak např. ve Španělsku zná tento výraz málokdo. Španělé používají spíše označení “papiroflexia“ a domnívají se, že skládání vzniklo v Evropě nezávisle na Japoncích. Skládání papíru se rozvíjelo všude tam, kam se dostal papír, a dnes je známé po celém světě (Rojas, 1995). Například mnoho dětí v České republice dovede složit vlaštovku, lodičku nebo parníček, aniž by někdo z nich věděl, že i tyto skládanky mají svůj původ v japonských origami.

Obrázek 1: Ukázka origami (1 - vlaštovka, 2 - kaktus s květníkem, 3 - tři druhy lodiček, 4 - jeřáb, 5 - srdce, 6 - záložka, 7 - žabka, 8 - kabát, 9 - pavouk, 10 - králík, 11 - nafukovací čertík, 12 - pohárek, 13 - prase)

V obsahu první kapitoly je popisována historie origami od počátku až po dnešní dobu a vysvětlení co origami znamená. Dále jsou doporučeny nástroje, které je vhodné ke skládání origami použít, uvedeny druhy papíru, ke kterým je připojena tabulka s jejich vlastnostmi a doporučením, jaký papír k určitému skládání papíru vybrat. V poslední řadě jsou shrnuty kroky, které je nutno absolvovat před prací s origami papírem.

2.1 Historie

Dobu, ve které má tradice japonských origami počátek, již dnes nelze přesně určit. Dokázalo se, že Japonci se s tajemstvím výroby papíru seznámili u Číňanů již počátkem 1. tisíciletí n. l., čili asi o tisíc let dříve než první Evropané. V nejstarších dobách (předpokládá se přibližně 7. století) byly papírové skládanky v Japonsku užívány při náboženských obřadech a při výzdobě šintoistických svatyní. Také se věšely k malým dárkům pro štěstí. Zhruba v době 7. století našeho letopočtu přinesli Maurové skládání papíru (dále jen *skládání*) do Španělska. Jelikož ale vyznávali islám, tak jejich skládanky nesměly být symbolické ani figurativní. Proto jejich skládání představovalo do značné míry pouze praktickou činnost. První kniha o skládání papíru byla vydána v roce 1797 a nový druh umění byl pojmenován slovem origami. Akira Jošizawa, který žil v letech 1911 – 2005, byl považován za velkého mistra origami, který vytvořil tisíce modelů v živém, podmanivém stylu. Byl to on, kdo vyvinul systém šipek a čar (diagramy), který se používá dodnes v nákresech návodů (Woodová, 2014).

V 17. století bylo skládání považováno za rozšířenou zábavu. Jeho obliba ale výrazně vzrůstala i po další dvě století, kdy byla tato forma zábavy rozšířena obecně, a stala se světově uznávaným uměním.

Zajímavý postoj k výrobě origami má Padrtová (1970), která říká několik pozoruhodných vět o tom, jaký význam má pro děti výroba origami. Dětí se pobaví, a současně se naučí zacházet s nůžkami a lepidlem, získají zručnost a přesnost při skládání papíru. Přitom jsou vedeny k udržování čistoty pracovního prostředí, používání levného materiálu a uplatnění své fantazie jak při výrobě samotného tvaru, tak i ve finální části práce, kdy výrobky zdobí a přivádí do finální podoby.

Janoš (1991) uvádí, že někdy okolo roku 1800 byl složen papírový jeřáb *orizuru*, který se rozšířil se do mnoha jiných zemí celého světa a je dodnes nejoblíbenější skládankou. V Číně patří jeřáb mezi tradiční symboly dlouhého života, a proto si nemocní lidé často desítky nebo i stovky skládaných jeřábů navlékají na dlouhé šňůry a zavěšují je v bytě pro štěstí. Jejich oblíbenou zábavou je zhotovování šňůr s tisícem navlečených papírových jeřábů, protože věří, že tak přispívají svému uzdravení. V Hirošimě je zajímavý je pomník věnovaný dětským obětem. Znázorňuje malé dvanáctileté děvčátko držící nedokončeného papírového jeřába, které zemřelo, aniž by se mu podařilo složit vytoužených tisíc jeřábů.

Koncem 19. století dosáhly origami v Japonsku největšího rozkvětu a oblibu si udržely dodnes. S jednoduchými skládankami se i v ČR děti seznamují už v mateřských školkách, a dokonce jsou zahrnuty do učebních osnov výtvarné výchovy na základních školách. Způsob skládání nejstarších origami se původně předával verbálně. Ve 20. století bylo sepsáno několik obsáhlých publikací s podrobnými návody. Nejběžnějším způsobem, jak zaznamenat postup skládání, jsou tzv. diagramy. Pod obrázky, kde jsou obsaženy diagramy, je celý postup krok po kroku doplněn vysvětlujícím textem (Janoš, 1991). Pro popis skládání se v diagramech používá celá řada jednoduchých symbolům, jejichž význam se časem ustálil. Samozřejmě můžete narazit i na neznámé znaky, které odhalíte z kontextu.

2.2 Dnešní origami

Pro tradiční origami je typické skládání z jednoho papíru bez použití nůžek, ale také bez dalšího zdobení (např. přimalovávání očí), ale to se dnes již tak přísně nedodržuje. Další zvyklostí u tradičního origami je, že obvykle není znám autor, kdežto u moderního origami, když se výrobou zabývají známí umělci, autor znám je. Vznikají tak složité umělecké origami, které jsou ukazovány na výstavách a pokládány za autorská díla. Můžeme se setkat i s různými výtvory, které ctitelé tradičních origami považují za ústupek evropskému vkusu – myslíme tím např. papírová zvířátka, na která se nalepují uši, oči i jiné části těla, a to nejen z papíru, ale i z provázku, plsti, příze apod. LaFosse (2005) připomíná, že se v moderní době používají i lepidla, která slouží k celkovému zpevnění a konzervování modelu. Stříhání či prostřihování čtvercového základu není pro origami cizí, jelikož například první kniha origami *Senzaburu orikata* z roku 1797, je založena výhradně na stříhání a nastřihování.

Ať už tradiční origami vytvořil kdokoli, výsledek by měl být vždy stejný, protože postup tradičních origami je velmi přísně předepsán. Na druhou stranu je moderních origami ponechán značný prostor pro vlastní fantazii skládajícího. Jak zmiňuje např. Janoš (1991), autor by se měl nechat vést srdcem, aby byl výsledek pěkný a vzbouzel v pozorující kladné emoce.

2.3 Typy papíru

Janoš (1991) říká, že jedním z problémů, který často omezuje šíření japonských origami v zahraničí, je kvalita papíru. V některých zemích je těžké zakoupit správný a vyhovující papír, kdežto v Japonsku lze levně koupit připravené sady papírů, kterou jsou buď jednobarevné, nebo nejrůznějším způsobem vzorované, ale vždy na druhé straně bílé. Papíry jsou již nastříhané do čtvercové podoby převážně 17 x 17 cm, užívají se však i malé čtverečky o rozměrech 6x6 cm, ze kterých je skládání o mnoho složitější. Přesto mají tyto miniaturní origami svůj zvláštní půvab. Je vhodné nastříhat si barevný či vzorovaný balící papír nebo užít průklepové papíry. V obchodech můžeme nalézt i takové papíry, které jsou na jedné straně barevné a na druhé bílé. Eventuálně si samostatně nabarvit bílý papír po jedné straně. Vlastnosti papíru jsou při skládání origami velmi důležité, proto např. Woodová (2014) a Cibulka (2013) uvádějí několik typů papíru, které by měly pomoci při výběru správného papíru pro určitý model origami:

Papír Kami je na jedné straně barevný a na druhé bílý. Existuje sto různých vzorů a struktur. Je tenký a nekypřený (jako např. kancelářský papír), nařezaný na dokonalé čtverce, což je vhodné pro začátečníky.

Dvoubarevný papír je často označovaný jako *duo*, má jednolitý barevný potisk po obou stranách, přičemž líc a rub mají jinou barvu. Podklad tvoří běžný origami papír *kami*. Tento speciální typ papíru se hodí na skládanky, kde má rubová strana papíru určitou úlohu.

Papír s kovovou fólií. Fólie může být nanesena na papíru i kartonu. Rubová strana bývá bílá. Papír se hodí např. k výrobě vánočních ozdob.

Balicí papír bývá obvykle na jedné straně bílý a na druhé straně mívá vytištěný vzor. Další možností jsou oboustranné, třpytivé nebo jinak zajímavé balicí papíry, které jsou vhodné na rozměrné skládanky, ozdoby, dárky a výzdobu při oslavách.

Květinový papír je klasický papír na origami, na jedné straně jednobarevný a na druhé straně má postupné přechody barev. Používáme ho především pro skládání květů, jelikož je barevný z obou stran.

Papír čijogami (chiyogami) má potisklé obrazce a symboly, které jsou často inspirovány starými japonskými dřevořezbami. Podkladový papír může být různé kvality, od obyčejného *kami* až k exkluzivním ručním papírům. Na rozdíl od papíru *kami* ale na omak nepřipomíná bavlnu. Používá se na skládanky, které mají vypadat tradičně.

Kancelářský papír je hladký bílý obdélníkový papír, prodávaný v balíčcích po 500 listech. Kvůli své malé nákladnosti je vhodný na procvičování skládání.

Čínský ruční papír je poloprůsvitný papír s viditelnými vlákny v mnoha barevných variantách. Tento druh papíru se používá tam, kde je potřeba průhlednosti do vnitřku struktury.

Ubrousky, ať už látkové nebo papírové, jsou v mnoha barvách s rozmanitými vzory. Specifické uplatnění mají hlavně jako výzdoba stolu.

Karton. K vytváření různých alb, přání nebo karet používáme čtverce tenkého kartonu. Vhodný na výrobu krabiček. Do jisté míry je nenasákavý, proto ho můžeme použít i na lodičky.

Z papírových bankovek vytváříme modely, které se obvykle zhotovují z amerických jednodolarových bankovek, jelikož velmi málo států vlastní bankovky, které mají nízkou hodnotu. Můžeme však použít koruny, libry nebo eura. Při skládání se využívá zejména písmen a obrázků na bankovce. Zajímavostí je, že celé jedno odvětví origami se zabývá právě skládáním bankovek.

Sběrové papíry jsou např. letáky, noviny, časopisy. Pomocí těchto papírů lze skládat zadarmo a kdekoli.

Následující tabulka 1 ukazuje vlastnosti papíru, které nám pomáhají při správném výběru papíru pro určitý model skládanky. Obsahuje například informace o hmotnosti, trvanlivosti a velikosti papíru, dále zajímavé rady, jak s papírem zacházet.

Tabulka 1: Vlastnosti papíru použitého na origami

	Hmotnost	Ohýbání	Trvanlivost	Velikost	Rada
Papír Kami	Nízká	Čisté sklady[1]; pozor na roztrhnutí papíru v místě, kde se sejde více skladů.	Průměrná	Čtverec 15x15 cm; 7,5x7,5 cm	K procvičování použijte papíry, které se Vám nelíbí.
Papír s kovovou fólií	Různá	Hrozí bílá místa na hřbetě skladů – pracovat šetrně.	Průměrná	A4 nebo čtverec 15x15 cm	Fólie může prasknout při použití příliš velké síly. Nikdy nežehlit – fólie se roztaví.
Balicí papír	Nízká	Pracovat opatrně - mohou se objevit nevzhledná bílá místa.	Krátká	Role, sady, archy	Složené archy nelze použít na velké skládanky, jelikož by na nich byly vidět původní sklady.
Květinový papír	Nízká	Čisté sklady; pozor na roztrhnutí papíru v místě, kde se sejde více skladů.	Průměrná	Čtverec 15x15 cm	
Papír čijogami (chiyoga-mi)	Nízká	Čisté sklady; pozor na roztrhnutí papíru v místě, kde se sejde více skladů.	Průměrná	Čtverec 15x15cm; 7,5x7,5cm; obdélník 20x25cm	
Kance-lářský papír	Střední	Sklady dobře drží.	Průměrná	A4	
Sběrový papír	Různá	Různá	Různá	Různá	
Čínský ruční papír	Různá	Vlákna se ohýbají velmi těžce.	Průměrná	A4, A3, A2	Pokud se papír zmačká, lze použít žehlička.
Ubrousky	Vysoká	Pozitivem je, že ohyby můžou být nejen ostré, ale i zaoblené.	Látku lze použít opakovaně.	Čtverec 33x33 cm; 44x44 cm	Ostré hrany lze přežehlit.
Karton	Vysoká	Sklady dobře drží.	Dobrá	Čtverec 30x30 cm; 15x15 cm	
Papírové peníze	Střední	Sklady dobře drží.	Výborná	Jako americký dolar	

2.4 Pomůcky a nástroje

[1] Sklad = ohyb, přeložení papíru

Ke zpevnění, ke zdokonalení nebo při výrobě origami člověk potřebuje různé nástroje, které mu dopomohou k finální podobě origami. Zajisté jsou potřeba nůžky, které využijeme hlavně k přípravě papírů do různých tvarů, které slouží jako základní model (čtverec, obdélník atd.). U moderních origami slouží nůžky k nastřihávání, úpravě apod. Některé skládanky (jako například pavouk) vyžadují jakékoli lepidlo na papír. K zatočení konečků květin nebo jako stonek květů nám poslouží dřevěná špejle. Pro vyznačení důležitých bodů či dokreslení očí, drápků apod. využijeme tužky, fixy a pastelky. Pravítko nám pomůže k dokonalým skladům nebo k přeměření určených délek.

Floristický drát různých délek a tloušťek uvádí Anca Oprea (2014) jako důležitý prostředek pro modelování květin, který se dá použít jak na stonky, tak i ke zpevnění některých částí skládanek. Floristický vázací drát je dobře tvarovatelný, pevný, vhodný na aranžování a drátkování květin. Dále doporučuje ketlovací kleště a štípačky, protože kleštěmi s úzkou špičkou se dá dobře utočit i malé očko floristického drátu a pomocí štípaček upravit jeho potřebná délka. Woodová (2014) také doporučuje vlhčené ubrousky, díky kterým si udržujeme čistou pracovní plochu a ruce, aby i výrobky zůstaly nezašpiněné. Mluví také o péči ruko, díky kterým se na výrobky může přenést spoustu nečistot a mastnoty, proto pobízí k pečlivému mytí rukou. K tvorbě miniaturních modelů využijeme pinzetu, která se hodí k práci s drobnými sklady. V neposlední řadě uvádí řezačku, se kterou můžeme papír nařezat na přesné čtverce.

2.5 Typy skládanek

V současné době se můžeme setkat s různými modely origami, např.:

- Modulární origami jsou složeny z více částí, které do sebe zapadají, dají se různě skládat a je možné je nazývat také tzv. 3D origami. Příkladem můžou být květiny s pestíky.
- Pohyblivá origami můžeme ohýbat, různě s nimi manipulovat. Příkladem může být skákací žabička, kolébka.
- Mokrá origami slouží zpravidla pro náročnější modely, které potřebujeme navlhčit kvůli lepší manipulaci.

2.6 Rady, než se začneme skládat

Za dobu, co origami existují, se vžila určitá symbolika, která slouží k popsání návodu jednotlivých skládanek. V návodech můžeme najít obrázky s různými šipkami a znaky (diagramy), bez kterých origami nesložíme. Při skládání se tedy řídíme obrázky, na kterých jsou připojeny diagramy, ale i textem popisující skládání, který bývá umístěn pod obrázky a je hlavně pro začátečníka výhodou. Začátečník by se měl v počátku skládání origami držet spíše lehčích skládanek, u kterých si výrobu origami vyzkouší nebo alespoň složit základy, ze kterých se skládají origami těžší (jako je např. ptačí, dračí základ, složený čtverec, základ na vodní bombu apod.).

3 Kirigami

Slovo kirigami pochází z japonského slova “kiru“ = stříhat a “kami“ = papír. Už překlad nám napovídá, že v umění Kirigami se používá především nůžek a obyčejného papíru A4, ze kterého můžeme složit dekorace nebo velmi dobře propracované budovy. Skládáním, stříháním, nařezáváním a sestavováním papíru mohou vzniknout opravdová prostorová tělesa se zajímavými efekty.

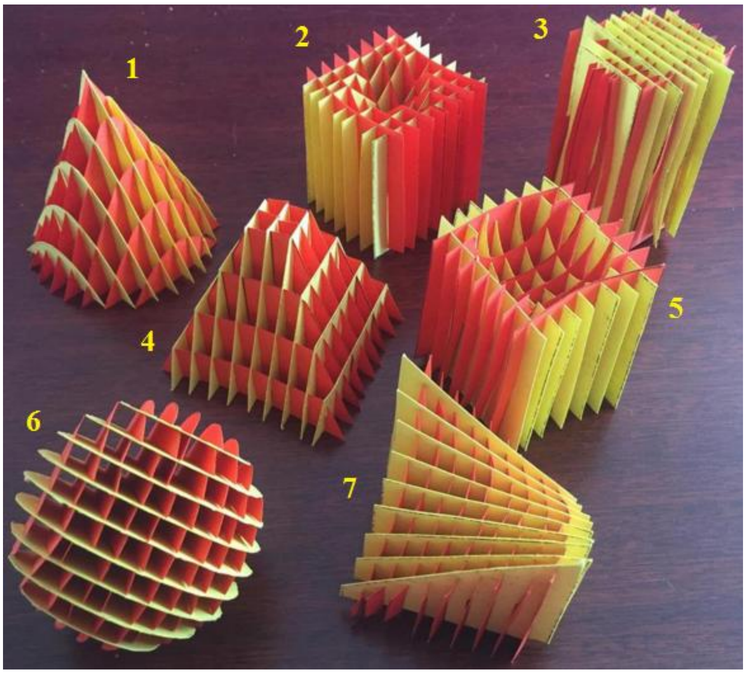
Typy kirigami

- modulární – z více částí, které mohou být propojeny
- z jednoho kusu papíru zkomponovaného jako origami (Täubner, 2009).

4 Sliceforms

„Sliceforms“ technika pochází od dánského matematika Olause Henriceho, který učil v Londýně na přelomu 19. a 20. století. Ten začal skládat modely pomocí průřezů, k čemuž používal elipsy, hyperboly a paraboly. V jeho technice však nebyl plně využit způsob výroby modelů. Teprve John Sharp [1] rozšířil systém o širokou škálu povrchů pod názvem „Sliceforms“, začal tyto modely šíři mezi lidi a tím je začal popularizovat.

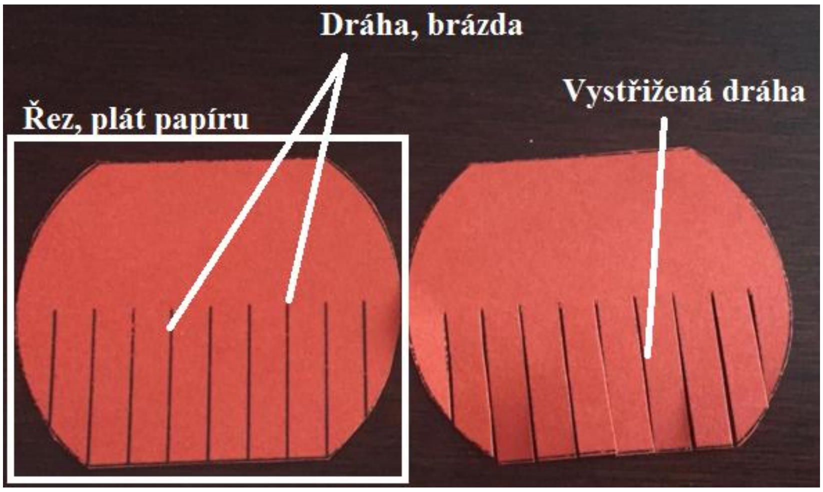
„Sliceforms“ jsou 3D modely, které vytváříme pomocí nastřihaných plochých plátů (řezů papíru), jež do sebe zapadají, a tak strukturou mřížky tvoří požadované 3D těleso. Pro výrobu používáme spíše barevné pláty, využíváme kreativity, protože výrobky jsou zajímavější a člověk krásně vidí strukturu díla (viz obr. 2). Pro zhotovení Sliceforms nejsou zapotřebí velké matematické znalosti. Důležitá je spíše představa rozkladu 3D tělesa do dvourozměrného prostoru (tzn. „na papír“ a naopak). To lze z papíru zhotovit pouze pomocí nůžek a pravítka, ale lze využít i některý ze speciálních softwarů pro návrh mřížky Sliceforms jako je např. Google SketchUp. Proto si myslím, že právě tyto výrobky jsou nejlepší k procvičování nejen k dětské obrazotvornosti. Skutečnou hodnotu můžou žáci, ale i široká veřejnost, ocenit právě až při samotném skládání a prozkoumání modelů Sliceforms.



Obrázek 2: Ukázka sliceforms (1 - kužel, 2 - krychle s vyříznutým jehlanem, 3 - válec, 4 - komolý jehlan, 5 - krychle s vyříznutou půlkoulí, 6 - koule, 7 – krychle v úhlopříčném řezu

V současné době není žádná česká literatura, která by byla volně přístupná pro žáky či širokou veřejnost a motivovala je ke skládání sliceforms. Ti se ale mohou ke skládání dostat skrze cizojazyčné postupy, např. v knihách *sliceforms: Mathematical Models from Paper Sections* z roku 1999 nebo *Surfaces: Explorations with Sliceforms* (2004) od Johna Sharpa, který napsal několik publikací věnujících se výrobě sliceforms. Další postupy lze nalézt v některých skvěle propracovaných učebnicích matematiky, viz kapitola 8 – Srovnání učebnic matematiky pro ZŠ. V Londýnském muzeu vědy můžeme navštívit výstavu se jménem *Current Exhbitions*, která prezentuje sliceforms od 19. století po současnost. Mezi přispěvatele patří např. John Sharp, ale i již zesnulí německý matematik Alexander von Brill[2] a pedagog Felix Klein[3].

Trojrozměrné modely jsou tvořeny tak, že se do sebe pláty papíru zasouvají rovnoběžně a kolmo pomocí drah (neboli brázd, vysvětleno na obr. č. 3) vystřižených nůžkami. Brázdy fungují jako určité panty, díky kterým můžeme celým modelem hýbat a měnit tak velikost jeho úhlů. Extrémním pohybem z jedné pozice do druhé se úhel sevření mění od 0° do 180°. Jeden model tedy při vytváření prochází spoustou různě zkosených tvarů.



Obrázek 3: Popis řezů sliceforms

[2] Alexander von Brill (1842-1935) byl významným matematikem, který získal doktorát na univerzitě v Giessenu, učil na univerzitě v Tübingenu a věnoval se modelům „Sliceforms“.
[3] Felix Christian Klein (1849-1925) se zabýval především geometrií. Formuloval Erlangenský program, jehož hlavní myšlenou je propojení geometrie s algebrou, a tak prozkoumal geometrické struktury pomocí jejjich invariant a symetrií. Tento projekt vedl k rozvoji matematiky a fyziky ve 20. století.

Pokud budeme zkoumat postupy zpracování sliceforms v knihách, zjistíme, že většina modelů je navržena tak, aby finální výrobky byly v pravém úhlu, jako např. krychle, kvádr, kde jsou tvary řezů dokonce zcela stejné. Naopak zajímavější a působivější modely mají úhel symetrie větší, jako je například zkosená krychle. Dokonce existují povrchy, kde rovina symetrie vůbec není, čili je každý řez úplně odlišný (např. u hyperbolického paraboloidu).

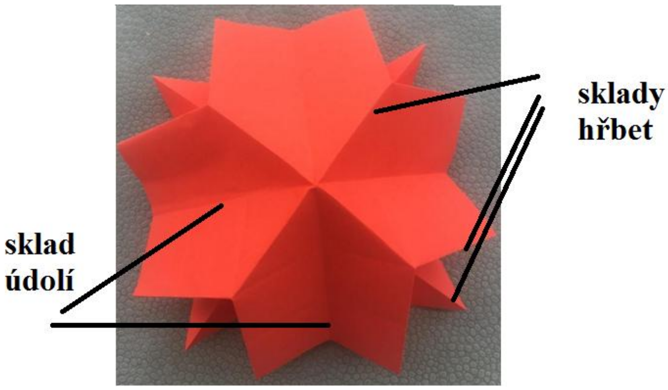
K výrobě sliceforms můžeme použít např. různé druhy papíru (psací, kreslící, grafické, tiskové atd.), kartonu, nebo můžeme použít i dřevo, plast, hliník apod. Osobně doporučuji klasickou čtvrtku. Například John Sharp k výrobě své brožury použil křehký bílý kladívkový papír, na kterém jsou vytištěny barevné řezy.

Aby se řezy nerozpadly a bylo možné modelem pohybovat, je důležité, aby měly dráhy správnou šířku. Nestačí dráhy jen nastřihnout, ale vystřihnout takovou dráhu, která by měla odpovídat tloušťce papíru. Naším úkolem je tedy řádně vystřihnout šířku dráhy tak, aby z ní řez nevypadával a byl lehce zasunut tak, aby nepřečníval ostatní řezy. Je lepší dráhu nastřihnout méně, kdy ji můžeme vždy dopilovat a vyříznout k požadovanému tvaru, než dráhu přestřihnout tak, že vyčnívá. Tím si ulehčíme práci a nemusíme celý řez vytvářet znovu. Povětšinou se každá sobě odpovídající dvojice řezů setkává přímo v jejich středu. Je proto důležité, abychom dráhy vystřihovali do středu řezů, což můžeme vidět na obrázku č. 3.

5 Paperfolding

Paperfolding (obr. č. 4) je druh skládání, při kterém si papír připravíme různým přehýbáním, a poté sklady ponecháme či převrátíme na druhou stranu (sklad údolí, sklad hřbet – jsou většinou symetrické. Výsledkem je 3D model plný barevnosti, kterým se dá pohybovat.

Obrázek 4: Ukázka paperfolding

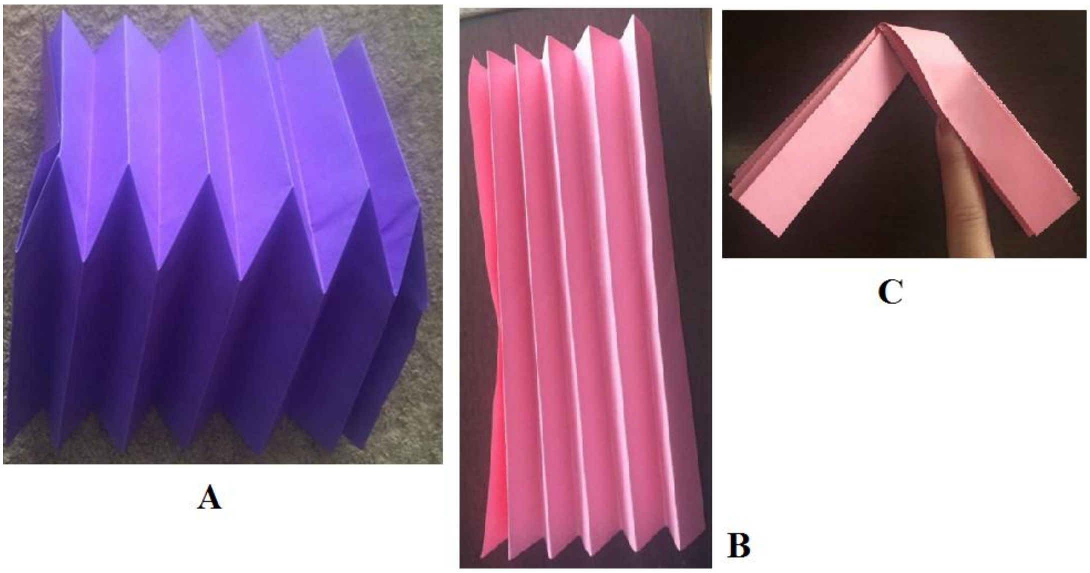


Obrázek 5: Ukázka skladů hřbet a údolí

Při výrobě těchto modelů se nejlépe pracuje s kancelářským nebo barevným papírem, jelikož se s ohyby dá dobře manipulovat. S tvrdším papírem se pracuje velmi těžce, jelikož při modelování pracujeme s malými obsahovými částmi papíru, proto se sklady velmi těžko protlačují.

Před začátkem modelování vycházíme z papíru ve tvaru čtverce nebo obdélníka. Papír si nejprve připravíme různým přehýbáním tak, abychom jednotlivé sklady pak už jen protlačili skladem údolí nebo hřbetem. Příprava papíru je ukázána na následujícím obrázku č. 6. Poté sklady ponecháme nebo je protlačujeme. Jelikož je papír křehký a snadno se u skladů pomačká, pracujeme při skládání velmi opatrně, tak docílíme krásného výsledku.

Rozhodli jsme vytvořit fialový výrobek A (obr. 6). Popřemýšlíme nad jeho sklady a připravíme si z obdélníkového papíru všechny sklady, které budeme následně upravovat skladem údolí nebo skladem hřbet. Připravili jsme si svislým skládáním obdélníkového papíru výrobek B (tzv. „harmonika“). Uprostřed skládanky vytvoříme šikmý sklad (viz skládanka C), výrobek rozložíme a pokračujeme už jen sklady údolí nebo sklady hřbet podle skládanky A.



A **B** **C**

Obrázek 6: Ukázka přípravy papíru - paperfolding

6 Rozdělení některých geometrických útvarů

Na začátku této kapitoly nebudu popisovat klasické rozdělení těles, ale uvedu takové dělení, se kterým se setkáte v mé diplomové práci. V praktické části práce jsem si připravila tělesa, která jsou na ZŠ nejčastěji vyučována.

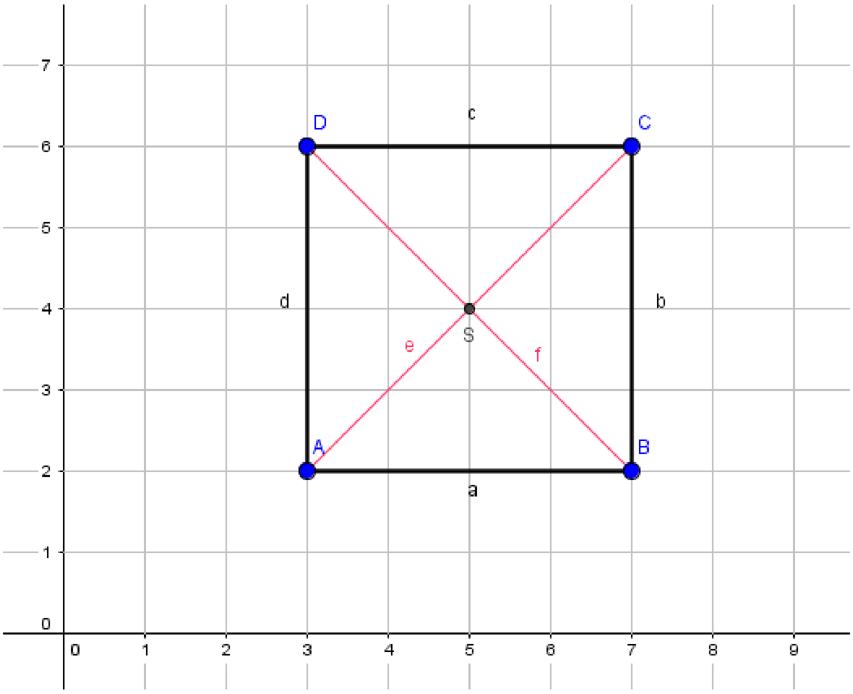
1. Mnohoúhelníky:
   a) trojúhelník,
   b) čtyřúhelník - obdélník a speciální případ obdélníku čtverec.

2. Tělesa:
   a) hranoly – kvádr a speciální případ kvádru krychle,
   b) jehlan.

Budu se zabývat konkrétními geometrickými útvary a jejich popisem. Uvedu znaky a důležité vlastnosti, které je potřeba znát ke skládání výrobků z papíru, tyto vlastnosti dokazovat a pro lepší pochopení připojím obrázky. Dále přiložím vzorce pro výpočet obvodu, obsahu (povrchu) a objemu geometrických útvarů, kde některé budou důkladně rozpracovány. Na závěr každé kapitoly se zabývám skládáním papíru různým způsobem, a to metodou sliceforms, paperfolding a origami. Uvedu příklady skládání i s podrobným slovním popisem doplněným o obrázky. Využívám tak konkrétních a praktických skládanek z papíru, díky kterým si děti vybudují systém základních geometrických pojmů a rozvíjí prostorovou představivost.

6.1 Čtverec

Čtverec je rovinný geometrický útvar, pravidelný čtyřúhelník, který má všechny čtyři strany shodné a každý vnitřní úhel je 90°. Každý čtverec se skládá z vrcholů. Na obrázku č. 7 vidíme vrcholy *A, B, C, D,* které jsou označeny modrými body, v tomto případě mluvíme o čtverci *ABCD*. Vrcholy jsou spojeny úsečkami *a, b, c, d* tak, že tvoří strany čtverce. Jinak je můžeme nazývat strany: *AB, BC, CD, DA*. Na obrázku jsou vyznačeny černými tučnými čarami, kde každá z těchto stran má stejnou délku, a to 4 cm.



Obrázek 7: Čtverec ABCD

6.1.1 Úhlopříčky

Úhlopříčka je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy čtverce. Každý čtverec má vždy dvě úhlopříčky, na obrázku č. 7 jsou označeny úsečkami *e* a *f* (*DB* a *AC*).

- Úhlopříčky se vždy protínají ve středu čtverce – střed S, který lze nazývat průsečík úhlopříček nebo střed úhlopříček nebo těžiště.
- Jedna úhlopříčka dělí čtverec na dvě poloviny, dvě úhlopříčky dělí čtverec na čtyři čtvrtiny.
- Úhlopříčky se navzájem půlí (tj. úsečky *AS, BS, CS a DS* mají shodnou délku).
- Každá úhlopříčka půlí úhel mezi přilehlými stranami (například na obrázku č. 7 má úhel *ABC* 90 stupňů a úhel *ABD* má 45°).
- Úhlopříčky mezi sebou svírají úhel 90°.
- Úhlopříčka je vždy delší než strana čtverce. Konkrétně úhlopříčku *u* vypočítáme pomocí aplikace Pythagorovy věty: $|u| = a \cdot \sqrt{2}$, kde *a* je délka strany čtverce.

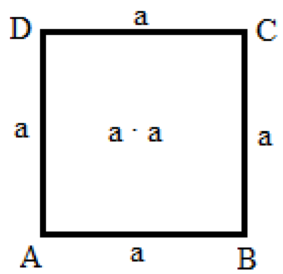
6.1.2 Vlastnosti čtverce

- Čtverec se skládá ze čtyř shodných stran a čtyř vrcholů.
- Všechny strany jsou stejně dlouhé.
- Sousední strany jsou na sebe kolmé, tj. vnitřní úhly jsou pravé.
- Protější strany jsou rovnoběžné.
- Úhlopříčka je úsečka, která spojuje protější vrcholy.
- Úhlopříčky jsou stejně dlouhé, navzájem kolmé a půlí úhly čtverce i sebe navzájem.
- Lze sestrojit kružnici vepsanou i opsanou.
- Lze sestrojit 4 osy souměrnosti, 2 střední příčky a je středově souměrný.

6.1.3 Obsah a obvod

Obvod značený písmenem *o* je součet délek všech stran. Platí tak, že pokud má čtverec velikost *a*, jako na obrázku, budeme obvod počítat takto (obr. 8).

$$o_{ABCD} = a + a + a + a = 4 \cdot a$$



Obrázek 8: Obvod a obsah čtverce

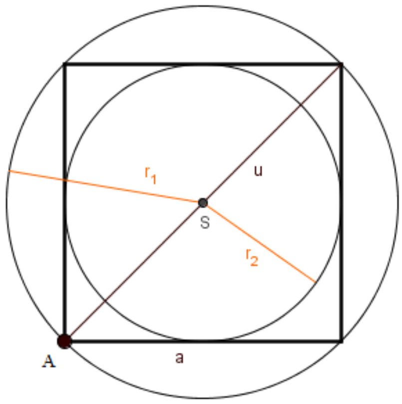
Pojmem obsah (*S) je* velikost plochy, kterou čtverec zabírá. Obsahem čtverce rozumíme součin délek jeho stran (obr. 8).

$$S_{ABCD} = a \cdot a = a^2$$

Například: Na úvodním obrázku 7 měří strana čtverce 4 cm. Obvod v tomto případě činí $o = 4 \cdot 4 = 16$ cm a obsah též $S = 4 \cdot 4 = 16$ cm^2.

6.1.4 Kružnice opsaná a vepsaná

Ve čtverci můžeme narýsovat kružnici opsanou i vepsanou (obr. č. 9), které mají střed v průniku úhlopříček. Kružnice opsaná opisuje čtverec a prochází všemi jeho vrcholy, její poloměr je *AS*, kde *A* je vrchol čtverce a *S* střed čtverce. Poloměr kružnice opsané vypočítáme: $r_1 = \frac{u}{2}$, kde *u* je úhlopříčka čtverce. Kružnice vepsaná je taková kružnice, která se dotýká všech stran čtverce. Její poloměr zjistíme takto: $r_2 = \frac{a}{2}$, kde *a* je strana čtverce.



Obrázek 9: Kružnice opsaná a vepsaná

6.1.5 Osová a středová souměrnost, střední příčky

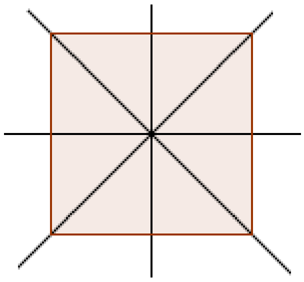
Osová souměrnost značena *(O;o)* v rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu *X* roviny přiřazuje obraz *X´* takový, že platí:

a) bod $X' = X$, právě když $X \in o$, kde *o* je daná přímka v rovině, zvaná osa souměrnosti,

b) bod *X´* leží na kolmici k ose *o* vedené bodem *X*,

c) $|PX| = |PX'|$, kde *P* je pata této kolmice na ose *o*.

Osová souměrnost zachovává úhly i vzdálenosti a je jednoznačně určena osou souměrnosti *o*. Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy *o*. Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa *o* a všechny přímky k ní kolmé (Polák, 1991). Čtverec je v osové souměrnosti souměrný podle čtyř os (viz obrázek 10).



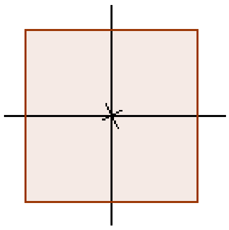
Obrázek 10: Osy souměrnosti čtverce

Středová souměrnost se středem S (souměrnost podle středu S) v rovině je přímá shodnost, která přiřazuje ke středu souměrnosti S týž bod $S' = S$ a každému bodu $X \neq S$ roviny přiřazuje obraz X' takový, že platí:

a) bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX,

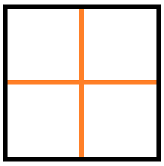
b) $|SX'| = |SX|$.

Středová souměrnost je speciálním případem otočení o úhel 180°. Je Jednoznačně určena středem souměrnosti S. Samodružným bodem je právě jen střed souměrnosti S, samodružnými přímkami jsou všechny přímky procházející tímto bodem S. Čtverec je středově souměrný (viz obrázek 11).



Obrázek 11: Střed souměrnosti čtverce

Střední příčky jsou spojnice středů protějších stran. Jejich velikost je rovna velikosti stran, které jsou na ně rovnoběžné nebo kolmé. Ve čtverci nalezneme 2 střední příčky (viz následující obrázek 12).

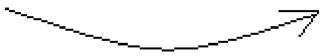
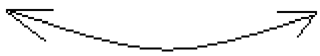
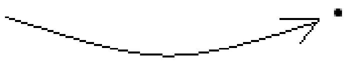
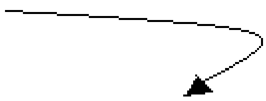
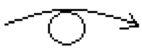


Obrázek 12: Střední příčky čtverce

6.1.6 Jak vyrobit čtverec z obdélníku?

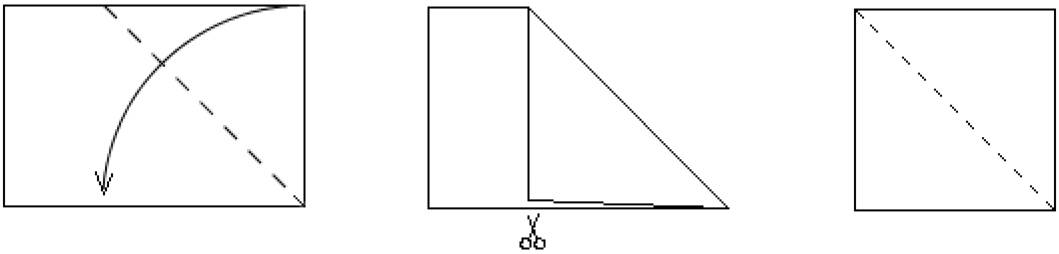
Při popisu skládání nebudu označovat obrázky číslem, neboť se z našeho pohledu jedná o vysvětlení postupu skládání textu. V tabulce 2 naleznete vysvětlivky k symbolům, které jsou určeny pro všechna skládání origami v této diplomové práci a jejích přílohách.

Tabulka 2: Vysvětlivky k symbolům

	směr pohybu papíru
	přeložte a znovu rozložte
	přiložte jeden bod na druhý
	založte dozadu
	obraťte
	sklad údolí
	sklad hřbet
	dřívější sklad

Origami metoda – postup číslo 1

V dobrých papírnictvích můžeme zakoupit čtvercové papíry, bohužel jsou finančně nákladné, proto si sami z čehokoli můžeme zhotovit z obdélníku čtverec. Postup, i s popisem, je vyznačen níže.

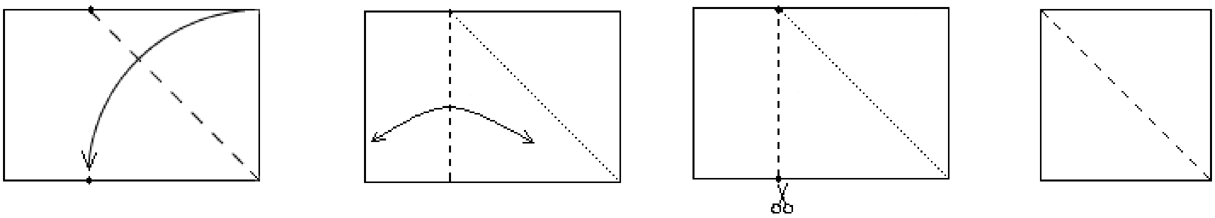


1 Papír přeložte úhlopříčně.

2 Přečnívající část odstřihněte.

3 Rozložte a vznikne čtverec.

Origami metoda – postup číslo 2



1 Papír přeložte úhlopříčně a vyznačte si bod, kde k němu přiléhá horní roh. Rozložte.

2 V místě vyznačeného skladu a bodu přeložte papír svisle. Rozložte.

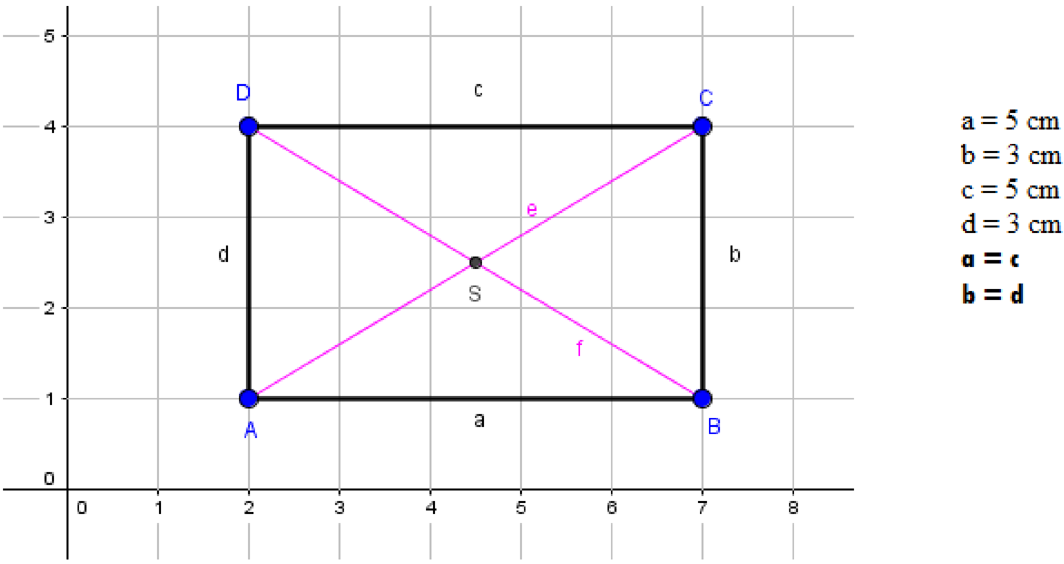
3 Odstřihněte papír dle vyznačeného skladu tak, aby vznikl čtverec.

4 Vznikne čtverce.

6.2 Obdélník

Obdélník je rovnoběžník, jehož všechny vnitřní úhly svírají 90. Protilehlé strany mají vždy stejnou velikost. Každý obdélník se skládá z vrcholů. Na následujícím obrázku č. 13 vidíme vrcholy *A, B, C, D*, které jsou označeny modrými body, v tomto případě mluvíme o obdélníku *ABCD*. Vrcholy jsou spojeny úsečkami *a, b, c, d* tak, že tvoří strany obdélníku. Jinak je můžeme nazývat strany: *AB, BC, CD, DA*. Na obrázku jsou vyznačeny černými tučnými čarami, kde strany *AB* a *CD* jsou shodné (mají 5 cm) a strany *BC* a *DA* mají taktéž stejnou délku, v tomto případě 3 cm.

Pokud by se sobě délky stran rovnaly, čili by platilo $a = b$, jedná se také o geometrický útvar, který nazýváme čtvercem. Čtverec je v tomto případě speciální případ obdélníku.



Obrázek 13: Obdélník

6.2.1 Co můžeme říci o úhlopříčkách?

Úhlopříčky jsou na obrázku vyznačeny růžově úsečkami e a f. Každý obdélník má dvě úhlopříčky, u tohoto vidíme úhlopříčky *AC* a *BD*. Úhlopříčka je úsečka, která spojuje dva nesousední vrcholy.

- Úhlopříčky jsou vždy stejně dlouhé.

- Úhlopříčky se protínají ve středu obdélníku – střed *S*.
- Jedna úhlopříčka dělí obdélník na dvě poloviny (dva shodné trojúhelníky). Dvě úhlopříčky dělí obdélník na čtyři čtvrtiny.
- Samotné úhlopříčky se navzájem půlí. Pokud označíme střed obdélníku bodem *S* (jako na obrázku), bude mít úsečka *BS* a *SD* stejnou délku.
- Úhlopříčky mezi sebou nesvírají pravý úhel.
- Úhlopříčka je vždy delší než jakákoli strana obdélníku. Konkrétně úhlopříčku *u* vypočítáme pomocí aplikace Pythagorovy věty $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6.2.2 Vlastnosti obdélníku

- Obdélník se skládá ze čtyř stran a čtyř vrcholů.
- Vzájemně protilehlé strany jsou stejně dlouhé a rovnoběžné.
- Sousední strany jsou na sebe kolmé = vnitřní úhly jsou pravé.
- Úhlopříčka je úsečka, která spojuje nesousední vrcholy.
- Úhlopříčky jsou stejně dlouhé a půlí se.
- Lze sestrojit pouze kružnici opsanou.
- Lze sestrojit dvě osy souměrnosti, 2 střední příčky a je středově souměrný.

6.2.3 Obvod a obsah

Pokud má obdélník velikost stran a a b, je jeho obvod roven součtu délek všech jeho stran:

$$o_{ABCD} = a + b + a + b\,,$$

$$o_{ABCD} = 2 \cdot a + 2 \cdot b\,,$$

$$o_{ABCD} = 2 \cdot (a + b)\,.$$

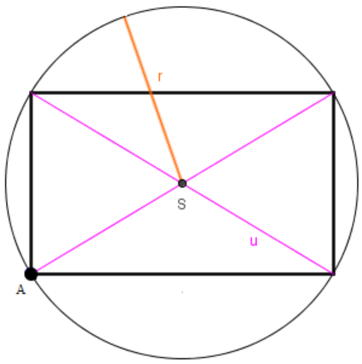
Obsah obdélníku je roven součinu délky strany a k ní příslušné výšky:

$$S_{ABCD} = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

Například: Na úvodním obrázku č. 13 měří strana obdélníku 3 a 5 cm. Obvod v tomto případě činí $2 \cdot (3 + 5) = 30$ cm a obsah $3 \cdot 5 = 15\,\text{cm}^2$.

6.2.4 Kružnice opsaná a vepsaná

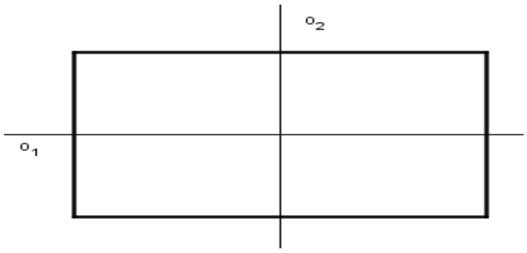
U obdélníku můžeme sestrojit pouze kružnici opsanou, její střed je ve středu S (v těžišti obdélníku). Kružnice opsaná prochází všemi vrcholy obdélníku, její poloměr je AS, kde A je vrchol obdélníku a S střed (viz obrázek 14). Poloměr kružnice opsané vypočítáme: $r = \frac{u}{2}$. Kružnici vepsanou u obdélníku sestrojit nelze.



Obrázek 14: Kružnice opsaná u obdélníku

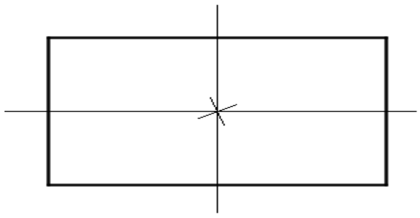
6.2.5 Osová a středová souměrnost, střední příčky

Osově souměrný je takový útvar, který má alespoň jednu osu souměrnosti a v osové souměrnosti se s osou o zobrazí sám na sebe. Přímka o je osa souměrnosti osově souměrného útvaru. Obdélník je souměrně sdružený podle dvou os (viz obrázek 15).



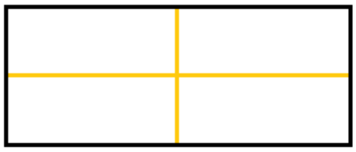
Obrázek 15: Osové souměrnosti u obdélníku

Středově souměrný útvar má střed souměrnosti. Ve středové souměrnosti se tento útvar se středem S zobrazí sám na sebe. Obdélník je středově souměrný a jeho střed souměrnosti je vyznačen na obr. obrázku č. 16.



Obrázek 16: Středová souměrnost u obdélníku

Obdélník obsahuje 2 střední příčky (viz obr. 17), tak jako všechny rovnoběžníky (čtverec, kosočtverec, kosodélník).

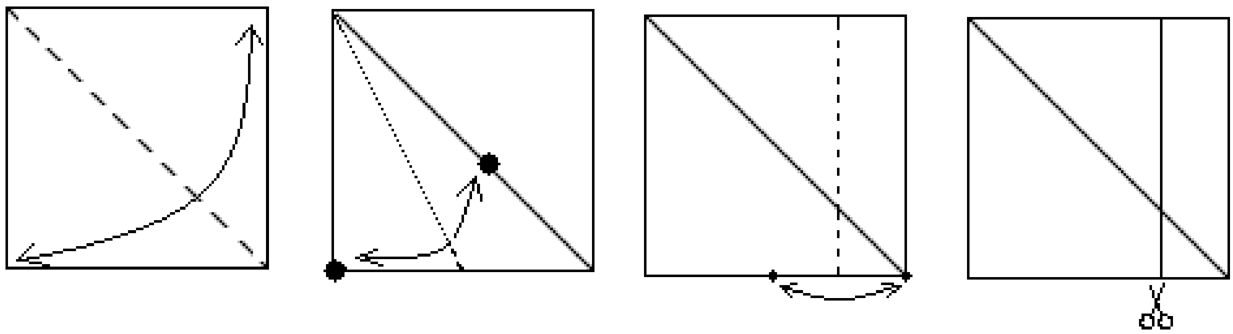


Obrázek 17: Střední příčky obdélníku

6.2.6 Jak vyrobit obdélník ze čtverce?

<u>Origami metoda</u>

Papír ve tvaru obdélníku je všude okolo nás. Časopisy, kancelářský papír, noviny, jízdenky atd. Pokud se ale setkáme se čtvercem, např. u ubrousků, a potřebujeme obdélník, lehce si ho připravíme.



1 Přeložte čtverec papíru úhlopříčně na dvě poloviny a rozložte.

2 Levý dolní roh přiložte k úhlopříčce a vyznačte místo nového skladu.

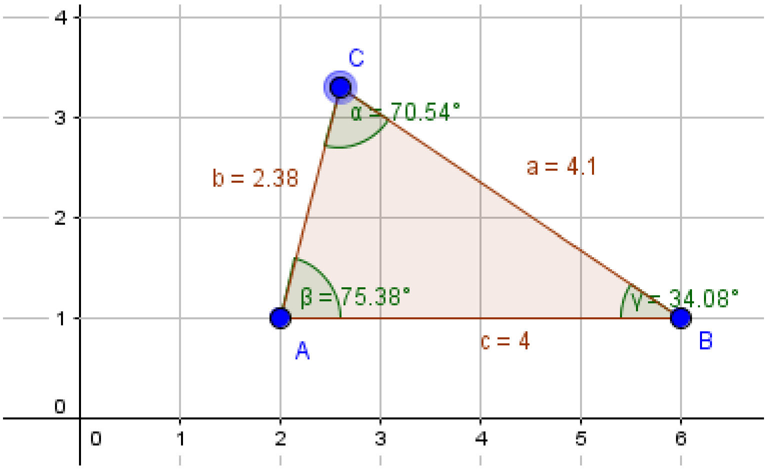
3 Pravý dolní roh přiložte k novému skladu. Přeložte a znovu rozložte.

4 Podle skladu odstřihněte. Poměr stran je stejný jako A4.

Z papíru ve tvaru čtverce můžeme vyhotovit obdélník i daleko lehčím způsobem, a to například přeložením čtverce podél střední příčky, čímž vzniknou dva shodné obdélníky.

6.3 Trojúhelník

Trojúhelník je rovinný geometrický útvar, mnohoúhelník, určený třemi body, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník *ABC*, symbolicky značený Δ *ABC* (obr. 18), je průnik polorovin *ABC*, *BCA*, *CAB*, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách. Body *A*, *B*, *C*, se nazývají vrcholy, které jsou označeny modrými body a jsou spojeny třemi úsečkami *a*, *b*, *c*. Toto označení má své pravidlo, které říká: naproti vrcholu *A* leží strana *a*, naproti vrcholu *B* máme stranu *b* a naproti vrcholu *C* je strana *c*. Délky stran trojúhelníku se stručně značí $a = |BC|, b = |AC|$ a $c = |AB|$.



Obrázek 18: Trojúhelník

Každý trojúhelník má vnitřní úhly, obvykle jsou označeny řeckými písmeny α (alfa), β (beta), γ (delta), často se jejich velikosti značí: $\alpha = |\angle BCA|, \beta = |\angle ABC|, \gamma = |\angle BCA|$ a součet těchto vnitřních úhlů v obloukové míře činí 180°. Můžeme si tento fakt ověřit obr. 18.

$$\alpha + \beta + \gamma = 70{,}54° + 75{,}38° + 34{,}08° = 180°$$

6.3.1 Dělení trojúhelníků

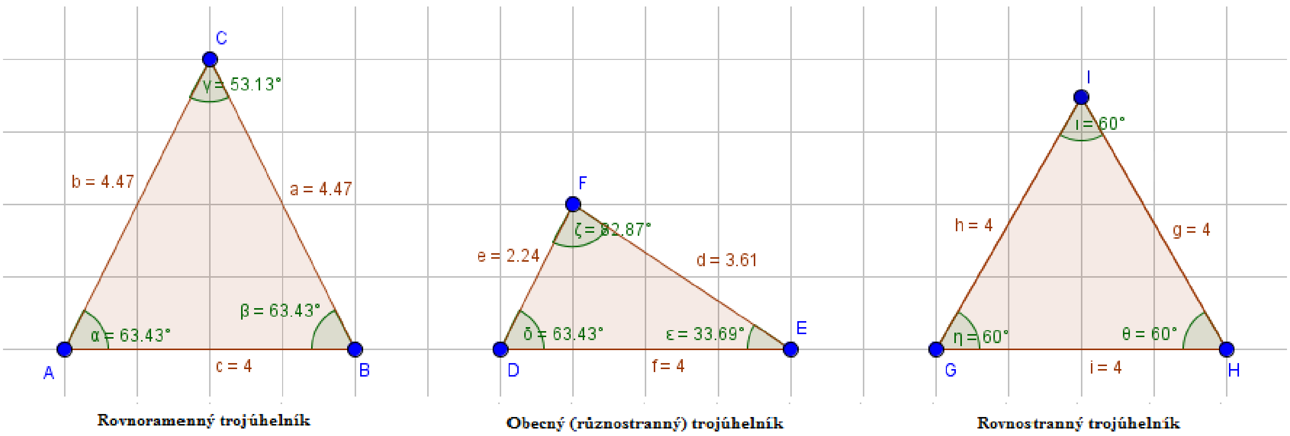
Trojúhelníky klasifikujeme podle stran a úhlům jak je vidět na obrázcích 19 a 20.

a) Podle stran (obrázek 19):

Rovnoramenný trojúhelník dvě strany z trojúhelníku jsou shodné, třetí strana má jinou délku. Těm stranám, které mají shodnou délku, říkáme ramena a třetí strana se nazývá základna. Úhly, které svírají ramena a základna, jsou shodné.

Rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany shodné. Současně platí, že velikosti vnitřních úhlů jsou stejně velké, a to 60°.

Obecný neboli různostranný trojúhelník má různé délky stran, různé velikosti úhlů, čili žádné dvě strany nejsou shodné.



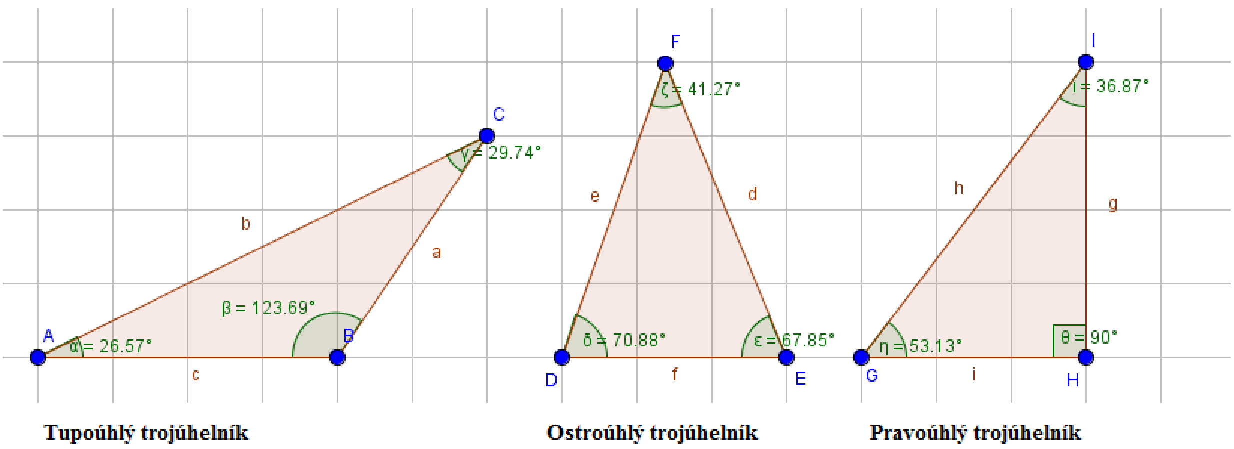
Obrázek 19: Dělení trojúhelníku podle stran

b) Podle úhlů (obrázek 20):

Tupoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel tupý, další dva úhly jsou tedy ostré.

Ostroúhlý trojúhelník má všechny tři vnitřní úhly ostré, tedy menší než 90°.

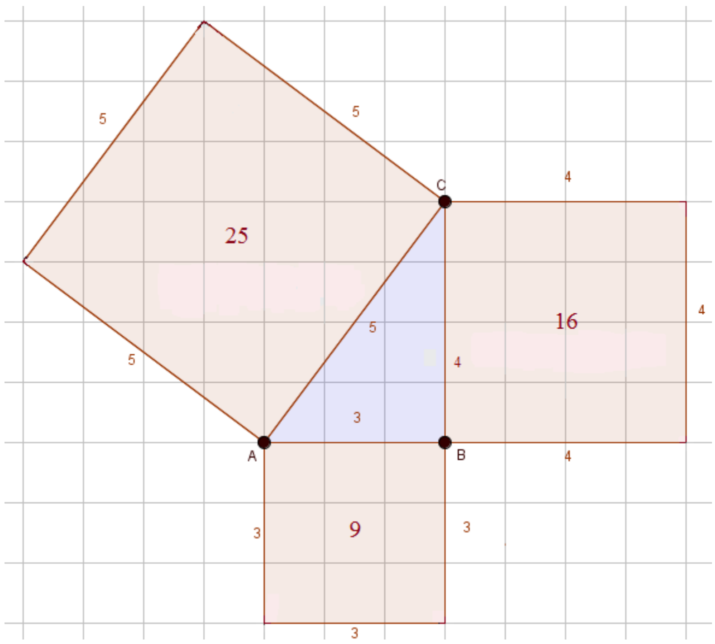
Pravoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel pravý a dva úhly ostré.



Obrázek 20: Dělení trojúhelníků podle úhlů

V pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta, která se zabývá velikostí stran a říká, že: „Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.“ Důkaz si lze prohlédnout na obrázku 21.

$$c^2 = a \quad + b^2$$



Obrázek 21: Pythagorova věta

6.3.2 Vlastnosti trojúhelníku

Vlastnosti trojúhelníku závisí na geometrických vlastnostech roviny, my se budeme zabývat znalostmi v euklidovské rovině.

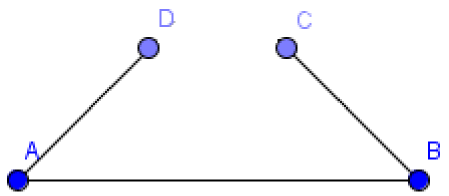
Trojúhelníková nerovnost

Jsou-li *A*, *B*, *C* tři různé body, které neleží na přímce (a jsou to vrcholy trojúhelníku), pak pro jejich vzdálenosti (délky stran trojúhelníku) platí:

$$|a| + |b| \rangle |c|,$$
$$|a| + |c| \rangle |b|,$$
$$|b| + |c| \rangle |a|.$$

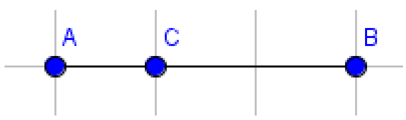
Součet délek dvou libovolných stran musí být větší než délka zbývající třetí strany.

Pokud by trojúhelníková nerovnost neplatila a stalo by se, že jedna strana je delší než součet dvou zbývajících, tak trojúhelník nevznikne. Strany by byly příliš krátké, viz obrázek 22.



Obrázek 22: Trojúhelník, kde neplatí trojúhelníková nerovnost

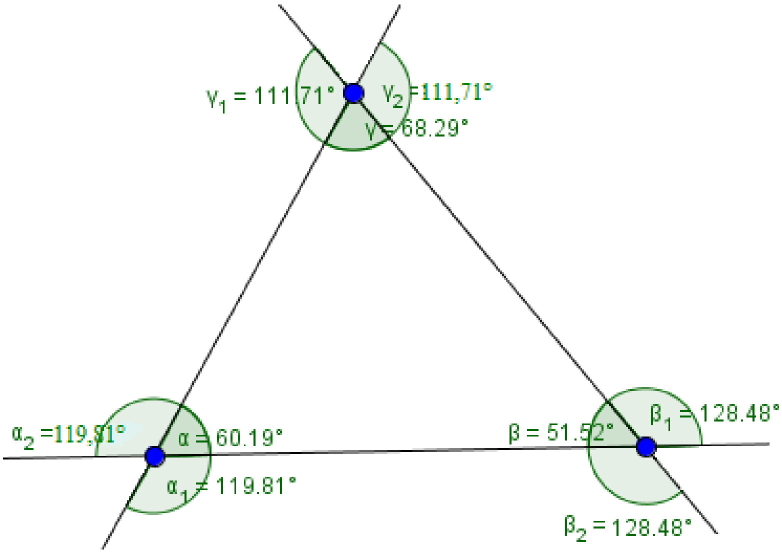
Naopak kdyby platila rovnost, tzn. kdyby dvě strany v součtu byly shodné se stranou třetí, tak by při pokusu sestrojit trojúhelník vznikly tři body vedle sebe a ležely by na jedné přímce, viz obrázek 23.



Obrázek 23: Trojúhelník, kde platí rovnost trojúhelníkové nerovnosti

Zajímavost o vnitřních úhlech jsou sepsány níže (řiďte se i obr. 24).

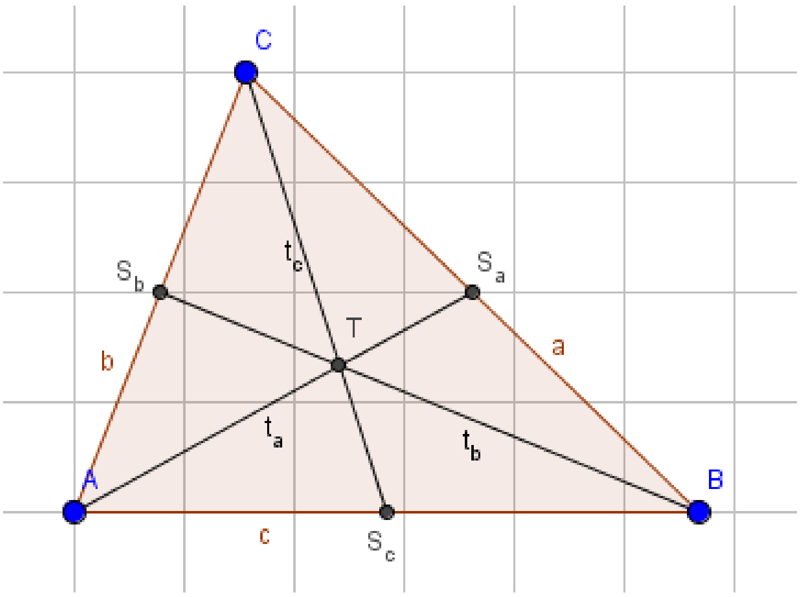
Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180°.	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Protilehlé úhly se sobě rovnají.	$\alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 + \beta_2; \gamma_1 = \gamma_2$
Součet vnějších úhlů je 360°.	$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$ $119{,}81° + 128{,}48° + 111{,}71° = 360°$ $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 360°$ $119{,}81° + 128{,}48° + 111{,}71° = 360°$
Součet vnitřního a příslušného vnějšího úhlu se rovná 180°.	$\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = 180°$ $60{,}19° + 119{,}81° = 51{,}52° + 128{,}48° = 68{,}29° + 111{,}71° = 180°$
Součet vnitřního a příslušného vnějšího úhlu se rovná 180°.	$\alpha + \alpha_2 = \beta + \beta_2 = \gamma + \gamma_2 = 180°$ $60{,}19° + 119{,}81° = 51{,}52° + 128{,}48° = 68{,}29° + 111{,}71° = 180°$
Součet dvou vnitřních úhlů se rovná vnějšímu úhlu u zbývajícího vrcholu.	$\alpha + \beta = \gamma'^{\prime}$ $60{,}19° + 51{,}52° = 111{,}71°$ $\alpha + \gamma = \beta'$ $60{,}19° + 68{,}29° = 128{,}48°$ $\beta + \gamma = \alpha'$ $51{,}52° + 68{,}29° = 119{,}81°$



Obrázek 24: Shodnost úhlů v trojúhelníku

6.3.3 Těžiště, těžnice a středy stran

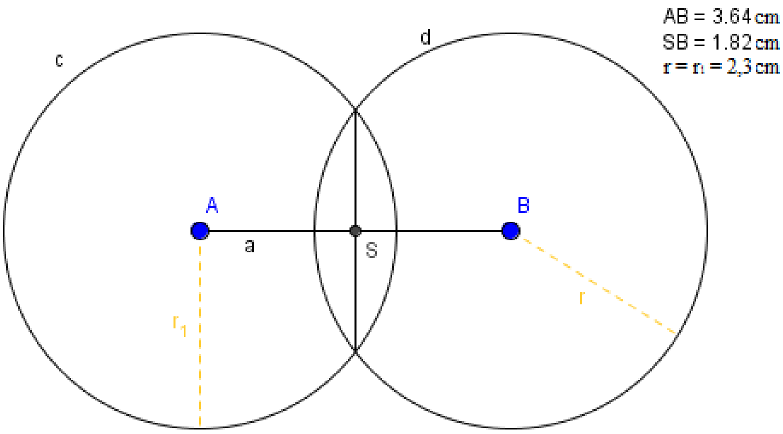
Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a střed jeho protější strany, se nazývá těžnice trojúhelníku příslušná k této straně. Těžiště je na následujícím obrázku 25 vyznačeno písmenem T a vzniklo spojením tří těžnic.



Obrázek 25: Těžiště, těžnice a středy trojúhelníka

Těžnice jsou vyznačeny černou barvou. Jedná se o úsečku, která spojuje střed strany s protějším vrcholem trojúhelníku, kde průsečíkem je bod *T* (těžiště). Jak vidíme na obrázku, popisují se těžnice malým písmenem *t* s dolním indexem, který se řídí podle strany a vrcholu, kterému těžnice přísluší. Např. pokud máme vrchol *B* a sestrojíme těžnici na stranu b, která leží naproti vrcholu *B*, tak bude mít těžnice název t_b.

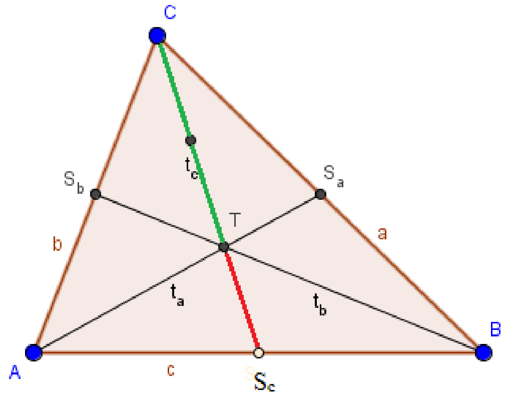
Dále na obrázku 25 můžeme spatřit tři body značené S_a, S_b a S_c, což jsou středy stran. Tyto středy sestrojíme pomocí dvou kružnic se středem v *A* a *B* (obr. 26). Kružnice by měly mít poloměr alespoň stejný nebo větší než je polovina úsečky *AB*. Po narýsování kružnic zjistíme, že se kružnice dotknou buď již přímo na úsečce *AB*, čímž vznikne střed úsečky *AB* nebo se protnou ve dvou bodech, kdy tyto body spojíme úsečkou a tím vznikne střed strany *AB*.



Obrázek 26: Střed strany

Zajímavosti:

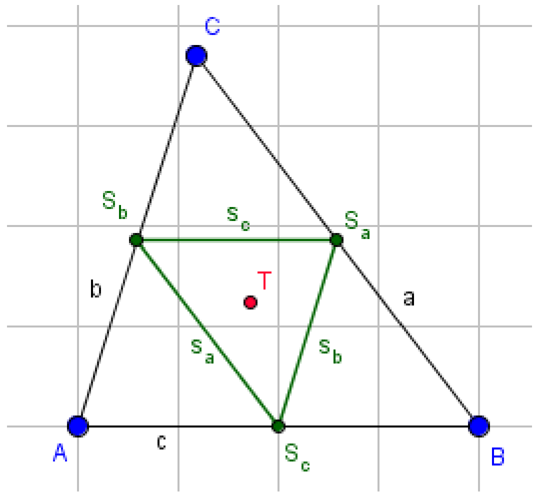
- Těžnice dělí trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem (obr. 27).
- Kdybychom si chtěli ověřit správnost konstrukce těžiště, tak nám k jeho určení stačí pouze narýsování dvou těžnic, třetí se stává ověřením správnosti měření, kdy by měla třetí těžnice protnout ten samý bod *T* jako dvě těžnice předchozí.
- Těžiště trojúhelníka najdeme vždy uvnitř trojúhelníku, na rozdíl od ortocentra (průsečík výšek), které může ležet i mimo trojúhelník.
- Těžiště dělí délky těžnic v poměru 1:2. Což znamená, že delší část těžnice (dvě třetiny) je na jedné straně od těžiště a kratší (jedna třetina) na druhé straně. Delší část těžnice se nachází blíže k vrcholu trojúhelníka, naopak kratší část nalezneme blíže ke straně.



Obrázek 27: Rozdělení těžnice na dvě a jednu třetinu

6.3.4 Střední příčky

Střední příčka je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníka (viz obr. 28). S_a, S_b, S_c jsou středy stran, což je stejné jako u těžnic. Tyto středy spojujeme úsečkami s_a, s_b a s_c, čímž nám vzniknou střední příčky. Dva středy stran postačí k vytvoření střední příčky, kterou označujeme malým písmenem s dolním indexem, který se řídí příslušným protějším vrcholem. Po sestrojení všech středních příček v trojúhelníku vzniká tzv. příčkový trojúhelník. Bod *T* je těžištěm jak trojúhelníku *ABC*, tak i trojúhelníku $S_aS_bS_c$.

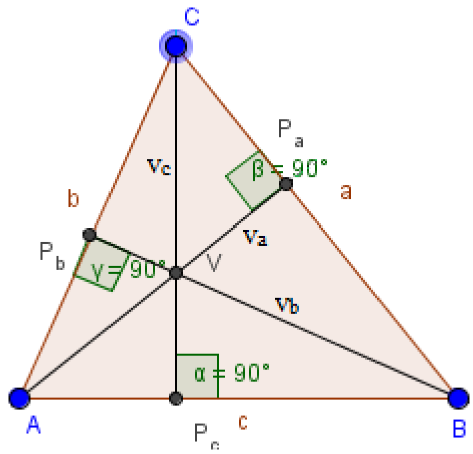


Obrázek 28: Střední příčky trojúhelníku

V Geogebře si zde můžeme vyzkoušet, jak se těžiště, při posunu bodu *C*, mění.

6.3.5 Výška trojúhelníka, ortocentrum

Výška trojúhelníka značená v_a, v_b, v_c (obr. 29) je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a pata kolmice vedená tímto vrcholem k jeho protější straně. Patou je myšlen průsečík výšky s příslušnou stranou, patu zpravidla označujeme velkým písmenem *P* a dolním indexem, který se řídí příslušným protějším vrcholem.



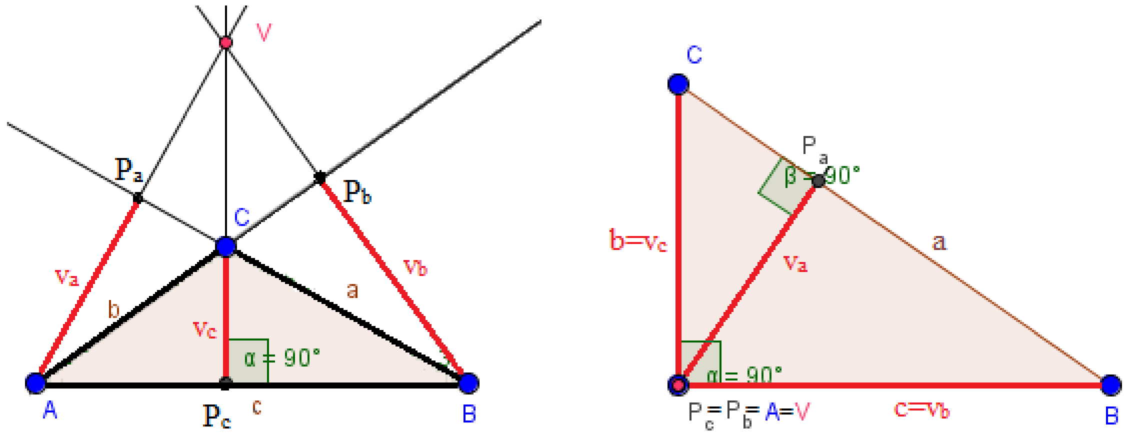
Obrázek 29: Výšky trojúhelníka, ortocentrum

Výšku lze vést z každého vrcholu, proto existují v trojúhelníku celkem tři výšky. Výška např. na stranu *b* se sestrojí snadno pravítkem (trojúhelníkem s ryskou), kdy rysku přiložíme na stranu *b* a vrcholem B vedeme úsečku na stranu *b*, kde vznikne pata P_b. V případě výšky BP_b mluvíme o výšce v_b.

Průsečíkem všech tří výšek je bod *V*, který nazýváme ortocentrum. Oproti těžišti může ortocentrum ležet i mimo trojúhelník. Záleží na tom, v jakém druhu trojúhelníku jsme ortocentrum sestavili.

- V případě ostroúhlého trojúhelníka leží ortocentrum vždy uvnitř trojúhelníku (viz obr. 29).
- V tupoúhlém trojúhelníku leží ortocentrum mimo trojúhelník (viz obr. 30 vlevo).
- V pravoúhlém trojúhelníku splývá ortocentrum s vrcholem pravého úhlu (viz obr. 30 vpravo).

Všechny možnosti ortocentra si můžeme vyzkoušet v Geogebře zde.



Obrázek 30: Ortocentrum tupoúhlého (vlevo) a pravoúhlého trojúhelníka (vpravo)

6.3.6 Obvod a obsah trojúhelníku

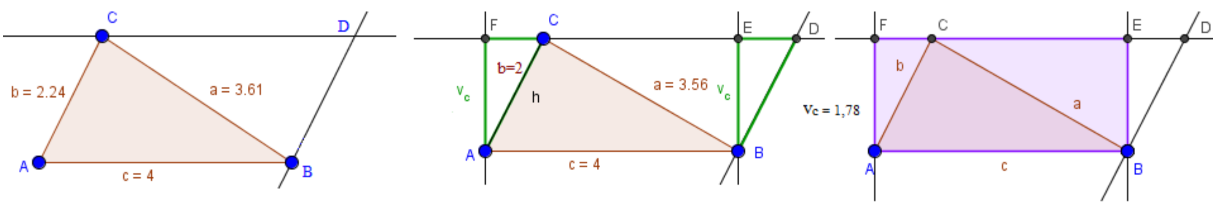
<u>Obvod</u> trojúhelníku určíme jako součet délek všech jeho stran:

$$o = a + b + c\,.$$

<u>Obsah</u> trojúhelníku můžeme zjistit dvěma způsoby.

a) Doplníme trojúhelník na rovnoběžník. (obr. č. 31).

- U pravoúhlého trojúhelníku doplníme snadno trojúhelník na obdélník, kdy si vypočítáme, jak už známe z kapitoly 6.3.3., obsah obdélníka a pouze vydělíme dvěma, abychom dostali obsah trojúhelníka.
- U trojúhelníka, který není pravoúhlý, vypočítáme jeho obsah doplněním na rovnoběžník, kdy vedeme se stranou *AB* rovnoběžku v *C* a se stranou *BC* rovnoběžku procházejícím vrcholem *A*. Tímto způsobem vznikne bod *D* čili rovnoběžník (obrázek č. 31 vlevo). Z rovnoběžníku si vytvoříme obdélník, kde platí, že zeleně vyznačené trojúhelníky mají stejný obsah (obrázek číslo 31 uprostřed), a proto jej můžeme přesunout, čímž vznikne obdélník (obrázek číslo 31 vpravo), ze kterého jednoduše vypočítáme obsah trojúhelníka.



Obrázek 31: Postup při doplnění trojúhelníka na rovnoběžník

Obsah trojúhelníku je roven součinu délky základny a k ní příslušné výšky vydělený dvěma.

$S_\Delta = \dfrac{|AB| \cdot v_c}{2}$

$S_\Delta = \dfrac{|c| \cdot v_c}{2} = \dfrac{|b| \cdot v_b}{2} = \dfrac{|a| \cdot v_a}{2}$

V našem případě (obr. č. 31). $S_\Delta = \dfrac{|c| \cdot v_c}{2} = \dfrac{|4| \cdot 1{,}78}{2} = \dfrac{7{,}12}{2} = 3{,}56\,\text{cm}^2$

b) Použijeme Heronův vzorec.

Pokud není známa ani jedna výška trojúhelníka, můžeme použít Heronův vzorec, který využívá strany trojúhelníka a polovičního obvodu:

$$S_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}\text{, kde}$$

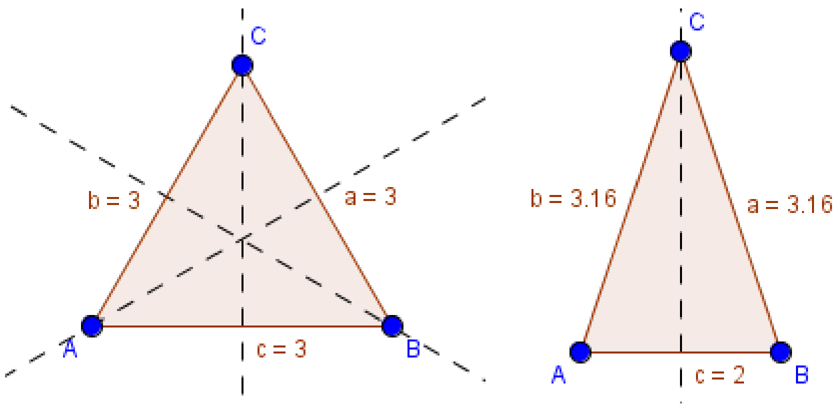
$$s = \frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2} \qquad \textit{(poloviční obvod)}$$

$s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3{,}56+2+4}{2} = \dfrac{9{,}56}{2} = 4{,}78\,\text{cm}$

$S_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{4{,}78 \cdot (4{,}78-3{,}56) \cdot (4{,}78-2) \cdot (4{,}78-4)} =$
$\sqrt{4{,}78 \cdot 1{,}22 \cdot 2{,}78 \cdot 0{,}78} \doteq \sqrt{12{,}65} \doteq 3{,}56\text{ cm}^2$

6.3.7 Osová a středová souměrnost

Rovnostranný trojúhelník je osově souměrný podle tří os (obr. č. 32 vlevo), rovnoramenný je souměrný podle jedné osy souměrnosti (obr. č. 32 vpravo). Trojúhelník není středově souměrný.

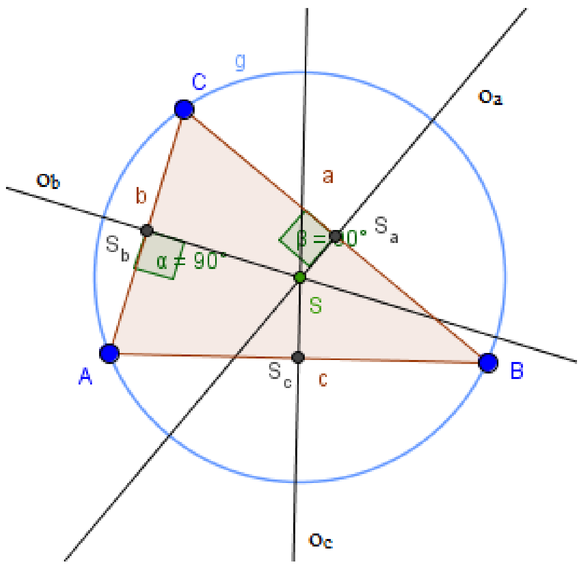


Obrázek 32: Osová souměrnost

6.3.8 Kružnice opsaná

Kružnici se středem S v průsečíku os stran a poloměrem $r = |SA| = |SB| = |SC|$ nazýváme kružnicí opsanou trojúhelníku *ABC* (obr. č. 33). Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží bod S uvnitř trojúhelníku, je-li tupoúhlý, leží vně tohoto trojúhelníku, je-li pravoúhlý, leží ve středu jeho přepony, ostatně se můžeme podívat zde, jak se kružnice a osy stran při pohybu bodu *C* mění.

K narýsování kružnice opsané musíme znát pojem *osa úsečky* a jak ji sestrojit. Osa úsečky *AB* je přímka *o*, která je kolmá k přímce $p = AB$ (obr. č. 33). Označujeme ji malým písmenem *o* a dolním indexem, který se řídí stranou, na které leží. V trojúhelník můžeme sestrojit celkem tři osy stran a tam, kde se tyto osy protínají je bod *S*, který je středem kružnice opsané.

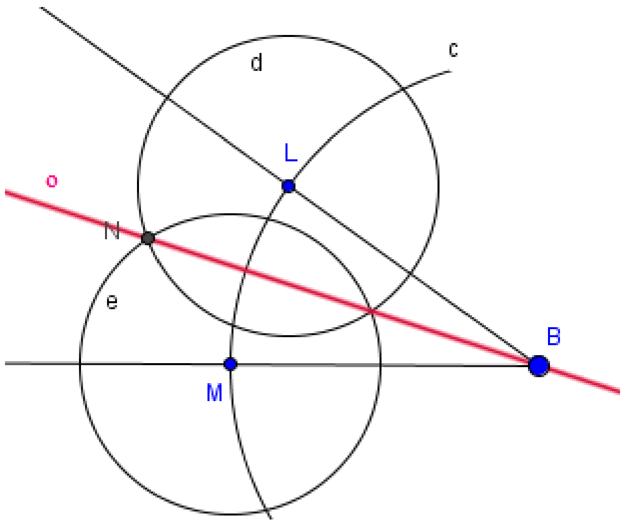


Obrázek 33: Kružnice opsaná v trojúhelníku

6.3.9 Kružnice vepsaná

Kružnici se středem S v průsečíku os vnitřních úhlů a poloměrem ρ nazýváme kružnici vepsanou trojúhelníku ABC (obr. č. 36). Kružnice vepsaná se dotýká každé strany trojúhelníku, čili má s každou stranou společný právě jeden bod. Speciálně v rovnostranném trojúhelníku splývají spolu středy S kružnice vepsané i opsané, průsečík výšek V a těžiště T. K narýsování kružnice vepsané potřebujeme znát pojem osa úhlu.

Osa úhlu *MBL* je polopřímka *o*, která prochází vrcholem *B* úhlu a rozděluje ho na dvě shodné části. Sestrojí se jednoduše kružítkem pomocí kružnic (obr. č. 34). První kružnice má střed ve vrcholu *B* a má libovolný poloměr. Vzniknou nám dva průsečíky *L* a *M*. V těchto bodech sestrojíme znovu kružnice se stejným poloměrem tak, aby se protnuly. Novým bodem *N* vedeme přímku z vrcholu *B*, čímž získáme osu úhlu.

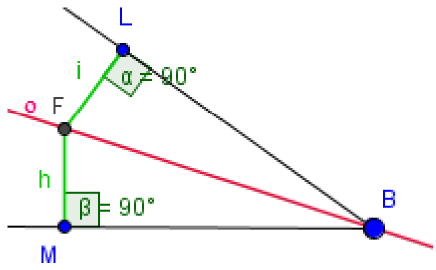


Obrázek 34: Osa úhlu

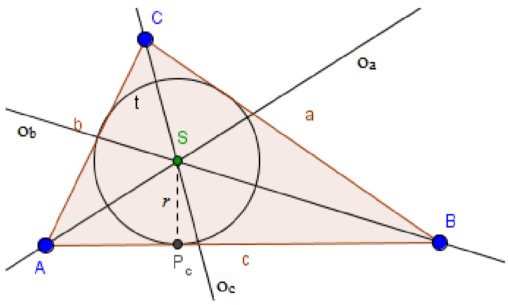
Vlastnosti osy úhlu

- $\angle MBF = \angle LBF$
- Pokud bychom na ose úhlu vytvořili bod *F* a platilo by, že úhly *BLF* a *BMF* jsou pravé, tak úsečky *LF* a *MF* mají stejnou délku. Pokud bychom bod *F* posunuly po ose úhlu, tak úsečky *i* a *h* budou mít stále stejnou délku (obr. č. 35).

Abychom sestrojili kružnici vepsanou (obr. č. 36.), sestrojíme osy úhlu u každého vrcholu (nejméně však dvě) a v průsečíku těchto os vznikne bod S, který je středem kružnice vepsané. Na varianty, kde se střed kružnice vepsané může objevit, se podívejte zde.



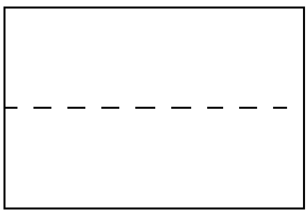
Obrázek 35: Vlastnosti osy úhlu

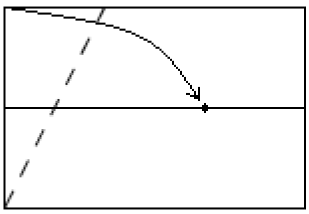


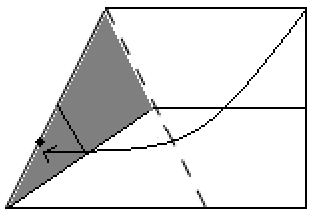
Obrázek 36: Kružnice vepsaná u trojúhelníka

6.3.10 Jak složit trojúhelník z papíru

<u>Origami metoda </u>– rovnostranný trojúhelník z obdélníku – postup č. 1



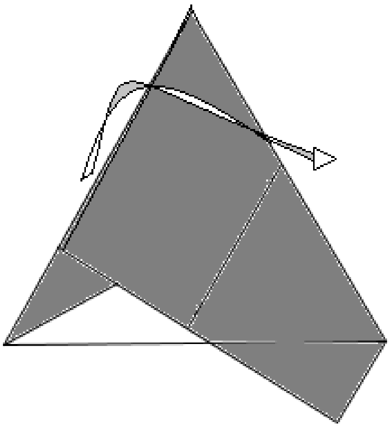




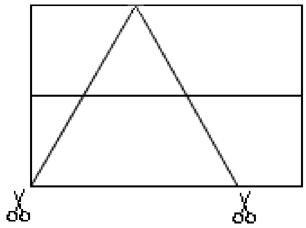
1 Přeložte obdélník vodorovně a opětovně rozložte.

2 Přiložte levý horní roh k vyznačenému bodu podle vyznačeného skladu.

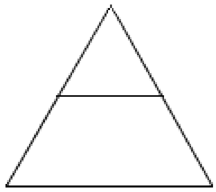
3 Pravý horní roh přiložte k zakreslenému bodu podle vyznačeného skladu.



4 Vznikne tento obrazec, který opětovně rozložte.

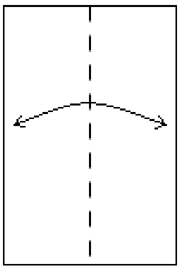


5 Odstřihněte přebytečný papír, aby vznikl rovnostranný trojúhelník.

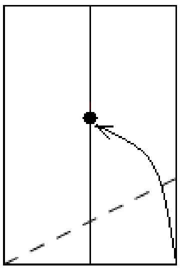


6 Vznikne rovnostranný trojúhelník

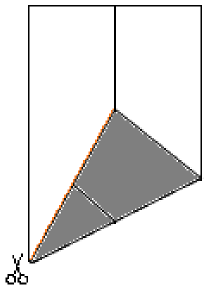
<u>Origami metoda</u> – rovnostranný trojúhelník z obdélníku – postup č. 2



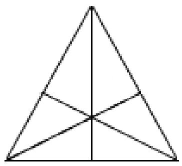
1 Přeložte papír svisle a znovu rozložte.



2 Přiložte pravý dolní roh k vyznačenému bodu.

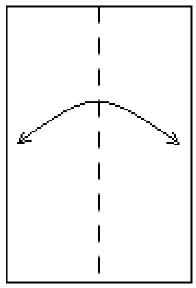


3 Ustřihněte dle oranžové úsečky. Proveďte to samé na druhou stranou.

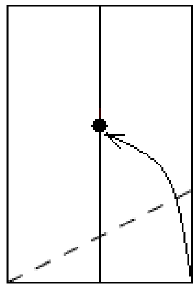


4 Rovnostranný trojúhelník.

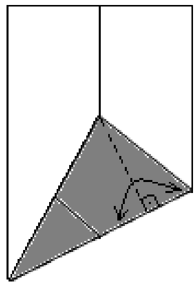
Origami metoda – rovnostranný trojúhelník z obdélníku – postup č. 3



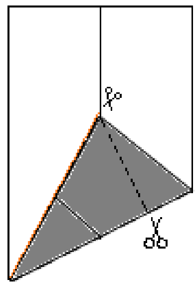
1 Přeložte papír svisle a znovu rozložte.



2 Přiložte pravý dolní roh k vyznačenému bodu.



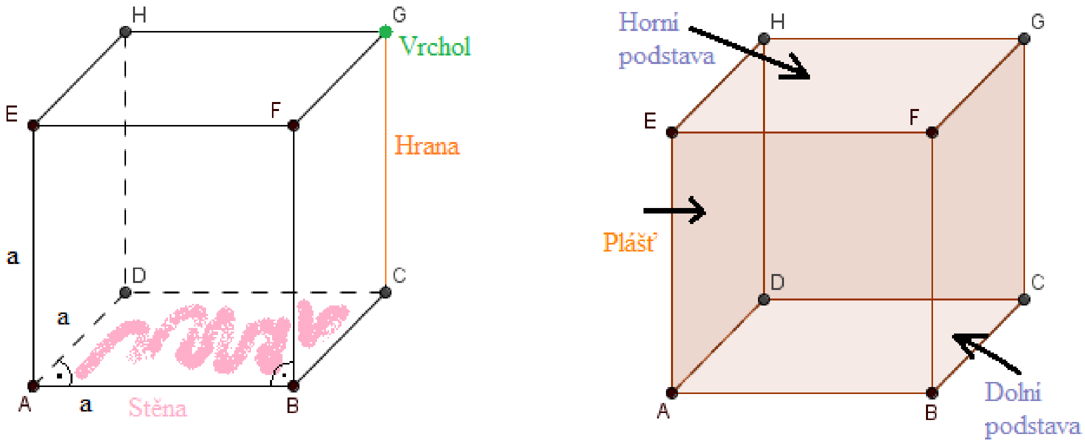
3 Dle vyznačeného skladu přeložte.



4 Odstřihněte nadbytečné kusy a vznikne rovnostranný trojúhelník.

6.4 Krychle

Krychle patří mezi pravidelné konvexní mnohostěny v prostoru a je speciálním případem kvádru. Spadá mezi Platónská tělesa kvůli tomu, že z každého vrcholu vychází stejný počet hran a také díky své shodnosti stěn i hran. Krychle patří mezi prostorové útvary – je to trojrozměrné těleso. Krychle je pravidelný šestistěn, neodborně nazýván jako kostka. Skládá se ze 6 stěn (tvaru shodných čtverců), 8 vrcholů, 12 hran stejné délky a úhel u vrcholu činí 90° (obr. č. 37).

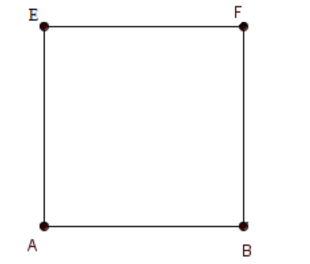
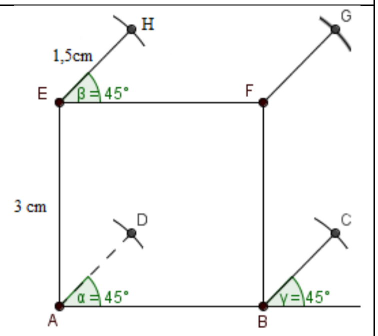
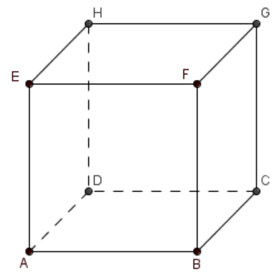


Obrázek 37: Popis krychle

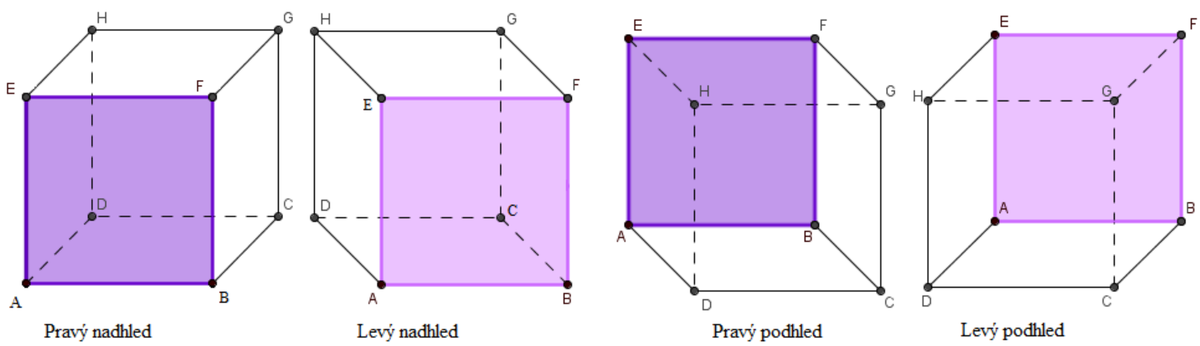
6.4.1 Krychle ve volném rovnoběžném promítání

Při řešení stereometrických úloh je možné pro názornost použít trojrozměrné modely prostorových geometrických útvarů, prakticky je to ale obtížné. Řešení si usnadňujeme pomocí zobrazování prostorových útvarů do roviny. Ve stereometrii se pro řešení jednodušších prostorových úloh používá volné rovnoběžné promítání. Nejprve si určíme průmětnu, což je rovina, do které obrazy přenášíme. Útvary v rovině této průmětny a další rovnoběžné útvary s touto průmětnou přenášíme ve skutečné velikosti a skutečných úhlech. Naopak útvary kolmé na průmětnu promítáme pod úhlem 45° a délku úseček zkracujeme na polovinu. Ty úsečky, které vidíme zakreslujeme plnou čarou, ty, které nevidíme čarou čárkovanou.

Tabulka 3: Postup při sestrojení krychle ve volném rovnoběžném promítání

1) Nejprve narýsujeme čtverec *ABEF* a jelikož je to přední strana, kterou vidíme, úsečky budou narýsovány plnou čarou. $\lvert AB\rvert = 3\,\text{cm}$.	
2) Narýsujeme úsečky, které vedou k zadní straně čtverce *DCGH*. Tyto úsečky (hrany krychle) jsou na průmětnu kolmé, proto je znázorníme pod úhlem 45° a naneseme poloviční délku strany pomocí kružítka, a to 1,5 cm.	
3) Spojíme body a vznikne krychle *ABCDEFGH*. Úsečky *AD*, *CD* a jsou vyznačeny čárkovanou čarou, jelikož je z pravého nadhledu nemůžeme spatřit.	

Na obrázku 38 si dále ukážeme, z jakých pohledů se na krychli můžeme dívat. Strana, kterou vidíme ihned jako první, je pro lepší orientaci označena fialovou barvou.



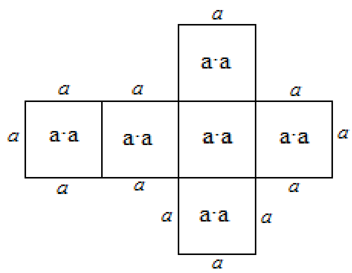
Obrázek 38: Pohledy na krychli

6.4.2 Povrch a objem krychle

Obvod u prostorových těles nepočítáme. Povrch krychle je součet obsahů všech jejích stěn (obr. č. 39):

$$S = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2 = 6a^2$$

Pokud bychom chtěli vypočítat spotřebu papíru na polepení povrchu krychle, sečteme obsahy všech čtverců sítě.



Obrázek 39: Síť krychle

Objem označujeme písmenem *V*. Vypočítáme ho vzorcem:

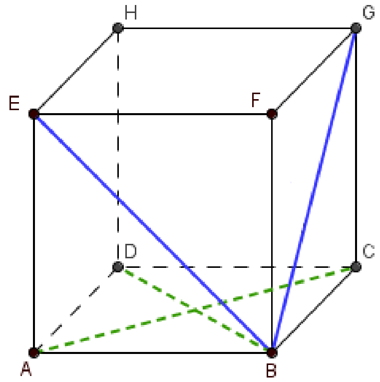
$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

6.4.3 Stěnová a tělesová úhlopříčka

Stěnová úhlopříčka je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy jedné stěny. Na obrázku č. 40 jsou například vyznačeny 2 stěnové úhlopříčky modře (*AF* a *BG*) a celkem jich v krychli můžeme najít 12, na každé stěně dvě stěnové úhlopříčky (označeny na jedné stěně zeleně).

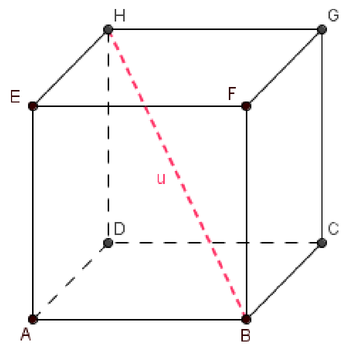
Výčet stěnových úhlopříček: *AC, BD; BG, CF; CH, DG; EG, FH; AH, DE; AF, BE*

Pokud známe stranu krychle, můžeme lehce stěnovou úhlopříčku vypočítat. Již u čtverce jsme se zmínili o úhlopříčkách, tak zjistíme i tyto: $|u| = a \cdot \sqrt{2}$.



Obrázek 40: Stěnové úhlopříčky krychle

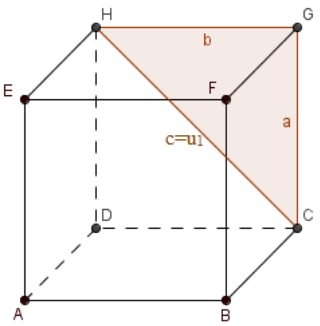
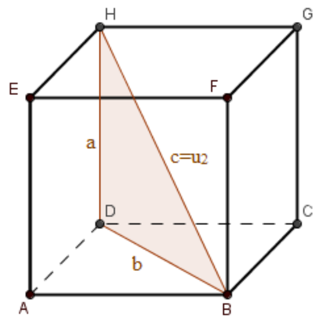
<u>Tělesová úhlopříčka</u> (prostorová úhlopříčka) je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy, které neleží v téže stěně (obr. č. 41). Na obrázku je tělesová úhlopříčka *BH* vyznačena růžovou barvou, v krychli najdeme celkem 4 tělesové úhlopříčky, a to: *AG, BH, CE, DF.*



Obrázek 41: Tělesová úhlopříčka krychle

Výpočet tělesové úhlopříčky: $u = a \cdot \sqrt{3}$. Na konkrétním příkladu si ukážeme a dokážeme správnost vzorce pro výpočet tělesové úhlopříčky.

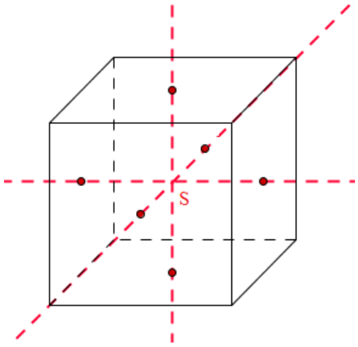
Př. Máme krychli o straně $a = 2$ cm. Vypočítejme stěnovou (u_1) i tělesovou (u_2) úhlopříčku pomocí Pythagorovy věty a také pomocí vzorců pro výpočet úhlopříček.

Stěnová úhlopříčka		Tělesová úhlopříčka	
Výpočet pomocí Pythagorovy věty	Výpočet dle vzorce $u_1 = a \cdot \sqrt{2}$	Výpočet pomocí Pythagorovy věty	Výpočet dle vzorce $u_2 = a \cdot \sqrt{3}$
$a^2 + b^2 = c^2$ $2^2 + 2^2 = c^2$ $8 = c^2$ $c = \sqrt{8}$ $c \approx 2{,}83$ cm	$u_1 = a \cdot \sqrt{2}$ $u_1 = 2 \cdot \sqrt{2}$ $u_1 = 2{,}83$ cm	$a^2 + b^2 = c^2$ $2^2 + 2{,}83^2 = c^2$ $4 + 8{,}0089 = c^2$ $c = \sqrt{12{,}0089}$ $c \approx 3{,}46$ cm	$u_2 = a \cdot \sqrt{3}$ $u_2 = 2 \cdot \sqrt{3}$ $u_2 \approx 3{,}46$ cm
			

Délka tělesové úhlopříčky je přibližně 2,83 cm, délka stěnové úhlopříčky činí přibližně 3,46 cm.

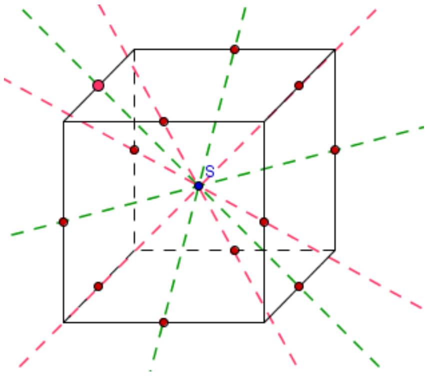
6.4.4 Osy a roviny souměrnosti

Krychle je osově souměrná podle devíti os. První tři osy jsou spojnice středů protilehlých stěn (viz obr. č. 42). Střed souměrnosti *S* vznikne protnutím těchto os. Střed *S* může vzniknout i spojením dvou tělesových úhlopříček nebo spojením jakékoli osy souměrnosti a tělesové úhlopříčky.



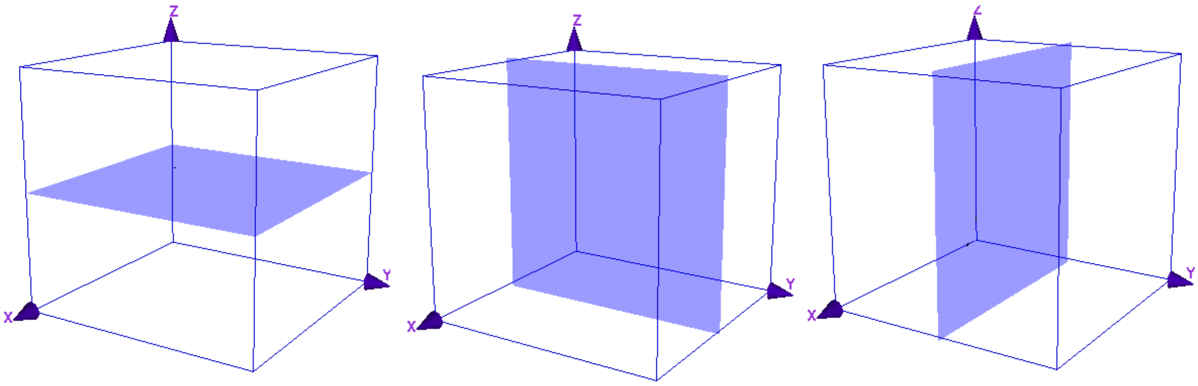
Obrázek 42: Osová souměrnost - 3 osy - spojnice středů protilehlých stěn

Dalších šest os jsou spojnice středů protilehlých hran (viz obr. č. 43).



Obrázek 43: Osová souměrnost - 6 os - spojnice středů protilehlých hran

Krychle je rovinově souměrná podle devíti rovin. Tři roviny jsou rovnoběžné se stěnami a prochází středem krychle (viz obrázek 44). Šest rovin je určeno dvojicemi protilehlých hran.

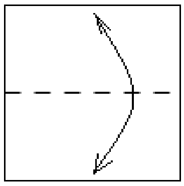


Obrázek 44: Ukázka tří rovin (rovnoběžné se stěnami)

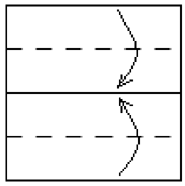
6.4.5 Jak vyrobit krychli z papíru

Metodou origami lze složit krychli několika způsoby. Ke zhotovení krychle můžeme použít jeden papír, ale i více, kdy se pak části papíru postupně vkládají do sebe a vzniká tak krychle.

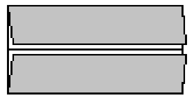
Origami metoda (postup 1) – využijeme šesti různých čtverců, které můžeme zhotovit z barevného papíru, aby každá stěna krychle byla jiná a mohli jsme lépe rozpoznat vsunutí částí papíru. Při tomto skládání pečlivě čtěte slovní návod pod obrázky.



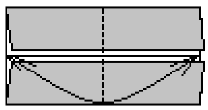
1 Přeložte čtverec na polovinu a opětovně rozložte.



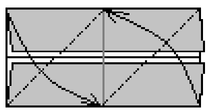
2 Čtverec je tedy rozdělen na dva obdélníky. Každý obdélník znovu přeložte na polovinu. Nerozkládejte.



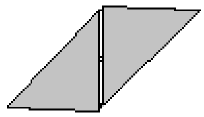
3 Vznikne čtverec, který je rozdělen na čtvrtiny.



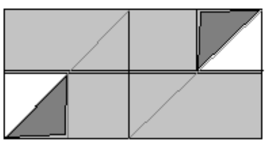
4 Výsledný obdélník přeložte na polovinu a rozložte.



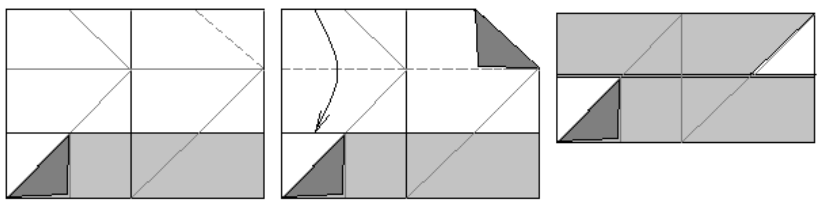
5 Pravý dolní roh přiložte k horní střední části obdélníku a přeložte. Levý horní roh přiložte k dolní střední části obdélníku a přeložte.



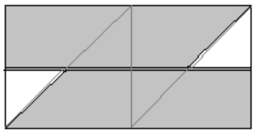
6 Vznikne rovnoběžník.



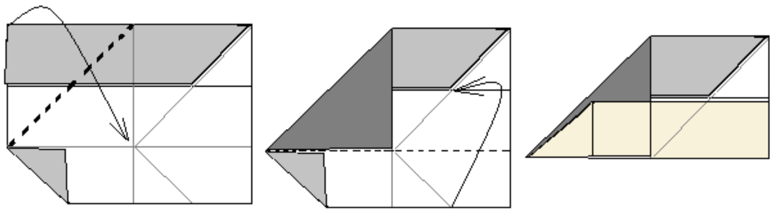
7 Rovnoběžník rozložte zpět na obdélník.



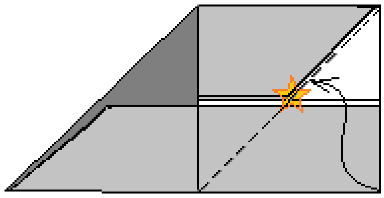
8 Rozložte horní část obdélníku, pravý horní roh (tmavý pravoúhlý trojúhelník) přehněte dovnitř a přeložte obdélník podle čárkované čáry ke středu dle obrázku. Otočte výrobek o 180° a zopakujte celý krok 8 znovu.



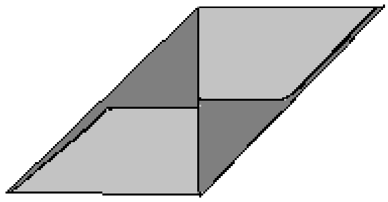
9 Po kroku 8 vznikne tato skládanka.



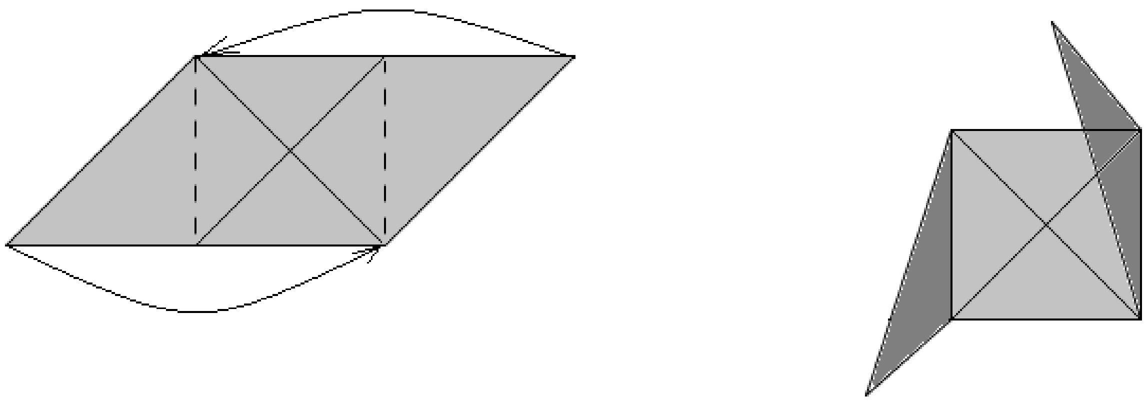
10 Rozložte dolní část skládanky dle obrázku a v levé horní části přehněte pravoúhlý trojúhelník dle čárkované čáry. Dále přehněte dolní část skládanky dle naznačené čárkované čáry. Vznikne pravoúhlý lichoběžník.



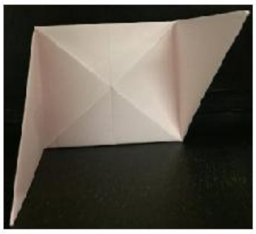
11 Nadzvedněte roh, který je označen barevnou hvězdičkou a zasuňte pod něj pravý dolní roh obrazce.



12 Vznikne rovnoběžník zabezpečený oproti rozložení.



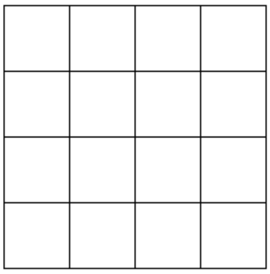
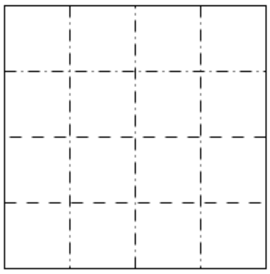
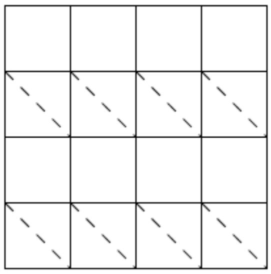
13 Obraťte výrobek na druhou stranu. Levý dolní roh přiložte k pravému dolnímu rohu dle obrázku a přeložené cípy ponechejte volně.



14 Složte takto dalších 5 výrobků, poté zasouvejte volné cípy do přihrádek na stěnách, čímž vznikne krychle.

Origami metoda (postup 2), kde využijeme pouze jednoho čtverce, a složíme tak krychli.

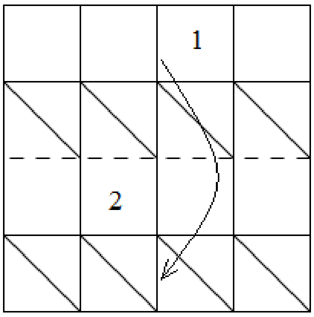
Při skládání tohoto modelu krychle je třeba dbát na sklady údolí a hřbetu.

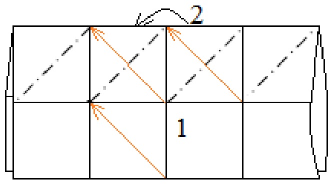




1 Čtverec rozdělte na 16 menších čtverců. Použijte svislé a vodorovné sklady.

2 Velmi pečlivě zarýhněte sklady tak, aby se sklady shodovaly s nákresem. Dodržte sklady údolí a hřbetu!

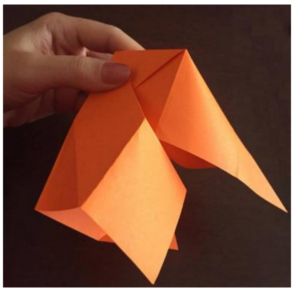
3 Zarýhněte dalších 8 skladů dle nákresu. Dodržujte sklady údolí. Buďte precizní.





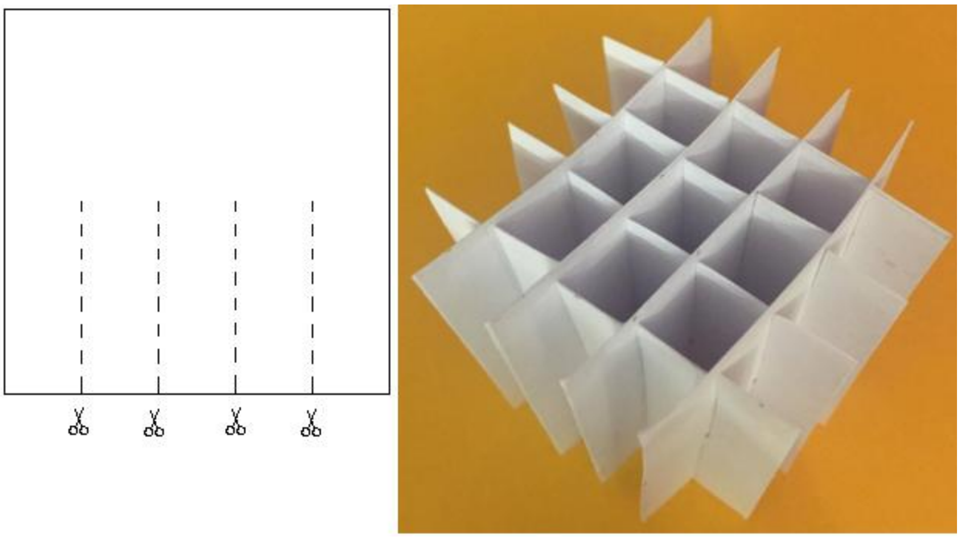
4 Polohu označených čtverců číslicemi si zapamatujte. Přeložte čtverec napůl.

5 Levou rukou držte zadní část skládanky, pravou přední část (palec přesně na čtverci s číslem 1). Přesouvej čtverec 1 na čtverec 2 – nahoru a doleva, dle šipek. 1 překrývá 2.



6 Po přiložení čtverce 1 na čtverec 2 se papír zformuje do tohoto tvaru. Vytvořila se většina stěn, nyní stačí krychli formovat, popřípadě cípy zasunout do výstupků, aby krychle držela samostatně → vpravo.

<u>Sliceforms metoda</u> – X a Y řezy jsou shodné, na obr. č. 45 lze vidět, jak řezy v modelu krychle vypadají. Celkem potřebujeme 8 řezů (4 X-řezy, 4 Y-řezy). Pomocí vystřižených drážek zasouváme řezy do sebe, čímž vznikne krychle.

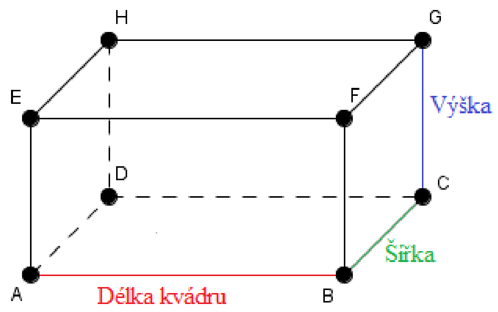


Obrázek 45: Model krychle - sliceforms

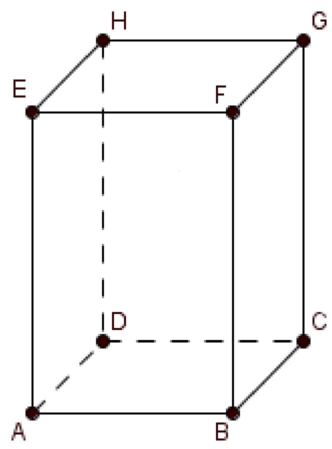
6.5 Kvádr

Kvádr (obr. č. 46) patří mezi prostorové útvary – je to trojrozměrné těleso a zároveň rovnoběžnostěn. Tvoří ho šest obdélníků, obsahuje 6 obdélníkových stěn, 8 vrcholů, 12 hran a úhel u vrcholu činí 90°. Z dvanácti hran má vždy čtveřice rovnoběžných hran stejnou délku, označujeme je pojmy šířka, délka a výška kvádru. Každé dvě stěny jsou rovnoběžné nebo kolmé.

Speciálním případem kvádru je pravidelný čtyřboký hranol (obr. č. 47), který má alespoň jednu z protilehlých stěn čtvercovou (strana $a = b$). O těchto čtvercových stěnách mluvíme jako o podstavě nebo základně.



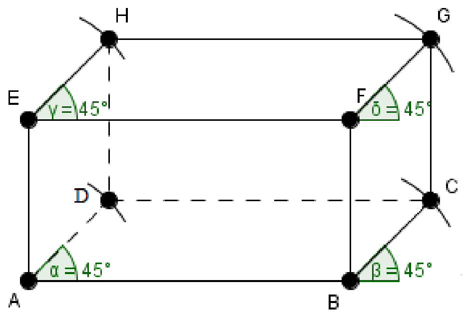
Obrázek 46: Popis hran kvádru



Obrázek 47: Pravidelný čtyřboký hranol

6.5.1 Kvádr ve volném rovnoběžném promítání

Jak už víme z předchozí kapitoly o krychli, můžeme trojrozměrné situace přenést na papír volným rovnoběžným promítáním. Kvádr načrtneme stejně jako krychli. Stěnu *ABFE* načrtneme jako první a je rovnoběžná s průmětnou. Hrany *AD, BC, FG a EH* jsou na průmětnu kolmé, ale kreslíme je pod úhlem 45°, kdy tyto hrany zkracujeme na polovinu. Dokončíme rys spojením bodů, které jsme vytvořili a neviditelné hrany zakreslíme pomocí čárkovaných čar (obr. č. 48).



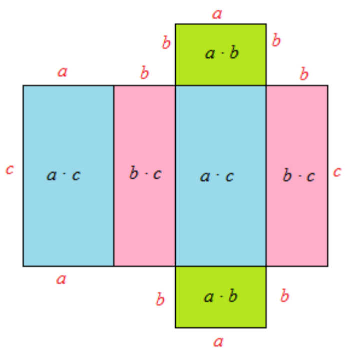
Obrázek 48: Kvádr ve volném rovnoběžném promítání

6.5.2 Povrch a objem kvádru

Povrch kvádru vypočítáme jako součet obsahů všech jeho stěn:

$$S = a \cdot b + a \cdot b + b \cdot c + b \cdot c + c \cdot a + c \cdot a = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a).$$

Pokud bychom chtěli vypočítat spotřebu papíru na polepení povrchu kvádru, sečteme obsahy všech obdélníků sítě (obr. č. 49).



Obrázek 49: Síť kvádru

Objem kvádru značíme V. Vypočítáme ho podle vzorce:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Pokud jde o pravidelný čtyřboký hranol, tak se objem i povrch pozmění na tyto vzorce, kde *v* je výška:

$$S = a^2 \cdot v$$

$$V = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot v$$

6.5.3 Stěnové a tělesové úhlopříčky

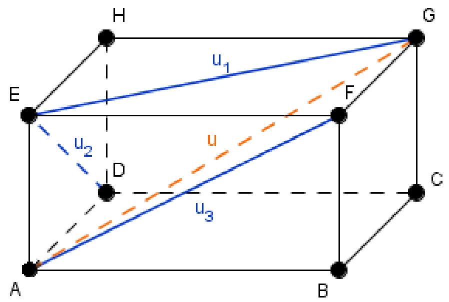
V kvádru najdeme tři různé délky stěnových úhlopříček (u_1, u_2, u_3 – viz obrázek 50). V lze najít celkem 12 stěnových úhlopříček. Vypočítají se Pythagorovou větou:

$$u_a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$u_b = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$u_c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

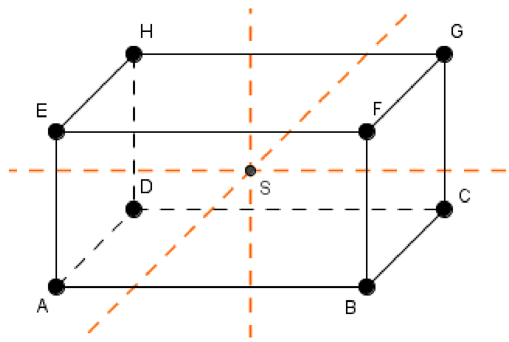
Tělesové úhlopříčky (u – viz obrázek č. 50) nalezneme v kvádru celkem 4. Všechny jsou stejně dlouhé a protínají se ve středu souměrnosti.



Obrázek 50: Stěnové a tělesové úhlopříčky

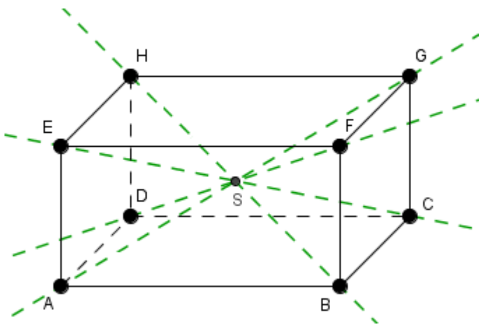
6.5.4 Osová a středová souměrnost

Kvádr je osově souměrný podle tří os, kterými jsou spojnice středů protilehlých stěn (viz obrázek č. 51).



Obrázek 51: Osová souměrnost

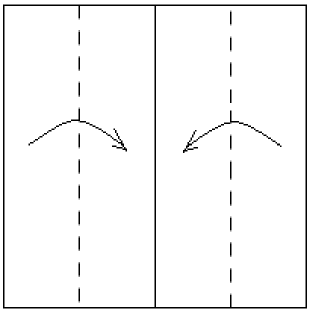
Kvádr je středově souměrný podle průsečíku svých úhlopříček (viz obrázek č. 52).



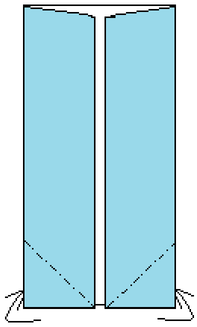
Obrázek 52: Středová souměrnost

6.5.5 Jak vyrobit kvádr z papíru

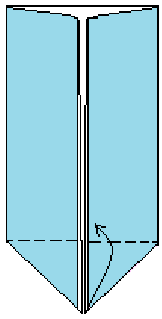
<u>Origami metoda</u> – kvádr můžeme vyrobit několika způsoby. Rozhodla jsem se použít jednoho papírového čtverce, ze kterého vznikne model kvádru. Opět dbejte na sklady údolí a hřbetu.



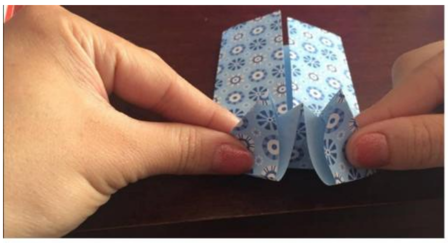
1 Přeložte čtverec svisle skladem údolí napůl. Okraje přiložte ke středu.



2 Skladem hřbet přeložte dolní rohy dozadu.



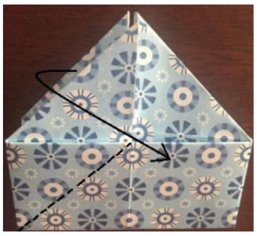
3 Dolní trojúhelník přeložte skladem údolí nahoru.

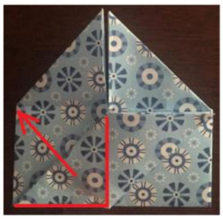


4 Uchopte trojúhelníky dle nákresu navlhčenými prsty a roztáhněte je do stran. Prostřední část přesuňte více k horní části výrobku.

5 Vznikne tento tvar. Na horní druhé straně proveďte kroky 2-4.

6 Výsledkem je tato skládanka. Přeložte ji vodorovně napůl.





7 Přeložte vrchní cíp napříč dle čárkované čáry.

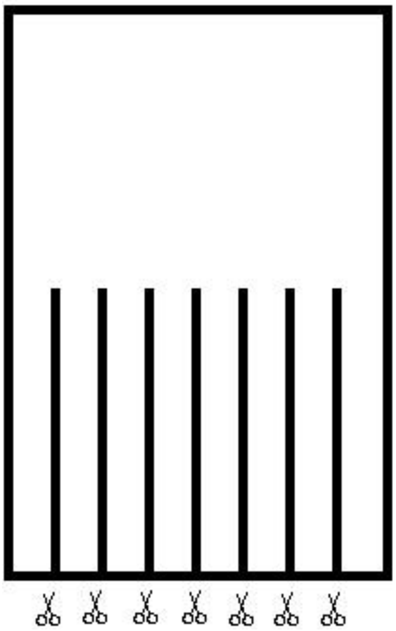
8 Opatrně vytáhněte skrytý roh a přiložte ke konci šipky.

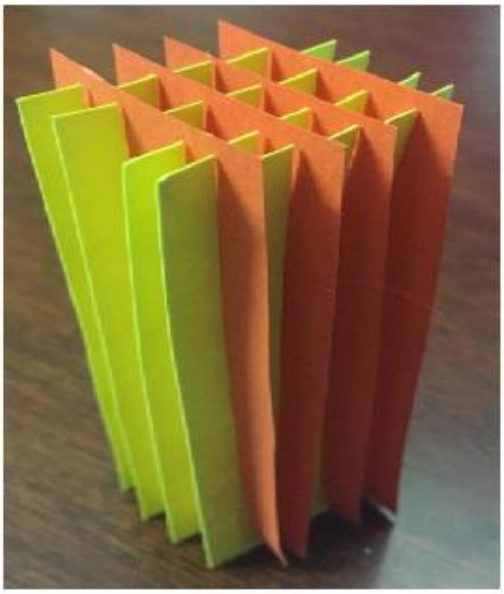
9 Přeložte trojúhelník dolů.

10 Volný trojúhelník zasuňte do kapsy. Kvůli správnému umístění troj. použijte např. špejli. Skládanku otočte, zopakujte kroky 7 – 10.

11 Skládání je u konce. Držte skládanku dle obrázku a točte rukama proti sobě do konečného tvaru.

Sliceforms metoda – X a Y řezy se v tomto případě shodují. Na obr. č. 53 vlevo lze vidět, jak řezy v modelu kvádru vypadají. V tomto případě potřebujeme celkem 14 řezů (7 X-řezů, 7 Y-řezů). Pomocí vystřižených drah zasouváme řezy do sebe, čímž vznikne model kvádru. Na obrázku č. 53 vpravo lze pozorovat menší model se čtvercovou podstavou a rozměry $8 \times 5 \times 5$ cm.



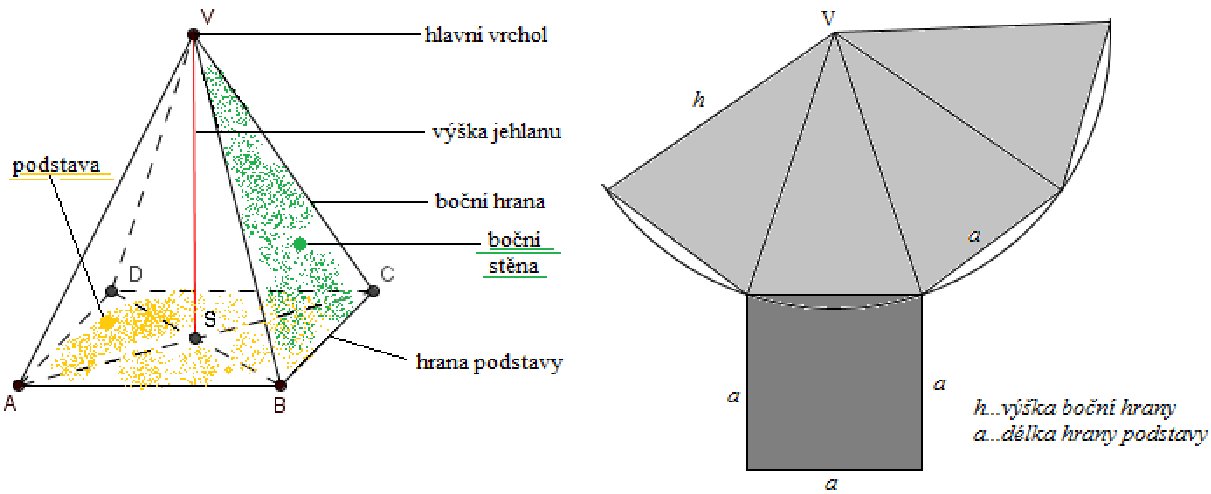


Obrázek 53: Model kvádru - sliceforms

6.6 Jehlan

Jehlan patří mezi prostorové útvary. Je to trojrozměrné těleso. Jehlan je geometrické těleso, jehož podstavou je mnohoúhelník. Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají mnohoúhelník se nazývá n-boký jehlanový prostor. Stěny jehlanu jsou tvořeny trojúhelníky, které mají jeden společný bod – hlavní vrchol jehlanu. Je-li podstavou jehlanu pravidelný n-úhelník a jsou-li všechny jeho boční stěny shodné, mluvíme o pravidelném čtyřbokém jehlanu (obr. 54).

Pokud tvoří podstavu jehlanu mnohoúhelník o n stranách, obsahuje jehlan: $n+1$ vrcholů, $2 \cdot n$ hran a $n+1$ stěn. Na obrázku č. 54 vlevo vidíme boční hrany, které vycházejí z hlavního vrcholu, boční stěny tvoří plášť, hrany podstavy, vrcholy podstavy a výšku, která je kolmá k podstavě a vychází z hlavního vrcholu jehlanu.



Obrázek 54: Popis a síť jehlanu

6.6.1 Povrch jehlanu

Povrch jehlanu vypočítáme jako součet povrchů jeho stěn.

$$S = S_{Pl} + S_p$$

S_{Pl} ...obsah pláště, který je tvořen všemi trojúhelníky bočních stěn

S_P ...obsah podstavy

6.6.2 Objem jehlanu

Objem jehlanu vypočítáme jako jednu třetinu součinu obsahu podstavy a výšky jehlanu.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v$$

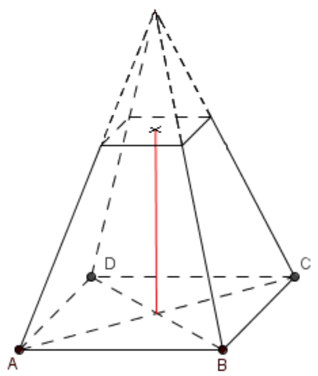
6.6.3 Osová a středová souměrnost

K osové souměrnosti jehlanu dojde pouze v tom případě, pokud vrchol leží nad středem souměrnosti základny a je kolmo nad touto rovinou.

Jehlan nemůže být středově souměrný.

6.6.4 Komolý jehlan

Speciálním případem jehlanu je komolý jehlan, který vznikne odříznutím vrcholu jehlanu rovnoběžně s rovinou podstavy. Povrch se skládá ze dvou podobných podstav a pláště, který je vytvořen z lichoběžníků.



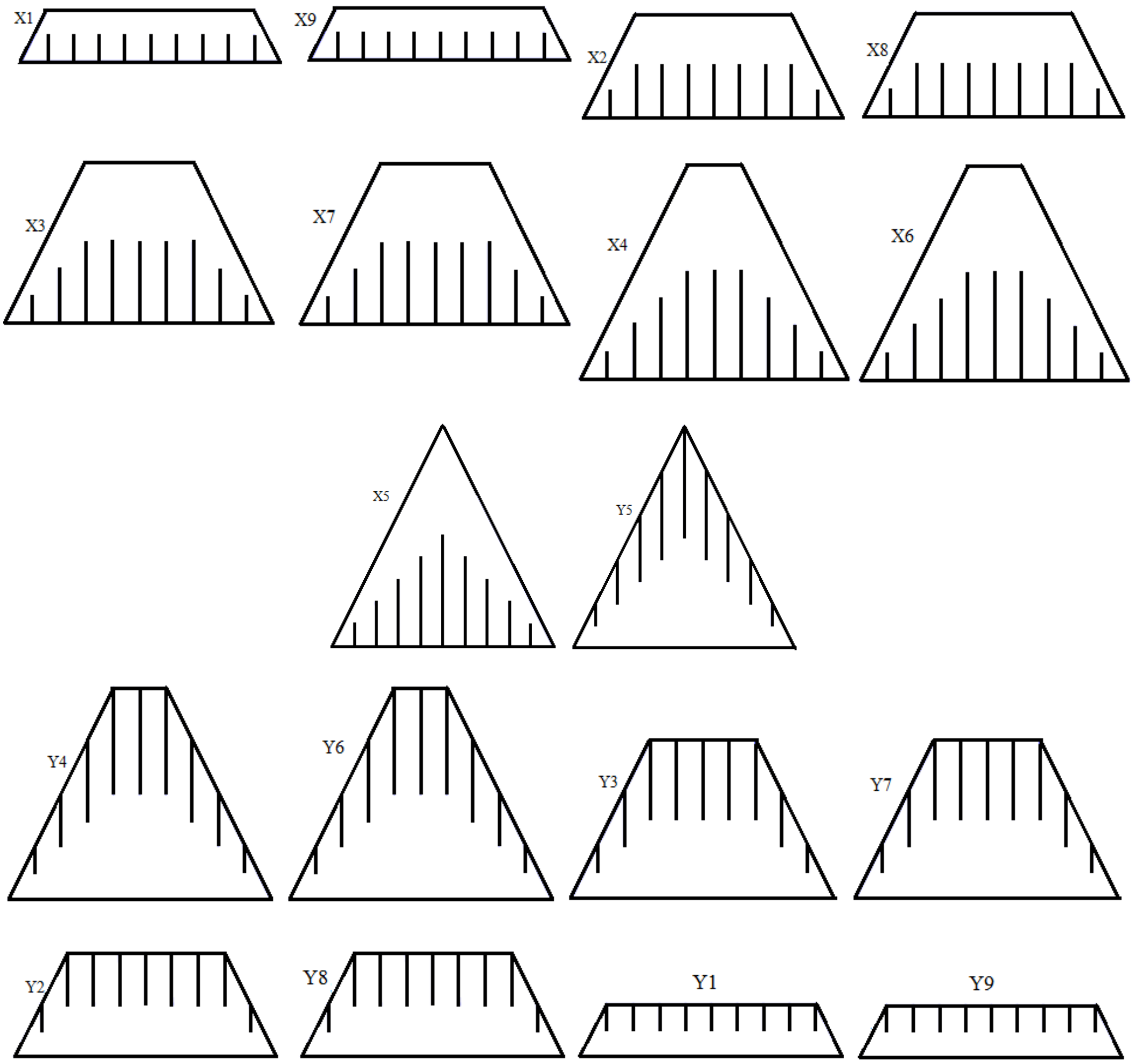
Obrázek 55: Komolý jehlan

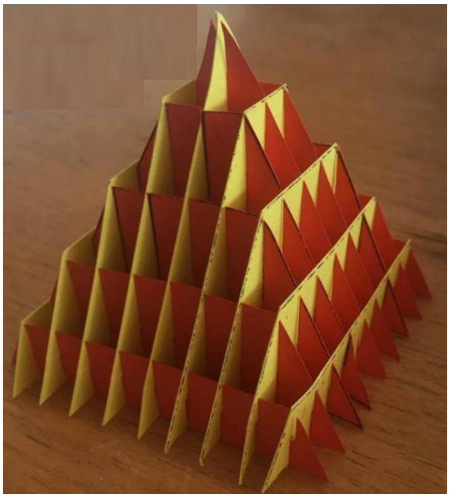
6.6.5 Speciální případy

Pokud máme za základnu jehlanu pravidelný mnohoúhelník a vrchol leží kolmo nad těžištěm základny, jedná se o pravidelný jehlan. Mezi speciální případy zařazujeme také jeden z útvarů Platónských těles, a to pravidelný čtyřstěn, který má identickou formu všech stěn ve tvaru rovnostranných trojúhelníku a shodnou délku všech hran. Další specifickou situací může být i pravidelný čtyřboký jehlan, který se skládá ze čtvercové základny a vrchol leží kolmo nad průsečíkem úhlopříček základny.

6.6.6 Jak vyrobit jehlan z papíru

Sliceforms metoda – řezy X a Y jsou různé. Model jehlanu lze vidět na obrázku č. 56.





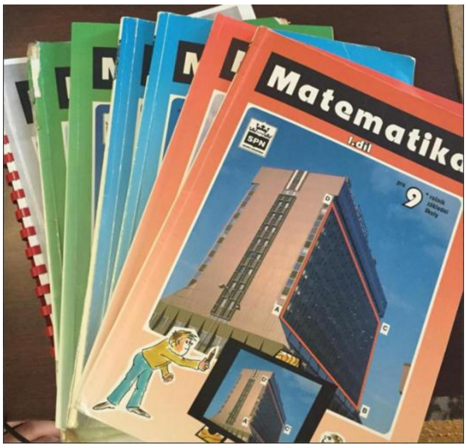
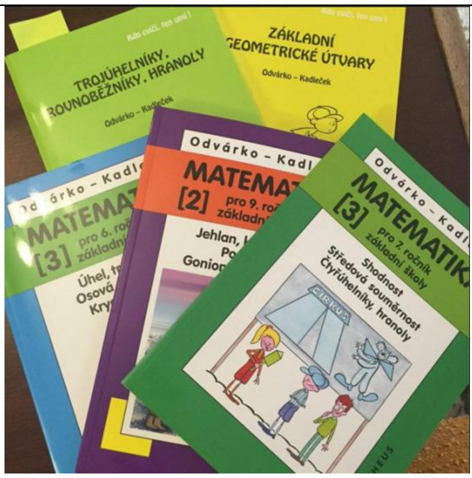
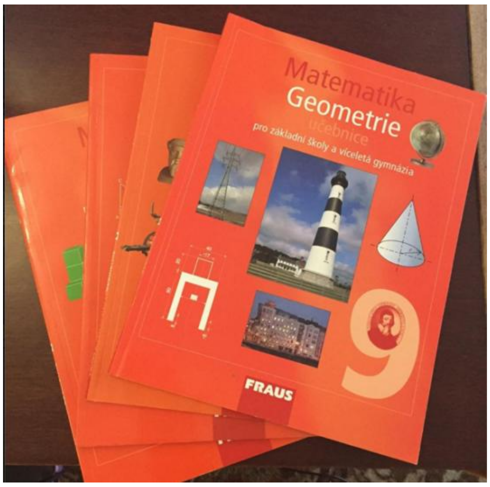
Obrázek 56: Model jehlanu - sliceforms

7 Srovnání učebnic na ZŠ

V této kapitole se budu zabývat srovnáním vybraných učebnic a pracovních sešitů matematiky druhého stupně základních škol se zaměřením na jejich obsah z hlediska didaktické vybavenosti vůči skládání papíru. Zřetel bude brán hlavně na autory učebnic, zda-li snažili žáky motivovat a přiřadit do učebnic či pracovních sešitů úkoly, postupy nebo alespoň zmínky o skládání papíru a jejich metodách. V tabulce 4 přibližuji učebnice matematiky, kterými se budu zabývat.

Učitelé se většinou výuce matematiky pomocí skládání papíru nevěnují, jak už z hlediska časové a organizační náročnosti učitele, z obavy nesplnění stanovených učebních osnov, tak i díky své stereotypní výuce. Výuka pomocí skládání papíru je interpretována spíše mladými nebo ještě studujícími učiteli. V učebnicích je nabídka zpracovaných postupů ke skládání z papíru velmi malá, a proto by měli být učitelé tvární, a do hodin matematiky skládání zahrnout. Žáky motivují, zvýší jejich aktivitu, pestrost výuky a neorientují se pouze na měřitelné výkony a na nácvik řešení úloh, které lze očekávat u zkoušek.

Tabulka 4: Soupis vybraných učebnic

Obrázky knih	Popis knih
	Učebnice jsou určené pro základní školy (vždy 2 díly pro každý ročník 2. stupně rozšířené o opakovací sbírky). Autor: Josef Trejbal Učebnice je zpracována podle osnov vzdělávacího programu Základní škola Vydalo pedagogické nakladatelství Praha
	Učebnice a pracovní sešity jsou určeny pr základní školy (vždy 3 díly učebnic každého ročníku doprovázené pracovními sešity a knížkou pro učitele). Autoři: Oldřich Odvárko, Jiří Kadleček Učebnice byly zpracovány ve spolupráci s JČMF. Vydalo nakladatelství Prometheus Praha
	Učebnice a pracovní sešity jsou určené pro ZŠ a víceletá gymnázia. Autoři: Helena Binterová, Eduard Fuchs, Pavel Tlustý Zpracováno v souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání Vydalo nakladatelství Fraus Plzeň

Učebnice matematiky – Josef Trejbal

I když jsou učebnice zpracovány podle osnov vzdělávacího programu a schválilo je MŠMT tak se skládáním papíru nesetkáme. Autor se samozřejmě zabývá prostorovou představivostí např. díky sítím, ale děti je mají pouze nakreslit, představit si je, ale praktické využití papíru je nulové. Např. na ZŠ a MŠ v Nové Bystřici, kde se z těchto učebnic vyučuje, se učitelé snaží do výuky zanést výrobu sítí těles, skládání origami a sami si skládání vhodně do hodin zařazují nejen v matematice, ale i v pracovních činnostech.

Učebnice matematiky – Oldřich Odvárko, Jiří Kadleček

Velká pozornost je věnována spojení matematiky a praktických úloh s běžnými životními situacemi. V učebnicích najdeme stručné texty klasifikované do krátkých odstavců doplněné o barevné obrázky, diagramy, tabulky, názorné ukázky a zajímavé úlohy.

V pracovních sešitech jsem zmínku o skládání papíru nenašla, kdežto ve 3. dílu učebnice pro 6. ročník je v 1. kapitole vysvětlen postup nalezení osy úhlu pomocí vystřiženého papíru. Děti si úkol mají vyzkoušet a vysvětlit postup skládání.

V kapitole o osové souměrnosti najdeme úlohu, kde fiktivní žák navrhuje vystřihnutí dvou trojúhelníků a následné jejich přiložení k sobě, aby zjistil jejich shodnost. Autor od tohoto kroku děti odrazuje a vyzve je k použití průsvitného papíru nebo fólie, kdy děti obkreslí trojúhelník na fólii a tu pak na další trojúhelník přiloží. V dalších úlohách žáky vyzívá k tomu, aby používali pouze průsvitky. V mnoha úlohách testuje prostorovou představivost žáků např. různé pohledy na krychli, načrtnutí nebo narýsování sítě prostorových těles apod.

Ve 3. dílu učebnice pro 7. ročník najdeme v kapitole o obsahu a obvodu rovnoběžníku úlohu, která zabývá určením obsahu rovnoběžníku pomocí doplnění rovnoběžníku na obdélník. Žáci mají z rovnoběžníku ustřihnout pravoúhlý trojúhelník a přidat ho na druhou stranu, kdy zjistí, že se obsah nezmění a z rovnoběžníku vznikne obdélník.

Origami nebo sliceforms v učebnicích od pana Odvárka a Kadlečka nenajdeme, i přesto se např. na ZŠ, ZUŠ a MŠ ve Stachách, kde tyto učebnice používají, učitelé snaží o zavedení skládání papíru do výuky. Ve velikonočním období skládaly děti motýlky, origami vyráběly ve výtvarné výchově a v matematice nafukovací krychli. Na ZŠ v Ledenicích se ve volnějších hodinách a před prázdninami věnují výrobě origami a při výuce hranolů se jich snaží co nejvíce vyrobit pomocí sítí a lepidla.

<u>Učebnice geometrie pro ZŠ a víceletá gymnázia</u>

Učebnice jsou obohaceny jak o obrázky, úkoly, postupy, otázky, ale i o domácí úlohy věnující se skládání origami, sliceforms, kaleidocyklu, sítí těles apod. V učebnici pro 6. třídu mají děti za domácí úkol složit krychli jako skládanku origami. V kapitole o mnohoúhelnících a hranolech si děti mají prohlédnout model krychle sliceforms, kdy je jejich úkolem vystřihnutí 14 řezů z pracovního sešitu a složení modelu tělesa. Přidaný je i krátký slovní popis skládání. Další úlohou je vyrobení modelů pravidelného šestibokého nebo trojbokého hranolu.

Učebnice geometrie pro 7. ročník obsahuje krásnou úlohu o vystřižení čtverce a jeho následné skládání podle jedné a druhé úhlopříčky. Dětí mají zdůvodnit, proč a jaké trojúhelníky se skládáním vytvoří. V kapitole trojúhelník se mají žáci snažit dle schématu vyrobit a složit dárkovou dopisní obálku. Další úlohou, která se týká i pracovního sešitu, je rozstřihání připravených trojúhelníků a následné porovnávání délky jejich stran. Učebnice obsahuje i úlohu, kde žáci vystřiháváním papíru ve tvaru obdélníku získávají pravoúhlý lichoběžník, trojúhelník, dva nebo tři lichoběžníky apod., kdy je dán počet stříhnutí autory. Následně žáci určují vlastnosti vystřižených rovinných útvarů. V neposlední řadě této učebnice najdete i další modely sliceforms (zkosená krychle, krychle s vyříznutým jehlanem), které děti mají za úkol složit doma nebo navrhnout jejich řezy. Pracovní sešit obsahuje další sítě těles, ze kterých dětí vyrábí modely prostorových útvarů.

Pracovní sešit pro 8. ročník určuje další postupy a předlohy k vystřihování modelu válce sliceforms. V učebnici najdeme úlohu, kde jsou zobrazeny řezy vybraného modelu a děti mají určit, které těleso vznikne složením těchto X a Y řezů.

V pracovním sešitě pro 9. ročník lze najít další předlohy řezů na vystřihování, tentokrát pro model sliceforms jehlanu a krychle.

Z průzkumu těchto tří učebnic lze usoudit, že někteří autoři učebnic na praktické využití papíru během výuky nemysleli a do obsahů učebnic je tak nezařazují. První dva druhy učebnic a pracovních listů se v obsahu nezmiňují ani o jednom druhu skládání. Pan Kadleček a Odvárko se ve svých knihách zmiňují o skládání papíru pouze jednou úlohou, kdežto paní Binterová a kol. se na možnost využití nůžek a papíru při matematice zaměřili, a pro děti připravili zajímavé úlohy, které mají otestovat jejich prostorovou představivost a zvýšit jejich zájem o matematiku.

8 Výukové aktivity

Výukové aktivity se věnují úlohám, kterými žáci prochází společně s učitelem, krok za krokem. Každá výuková aktivita se zaměřuje na vybrané rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník) a vybraná prostorová tělesa (kvádr, krychle, jehlan). V úvodu každé aktivity jsou popsány cíle, klíčové kompetence, metodické poznámky, očekávané výstupy, učivo, pomůcky, čas potřebný k realizaci a příklady návrhů k dalšímu skládání. Klíčové kompetence, očekávané výstupy a kurikulum jsou rozpracovány dle RVP [2].

Hlavní část je tvořena otázkami, které vedou k rozvoji geometrické představivosti. Za každou otázkou je přiřazena i odpověď (zapsaná kurzívou). Žáci pracují na základě již získaných dovedností, tyto dovednosti si upevňují a budují tak systém základních geometrických pojmů pomocí skládání papíru. Je důležité, aby si pedagogové uvědomili, rozpoznali a porozuměli možnostem, které aktivity nabízejí a že podporují spolupráci, budování znalostí a řešení problémů.

8.1 Aktivita 1 – čtverec

Cíl: Děti si uvědomí, kde ve světě okolo nás model čtverce objevuje. Zopakují si základní vlastnosti čtverce pomocí papíru. Pomocí nůžek, papíru a vlastního skládání si prohloubí své znalosti o geometrickém útvaru čtverec.

Kompetence k učení: samostatně posuzuje a experimentuje s papírem, výsledky porovnává, získává a třídí informace, chápe je a využívá je v procesu učení, uvádí věci do souvislostí, pracuje s termíny, znaky a symboly, vytváří si souhrnný pohled na matematické jevy a činnosti, které používá v praktickém životě.

Kompetence k řešení problému: prakticky ověřuje správnost vlastností čtverce, plánuje, řeší a promyslí problémy, které dokáže správně popsat a dokáže je obhájit, využívá vlastní zkušenosti, nenechá se odradit problémem, činí uvážlivá rozhodnutí.

Kompetence komunikativní: účinně se zapojuje do diskuze, náležitě argumentuje, vyjadřuje své myšlenky a názory výstižně a souvisle v ústním i písemném projevu rozumí obrazovému materiálu a různým typům textu, záznamů a běžně užívaným gestům.

Kompetence sociální a personální: při potřebě pomoci ostatním spolužákům ji poskytuje popř. o ni požádá, podílí se na příjemné atmosféře ve třídě, dodržuje pravidla, přispívá k diskuzi.

Kompetence občanské: dodržuje požadavky vůči životnímu prostředí, poskytuje pomoc, chová se zodpovědně.

Kompetence pracovní: dodržuje bezpečnost s materiály a nástroji, dbá na hygienické podmínky, využívá svých znalostí v zájmu vlastního rozvoje, ale i své přípravy na budoucnost, rozhoduje se sám za sebe v zájmu dalšího vzdělávání.

Metodické poznámky:

- žákům pokládáme otázky, na které odpovídají díky svým zkušenostem, žáci obhajují své názory díky praktickému využití papíru, žáky inspirujeme a motivujeme k další práci s geometrickými útvary, vytváříme možnost vyjádřit své názory ve třídě, poskytneme čas potřebný k pochopení vlastností a nalezení odpovědi, jejich dovednosti a schopnosti otestujeme pracovními listy.
- Učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky potřebné k výrobě origami a pokládá otázky, na které děti odpovídají. Učitel pracuje před všemi žáky s papírem, ukazuje postup pro slabší žáky, popř. ještě jednou osvětluje charakteristiky a znaky čtverce, shrnuje základní body. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel odpověď vysvětlí. V průběhu učitel může využívat tabule pro děti, které nestihli postup.

Očekávané výstupy: žák chápe vlastnosti čtverce, prakticky je dokáže ukázat a popsat díky papíru, používá správné pojmy a nezaměňuje je (vrchol, úsečka, strana apod.), žáci si uvědomí rozdíly mezi konstrukcí trojúhelníka na papír a útvarem v reálném světě, vyrobí čtverec z obdélníku.

Kurikulum:

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost,
- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky,
- konstrukční úlohy – osová a středová souměrnost.

Pomůcky: kancelářský obdélníkový papír A4, nůžky, pravítko nebo kružítko pro kontrolu měření.

Čas potřebný k realizaci je 45 minut.

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1) Kde se ve světě okolo nás se čtvercem můžeš setkat?

Děti uvádí příklady, kde se shledali se čtvercem: např. *čtvercová rohožka, okno, šátek, sudoku, rámeček na fotku* apod.

2) Vyrob si z obyčejného obdélníkového kancelářského papíru 2 čtverce metodou origami. Proč přikládáš jeden vrchol k opačné straně? Jaké další vlastnosti má čtverec?

Tím, že žák přiloží stranu čtverce k přilehlé straně zjistí, že jsou obě dvě strany shodné, tím pádem jsou shodné i protější strany a právě shodnost stran je hlavním znakem čtverce. Další vlastností čtverce jsou 90° úhly, sousední strany jsou na sebe kolmé, vnitřní úhly jsou pravé, protější strany rovnoběžné.

3) Odstřihni přebytečný cár papíru, tak aby ti vznikl čtverec. Když čtverec rozložíš, vidíš přehyb, co je to za přehyb? Jak se jmenuje? Proč vznikl? Můžou být ve čtverci skryté ještě další stejné přehyby? Pokud ano, jak vzniknou? Kolik jich je?

Tento přehyb se nazývá úhlopříčka. Vznikl spojením dvou protějších vrcholů, a protože jsou ve čtverci vrcholy 4, vznikne tak i další úhlopříčka.

4) Rozdělí jedna úhlopříčka čtverec na nějaké tvary? Pokud ano, co je to za tvary? Jsou shodné, kolik jich je? Jak bys to s papírem dokázal? Jaké mají pravoúhlé trojúhelníky úhly, konkrétně je popiš. Jak bys to dokázal?

Jedna úhlopříčka rozdělí čtverec na dva stejné tvary, a to pravoúhlé trojúhelníky, které jsou shodné. Vnitřní úhly v trojúhelníku mají 45°, 45° a 90°. Úhlopříčka rozdělila úhel mezi sousedními stranami na polovinu. (Výrobek sklady přehneme tak, aby se vytvořily trojúhelníky, čímž žáci zjistí, že jsou shodné).

5) Rozdělí dvě úhlopříčky čtverec na nějaké tvary? Pokud ano, co je to za tvary? Kolik jich je? Jsou shodné? Jak bys to s papírem dokázal? Jaké mají tyto trojúhelníky úhly, popiš je všechny. Ukaž s papírem, jak jsi to zjistil. A co úhly, které mezi sebou svírají úhlopříčky? Kolik mají stupňů?

Dvě úhlopříčky rozdělí čtverec na 4 shodné trojúhelníky. Vnitřní úhly v trojúhelníku měří 45°, 45° a 90°. Úhlopříčky rozdělily úhel mezi sousedními stranami na poloviny, čímž mají 45°.

Úhlopříčky mezi sebou svírají úhel 90°. (Výrobek sklady přehneme tak, aby se vytvořily trojúhelníky, čímž žáci zjistí, že jsou shodné. Dalším postupem může být rozstřižení papíru dle úhlopříček, žáci poté přiloží vzniklé trojúhelníky na sebe a zjistí shodnost všech 4 trojúhelníků.)

6) Když se na úhlopříčky zadíváš, co bys o nich ještě dokázal říci? Zaměř se na jejich délku. Čtverec můžeš rozstřihnout podle jedné úhlopříčky a přiložit je k sobě, abys zjistil, jestli jsou shodné. Jsou shodné? Zaměř se i na délku úhlopříčky a strany, co je delší?

Úhlopříčky jsou shodné. Úhlopříčka je delší než strana.

7) Protínají se úhlopříčky v nějakém bodě? V jakém? Jak mu říkáme? Co je to za bod? Co znamená slovo těžiště? Jak bys dokázal, že není těžiště například na jedné ze stran? Vzpomeň si například na pokusy ve fyzice. Může být těžiště na jedné ze stran? Proč ano, proč ne. Nápovědou může být jiné těleso, např. kniha, kterou si položíme na prst tak, aby samostatně držela nebo nedržela, připojíme otázku: „Je toto těžiště?“

Úhlopříčky se protínají v jednom bodě, a to ve středu S. Říkáme mu těžiště. (Vlastnosti těžiště si žáci zopakují ve shodě s učivem fyziky v daném ročníku.)

8) Zaměř se na osovou souměrnost. Jak bys svými slovy popsal pojem osová souměrnost?

Papír překládej tak, abys vytvořil osy souměrnosti. Kolik os souměrnosti má čtverec? Jak si ověříš, že jde o správné osy souměrnosti?

Osová souměrnost značena (O;o) v rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje obraz X′ takový, že platí:

a) *bod* $X' = X$, *právě když* $X \in o$, *kde o je daná přímka v rovině, zvaná osa souměrnosti,*
b) *bod X′ leží na kolmici k ose o vedené bodem X,*
c) $|PX| = |PX'|$, *kde P je pata této kolmice na ose o.*

Osová souměrnost zachovává úhly i vzdálenosti a je jednoznačně určena osou souměrnosti o. Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy o. Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa o a všechny přímky k ní kolmé (Polák, 1991). Čtverec je v osové souměrnosti souměrný podle čtyř os.

9) Představ si, že si budeš chtít právě z tohoto čtverce udělat rámeček na fotku. Chceš ji olemovat barevnou špejlí. Kolik cm špejle je zapotřebí? Popiš svůj postup, výsledek nejprve

odhadni. Můžeš použít pravítko. *Dle papíru, který děti používají, vypočítají kolik cm špejle je za potřebí.*

10) Představ si, že budeš chtít právě tento čtverec polepit barevným papírem. Kolik cm^2 barevného papíru je zapotřebí? Popiš svůj postup. *Dle papíru, který děti používají, vypočítají, kolik* cm^2 *barevného papíru potřebují.*

11) Zaměř se nyní na středovou souměrnost a popiš pojem středová souměrnost svými slovy. Je čtverec středově souměrný? Pomocí skládání najdi střed S.

Útvar je středově souměrný podle středu S, když každému bodu A tohoto útvaru odpovídá středově souměrný bod A′. Bod S nazýváme středem souměrnosti.

12) Co jsou střední příčky? Popiš svými slovy. Slož střední příčky na čtverci. Kolik jich je? Jaké mají střední příčky vlastnosti, sleduj svůj výrobek a popisuj.

Střední příčky jsou spojnice středů protějších stran. Střední příčky jsou stejně dlouhé jako strany čtverce. Ve čtverci nalezneme 2 střední příčky.

13) Kdybys chtěl u čtverce vytvořit kružnici opsanou a vepsanou, jaký bys použil sklad, díky kterému bys zjistil průměr této kružnice. Jak bys zjistil poloměr kružnic? Lze tyto kružnice vůbec vytvořit? Ukaž na čtverci.

U čtverce lze vyhotovit kružnici opsanou i vepsanou.

U kružnice opsané se žáci zaměří na sklad úhlopříčky, což je průměr kružnice opsané. Poloměr kružnice opsané je polovina úhlopříčky.

U kružnice vepsané se žáci zaměří na sklad střední příčky, což je průměr kružnice vepsané. Poloměr kružnice vepsané je pak polovina střední příčky nebo polovina strany čtverce.

Na konci hodiny se ptáme: „Jakými dalšími postupy lze čtverec složit? Máte jiné nápady?“ Můžeme se setkat s různými nápady, ukážeme je ostatním a pohovoříme o tom, zda-li jsou správné či nikoliv, popřípadě si ukážeme další správné postupy.

Žáci si do následující vyučovací hodiny za domácí úkol přinesou CD a balící papír. Rozdáme jim pracovní listy a žáci pracují sami.

Návrh dalších aktivit

Žáci mohou k Valentýnu vyrobit maminkám papírová srdíčka či Valentýnská přání.

K mezinárodnímu dni žen žáci můžou vyrobit papírové květiny se stonkem různých druhů květin, např. lilie, kala, tulipán, sasanka, gerbera, lotosový květ. Každý si může vybrat jinou variantu. Děti mají možnost využít k inspiraci internet, kde najdou podrobná videa s postupy skládání (např. na serveru youtube). Učitel může přinést dostupnou literaturu týkající se výroby papírových květin nebo připravit postupy k jejich složení.

8.2 Aktivita 2 – obdélník

Cíl: Žáci si na základě pozorování okolního světa uvědomí, kde se ve světě okolo nás objevuje obdélník. Díky praktickému využití papíru si zopakují základní vlastnosti obdélníku. Na základě pozorování a samostatné práci získávají další poznatky o osové a středové souměrnosti.

Klíčové kompetence:

- kompetence pracovní: modelování, samostatná práce s papírem;
- kompetence k řešení problémů: řešení problémů pomocí různých způsobů, objevování odlišných řešení vedoucích ke správnému výsledku, aplikace získaných poznatků na řešení praktických úloh;
- kompetence k učení: rozboj abstraktního myšlení.

Očekávané výstupy

- Žák chápe vlastnosti obdélníku, prakticky je dokáže ukázat a popsat díky papíru, používá správné pojmy a nezaměňuje je (úhlopříčka, osová a středová souměrnost, střední příčky apod.), žáci si uvědomí rozdíly mezi konstrukcí obdélníku na papír a útvarem v reálném světě, vyrobí obdélník ze čtverce a pracuje s ním.

Metodické poznámky

- Na začátku vyučovací hodiny učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky a pokládá otázky, na které děti reagují a zároveň pracují i s papírem. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel se ptá znovu, jinou otázkou tak, aby získal správnou odpověď. Učitel shrnuje charakteristiky a znaky obdélníku, pracuje též s papírem, využívá i tabule, kde sklady překreslí pro pomalejší žáky, popř. postup opakuje a ukazuje znovu.

Kurikulum:

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, úhel, čtyřúhelník (rovnoběžník), vzájemná poloha přímek v rovině, shodnost,
- metrické vlastnosti v rovině – vzdálenost bodu od přímky, Pythagorova věta,
- konstrukční úlohy – osová a středová souměrnost.

Pomůcky: kancelářský obdélníkový papír A4, nůžky, pravítko nebo kružítko pro kontrolu měření.

Pomůcky: nůžky, papíry A4.

Čas potřebný k realizaci je 45 minut.

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1) Kde se ve světě okolo nás s obdélníkem můžeš setkat?

Děti uvádí příklady, kde se shledali s obdélníkem: např. *obraz, bazén, kniha, dveře, voskové pláty pro výrobu svíček* apod.

2) Většina papíru okolo nás je jakého tvaru? Pokud bychom chtěli vytvořit obdélník ze čtverce, jak bychom postupovali? Máš nějaký nápad? Zkus ho zrealizovat a sděl jej ostatním.

Z papíru ve tvaru čtverce můžeme vyhotovit obdélník velmi snadno, například přeložením čtverce podél střední příčky, čímž vzniknou dva shodné obdélníky.

3) Pracuj s obdélníkem. Co bys řekl o stranách? Zaměř se na jejich délku, společné znaky protilehlých stran nebo sousedících stran. Kolik má obdélník vrcholů? Jak velké úhly lze v obdélníku najít?

Obdélník obsahuje čtyři strany, čtyři vrcholy. Vzájemně protilehlé strany jsou stejně dlouhé a rovnoběžné. Sousední strany jsou na sebe kolmé. Vnitřní úhly jsou pravé.

4) Odstřihni přebytečné cáry papíru tak, aby ti vznikl obdélník. Na obdélníku, který si vytvořil, přehni sklady tak, aby se protilehlé vrcholy spojovaly. Co ti vzniklo? Jak se tento přehyb jmenuje? Kolik těchto přehybů v obdélníku může maximálně být? Když přeložíš papír ve tvaru obdélníku svisle na poloviny, vzniknou dva čtverce? Ano? Ne? Jaké by musel mít obdélník rozměry, aby platilo: „Přelož papír ve tvaru obdélníku svisle a vzniknou dva shodné čtverce."

Tento sklad se nazývá úhlopříčka. Vznikl spojením dvou protějších vrcholů, a protože jsou v obdélníku vrcholy 4, vznikne tak i další úhlopříčka. Úhlopříčky jsou v obdélníku celkem dvě. Povětšinou dva shodné čtverce po přeložení papíru ve tvaru obdélníku nevzniknou, je to např. v případě, kdyby měl papír rozměry 2×4 cm, 3×6 cm ($n\times2n$).

5) Rozdělí jedna úhlopříčka obdélník na nějaké tvary? Pokud ano, co je to za tvary? Jsou shodné, kolik jich je? Jak bys to dokázal s papírem? Kolik stupňů mají úhly v pravoúhlých trojúhelnících? Jaké další vlastnosti má úhlopříčka? Pracuj s papírem a své tvrzení ověřuj. Kde se úhlopříčky protínají? Mohou se protínat i jinde, než ve středu S? Jak bys pohovořil o délce úhlopříček? Co je zajímavé? Porovnej délku stran a úhlopříček, která úsečka je z nich nejkratší a která nejdelší?

Jedna úhlopříčka rozdělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky (na dvě poloviny). Úhly v pravoúhlém trojúhelníku činí 90°, 45° a 45°. Úhlopříčky mají shodnou délku, navzájem se půlí. Úhlopříčky se protínají ve středu obdélníka. Úhlopříčka je vždy delší než strany obdélníka. Nejkratší úsečka je menší strana obdélníka.

6) Rozdělí dvě úhlopříčky obdélník na nějaké útvary? Jsou shodné? Jak bys to s papírem dokázal? Vyjádři svůj výsledek racionálním číslem (zlomkem). Svírají mezi sebou úhlopříčky pravý úhel, jako u čtverce?

Dvě úhlopříčky dělí obdélník na čtyři části, kde jsou protilehlé trojúhelníky shodné. Úhlopříčky mezi sebou nesvírají pravý úhel. (Výrobek sklady přehneme tak, aby se vytvořily trojúhelníky, čímž žáci zjistí, že jsou shodné).

7) Zaměř se na osovou souměrnost. Jak bys svými slovy popsal pojem osová souměrnost?

Papír překládej tak, abys vytvořil osy souměrnosti. Kolik os souměrnosti má obdélník? Jak si ověříš, že jde o správné osy souměrnosti?

Osová souměrnost značena (O;o) v rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje obraz X′ takový, že platí:

a) *bod $X' = X$, právě když $X \in o$, kde o je daná přímka v rovině, zvaná osa souměrnosti,*
b) *bod X′ leží na kolmici k ose o vedené bodem X,*
c) *$|PX| = |PX'|$, kde P je pata této kolmice na ose o.*

Osová souměrnost zachovává úhly i vzdálenosti a je jednoznačně určena osou souměrnosti o. Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě jen všechny body osy o. Jejími samodružnými přímkami jsou v dané rovině osa o a všechny přímky k ní kolmé (Polák, 1991). Obdélník je v osové souměrnosti souměrný podle dvou os.

8) Představ si, že obdélník, který držíš v ruce, je zahrádka, kterou potřebuješ oplotit. Kolik cm pletiva budeš potřebovat? Popiš svůj postup, výsledek nejprve odhadni. Můžeš použít pravítko.

Dle papíru, který děti používají, vypočítají, kolik cm pletiva budou k oplocení zahrádky potřebovat.

9) Představ si, že budeš chtít právě tento obdélník polepit barevným papírem. Kolik cm^2 barevného papíru je zapotřebí? Popiš svůj postup.

Dle papíru, který děti používají, vypočítají kolik cm^2 barevného papíru budou potřebovat.

10) Zaměř se nyní na středovou souměrnost a popiš pojem středová souměrnost svými slovy. Je obdélník středově souměrný? Pomocí skládání najdi střed S.

Útvar je středově souměrný podle středu S, když každému bodu A tohoto útvaru odpovídá středově souměrný bod A´. Bod S nazýváme středem souměrnosti.

11) Co jsou střední příčky? Popiš svými slovy. U obdélníku slož střední příčky. Kolik jich je? Jaké mají střední příčky vlastnosti, sleduj svůj výrobek a popisuj.

Střední příčky jsou spojnice středů protějších stran. Střední příčky jsou stejně dlouhé jako strany čtverce. V obdélníku nalezneme 2 střední příčky.

12) Kdybys chtěl u obdélníku vytvořit kružnici opsanou a vepsanou, jaký bys použil sklad, díky kterému bys zjistil průměr této kružnice. Jak bys zjistil poloměr kružnic? Lze tyto kružnice vůbec vytvořit? Ukaž na obdélníku.

U kružnice opsané se žáci zaměří na sklad úhlopříčky, což je průměr kružnice opsané. Poloměr kružnice opsané je polovina úhlopříčky. U obdélníku nelze vytvořit kružnici vepsanou.

Návrh dalších aktivit origami: výroba české státní vlajky, kuchařské čepice, myšky, prasátka

Návrh dalších aktivit paperfolding: žáci mohou zapojit svou fantazii a vytvořit díky papíru ve tvaru obdélníku různé sklady, které poté ponechají nebo protlačí na druhou stranu. Je třeba mít na paměti symetričnost skladů, jež povětšinou výrobek má.

8.3 Aktivita 3 – trojúhelník

Cíl: Žáci si na základě pozorování okolního světa uvědomí, kde se ve světě okolo nás objevuje trojúhelník. Díky praktickému využití papíru porozumí základním vlastnostem trojúhelníku a vyrobí si různé druhy trojúhelníků. Na základě pozorování a samostatné práci získávají další poznatky o pojmech výška a ortocentrum.

Klíčové kompetence:

- kompetence komunikativní: přesné a stručné vyjadřování, logický sled uvažování, samostatné řešení a formulování problému;
- kompetence k řešení problémů: aplikace získaných postupů zavedených na konkrétní životní situace;
- kompetence pracovní: modelování papíru, samostatné zkoumání vlastností praktickým způsobem.

Očekávané výstupy:

- při řešení praktických problémů využívá a zdůvodňuje polohové a metrické vlastnosti trojúhelníku, používá správné pojmy a nezaměňuje je (pravoúhlý, ostroúhlý, tupoúhlý, rovnostranný, rovnoramenný a obecný trojúhelník), vyrobí trojúhelníky z obdélníku a pracuje s nimi, určuje a charakterizuje trojúhelník, analyzuje jeho vlastnosti, užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníku, odhaduje a vypočítá povrch a obvod trojúhelníku.

Metodické poznámky:

- Na začátku vyučovací hodiny učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky a pokládá otázky, na které děti reagují a zároveň pracují i s papírem. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel se ptá znovu, jinou otázkou tak, aby získal správnou odpověď. Učitel shrnuje charakteristiky a znaky trojúhelníku, pracuje též s papírem, využívá i tabule, kde sklady překreslí pro pomalejší žáky, popř. postup opakuje a ukazuje znovu.

Kurikulum:

- rovinné útvary – úsečka, kružnice, úhel, trojúhelník, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků),

- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost,
- praktické úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úhlu, osy stran).

Pomůcky: kancelářský obdélníkový papír A4, nůžky, pravítko.

Čas potřebný k realizaci: 2 vyučovací hodiny.

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1) Podle čeho rozdělujeme trojúhelníky a jak se nadále dělí?

Trojúhelník rozdělujeme podle stran (rovnostranný, rovnoramenný a různostranný) a podle úhlů (tupoúhlý, ostroúhlý, pravoúhlý).

2) Každý z nich si nyní vyrobíme. Začneme rovnostranným trojúhelníkem. Jaké vlastnosti má rovnostranný trojúhelník?

Děti složí rovnostranný trojúhelník pomocí učitele např. dle postupů, které jsou uvedené v kapitole 7.3.10 Jak složit rovnostranný trojúhelník. Rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé a úhly uvnitř trojúhelníku činí 60°.

V průběhu skládání s dětmi komunikujeme a ptáme se proč sklady přikládají tímto způsobem, přibližujeme jim postup, rychlejší žáci pomáhají ostatním spolužákům.

3) Dalším trojúhelník je různostranný. Jaké vlastnosti má obecný trojúhelník? Slož různostranný trojúhelník.

Obecný trojúhelník má různé strany, různé úhly, žádné dvě strany nejsou shodné.

Žáci tak mohou složit trojúhelník všemi možnými způsoby, ale tak aby platilo pravidlo pro obecný (různostranný) trojúhelník.

4) Poslední trojúhelník dle dělení podle stran je jaký trojúhelník? Vyslov vlastnosti rovnoramenného trojúhelníka a slož rovnoramenný trojúhelník tak, aby základna a výška trojúhelníku měla shodnou délku.

Poslední trojúhelník je rovnoramenný. Vlastnosti: dvě strany z trojúhelníku jsou shodné, třetí strana má jinou délku. Těm stranám, které mají shodnou délku, říkáme ramena a třetí strana se nazývá základna. Úhly, které svírají ramena a základna, jsou shodné.

5) Nyní přejdeme na další dělení a to je podle úhlů. Začneme tupoúhlým trojúhelníkem. Jaké vlastnosti má tento trojúhelník? Vyrob ho z obdélníku. Co kdyby měl trojúhelník dva tupé úhly? Zkus jej složit. Jaký útvar by vznikl?

Tupoúhlý trojúhelník má jeden vnitřní úhel tupý (větší než 90°). Ostatní dva vnitřní úhly jsou ostré. Tupoúhlý trojúhelník nemůže mít dva vnitřní úhly větší než 90°. Když se ho pokusíme složit, vznikne lichoběžník.

6) Další trojúhelník je ostroúhlý. Tento trojúhelník jsme už dnes všichni složili. Jaký to byl? Jaké vlastnosti má ostroúhlý trojúhelník? Složte jiný ostroúhlý trojúhelník.

Dnes jsme složili rovnostranný trojúhelník, který je zároveň i ostroúhlý. Ostroúhlý trojúhelník má všechny vnitřní úhly ostré, čili menší než 90°.

7) Posledním trojúhelníkem dle dělení podle úhlů je jaký trojúhelník? Popiš vlastnosti toho trojúhelníka? Slož pravoúhlý trojúhelník.

Třetí trojúhelník je pravoúhlý. Vlastnostmi jsou: jeden vnitřní úhel musí mít 90°.

Jediné, co žáci musí dodržet je právě jeden pravý úhel. Skládáním z obdélníku jej vytvoří velmi snadno.

Může mít pravoúhlý trojúhelník dva vnitřní úhly pravé? Proč ne? Kdyby měl dva úhly pravé, jaké útvary by mohly například vzniknout? Co je to trojúhelníková nerovnost?

Trojúhelník nemůže mít dva pravé úhly. Kdyby je měl, nevytvoříme trojúhelník, ale např. čtverec, obdélník, pravoúhlý lichoběžník. Trojúhelníková nerovnost = součet délek dvou libovolných stran musí být větší než délka zbývající třetí strany.

$$|a| + |b| \rangle |c|$$
$$|a| + |c| \rangle |b|$$
$$|b| + |c| \rangle |a|$$

8) Nyní se zaměříme na těžiště. Již z opakování čtverce a obdélníku víme, že střed těžiště nalezneme spojením dvou úhlopříček. Najdi těžiště trojúhelníku. Zopakuj si, co je úhlopříčka? Jak jsi našel úhlopříčku v obdélníku nebo ve čtverci? Lze spojit dva nesousední vrcholy v trojúhelníku tak, aby vznikl jeden střed nazývaný těžiště. Můžeme tedy v trojúhelníku nalézt těžiště pomocí úhlopříček?

V trojúhelníku těžiště najdeme tak, že si vyznačíme středy stran a tyto středy spojíme s protějším vrcholem. Tam, kde se těžnice spojují, leží těžiště. Použij jakýkoli trojúhelník z minulé hodiny a najdi těžiště skládáním papíru.

Leží těžiště vždy uvnitř trojúhelníku? Proč?

Ověř skládáním, zda-li těžiště dělí délky těžnic v poměru 1:2.

Úhlopříčka spojuje dva nesousední vrcholy mnohoúhelníka, v trojúhelníku těžiště pomocí úhlopříček nenajdeme.

V trojúhelníku leží těžiště vždy uvnitř..

Ano, těžiště dělí délky těžnic v poměru 1:2. (Další vlastnosti těžiště si žáci zopakují ve shodě s učivem fyziky v daném ročníku.)

9) Na ostroúhlém trojúhelníku, který jsme si vyrobili minulou hodinu, vyznač skládáním výšky. Zopakuj si pojem výška. Jak skládáním zjistíš výšku u trojúhelníka? Slož všechny výšky. Protínají se v jednom bodě, které se nazývá ortocentrum. Skládáním zjisti všechny výšky u ostroúhlého trojúhelníka, co jsi zjistil? Skládáním zjisti výšky u tupoúhlého trojúhelníku, výšky se uvnitř trojúhelníku nespojili? Proč je tomu tak? Kde leží výška u pravoúhlého trojúhelníka? Leží ortocentrum vždy uvnitř trojúhelníka?

Výška trojúhelníku je úsečka, kde jedním vrcholem úsečky je vrchol trojúhelníka a druhým bod na protější straně trojúhelníku, přičemž výška musí být kolmá právě k této straně. U ostroúhlého trojúhelníku najdeme ortocentrum uvnitř trojúhelníku, naopak u tupoúhlého mimo trojúhelník, u pravoúhlého v jednom z vrcholů trojúhelníku. Ortocentrum může ležet uvnitř, mimo, ale i přímo na trojúhelníku, ale skládáním ortocentrum u tupoúhlého trojúhelníka nenajdeme.

10) Co je to osa úhlu, jak ji v trojúhelníku skládáním sestrojíš?

Osa úhlu je taková osa, která prochází vrcholem a půlí daný úhel. (Skládáním papíru žáci sestrojí osy úhlu alespoň u dvou vrcholů trojúhelníku.)

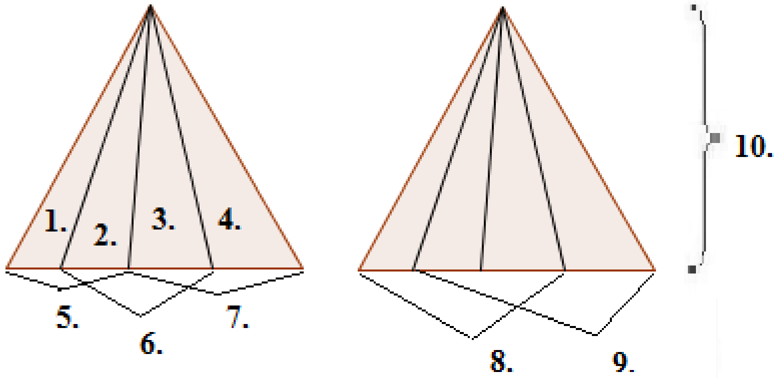
11) Vezmi si jakýkoli trojúhelník a zjisti jeho obvod. Jak bys ho vypočítal? Můžeš použít pravítko.

Podle trojúhelníka, který děti používají, vypočítají obvod.

12) Představ si, že daný trojúhelník je létající drak, kterého chceš polepit barevným papírem. Kolik cm^2 barevného papíru budeš potřebovat?

Návrh dalších aktivit origami:

Z obdélníkového papíru si vystřihni takový trojúhelník, který se velmi podobá trojúhelníku rovnostrannému. Pouhými třemi sklady v tomto trojúhelníku vytvoř takový útvar, aby v něm člověk našel 10 různých trojúhelníků. Tyto sklady pak zvýrazni tužkou. Řešení vpravo na obr.



Výroba origami: dóza s trojúhelníkové cípy, anděl apod.

Návrh dalších aktivit paperfolding: žáci mohou zapojit svou fantazii a vytvořit díky papíru ve tvaru obdélníku různé sklady, které poté ponechají nebo protlačí na druhou stranu. Je třeba mít na paměti symetričnost skladů, jež povětšinou výrobek má.

8.4 Aktivita 4 – krychle

Cíl: Žáci si na základě pozorování okolního světa uvědomí, kde se ve světě okolo nás objevuje krychle. Díky praktickému využití papíru porozumí základním vlastnostem krychle.

Klíčové kompetence:

- kompetence komunikativní: podpora přesného a stručného vyjadřování, logický sled uvažování;
- kompetence k řešení problémů: schopnost samostatného přístupu k řešení problému;
- kompetence pracovní: modelování papíru, dotváření modelů, podpora manuálních dovedností, samostatné zkoumání vlastností praktickým způsobem;
- kompetence sociální a personální: přispívá k diskuzi celé třídy, respektuje různá hlediska názorů, spolupracuje ve skupině, na základě získání určité role pozitivně ovlivňuje kvalitu společné práce.

Očekávané výstupy:

- žák určuje a charakterizuje krychli, analyzuje její vlastnosti, odhaduje a vypočítá její objem a povrch, načrtne a sestrojí její obraz, načrtne a sestrojí síť krychle, určuje velikosti úhlu.

Metodické poznámky: na začátku vyučovací hodiny učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky a pokládá otázky, na které děti reagují a zároveň pracují i s papírem. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel se ptá znovu, jinou otázkou tak, aby získal správnou odpověď. Učitel shrnuje charakteristiky a znaky krychle, pracuje též s papírem, využívá i tabule, kde sklady překreslí pro pomalejší žáky, popř. postup opakuje a ukazuje znovu.

Kurikulum:

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník čtyřúhelník (rovnoběžník),
- prostorové útvary – krychle,
- osová a středová souměrnost.

Pomůcky: nůžky, papíry A4, barevné papíry, špejle, lepidlo.

Čas potřebný k realizaci: 1 vyučovací hodina.

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1) Slož krychli tak, že protější stěny mají stejnou barvu. Pracuj ve skupině se dvěma spolužáky a držte se návodu. (Lze vytisknout návod dle kapitoly 6.5.5).

Žáci vyrábí stěny krychle ve skupinách o 3 lidech, každý vyrobí dvě stěny modelu krychle a poté je zasouvají do sebe pomocí volných cípů.

2) Co je to krychle? Co o ní dokážeš říci? Urči její vnitřní úhly. Kolik má stěn, vrcholů a hran? V jaké závislosti jsou stěny?

Krychle je pravidelný šestistěn. Stěny jsou na sebe kolmé nebo rovnoběžné. Má 6 stěn, 8 vrcholů a 12 hran. Stěny jsou na sebe kolmé nebo rovnoběžné.

3) Co je to tělesová úhlopříčka? Co o ní dokážeš říci? Kde se nachází? Kolik tělesových úhlopříček můžeš v krychli najít? Vezmi si špejli a protlač ji krychlí tak, aby se stala tělesovou úhlopříčkou. Jak moc tuto špejli musíš zkrátit?

Tělesová (úhlopříčka je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy, které neleží na téže stěně. Je to nejdelší úsečka v krychli. Jsou celkem 4. Zkrátím ji tak, aby se dotýkala pouze vrcholů.

4) Nakresli takovou síť, ze které bys složil model krychle.

Žáci kreslí sítě na tabuli, ostatní je kontrolují a komentují jeho úvahy.

5) Potřebuješ naplnit krychlovou nádobu pískem. Strana kádě má 2 m. Kolik kg písku budeš pro vyplnění potřebovat?

Žáci zjišťují, kolik kg písku budou pro vyplnění potřebovat ($V = a^3$).

6) Navrhněte síť krabice pro pingpongový míček, jehož průměr je 40 mm. Kolik cm^2 kartonového papíru bude potřeba pro jeho vyrobení?

$$S = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 40^2 = 9600 mm^2 = 96 cm^2$$

7) Na ukázku učitel přinese sliceforms modely, které děti mohou prozkoumat. Učitel jim na základě informací získaných z kapitoly 4 - sliceforms o těchto modelech vypráví (jak je tvořit, složit apod). Na základě získaných informací se žáci snaží popsat výrobu řezu u krychle.

Návrh dalších aktivit origami: výroba nafukovací krychle, krabičky ve tvaru krychle apod.

Návrh dalších aktivit sliceforms: výroba krychle, kde je vyříznutá půlkoule nebo půlválec, zkosená krychle apod.

8.5 Aktivita 5 – kvádr

Cíl: Žáci si na základě pozorování okolního světa uvědomí, kde se ve světě okolo nás objevuje kvádr. Díky praktickému využití papíru porozumí základním vlastnostem kvádru. Na základě pozorování a samostatné práce získávají představu o tělesové úhlopříčce, objemu, povrchu kvádru a formuje poznatky o jejich vlastnostech.

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení – samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává, kriticky posuzuje a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti,
- kompetence k řešení problémů – je schopen obhájit svá rozhodnutí, problémy řeší samostatně, je schopný volit vhodný způsob řešení, ověřuje prakticky správnost řešení problémů,
- kompetence pracovní – využívá znalosti a zkušenosti získané v jednotlivých vzdělávacích oblastech v zájmu vlastního rozvoje i své přípravy na budoucnost.

Očekávané výstupy:

- žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů, určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti; sestrojí sítě základních těles; řeší praktické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

Metodické poznámky: Na začátku vyučovací hodiny učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky a pokládá otázky, na které děti reagují a zároveň pracují i s papírem. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel se ptá znovu, jinou otázkou tak, aby získal správnou odpověď. Učitel shrnuje charakteristiky a znaky kvádru, pracuje též s papírem, využívá i tabule, kde sklady překreslí pro pomalejší žáky, popř. postup opakuje a ukazuje znovu.

Kurikulum:

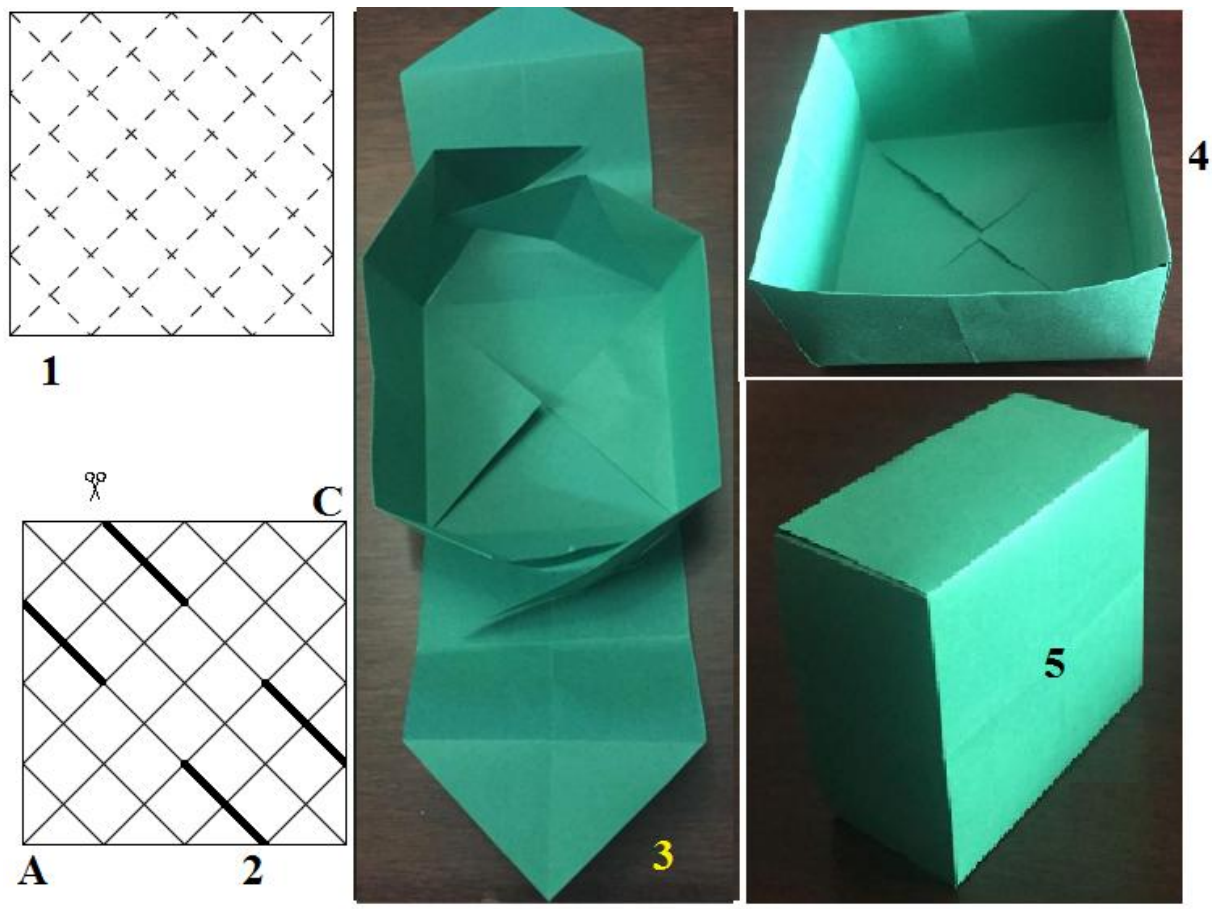
- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník (rovnoběžník), vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů),
- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, Pythagorova věta,
- prostorové útvary – kvádr.

Pomůcky: papíry A4, nůžky, lepidlo, špejle.

Čas potřebný k realizaci: 1 vyučovací hodina.

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1) Slož 2 víka, která spojíš a vznikne krabička. Připrav si dva různé čtverce papíru. Strana druhého čtverce má cca o 1 cm méně.



1 – V papírovém čtverci si vytvoř takové sklady, jaké jsou na obrázku číslo 1.

2 – Nastřihni dle tučné čáry části čtverce. Protilehlé vrcholy čtverce A a C přilož ke středu čtverce dle obrázku 3.

3 – Přečnívající cípky slož dovnitř. Zbylé protilehlé vrcholy přilož též ke středu čtverce. Vznikne obrázek 4.

5 – Opakuj kroky 1, 2 a 3 na druhém menším papírovém čtverci. Obě víka slož do sebe tak, aby ti vznikl kvádr.

Žáci vyrábí model kvádru na základě učitelova postupu.

2) Co je to kvádr? Co o něm dokážeš říci? Urči jeho vnitřní úhly. Kolik má stěn, vrcholů a hran? V jaké závislosti jsou stěny?

Kvádr je trojrozměrné těleso, zároveň rovnoběžnostěn. Úhel při vrcholu činí 90°. Má 6 stěn, 8 vrcholů, 12 hran. Stěny jsou na sebe kolmé nebo rovnoběžné.

3) Co je to tělesová úhlopříčka? Co o ní dokážeš říci? Kde se nachází? Kolik tělesových úhlopříček můžeš v kvádru najít? Vezmi si špejli a protlač ji kvádrem tak, aby se stala tělesovou úhlopříčkou. Jak moc tuto špejli musíš zkrátit?

Tělesová (úhlopříčka je úsečka, která spojuje dva protilehlé vrcholy, které neleží na téže stěně. Je to nejdelší úsečka v kvádru. Jsou celkem 4. Zkrátím ji tak, aby se dotýkala pouze vrcholů.

4) Navrhněte síť krabice pro žehličku, jejíž rozměry vidíte na obrázku. Kolik cm^2 kartonového papíru bude potřeba pro vyrobení?

5) Již u krychle jste se setkali se sliceforms modely. Zjistili jste, že k výrobě modelu krychle jsou zapotřebí shodné X-řezy a Y-řezy. Na otázky odpovídejte pomocí modelu krychle, který jste skládali minulou hodinu. Jak budou vypadat řezy potřebné k výrobě modelu kvádru se čtvercovou podstavou?

Jak budou vypadat X řezy? Jaké mají rozměry? Jak zjistím kolik X-řezů bude celkem?

Jak budou vypadat Y řezy? Jaké mají rozměry? Jak zjistím kolik Y-řezů bude celkem?

X-řezy a Y-řezy pro výrobu modelu kvádru budou shodné. Všechny řezy mají tvar obdélníku. Záleží na nás, jak si model kvádru navrhneme. Pokud bude mít řez např. 6 brázd, budeme potřebovat celkem 12 shodných řezů, z toho 6 X-řezů a 6 Y-řezů.

Jsou na sebe řezy u modelu kvádru kolmé, rovnoběžné nebo různoběžné?

X-řezy jsou na sebe rovnoběžné. Y-řezy jsou na sebe rovnoběžné. X-řezy jsou kolmé na Y-řezy.

Nyní k modelům sliceforms obecně. Pro to, abychom mohli s modelem hýbat od 0° do 180° nestačí brázdy nastřihnout, jak široké mají být? Co pro pohyblivost modelu musíme udělat?

Šířka brázdy by měla odpovídat tloušťce papíru, neměla by být úzká, ani široká. Kdybychom brázdy pouze nastřihli, řezy nám do sebe lehce nezapadnou, naopak kdyby vystřižení bylo široké, řezy vypadávají a model nedrží pohromadě.

Do jaké výšky řezu musí být brázdy vystřiženy? Proč? Co se stane, když brázdu vystřihneme více či méně?

Brázdy jsou vystřiženy vždy do jedné poloviny výšky řezu, jedině takhle do sebe řezy lehce zapadají. Pokud by byly brázdy vystřiženy dál než do jedné poloviny výšky řezu, tak se řezy překrývají, dají se zasunout hlouběji, a tak přečnívají přes model. V opačném případě krátký střih způsobí nedostatečné zasunutí řezů.

Za domácí úkol slož model kvádru metodou sliceforms.

Návrh dalších aktivit:

- origami - čtyřboká krabička;
- sliceforms - kvádr; vyříznutý jehlan v modelu kvádr;

vytvoření sítě kvádru se záchyty po stranách kvůli prostoru pro lepidlo a následné slepení modelu.

8.6 Aktivita 6 – jehlan

Cíl: Žáci si na základě pozorování okolního světa uvědomí, kde se ve světě okolo nás objevuje jehlan. Díky praktickému využití papíru porozumí základním vlastnostem jehlanu. Na základě pozorování a samostatné práce formují poznatky o jeho vlastnostech.

Klíčové kompetence:

- kompetence sociální a personální: účinně spolupracuje s druhými, na základě poznatků pozitivně ovlivňuje kvalitu společné práce, přispívá k diskuzi celé třídy;
- kompetence pracovní: používá bezpečně a účinně materiály, nástroje a vybavení, dodržuje vymezená pravidla, plní povinnosti a závazky, adaptuje se na změněné nebo nové pracovní podmínky, využívá znalosti a zkušenosti získané v jednotlivých vzdělávacích oblastech;
- kompetence k řešení problémů: ověřuje prakticky správnost řešení problémů, promyslí a plánuje způsob řešení problémů, využívá vlastního úsudku a zkušeností.

Očekávané výstupy:

- žák určuje a charakterizuje základní prostorový útvar (jehlan), analyzuje jeho vlastnosti, odhaduje a vypočítává povrch a objem, načrtne jeho síť a sestrojí ji,
- analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparát.

Metodické poznámky:

- Učitel přinese model jehlanu do hodiny, děti si tak lépe představí, jak by mohla vypadat síť jehlanu.
- Na začátku vyučovací hodiny učitel rozdá papíry, zkontroluje pomůcky a pokládá otázky, na které děti reagují a zároveň pracují i s papírem. Pokud je žákova odpověď nejasná, s nepřesnými termíny, učitel se ptá znovu, jinou otázkou tak, aby získal správnou odpověď. Učitel shrnuje charakteristiky a znaky jehlanu, pracuje též s papírem, využívá i tabule, kde sítě překreslí pro pomalejší žáky, popř. postup opakuje a ukazuje znovu.

Pomůcky: papíry A4, nůžky, lepidlo, pravítko.

Čas potřebný k realizaci: 1 vyučovací hodina (45 min).

Otázky vedoucí k rozvoji geometrické představivosti

1. Pracuj se sousedem v lavici. Můžeš použít pravítko i kružítko. Navrhni, načrtni a slož síť jehlanu tak, abys vytvořil:

a) pravidelný čtyřboký jehlan

b) pravidelný čtyřboký komolý jehlan

c) pravidelný čtyřstěn

Nezapomeň vytvořit úchyty pro nanesení lepidla tak, aby model držel samovolně.

Žáci si společně s učitelem představí jehlan tak, aby na základě informací složili jeho síť. Pracují společně s kamarádem, radí si, navrhují nápady a popř. se radí s učitelem.

2. Kde se s jehlanem můžeš v našem světě setkat? Jehlan důkladně popiš. Kde najdeme horní a dolní podstavu, hrany podstavy, boční stěny, hrany stěn, vrcholy podstavy, hlavní vrchol, výšku jehlanu apod.

Jehlan ve světě: střecha stanu, svíčka ve tvaru jehlanu, pyramidy, struhadlo a kamenný krb ve tvaru komolého jehlanu apod. Žáci na vytvořených modelech popisují veškeré části jehlanu, popisují ho a uvádí jeho základní vlastnosti.

3. Doplň tabulku na základě vyrobených jehlanů.

	Celkový počet vrcholů	Celkový počet hran	Celkový počet bočních stěn	Je osově souměrný?	Podstavou je
Pravidelný čtyřboký jehlan	5	8	4	ano	čtverec
Pravidelný čtyřboký komolý jehlan	8	12	4	ano	čtverec
Pravidelný trojboký jehlan	4	6	3	ano	trojúhelník

Učitel se ptá na otázky např.:„ Kolik má pravidelný čtyřboký jehlan celkově vrcholů?“ apod. Děti spolupracují, odpovídají na otázky a na modelu ukazují své poznatky.

9 Hodnocení výuky

Experimentální vyučování s pracovními listy včetně výukových aktivit jsem realizovala 11. 3. a 16. 3. 2016 s vybranými žáky 6., 7. a 9. tříd v prostorách školy ZŠ a MŠ v Nové Bystřici. Výuku jsem rozdělila do dvou dnů, kdy jsem 11. 3. využila výukových aktivit a pracovních listů čtverce, obdélníku a trojúhelníku, kdy jsem na každý útvar potřebovala min. 1,5 hod (45 min výuková aktivita, 45 min pracovní list). Vyučování probíhalo v menším počtu žáků, které jsem a jejich rodiče obeznámila s tím, že si zopakují učivo geometrie zábavnou formou, a to skládáním papíru, zopakují si vlastnosti vybraných geometrických útvarů a odpoledne tak stráví velmi užitečnou formou. Sám učitel si potom v praxi určí, zda-li výukové aktivity použije jako větší tematický okruh nebo zařadí skládání za každý probíraný útvar.

První hodinu a půl jsem věnovala pěti žákům šestých tříd, na kterých jsem realizovala výuku čtverce a jeho vlastností. Jelikož jsem v průběhu zjistila, že v živé paměti mají trojúhelníky a jejich částečné rozdělení, vlastnosti úhlů, výšky a těžnice, zařadila jsem do výuky mnoho otázek a úkolů právě tohoto rovinného útvaru. Vesměs zvládli úkoly dobře, až na pár výjimek. Např. u osové souměrnosti jim ve čtverci skládáním vznikly nesmyslné sklady. Nemyslím si, že příčina byla v jejich nevědomosti, ale žáci si nemohli uvědomit, že sklad má být onou osou (přikládali ke svislé ose souměrnosti strany čtverce). O mnoho horší vysvětlení skladů bylo u rovnostranného trojúhelníka, kdy jeden žák nemohl pochopit, že sklad je onou stranou trojúhelníku a dále podle skladu pak trojúhelník vystřihne (chtěl stranu odhadovat a stříhat bez rozmyslu). Vlastnosti čtverce nedělaly žákům žádné velké problémy. Jelikož jsem nestíhala ani u pěti dětí stále kontrolovat, zda-li ukazují na modelu čtverce správné úhly, nechala jsem žáky vyznačit pastelkami a tužkami vnitřní úhly, které jsme si pak společně zkontrolovali. Vyrobení modelu čtverce z obdélníkového papíru byla pro žáky šestých tříd maličkost. Přidala jsem pak úlohu o naskládání jiného modelu čtverce. Začali přemýšlet a po chvilce si papír A4 zmenšili, jeden žák rozdělil čtverec na 4 malé čtverce a poté jeden z nich vystřihl podle skladů. Otázky jsem musela v pár případech formulovat jinak, nebo opakovat, aby je děti pochopily, jelikož se skládáním setkávali vesměs poprvé (při výtvarné výchově jednou vyráběli origami květiny).

V dalších 45 minutách žáci pracovali s připraveným pracovním listem. Největší problém jim činila úloha o origami (originální obal na CD). Už v začátku bylo vidět, že se děti potýkají se skládáním papíru v matematice poprvé. Origami neznali, nevěděli jak se řídit postupy, jaký úkol upřednostnit apod. Zde bylo mojí chybou, že jsme si v předešlých 45 minutách nesložili skládanku origami dle obrazového materiálu. I když jsme origami skládali, žáci postupy neviděli, ale vymýšleli je. Myslím, že by bylo vhodné zařadit navíc alespoň jeden úkol s obrázkovým a slovním postupem. Ne nadarmo se v knihách o origami píše, že začátky skládání vás seznamují se skládáním a až po čase vaší prací vznikají propracovanější a zajímavější modely. S úkolem origami jsem dětem musela pomoci. Při výrobě šachovnice si ani jeden žák neuvědomil, kolik by herní plán měl obsahovat polí. Všichni seskládali šachovnice, kde bylo vyobrazeno 4×4 polí. Společně jsme odhalili správná řešení a žáci si chyby opravili.

Další fáze vyučování byla s těmi samými žáky šestých tříd, tentokrát jsme pracovali s obdélníkem. Vyslovení, popsání a následné skládání vlastností obdélníku jim nečinilo již žádné problémy. Složili obdélníky různých velikostí, skládali obdélník ze čtvercového papíru, úhlopříčky, střední příčky, hledali střed obdélníku apod. Menší problém nastal až u pracovního listu, opět u skládanky origami (výroba obálky na dopis). Dva žáci nedočetli zadání do konce a výrobek začali skládat z obdélníkového papíru, kdy na chybu přišli až v závěru. Obálku sice vytvořili, ale zadní cíp, který držel obálku nejvíce, byl zasunutý jen lehce (při větší manipulaci by se obálka rozpadla). Žáci kroky postupu origami přeskakovali, opomíjeli, když už se rozhodli chybu napravit, opět na nějaký sklad zapomněli, ale i přes všechny potíže se s úkolem „poprali“, a alespoň tři žáci si obálku vytvořili. Součástí pracovního listu bylo i skládání metodou paperfolding dle přiloženého schématu. Žáci si neuměli představit, jakou síť skladů si předpřipravit a opět skládaly bez rozmyslu. Otázkami jsem se jim snažila napovědět, jaké sklady jsou nejdůležitější, kde mají začít skládat, jak pokračovat apod. Byli si jistější a metodu paperfolding si také vyzkoušeli.

Další fází bylo vyučování, kde jsme objevovali trojúhelník. Pracovala jsem se žáky 7. tříd, kde byl jeden slabší žák (neučí se, radši sportuje, ve škole nedává pozor). Čtyři žáci byli velmi aktivní, na otázky odpovídali rychle, skládání šesti různých druhů trojúhelníků a následný popis vlastností jim nečinilo potíž. Slabší žák nedokázal ani po předešlých třech zopakování určit, co je rovnostranný trojúhelník. Tupý, ostrý, pravý úhel jsme si charakterizovali na několika různých trojúhelnících. Na konci hodiny si stále pletl ostrý a tupý úhel. Se skládáním papíru jsem mu musela pomáhat. U úlohy, kde měl najít skládáním výšku v rovnostranném trojúhelníku, jsme strávili snad 15 minut. Nedokázal uvést vlastnosti ani dělení trojúhelníku, chyběli mu základní geometrické pojmy jako přímka, úsečka, strana, výška, spletl si vzorec obvodu trojúhelníku se vzorcem čtvercem, při obsahu vyřkl vzorec pro objem kvádru. Rozdíl mezi obsahem a obvodem nedokázal vysvětlit. Bohužel jsem při této hodině ztratila plno času nad pojmy, které jsme až třikrát opakovali a doufám, že ne marně. Skládání a geometrická představivost mu činila značné problémy, ostatní žáci byli velmi pilní, pracovali společně a při nesnázi jednoho z nich si navzájem pomáhali. Při řešení pracovních listů mě slabší žák velmi překvapil. Z vánoční origami hvězdy byl nadšený, jelikož se mu povedla napoprvé a v zapálení chtěl vytvářet další. Úlohu, kde měl v rovnostranném trojúhelníku vytvořit dva sklady tak, aby vzniklo 6 obecných trojúhelníků, vyřešil hned (dokonce rovnostranný trojúhelník složil sám). Čtvrtou úlohu, kde rozstříhaný tupoúhlý trojúhelník skládal zpět do celku, vyřešil s jedním zádrhelem, kdy se mu jedna část skládanky trojúhelníku otočila, tím pádem mu kousek nezapadl do celku tak, jak by měl. Chybu společně s kamarády našel.

Další výuka byla realizována v odpoledních hodinách dne 16. 3. 2016. Šest žáků 8. třídy mělo v úvodu tvořit model krychle tak, že se protější strany shodují v barvách. Každý vytvořil jednu stěnu krychle pomocí návodu, který jsem zpracovala v kapitole 6.5.5 Jak vyrobit z papíru krychli (origami metoda, postup 1) a který jsem promítala přes interaktivní tabuli. Poučila jsem se z předešlých chyb a podrobně jim origami představila a naznačila, jakým způsobem se skládá podle slovního, ale i obrázkového postupu. Nechala jsem je pracovat samostatně, využili jedině pomoci svých spolužáků. Vlastnosti krychle vyslovili vesměs bez problémů, dokázali popsat krychli, určili kolik má stěn, hran, vrcholů, velikost úhlů apod. Dva žáci přesně určili definici tělesové i stěnové úhlopříčky, všichni si dokázali poradit s úlohou, při níž zjišťovali velikost brčka (tělesové úhlopříčky), následně pak zjišťovali kolik spotřebují kartonového papíru k vytvoření krabičky pro pingpongový míček. Do hodiny jsem přinesla sliceforms modely různých těles, které je velmi zaujali. Začali je rozkládat, znovu řezy zasouvat zpět do sebe, model převraceli do maximálních úhlů. Se sliceforms jsem žáky seznámila a podávala otázky takovým způsobem, aby sami pochopili smysl tohoto skládání. V dalších 45 minutách sami skládali model krychle s vyříznutým jehlanem ve dvojicích. Sliceforms je velmi zaujalo a jejich zápal do skládání byl značný. V závěru se ukázalo, že někteří žáci dráhy málo vystřihli (některé byli jen nastřihnuté), čímž jim řezy nešly snadno zasunout, problém snadno vyřešili opětovným nastřižením. Potíží se jevilo závěrečné skládání, kdy někteří žáci netrpělivostí zohýbali místa mezi vystřiženými dráhami a těžko pak řezy zasouvali do sebe (řez již nebyl tak pevný). Jeden z žáků vystřihl dráhy tak široké, že řezy z modelu vypadávaly. Složení krychle s vyříznutým jehlanem zabralo žákům vcelku dost času, ale přeci jen sliceforms skládali poprvé, proto věřím, že u dalších modelů budou úspěšnější.

Další výuka probíhala se stejnými žáky 8. třídy. Několikrát model krabičky ve tvaru kvádru skládali již v jiných předmětech, proto jejich práce byla velmi rychlá. Vyrobili jsme si krabičku dle metody origami, žáci model kvádru popsali a na základě mých otázek a následných odpovědí si doplnili chybějí znalosti o kvádru. Jelikož v předchozích minutách poznali model sliceforms a měli je ukázkou, odpovídali na připravené otázky o sliceforms skládání „na výbornou“. Když navrhovali síť krabice pro žehličku, tři žáci si prvně načrtli těleso (kvádr) na papír, vypsali si rozměry a až poté navrhovali síť. Prvním obrázkem jednoho žáka byl trojúhelník, ale hned zjistil, že řešení není správné a bádal dál. V pracovních listech žáci navrhovali řez pro model kvádr. Čtyřem z nich nedělal řez problémy a načrtli obdélníkový tvar. Jeden z nich dráhy protáhl více než do středu a druhý na dráhy zapomněl. Vzpomněl si na ně až poté, co doplňoval otázku: „Kolik jsi vyznačil brázd na řezech?“ Dvěma žákům jsem pomáhala a na řešení přišli po mé nápovědě: „Podívej se na řez krychle, jaký mají řezy tvar? Uvědom si, jaký tvar mají stěny krychle.“ Dále měli navrhovat řez též pro kvádr, ale tak, že se řezy nebudou shodovat. Žáci si navzájem pomáhali, všechny navržené řezy byly správné.

Poslední fází experimentálního vyučování byla práce s modelem jehlanu.Pracovala jsem se čtyřmi žáky osmé třídy. Jednomu žákovi činilo potíže charakterizovat jehlan a uvědomit si, jaký rozdíl je mezi pravidelným čtyřbokých jehlanem a čtyřstěn. Komolý jehlan a jeho síť vytvořili bez pomoci. Po načrtnutí sítí a složení modelů žáci pilně a vcelku bez chyb popsali jehlan. Následná práce s pracovním listem, a to modelem jehlanu sliceforms, je opět nadchla a každý z nich model jehlanu složil.

I přes některé nesnáze jsme se většinou dobrali ke zdárnému konci. Žáci měli v prvopočátku potíže, na první pohled se jevilo, že se většina z nich se skládáním papíru setkává vůbec poprvé. Z činností byli nadšení. Z výukových aktivit méně, z pracovních listů více. Pracovní listy jsme si zkontrolovaly vždy po skončení jejich práce.

U každé výukové aktivity je doplněn čas, který je potřebný pro realizaci, ale záleží na učiteli, jak moc do hloubky chce vybrané učivo probírat. I když je mnou doporučená hodina 45 minut, učitel se s dětmi může věnovat čtverci i dvě nebo tři vyučovací hodiny, již může zařadit otázky o trojúhelníku nebo úkoly, které ho v danou chvíli napadají. Doporučuji dávat dětem instrukce, stále s nimi mluvit, ptát se: „Proč a jak jsi tento sklad udělal?“ Žáci sklad udělají správně, ale nedokážou slovy vylíčit svůj postup. Chybí jim slovní zásoba a nedostatečné používání matematických pojmů. Je potřeba, abychom žákům nechali prostor jak k vyjádření postupů, ale zároveň i k samostatnosti skládání, jelikož jejich snaha objevovat a skládat je patrná. A v matematice je to pro nás, pro učitele, velký úspěch.

10 Závěr

Díky vybranému tématu jsem se i já sama dostala do úžasného světa papírových skládanek plných barevnosti a zajímavých tvarů. Pro lepší pochopení problematiky jsem věnovala mnoho času skládání, které mě do sebe naprosto vtáhlo a díky kterému jsem v úvodní části popsala postupy, návody, rady, zajímavosti, vlastnosti sliceforms a paperfolding.

Vybrala jsem geometrické útvary, se kterými se žáci na ZŠ setkají a sepsala k nim dostačující přehled vlastností, bez kterých se při skládání modelů žáci neobejdou. Ke každému z nich je vytvořené schéma, které krok po kroku popisuje vyrobení útvaru či tělesa různými metodami skládání, což je pro učitele a výuku žáků velmi potřebné, jelikož si žáci přiblíží vlastnosti oněch útvarů díky praktickému modelu, který si mohou sami složit a výuka je tak více zaujme. Nadále jsem se věnovala vytvoření materiálu pro učitele z hlediska didaktiky. Nachystala jsem výukové aktivity, kde je úkolem žáků složit útvar či těleso, se kterým bude nadále pracovat společně s učitelem, který má ve výukových aktivitách připravené otázky i odpovědi. Ke každému geometrickému útvaru jsem vytvořila i pracovní listy, díky kterým jsem realizovala experimentální vyučování, které potvrdilo můj názor o tom, že se učitelé v hodinách matematiky skládání nevěnují. Myslím, že je to škoda, jelikož děti tato forma výuky baví, zaujímá je více, než klasická a přesto se učí.

Další kapitolu jsem věnovala srovnání učebnic z hlediska toho, zda-li v učebnicích žáci naleznou příklady skládání pomocí papíru nebo alespoň zmínku o tom, že práce s papírem a různé metody skládání existují. Překvapilo mě, že pouze v jedné ze tří vybraných učebnic jsem našla návody pro různé metody skládanek. Nyní mě mrzí, že jsem neprozkoumala více učebnic, které se na ZŠ v současnosti vyskytují.

Přála bych si, aby učitelé dali svým žákům prostor a naučili je schopnosti nazírání, aby jim vytvořili volnou cestu ve světě vlastního poznávání, nechali jim dostatek prostoru pro jejich tvořivou práci, ale zároveň jim pomáhali a byli v blízkosti, když potřebují pomoci. Nechat žáka přemýšlet, objevovat, samostatně pracovat je pro něj daleko příjemnější, než dostávat stále ty samé úkoly, kdy pracují jen se svým vlastním sešitem a tužkou. Je potřeba matematiku obohatit o nové a zajímavější výukové metody, což si myslím, že se mi v této práci povedlo. Doufám v to, že navržení výukových aktivit nebude potřebné jen pro mě, ale že se jimi inspirují i další pedagogové, kteří třeba jen trošku chtějí vyučovat jinak.

Použitá literatura

Binterová, H. a kol (2007). *Učebnice matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie 6*. Plzeň: nakladatelství Fraus. ISBN 978-80-7238-656-7

Binterová, H. a kol (2008). *Učebnice matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie 7*. Plzeň: nakladatelství Fraus. ISBN 978-80-7238-681-9

Binterová, H. a kol (2009). *Učebnice matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie 8*. Plzeň: nakladatelství Fraus. ISBN 978-80-7238-686-4

Binterová, H. a kol (2010). *Učebnice matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia – geometrie 9*. Plzeň: nakladatelství Fraus. ISBN 978-80-7238-691-8

Cibulka, O. (2013). *Origami*. Brno: Albatros Media a. s. ISBN 978-80-264-0176-6

Chatani, M. (1988). *Pop-Up Gift Cards.* Tokyo: Ondorisha publishers. ISBN 4-395-27018-2 C3072

Janoš, J. (1991). *Origami – japonské skládanky z papíru*. Nakladatelství technické literatury. ISBN 80-03-00637-6

LaFosse, M. G. (2005). *Advanced Origami.* Tuttle Publishing. ISBN 0804836507

Millerová Lenka. *Návrh pracovních listů pro práci se sliceforms, jako podpora prostorové představivosti při výuce geometrie na ZŠ.* České Budějovice, 2006. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Fakulta pedagogická.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2011). *Matematika 3 pro 6. ročník ZŠ. Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle, kvádr.* Praha: nakladatelství Prometheus. ISBN 978-80-7196-416-2

Odvárko, O., Kadleček, J. (1999.) *Matematika 3 pro 7. ročník ZŠ. Shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly.* Praha: nakladatelství Prometheus. ISBN 978-80-7196-286-1

Odvárko, O., Kadleček, J. (2013). *Matematika 2 pro 9. ročník ZŠ. Jehlan, kužel, koule, podobnost, goniometrické funkce.* Praha: nakladatelství Prometheus. ISBN 978-80-7196-441-4

Odvárko, O., Kadleček, J. (1996). *Pracovní sešit z matematiky. Základní geometrické útvary.* Praha: nakladatelství Prometheus. ISBN 80-7196-018-7

Odvárko, O., Kadleček, J. (1997). *Pracovní sešit z matematiky. Trojúhelníky, rovnoběžníky, hranoly*. Praha: nakladatelství Prometheus.

Oprea, A. (2014). *Origami květiny.* Euromedia Group, k. s. ISBN 978-80-249-2804-3

Padrtová, M. (1970). *Padesát papírových skládanek.* Seč: Československý pionýrský tábor.

Polák, J. (1991). *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: nakladatelství Prometheus. ISBN 80-85849-78-X

Pomykalová, E. a kol. (2010). *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-389-9

Rojas, H. F. (1995). *Fascinující svět Origami zvířátek*. Praha: Knižní klub + Ikar. ISBN 80-7176-228-8 (Knižní klub), 80-85944-24-3 (Ikar)

Sharp, J. (2005). *Sliceforms. Mathematical models from paper sections*. Norfolk, England, Tarquin Publications.

Smithová, S. (20077). Origami pro radost. Praha: Ikar. ISBN 978-80-249-0827-4

Täubner, A. (2009). *Kirigami. Filigránové motivy japonského umění skládání.* Vydavatel´stvo Anagram. ISBN 978-80-7342-165-6

Trejbal, J. (2003). *Matematika 1. a 2. díl pro 6.-9. třídu*. Praha: SPN.

Woodová, A. (2014). *Origami*. Nakladatelství Slovart. ISBN 978-80-7391-708-1

Elektronické zdroje

[1] Oficiální stránky Sliceforms. Sliceforms [online]. Datum poslední revize: April 22, 2011, [citováno 21. 09. 2015].
< https://sliceforms.wordpress.com>

[2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání platný od 1. 9. 2013 dle MŠMT – 2647/2013-210, [citováno 11. 4. 2016]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani

Přílohy

Pracovní list 1 – čtverec

Pracovní list 2 – obdélník

Pracovní list 3 – trojúhelník

Pracovní list 4 – krychle

Pracovní list 5 – kvádr

Pracovní list 6 – jehlan

Pracovní list 1 - řešení

Pracovní list 2 - řešení

Pracovní list 3 - řešení

Pracovní list 4 - řešení

Pracovní list 5 - řešení

Pracovní list 6 - řešení

Seznam obrázků

Seznam tabulek