



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

NAPOLEONOVA VĚTA

Vypracoval: Bc. Luděk Mráz

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Napoleonova věta jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který byl vedoucím mé diplomové práce. Děkuji mu především za jeho cenné rady a ochotu při spolupráci na sestavení mé diplomové práce. Zároveň bych chtěl poděkovat mé rodině a přítelkyni za vytrvalou podporu, kterou mi projevovali během mého vysokoškolského studia.

Anotace:

Cílem diplomové práce Napoleonova věta je podrobné zaměření se na větu, ve které je popsán proces tzv. "regularizace". V rámci zkoumání Napoleonovy věty se práce zabývá řadou jejích důkazů, vlastností a následně jejím zobecněním v rovině a prostoru. Diplomová práce je doplněna o řadu obrázků, které čtenáři umožní snadnější porozumění dané problematiky.

Annotation:

The target of the this diploma thesis called "The Napoleon's theorem" is a detailed concentration on this theorem, where the process of so called "regularization" is described. Under the investigation of the Napoleon's theorem this diploma thesis is concerned with a lot of proofs, properties and then their generalization in a plane and in space. Pictures, which can help the reader to understand this problem are supplemented in this diploma thesis.

Obsah

1	Úvod	7
2	Historie Napoleonovy věty	9
3	Napoleonova věta a její dokazování	11
3.1	Napoleonova věta a komplexní čísla	19
4	Vlastnosti Napoleonovy věty	24
4.1	Fermatův bod	24
4.2	Napoleonův bod	28
4.3	Těžiště v Napoleonově trojúhelníku	28
4.4	Obsah vnějšího a vnitřního Napoleonova trojúhelníku	30
4.5	Napoleonův šestiúhelník	32
4.6	Kiepertova hyperbola	33
5	Modifikace Petr-Douglas-Neumannovy věty	35
5.1	Petr-Douglas-Neumannova věta pro čtyřúhelník	35
5.2	Thébaultova věta	37
5.3	Van Aubelova věta	41
5.4	Hadwiger-Finslerova věta	44
5.5	Napoleon-Barlottiho věta	45
6	Zobecnění Petr-Douglas-Neumannovy věty v prostoru	47

7 Závěr	50
Literatura	52
Seznam obrázků	56

Kapitola 1

Úvod

Geometrie, jakožto matematická vědní disciplína, má řadu přívlastků - krásna, přesná, abstraktní, pravidelná a mnoho dalších. Cílem této práce je zaměření na jednu z těchto vlastností prostřednictvím geometrické věty.

Proces tzv. "regularizace", kdy chaotickému uspořádání bodů v rovině, potažmo v prostoru, jsme schopni dát jistý řád, uspořádat je do pravidelných geometrických útvarů, je příkladně demonstrován v Napoleonově větě. Ta je speciálním příkladem Petr-Douglas-Neumanovy věty.

V kapitole "Historie Napoleonovy věty" odhalíme, jak to doopravdy je s jejím autorstvím a kdy poprvé se s ní setkává matematická veřejnost.

V obsáhlé třetí kapitole se seznámíme se zněním Napoleonovy věty. Následně se podíváme na několik důkazů této věty, přičemž se bude jednat jak o důkazy geometrické, tak o důkazy užívající komplexní čísla.

Vlastnostem Napoleonovy věty budeme věnovat čtvrtou kapitolu. Zde se seznámíme s jejími základními vlastnostmi (např. Fermatův bod, těžiště Napoleonových trojúhelníků aj.), avšak pozornost zaměříme i na ty méně známé (např. Napoleonův šestiúhel-

ník, Napoleonův bod aj.). Rovněž si dokážeme platnost některých vlastností. Kapitola je doplněna i důkazem Napoleonovy věty pomocí Fermatova bodu.

V kapitole "Modifikace Petr-Douglas-Neumannovy věty" se podíváme na zobecnění PDN věty pro čtyřúhelník a na věty s ní související (např. Thébaulтова věta, van Aubelova věta apod.). Obdobně jako v předchozí kapitole jsou některé věty doplněny o důkazy.

V poslední kapitole se seznámíme s procesem "regularizace" v prostoru, který si ukážeme na příkladech pětiúhelníku a šestiúhelníku.

Práce je zpracována v typografickém systému L^AT_EX a obrázky jsou vytvořeny v programu DGS GeoGebra.

Kapitola 2

Historie Napoleonovy věty

Jak už sám název věty napovídá, její autorství není připisováno nikomu jinému než slavnému francouzskému vojevůdci a státníkovi Napoleonu Bonapartemu, a to i přesto, že neexistují přesvědčivé důkazy o tom, že Napoleon byl první, kdo tuto větu dokázal. Odborná veřejnost navíc dodnes pochybuje o Napoleonových matematických schopnostech, i když jisté indície poukazují na Napoleonův talent. Vždyť spolupracovat s takovými osobnostmi matematiky jakými byli např. Gaspard Monge, Jean Baptiste Joseph Fourier, Joseph Louis Lagrange již o něčem svědčí.

O Napoleonově větě se poprvé dozvídáme z článku *New Mathematical Questions* vydaném v *The Ladies' Diary* z roku 1825, jejímž autorem je anglický matematik William Rutherford. Rutherford zde uvádí znění věty a zároveň žádá o její důkaz. Pro řadu učenců je Rutherfordův text důkazem toho, že Napoleon nebyl prvním, kdo přišel s touto větou a jejím důkazem. V roce 1826 jsou v *The Ladies' Diary* zveřejněny důkazy Napoleonovy věty. V seznamu řešitelů se vyskytuje řada jmen, avšak sám Rutherford mezi nimi není. Co je možná ještě podstatnější, ani v jednom z článků z let 1825 a 1826 zde není žádná zmínka o Napoleonovi. Nicméně i přesto je dnes Rutherfordův dotaz znám jako Napoleonova věta.

Že by Napoleon mohl být nějak spojen s touto větou, se pak pokouší dokázat Aurelio Faifofer ve svém 17. vydání *Elementi di geometria ad uso degl' istituti tecnici*

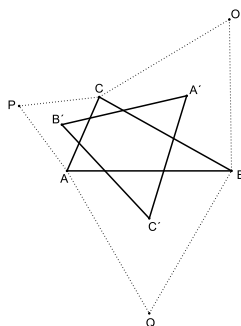
(1° biennio) e dei licei publikovaném v roce 1911. Ovšem ani on nám neposkytuje potřebné informace k tomu, abychom mohli zcela poprávu Napoleonovu větu prohlásit za Napoleonovu.

O tom, jak to tedy s původem Napoleonovy doopravdy bylo, se už zřejmě nedozvíme, a tak nezbývá než jen doufat, že název věty nese jméno skutečného autora [15], [16], [2].

Kapitola 3

Napoleonova věta a její dokazování

Napoleonova věta je speciální případ Petr-Douglas-Neumannovy věty (PDN věty). Tu poprvé publikoval v roce 1905 český matematik Karel Petr v článku *O jedné větě pro mnohoúhelníky*. PDN věta tvrdí, že při užití jistého algoritmu, lze z libovolného mnohoúhelníku získat mnohoúhelník pravidelný, který má stejný počet stran, jako původní mnohoúhelník. V roce 1940 tuto větu nezávisle na Karlu Petrovi objevili Jesse Douglas o rok později také Bernhard Hermann Neumann. V odborné literatuře se můžeme setkat s několika různými názvy této věty, a to Douglasova věta, Douglas-Neumannova věta, či Petrova věta. Předmětem zkoumání této kapitoly však bude již na úvod zmíněná Napoleonova věta, konkrétně dokazování a objevování jejích zajímavých vlastností [22], [24].



Obrázek 3.1: Napoleonova věta

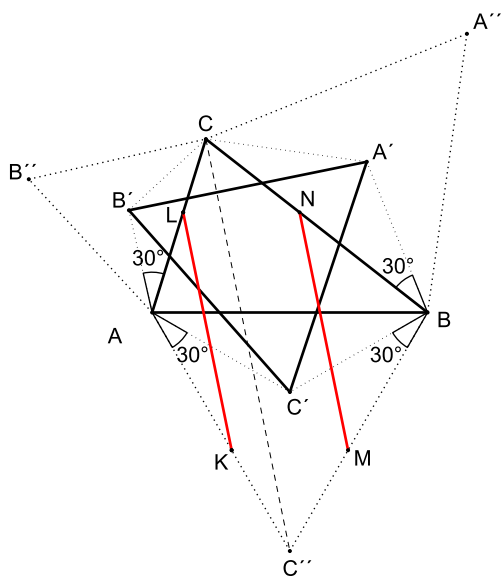
Znění Napoleonovy věty je následující (Obr. 3.1):

Nad stranami libovolného trojúhelníka sestrojme rovnostranné trojúhelníky (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy těchto rovnostranných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník [22].

Ukažme si tedy několik důkazů této věty.

Důkaz 3.1: První geometrický důkaz využívá vlastností shodného zobrazení a to otočení dvou stran Napoleonova trojúhelníku [17], [27].

Nejprve provedme otočení strany $B'C'$ o 30° ve směru záporném okolo bodu A . Výsledkem je strana KL , kde $K \in AC''$ a $L \in AC$, neboť $\angle B'AC = \angle C'AC'' = 30^\circ$. Poté provedme otočení strany $A'C'$ o 30° ve směru kladném okolo bodu B . Nyní dostáváme stranu MN , kde $M \in BC''$ a $N \in BC$, neboť $\angle A'BC = \angle C'BC'' = 30^\circ$ (Obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Napoleonova věta - rotace stran v Napoleonově trojúhelníku

Jelikož v rovnostranném trojúhelníku je vzdálenost vrcholu od jeho těžiště rovna $l = \sqrt{3}/3$ délce strany trojúhelníku, pak platí

$$|AL|/|AC| = |AB'|/|AC| = l,$$

$$|AK|/|AC''| = |AC'|/|AB| = l,$$

$$|BN|/|BC| = |BA'|/|BC| = l,$$

$$|BM|/|BC''| = |BC'|/|BA| = l.$$

Z toho plyne, že $\triangle ACC'' \sim \triangle ALK$ a $\triangle BCC'' \sim \triangle BNM$, což znamená, že $KL \parallel CC'' \parallel MN$. Dále navíc platí, že $|KL| = l|CC''| = |MN|$. Ted' je již zřejmá rovnost $|B'C'| = |A'C'|$, které svírají úhel 60° . Tím je dokázáno, že $\triangle A'B'C'$ je rovnostranný [17], [27].

Důkaz 3.2: Následující důkaz, který je rovněž geometrický, se opírá o kosinovu větu [14].

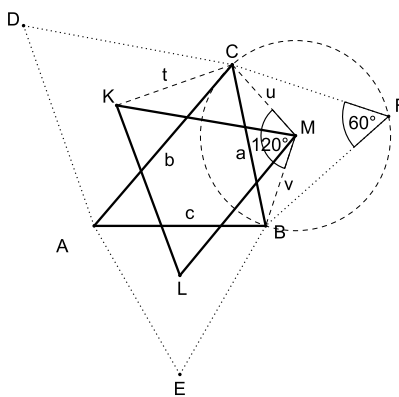
Protože $\angle CMB$ je středovým úhlem, je jeho velikost rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu při vrcholu F , tedy 120° (Obr. 3.3). Nyní aplikujme kosinovu větu pro výpočet strany a v $\triangle CBM$, tedy

$$a^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos 120^\circ.$$

Jelikož $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ a $u = v$, pak

$$a^2 = 2u^2 - 2u^2\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$a^2 = 3u^2.$$



Obrázek 3.3: Napoleonova věta - důkaz užitím kosinovy věty (1)

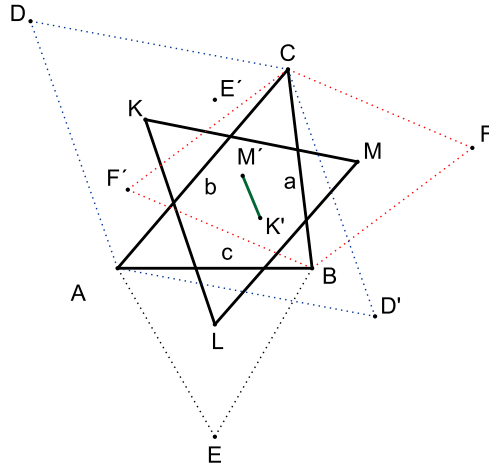
Víme tedy, že $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$ a $t = \frac{b}{\sqrt{3}}$ a dále platí, že $\angle KCM = \angle ACB + 60^\circ$. Proto

$$\begin{aligned} |KM|^2 &= u^2 + t^2 - 2ut \cos(\angle ACB + 60^\circ), \\ |KM|^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2}{3}ab \cos(\angle ACB + 60^\circ), \\ |KM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}ab \cos(\angle ACB + 60^\circ). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Obdobně lze využít kosinovu větu i pro stranu $K'M'$ (Obr. 3.4), která vznikne seštrojením rovnostranných trojúhelníků dovnitř $\triangle ABC$ nad stranami AB a AC a je tak jednou ze stran vnitřního Napoleonova trojúhelníku. Navíc platí, že $\angle K'CM' = \angle ACB - 60^\circ$.

Potom

$$|K'M'|^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}ab \cos(\angle ACB - 60^\circ). \quad (3.2)$$



Obrázek 3.4: Napoleonova věta - důkaz užitím kosinovy věty (2)

Pokud odečteme (3.2) od (3.1), dostaneme

$$\begin{aligned} |KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{2}{3}ab[\cos(\angle ACB - 60^\circ) - \cos(\angle ACB + 60^\circ)], \\ |KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{2}{3}ab(\cos \angle ACB \cos 60^\circ + \sin \angle ACB \sin 60^\circ - \\ &\quad \cos \angle ACB \cos 60^\circ + \sin \angle ACB \sin 60^\circ), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{2}{3}ab[2(\sin \angle ACB \sin 60^\circ)], \\
|KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{4}{3}ab \sin \angle ACB \sin 60^\circ, \\
|KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}ab \sin \angle ACB, \\
|KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}2S_{\triangle ABC}, \\
|KM|^2 - |K'M'|^2 &= \frac{4\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}$$

Stejně tak zjistíme, že $|KL|^2 - |K'L'|^2 = |LM|^2 - |L'M'|^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}$. To znamená, že $|KM| = |KL| = |LM|$ a zároveň $|K'M'| = |K'L'| = |L'M'|$ [14].

Důkaz 3.3: V předchozím důkazu jsme si ukázali jednu z možností, jak využít kosinovu větu k dokázání Napoleonovy věty. Ukažme si tedy další z nich [20].

Použijme kosinovou větu (3.1) z předchozího důkazu, tedy

$$|KM|^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}ab \cos(\angle ACB + 60^\circ).$$

Po vynásobení obou stran kosinovy věty třemi dostaneme

$$3|KM|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle ACB + 60^\circ). \quad (3.3)$$

Nyní upravme výraz $\cos(\angle ACB + 60^\circ)$, neboť ze součtového vzorce pro funkci kosinus platí, že

$$\cos(\angle ACB + 60^\circ) = \cos \frac{\angle ACB}{2} - \sin \frac{\angle ACB \sqrt{3}}{2}. \quad (3.4)$$

Dosazením (3.4) do (3.3), získáme

$$\begin{aligned}
3|KM|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \left(\cos \frac{\angle ACB}{2} - \sin \frac{\angle ACB \sqrt{3}}{2} \right), \\
3|KM|^2 &= a^2 + b^2 - ab \cos \angle ACB + \sqrt{3}ab \sin \angle ACB.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Pak pro stranu c v $\triangle ABC$ (Obr. 3.3) je kosinova věta ve tvaru

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle ACB), \quad (3.6)$$

a obsah $\triangle ABC$ je roven

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin(\angle ACB). \quad (3.7)$$

Dosazením (3.6) a (3.7) do (3.5) získáme

$$3|KM|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} + 2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}. \quad (3.8)$$

Jelikož formule (3.8) pro stranu $|KM|$ je symetrická v a, b, c , a totéž platí i pro zbývající strany $|KL|$ a $|LM|$, pak $\triangle KLM$ je rovnostranný [20].

Formule (3.8) dokazuje Napoleonovu větu pro vnější Napoleonův trojúhelník. Pro vnitřní Napoleonův trojúhelník musíme počítat s $\cos(\angle ACB - 60^\circ)$, což se ve výrazu (3.8) projeví změnou znaménka a výsledný výraz je ve tvaru [22]

$$3|K'M'|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{2} - 2\sqrt{3}S_{\triangle ABC}. \quad (3.9)$$

Pozn.: Ze vztahu (3.9) plyne nerovnost (3.10)

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC} \geq 0, \quad (3.10)$$

zvaná též *Weitzenböckova nerovnost* [23].

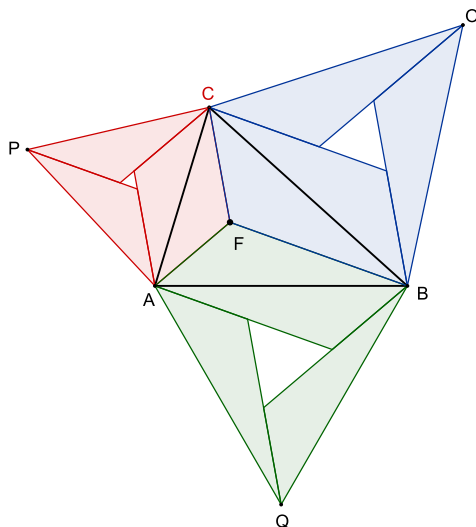
Při důkazu nerovnosti (3.10) budeme vycházet z její ekvivalentní varianty, která je popsána v následujícím vztahu.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \geq 3S_{\triangle ABC}.$$

Mějme libovolný $\triangle ABC$, který rozdělíme na tři části pomocí Fermatova bodu F . Nad jeho stranami jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky, které jsou rovněž rozděleny (Obr. 3.5). Budeme-li libovolně měnit rozměry $\triangle ABC$, potom součet obsahů rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami $\triangle ABC$ je větší (v Obr. 3.5 patrné bílé trojúhelníky) nebo roven (bílé trojúhelníky zmizí) $3S_{\triangle ABC}$. Aby došlo ke zmizení

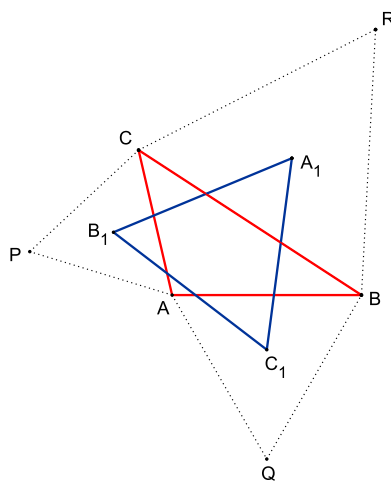
bílých trojúhelnků, musí být původní $\triangle ABC$ rovnostranný.

V případě, že se bude jednat o $\triangle ABC$, který bude mít jeden z úhlů větší nebo rovno 120° , pak tento vizuální důkaz Weitzenböckovu nerovnost neřeší [23].



Obrázek 3.5: Důkaz Weitzenböckovy nerovnosti

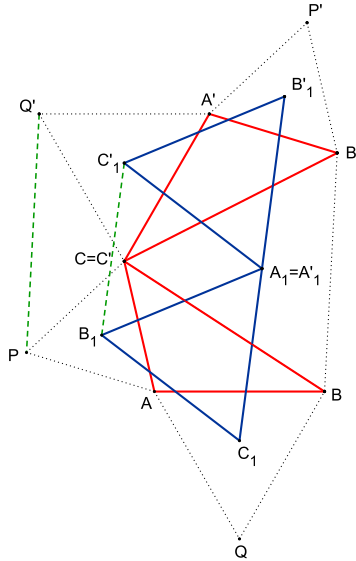
Důkaz 3.4: Mějme libovolný $\triangle ABC$ a k němu příslušný vnější Napoleonův trojúhelník $A_1B_1C_1$ (Obr. 3.6). Naším úkolem bude dokázat, že $\angle C_1A_1B_1 = 60^\circ$.



Obrázek 3.6: Napoleonova věta

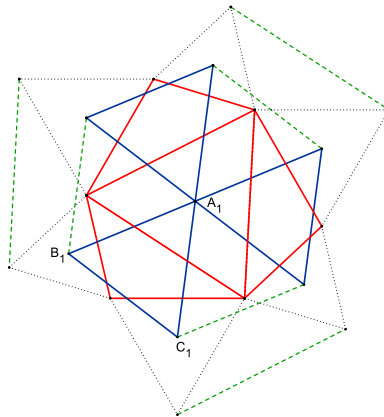
Podobně jako v prvním důkazu i zde využijeme otočení. Nicméně v tomto případě bude rotovat celá soustava (tzn. $\triangle ABC$, rovnostranné trojúhelníky nad stranami $\triangle ABC$

a vnější Napoleonův trojúhelník $A_1B_1C_1$) se středem otočení v bodě A_1 a úhlem otočení $\varphi = 120^\circ$ ve směru záporném (Obr. 3.7).



Obrázek 3.7: Napoleonova věta - rotace celé soustavy (1)

Úsečkami spojíme body PQ' a $B_1C'_1$. Je zřejmé, že $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B'_1C'_1$ a $B_1C_1 = B'_1C'_1$. Pokud se zaměříme na bod C , zjistíme, že v tomto vrcholu se sbíhá hned 6 trojúhelníků. Tři z nich, tj. $\triangle CA'Q'$, $\triangle CBB'$ a $\triangle CPA$ jsou rovnostranné. Vzhledem k tomu, že $|\angle A'C'B'| = |\angle ABC|$, tak potom $|\angle PCQ'| = |\angle CAB|$. To znamená, že $\triangle ABC \cong \triangle CQ'P$ a pětiúhelník $CA'Q'PA$ je shodný s pětiúhelníkem $AQB'CP$. Pak tedy platí, že $|B_1C'_1| = |B_1C_1| = |B'_1C'_1|$.



Obrázek 3.8: Napoleonova věta - rotace celé soustavy (2)

Pokud ještě jednou zopakujeme rotaci se středem v bodě A_1 a úhlem otočení 120° , dospějeme k tomu, že získáme pravidelný šestiúhelník (Obr. 3.8). To znamená, že $\angle C_1 A_1 B_1 = 60^\circ$ a $\triangle A_1 B_1 C_1$ je rovnostranný [20].

3.1 Napoleonova věta a komplexní čísla

Ještě předtím, než si ukážeme další důkaz Napoleonovy věty užitím komplexních čísel, je potřeba o nich něco říct ve vztahu k trojúhelníku.

Každému komplexnímu číslu $z = a + bi$, značíme $B = B(z)$, odpovídá bod $B = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^2$, kde \mathbb{R}^2 je Gaussova rovina.

Spojíme-li vrcholy trojúhelníku $B_1 B_2 B_3 = B(z_3)$ se středy protilehlých stran, získáme tak těžiště T trojúhelníku $B(z_3)$, jehož číselná hodnota je rovna $\frac{(z_1 + z_2 + z_3)}{3}$ [5].

Věta 3.1 (Rovnostranné trojúhelníky). *Trojúhelník $B(z_1)B(z_2)B(z_3)$, jehož vrcholy jsou uspořádány proti směru hodinových ručiček, je rovnostranný právě tehdy, když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek:*

$$z_3 - z_1 = -\omega^2(z_2 - z_1), \text{ nebo } z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0;$$

zde $\omega^3 = 1$ a $1 + \omega + \omega^2 = 0$ [5].

Obecně. *Trojúhelník $B(z_1)B(z_2)B(z_3)$ je rovnostranný právě tehdy, když*

$$\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_3 z_3 = 0,$$

kde ω_1, ω_2 a ω_3 jsou různé třetí odmocniny z jedné [5].

Předchozí teorii můžeme nyní využít při důkazech Napoleonovy věty pomocí komplexních čísel [5].

Důkaz 3.5: Necht' $A = B(z_1)$, $B = B(z_2)$, $C = B(z_3)$, $O = B(w_1)$, $P = B(w_2)$, $Q =$

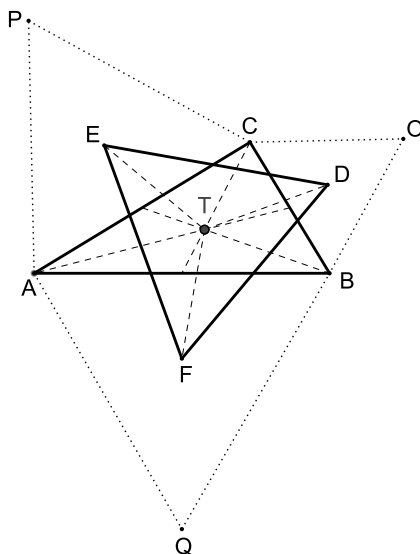
$B(w_3)$ a z_T je číslo, které odpovídá těžišti $T \triangle ABC$ s hodnotou $z_T = \frac{(z_1 + z_2 + z_3)}{3}$.

Podle věty o rovnostranných trojúhelnících pak dostaneme následující rovnice:

$$w_1 + z_3\omega + z_2\omega^2 = 0, \quad (3.11)$$

$$w_2 + z_1\omega + z_3\omega^2 = 0, \quad (3.12)$$

$$w_3 + z_2\omega + z_1\omega^2 = 0. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.9: Napoleonova věta - komplexní čísla (1)

Po sečtení rovnic (3.11), (3.12) a (3.13), s ohledem na vztah $\omega + \omega^2 + 1 = 0$, získáme rovnost $w_1 + w_2 + w_3 = z_1 + z_2 + z_3$. To znamená, že těžiště $\triangle OPQ$ je shodné s těžištěm $\triangle ABC$.

Nyní si uvedeme rovnice těžišť z_D , z_E a z_F .

$$z_D = \frac{(w_1 + z_2 + z_3)}{3} = \frac{(-z_3\omega - z_2\omega^2 + z_2 + z_3)}{3},$$

$$z_E = \frac{(w_2 + z_1 + z_3)}{3} = \frac{(-z_1\omega - z_3\omega^2 + z_1 + z_3)}{3},$$

$$z_F = \frac{(w_3 + z_1 + z_2)}{3} = \frac{(-z_2\omega - z_1\omega^2 + z_1 + z_2)}{3}.$$

Pak po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} 3(z_D + z_E + z_F) &= -z_3\omega - z_2\omega^2 + z_2 + z_3 - z_1\omega - z_3\omega^2 + z_1 + z_3 - \\ &- z_2\omega - z_1\omega^2 + z_1 + z_2, \end{aligned}$$

$$3(z_D + z_E + z_F) = (z_1 + z_2 + z_3)(-\omega - \omega^2 + 2),$$

$$3(z_D + z_E + z_F) = 3(z_1 + z_2 + z_3).$$

Tím jsme dokázali, že i Napoleonův trojúhelník DEF se shoduje v težišti s $\triangle ABC$.

Navíc platí, i s využitím vztahu $\omega^3 = 1$, že

$$\begin{aligned} 3(z_D + z_E\omega + z_F\omega^2) &= -z_3\omega - z_2\omega^2 + z_2 + z_3 - z_1\omega^2 - z_3\omega^3 + z_1\omega + \\ &+ z_3\omega - z_2\omega^3 - z_1\omega^4 + z_1\omega^2 + z_2\omega^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(z_D + z_E\omega + z_F\omega^2) &= z_3(-\omega + 1 - 1 + \omega) + z_2(-\omega^2 + 1 - 1 + \omega^2) + \\ &+ z_1(-\omega^2 + \omega - \omega + \omega^2), \end{aligned}$$

$$3(z_D + z_E\omega + z_F\omega^2) = 0,$$

což znamená, že Napoleonův trojúhelník DEF je rovnostranný [5].

Důkaz 3.6: Necht' je dáno $a = CA'$, $b = AB'$, $c = BC'$, $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$ a rotace v kladném směru o více než 60° tak, že $\omega^3 = -1$ a $\omega = 1 + \omega^2$ a dále strany $\omega a = A'B$, $\omega b = B'C$, $\omega c = C'A$ (Obr. 3.10).

Pak platí rovnice

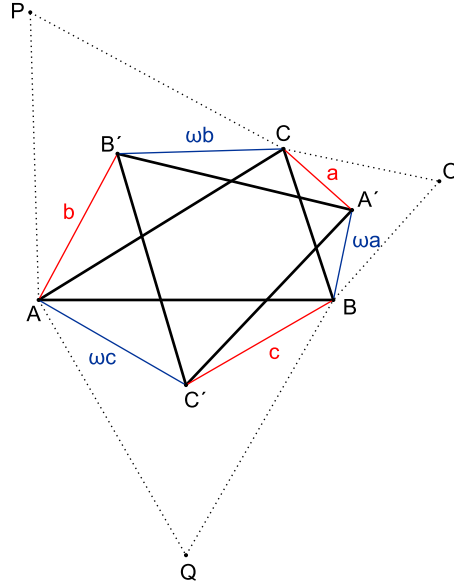
$$0 = a + \omega a + b + \omega b + c + \omega c,$$

kterou upravíme na tvar

$$0 = (1 + \omega)(a + b + c),$$

což znamená, že

$$0 = a + b + c.$$



Obrázek 3.10: Napoleonova věta - komplexní čísla (2)

Aby $\triangle A'B'C'$ byl rovnostranný, musí platit $A'B' = \omega A'C'$. To znamená, že

$$\omega A'C' - A'B' = \omega(A'B + BC') + (B'C + CA'),$$

$$\omega A'C' - A'B' = \omega(\omega a + c) + (\omega b + a),$$

$$\omega A'C' - A'B' = (\omega^2 + 1)a + \omega c + \omega b,$$

$$\omega A'C' - A'B' = \omega(a + b + c),$$

$$\omega A'C' - A'B' = 0.$$

Náš předpoklad byl splněn, a tak $\triangle A'B'C'$ je rovnostranný [18].

Důkaz 3.7: Necht' je dán libovolný $\triangle ABC$ nad jehož stranami jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABQ , BCO , CAP . Necht' číslo l reprezentuje otočení o úhel 120° . Potom můžeme rovnostranné trojúhelníky ABQ , BCO , CAP vyjádřit jako

$$A + lB + l^2Q = 0,$$

$$B + lC + l^2O = 0,$$

$$C + lA + l^2P = 0.$$

Těžiště trojúhelníků ABQ , BCO , CAP odpovídají po řadě číslům $C_1 = (A+B+Q)/3$, $A_1 = (B+C+O)/3$, $B_1 = (C+A+P)/3$. Chceme dokázat, že platí $C_1 + lA_1 + l^2B_1 = 0$.
To znamená, že [19]

$$3(C_1 + lA_1 + l^2B_1) = A + B + Q + l(B + C + O) + l^2(C + A + P),$$

$$3(C_1 + lA_1 + l^2B_1) = C + lA + l^2P + l(A + lB + l^2Q) + l^2(B + lC + l^2O),$$

$$3(C_1 + lA_1 + l^2B_1) = 0.$$

Kapitola 4

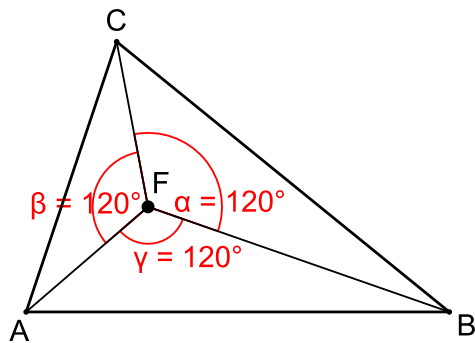
Vlastnosti Napoleonovy věty

Napoleonova věta v sobě skrývá řadu zajímavých vlastností. Úkolem této kapitoly bude některé z nich odtažnit a čtenáři je přiblížit.

4.1 Fermatův bod

Zřejmě nejznámější vlastnost, která je spojována s Napoleonovou větou je věta o Fermatově bodu. Říká nám (Obr. 4.1):

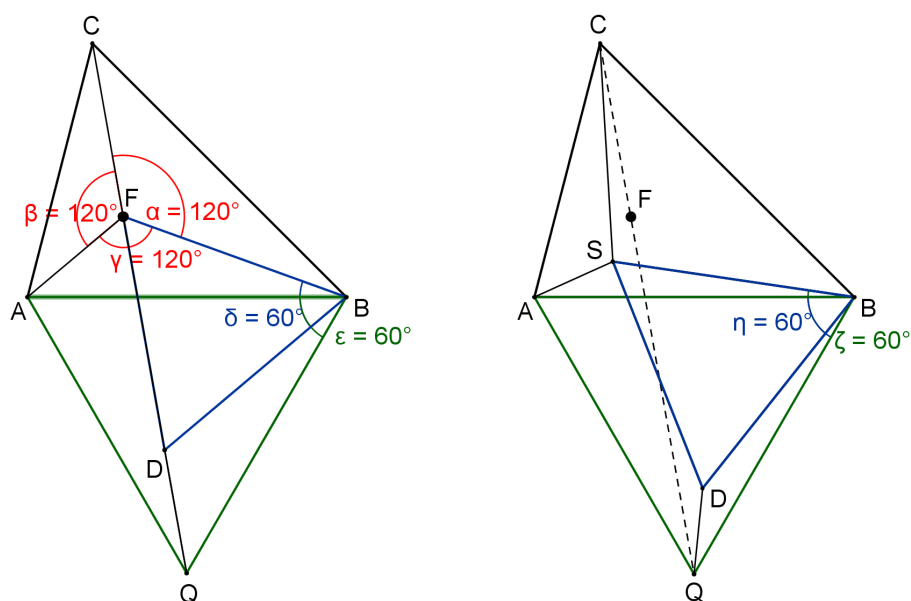
V každém trojúhelníku s vnitřním úhlem do 120° existuje právě jediný bod F takový, že součet délek $|AF| + |BF| + |CF|$ je minimální. Tento bod F je umístěn v trojúhelníku ABC tak, že úhly AFC , AFB a BFC mají vždy velikost 120° [4].



Obrázek 4.1: Fermatův bod

Nyní si ukážeme důkaz této věty [4].

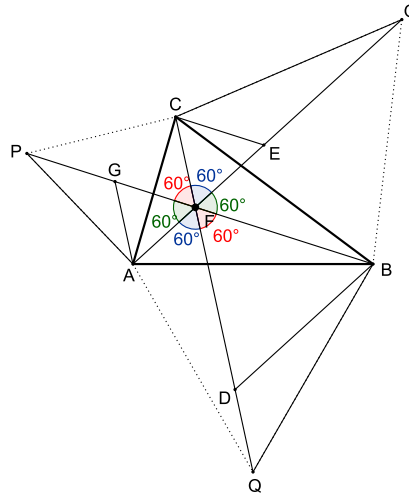
Důkaz 4.1: Nejprve si dokažme první část věty, že součet délek $|AF| + |BF| + |CF|$ je minimální. Provedme rotaci $\triangle AFB$ o 60° ve směru kladném okolo bodu B . Bod D je obrazem bodu F a bod Q je obrazem bodu A . Výsledkem pak je $\triangle QBD$ (Obr. 4.2). Vzniklý $\triangle BDF$ je rovnostranný, neboť strany BD a BF jsou stejně dlouhé a zároveň svírají úhel o velikosti 60° . Obdobně i $\triangle ABQ$ je rovnostranný.



Obrázek 4.2: Fermatův bod - $\mathfrak{R}_{\triangle AFB}(B, 60^\circ)$ a $\mathfrak{R}_{\triangle ASB}(B, 60^\circ)$

$|AF| = |DQ|$ můžeme dosadit do součtu minimálních délek a dostaneme $|DQ| + |DF| + |CF|$, což je rovno délce lomené čáry $QDFC$. Ta je minimální, jsou-li body kolinéární. To znamená, že bod F je bodem úsečky CQ [4].

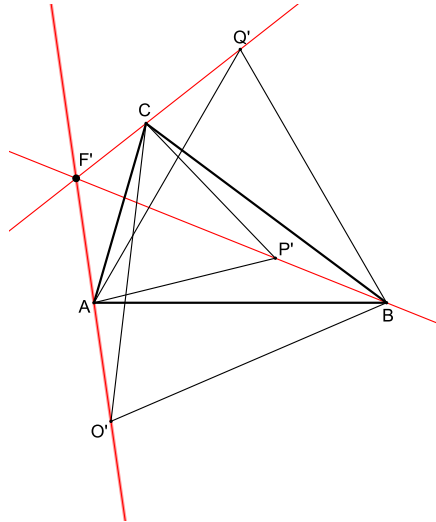
Následuje druhá část důkazu, tj. dokázat, že úhly AFC , AFB a BFC mají vždy velikost 120° . Provedeme-li rotaci (obdobně jako v první části důkazu) $\triangle BFC$ (resp. $\triangle CFA$) o 60° ve směru kladném okolo bodu C (resp. A), získáme tak rovnostranné trojúhelníky BOC a CEF (resp. CPA a AGF). Z předchozího důkazu víme, že platí $\angle BFQ = 60^\circ$ pak i $\angle CFO = 60^\circ$ a $\angle AFP = 60^\circ$ (Obr. 4.3). Z vlastností vrcholových úhlu je pak zřejmé, že úhly AFC , AFB a BFC mají velikost 120° [9].



Obrázek 4.3: Fermatův bod - úhly AFC , AFB a BFC

Pozn.: Z věty o Fermatově bodu tedy plyne, že nejmenší součet vzdáleností $|AF| + |BF| + |CF|$ je roven délce každé z úseček $|AO|$, $|BP|$ a $|CQ|$ (Obr. 4.3).

Existuje však ještě jeden Fermatův bod, někdy též zvaný jako druhý Fermatův bod. Ten získáme spojením vrcholů $\triangle ABC$ s protilehlými vrcholy rovnostranných trojúhelníků sestrojených dovnitř nad stranami $\triangle ABC$ (Obr. 4.4) [25].



Obrázek 4.4: Druhý Fermatův bod

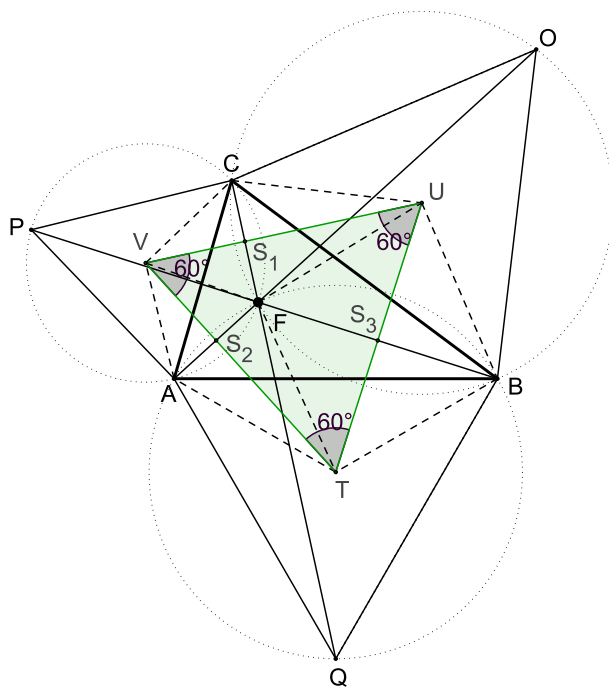
Vlastnosti Fermatova bodu můžeme využít k samotnému důkazu Napoleonovy věty.

Necht' nám to dokládají následující řádky [4].

Důkaz 4.2: Velikost úhlu u vrcholu Q rovnostranného $\triangle ABQ$ je 60° . Dále z věty o Fermatově bodu víme, že $\angle AFB = 120^\circ$. To znamená, že čtyřúhelník $AFBQ$ je tětíivový a vzdálenosti bodů A , B a F od bodu T , který je středem kružnice opsané danému čtyřúhelníku $AFBQ$, jsou stejné. Obdobně dospějeme i k rovnostem $|BU| = |FU| = |CU|$ a $|CV| = |FV| = |AV|$. Protože $|AT| = |FT|$ a $|AV| = |FV|$, pak čtyřúhelník $ATFV$ nazýváme deltoidem. Hlavní úhlopříčka TV deltoidu $ATFV$ půlí vedlejší úhlopříčku AF v bodě S_2 . Stejně tak jsou půleny vedlejší úhlopříčky BF a CF deltoidů $BUFT$ a $CVFU$ po řadě v bodech S_3 a S_1 . Zároveň jsou hlavní úhlopříčky zmíněných deltoidů osami úhlů, a tak lze například $\angle ATB$ vyjádřit jako součet úhlů $ATS_2 + FTS_2 + FTS_3 + BTS_3$. Jelikož $\angle ATS_2 = \angle FTS_2$ a $\angle FTS_3 = \angle BTS_3$, pak

$$\angle ATB = 2(\angle FTS_2 + \angle FTS_3),$$

$$\angle ATB = 2\angle S_2TS_3.$$

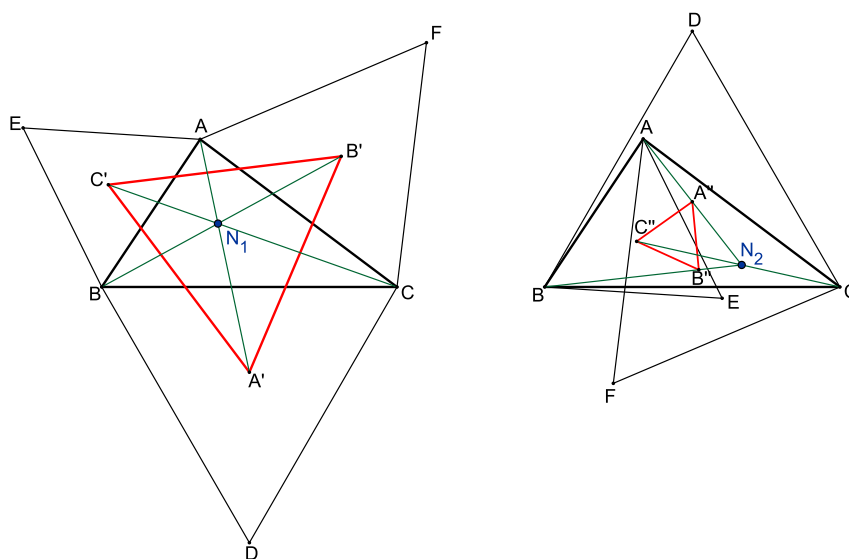


Obrázek 4.5: Důkaz Napoleonovy věty pomocí Fermatova bodu

Nicméně $\angle S_2TS_3$ je ve skutečnosti $\angle VTU$ stejnojmenného trojúhelníku. Z vlastností obvodového a středového úhlu vyplývá, že středový $\angle ATB$ je roven dvojnásobku obvodového $\angle AQB$ příslušného k témuž oblouku AB , tj. 120° . Pak $\angle VTU = 60^\circ$. Cyklickou záměnou lze dokázat, že i zbývající úhly $\triangle TUV$ jsou taktéž 60° [4].

4.2 Napoleonův bod

Vedle již zmíněných Fermatových bodů existují i Napoleonovy body. Ty jsou definovány jako průsečíky spojnic mezi vrcholy libovolného trojúhelníku s protilehlými vrcholy vnějšího, resp. vnitřního Napoleonova trojúhelníku. O tzv. prvním Napoleonově bodě mluvíme v případě vnějšího Napoleonova trojúhelníku. Jedná-li se o vnitřní Napoleonův trojúhelník, pak hovoříme o tzv. druhém Napoleonově bodě (Obr. 4.6) [10].



Obrázek 4.6: Napoleonovy body

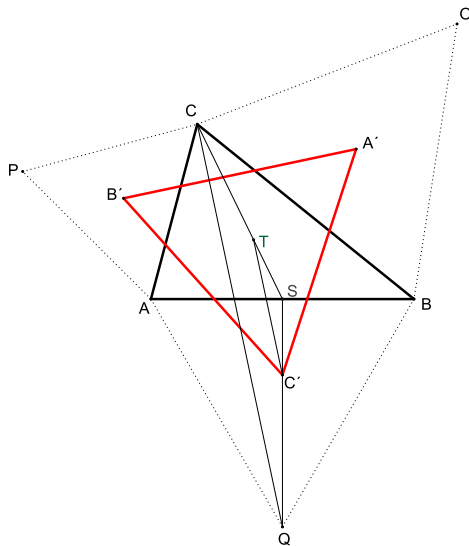
4.3 Těžiště v Napoleonově trojúhelníku

O těžišti T libovolného trojúhelníku ABC a Napoleonových trojúhelnících $A'B'C'$ a $A''B''C''$, kde $\triangle A'B'C'$ je vnější Napoleonův trojúhelník a $\triangle A''B''C''$ je vnitřní Napo-

leonův trojúhelník, platí následující tvrzení:

Těžiště $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A''B''C''$ je shodné s těžištěm T $\triangle ABC$ [22].

Důkaz 4.3:



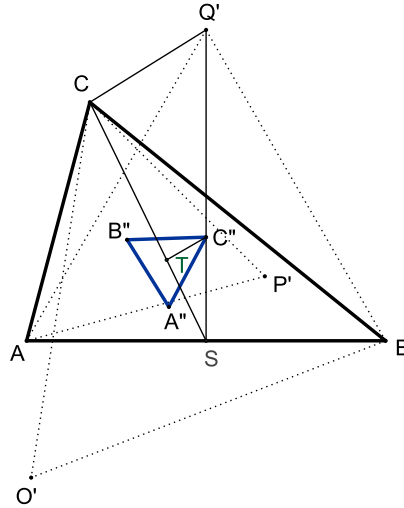
Obrázek 4.7: Společné těžiště pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$

Důkaz si rozdělíme na dvě části. V první si dokážeme, že těžiště T je společné pro trojúhelník ABC a vnější Napoleonův trojúhelník $A'B'C'$. V té druhé si totéž dokážeme pro trojúhelník ABC a vnitřní Napoleonův trojúhelník $A''B''C''$.

Necht' bod S je středem strany AB , bod T je těžištěm $\triangle ABC$ a bod C' je těžištěm $\triangle ABQ$. Trojúhelníky CQS a $TC'S$ jsou podobné, neboť platí, že $|CS| = 3|ST|$ a $|QS| = 3|C'S|$, $CQ \parallel TC'$ a $|CQ| = 3|TC'|$. Obdobně $|AO| = 3|TA'|$ a $|BP| = 3|TB'|$. Protože $|AO| = |BP| = |CQ|$, pak $|TA'| = |TB'| = |TC'|$. To znamená, že bod T je rovněž těžištěm $\triangle A'B'C'$.

Necht' bod S je středem strany AB , bod T je těžištěm $\triangle ABC$ a bod C'' je těžištěm $\triangle ABQ'$. Trojúhelníky $CQ'S$ a $TC''S$ jsou podobné, neboť platí, že $|CS| = 3|ST|$

a $|Q'S| = 3|C''S|$, $CQ' \parallel TC''$ a $|CQ'| = 3|TC''|$. Obdobně $|AO'| = 3|TA''|$ a $|BP'| = 3|TB''|$. Protože $|AO'| = |BP'| = |CQ'|$, pak $|TA''| = |TB''| = |TC''|$. To znamená, že bod T je rovněž těžištěm $\triangle A''B''C''$. Tím máme dokázáno, že bod T je společným těžištěm pro trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ a $A''B''C''$ [27].



Obrázek 4.8: Společné těžiště pro trojúhelníky ABC a $A''B''C''$

4.4 Obsah vnějšího a vnitřního Napoleonova trojúhelníku

Mějme libovolný trojúhelník ABC . K němu sestrojme vnější Napoleonův trojúhelník $A'B'C'$ a vnitřní Napoleonův trojúhelník $A''B''C''$. Potom pro obsahy těchto 3 trojúhelníků platí:

Součet orientovaných obsahů Napoleonových trojúhelníků $A'B'C'$ a $A''B''C''$ je roven obsahu trojúhelníka ABC [22].

Důkaz 4.4: Obsah rovnostranného trojúhelníku je roven $\frac{\sqrt{3}}{4}$ obsahu čtverce, tzn. že pro obsah vnějšího, resp. vnitřního Napoleonova trojúhelníku platí vztah $S_1 = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$,

resp. $S_2 = \frac{y^2}{4}\sqrt{3}$. Nyní využijeme vztahů (3.8) a (3.9) ze str. 16, které platí postupně pro vnější a vnitřní Napoleonův trojúhelník. Vynásobíme-li obě strany vztahů (3.8) a (3.9) konstantou $\frac{\sqrt{3}}{12}$, pak dostaneme

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \quad (4.1)$$

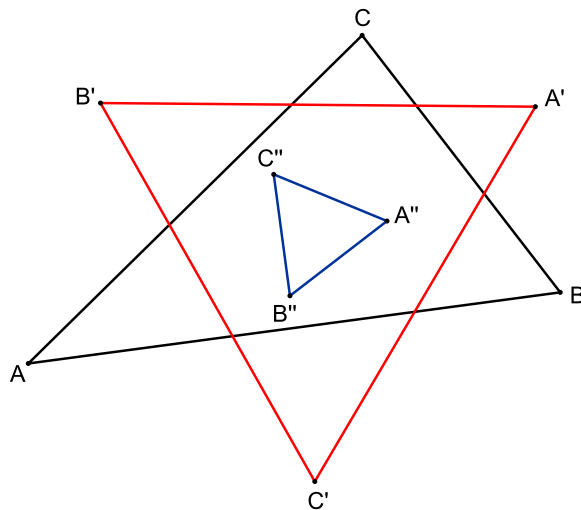
pro vnější Napoleonův trojúhelník a

$$\frac{y^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} \quad (4.2)$$

pro vnitřní Napoleonův trojúhelník. Součtem orientovaných obsahů S_1 a S_2 , kde obsah S_1 je reprezentován vztahem (4.1) a obsah S_2 je reprezentován vztahem (4.2), dostaneme

$$S = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} - \left(\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}\right),$$

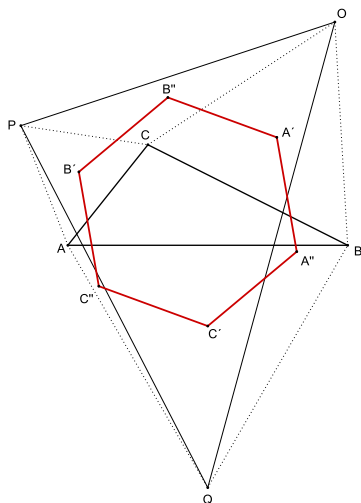
odkud je zřejmé, že $S = S_{\Delta ABC}$ [11].



Obrázek 4.9: Obsahy Napoleonových trojúhelníků $A'B'C'$ a $A''B''C''$

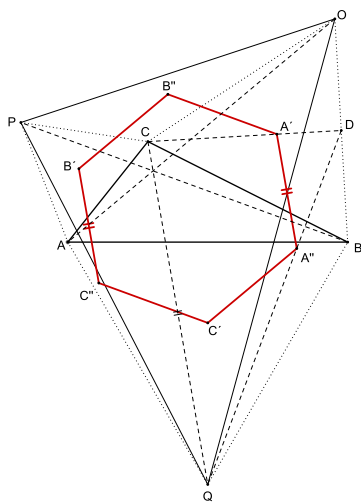
4.5 Napoleonův šestiúhelník

Necht' APC , COP a BQA jsou rovnostranné trojúhelníky sestavené nad stranami $\triangle ABC$. Body A'' , B'' a C'' jsou těžiště trojúhelníků BOQ , CPO a APQ . Potom body A' , A'' , C' , C'' , B' , B'' tvoří pravidelný šestiúhelník (Obr. 4.10) [13].



Obrázek 4.10: Napoleonův šestiúhelník

Důkaz 4.5: Necht' D je střed strany BO . Strana CQ v $\triangle CDQ$ je rovnoběžná se stranou $A'A''$ a platí, že $A'A'' = \frac{CQ}{3}$. Podobně pro protější stranu $B'C''$ platí, že $B'C'' \parallel CQ$ a $B'C'' = \frac{CQ}{3}$. Z toho plyne, že $A'A'' = B'C''$ a $A'A'' \parallel B'C''$. Zbývající dva páry proti-

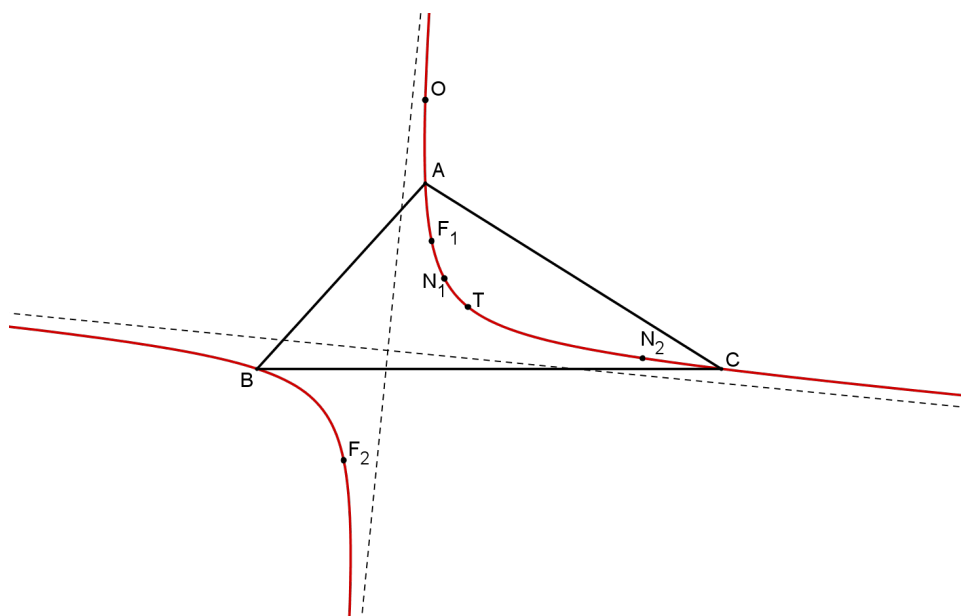


Obrázek 4.11: Napoleonův šestiúhelník - důkaz

lehlých stran, tj. $A''C'$, $B'B''$ a $C'C''$, $A'B''$, získáme stejným způsobem. Nicméně z věty o Fermatově bodu víme, že úsečky AO , BP , a CQ jsou stejně dlouhé a že jejich společným průsečíkem je již zmíněný Fermatův bod, z něhož vidíme strany $\triangle ABC$ pod stejným úhlem 120° . Strany šestiúhelníku $A'A''C'C''B'B''$ jsou stejně dlouhé a úhly mezi sousedními stranami svírají úhel 120° , což dokazuje, že šestiúhelník $A'A''C'C''B'B''$ je pravidelný [13].

4.6 Kiepertova hyperbola

V předchozích částech kapitoly jsme se zabývali některými významnými body, které souvisejí s Napoleonovou větou, jako je například vnější a vnitřní Fermatův bod, těžiště atd. Je s podivem, že tyto body a řada dalších leží na kuželosečce. Tou kuželosečkou je tzv. Kiepertova hyperbola. Jedná se o rovnoosou hyperbolu, která zároveň prochází vrcholy $\triangle ABC$ (Obr. 4.12) [8].



Obrázek 4.12: Kiepertova hyperbola

Z Obr. 4.12 můžeme vidět, že větev 1. kvadrantu prochází vrcholy A , C $\triangle ABC$, těžištěm T , ortocentrem O , vnějším Fermatovým bodem F_1 a Napoleonovými body N_1 , N_2 .

Naproti tomu větev 3. kvadrantu obsahuje pouze vrchol $B \triangle ABC$ a vnitřní Fermatův bod F_2 .

Kapitola 5

Modifikace

Petr-Douglas-Neumannovy věty

V předchozích kapitolách jsme se věnovali Napoleonově větě, která je zřejmě nejznámějším speciálním případem Petr-Douglas-Neumannovy věty (PDN věty). V následující kapitole se podíváme na další speciální případy PDN věty a to na PDN větu pro čtyřúhelník. Stěžejní pak pro nás budou zejména Thébaultova, Van Aubelova a Napoleon-Barlottiho věta [22].

5.1 Petr-Douglas-Neumannova věta pro čtyřúhelník

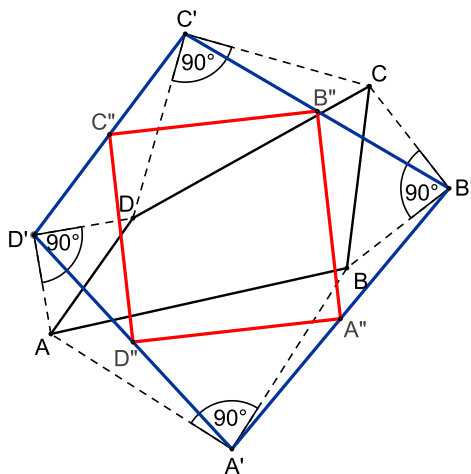
V úvodu této podkapitoly se seznámíme s obecným zněním PDN věty pro čtyřúhelník a poté bychom se zaměřili na několik speciálních případů této věty. Podívejme se tedy nejprve na obecnou formulaci PDN věty pro čtyřúhelník, která zní:

Nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$ sestrojme rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $i \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $i \in \{1, 2, 3\}$. Vrcholy rovnoramenných trojúhelníků tvoří čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Nad stranami čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ sestrojme rovnoramenné troj-

úhelníky s úhlem $j \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $j \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq i$. Potom vrcholy rovnoramenných trojúhelníků tvoří pravidelný čtyřúhelník $A''B''C''D''$. Sestrojíme-li nad stranami čtyřúhelníka $A''B''C''D''$ rovnoramenné trojúhelníky s úhlem $k \cdot 2\pi/4$ při hlavním vrcholu, kde $k \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq i, j$, dostaneme bod - společné těžiště čtyřúhelníků $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ [22].

Pro matematicky méně zdatné jedince se může tato věta zdát poměrně složitá a nepřehledná. Proto bych zde uvedl ještě jiné znění PDN věty pro čtyřúhelník, které je výstižné a srozumitelné.

Nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$ sestrojíme rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich vrcholy tvoří čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Potom středy stran $A''B''C''D''$ čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ tvoří čtverec (Obr. 5.1) [22].

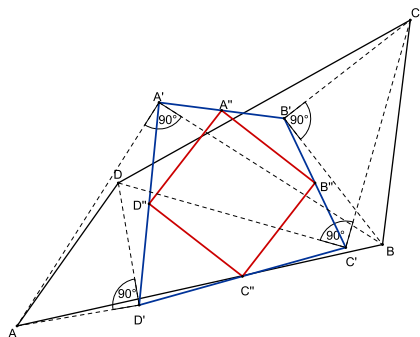


Obrázek 5.1: PDN věta pro čtyřúhelník

Uvědomme si, kolik operací jsme potřebovali k sestrojení rovnostranného trojúhelníku v Napoleonově větě a kolik operací je zapotřebí nyní k sestrojení čtverce v PDN větě pro čtyřúhelník. Zatímco při sestrojení Napoleonova trojúhelníku jsme se k oné "pravidelnosti" dostali jedním krokem, kdy jsme našli středy rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami libovolného $\triangle ABC$, které byly zároveň vrcholy onoho hle-

daného rovnostranného Napoleonova trojúhelníka, u PDN věty pro čtyřúhelník jsme se ke čtverci dostali až ve druhém kroku [22].

Obdobně jako u Napoleonovy věty, tak i u PDN věty pro čtyřúhelník dostáváme řešení, pokud sestrojíme všechny rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky dovnitř (Obr. 5.2).

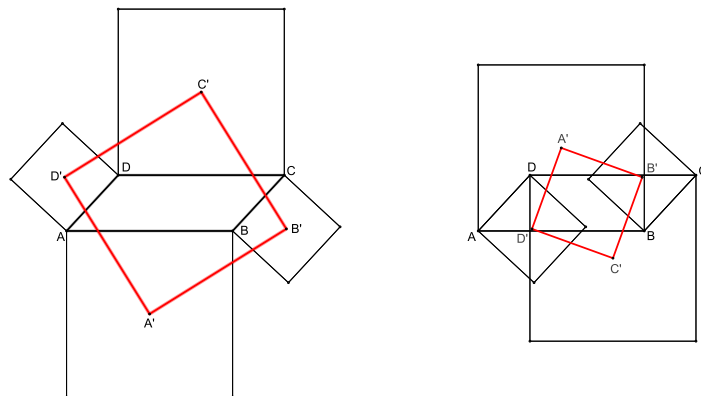


Obrázek 5.2: PDN věta pro čtyřúhelník - vnitřní čtverec

5.2 Thébaultova věta

Thébaultova věta je speciálním případem PDN věty pro čtyřúhelník, jejímž autorem je Victor Thébault a která nám říká:

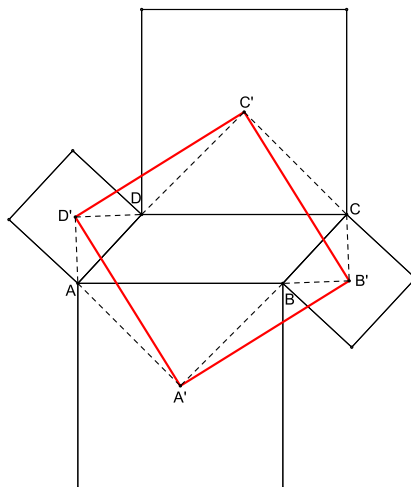
Nad stranami rovnoběžníku sestrojme čtverce (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy čtverců tvoří čtverec [4].



Obrázek 5.3: Thébaultova věta - vnější a vnitřní čtverec

Nyní budou následovat dva důkazy této věty.

Důkaz 5.1: O trojúhelnících $AA'D'$ a $BA'B'$ řekněme, že jsou shodné, protože platí $|AD'| = |BB'|$, $|AA'| = |BA'|$ a $\angle D'AA' = \angle B'BA'$. Provedeme-li $\Re(A', -90^\circ)$, pak se nám $\triangle AA'D'$ zobrazí do $\triangle BA'B'$. Z toho tedy plyne, že délky stran $A'D'$, $A'B'$ jsou shodné a navíc jsou tyto strany na sebe kolmé. Stejným způsobem bychom postupovali i u zbývajících stran [4].



Obrázek 5.4: Thébaultova věta - důkaz

Druhý důkaz využívá komplexních čísel [28].

Důkaz 5.2: Necht' T je středem rovnoběžníku $ABCD$ a středy stran tohoto rovnoběžníku jsou reprezentovány komplexními čísly a , $-a$, b , $-b$ (Obr. 5.5).

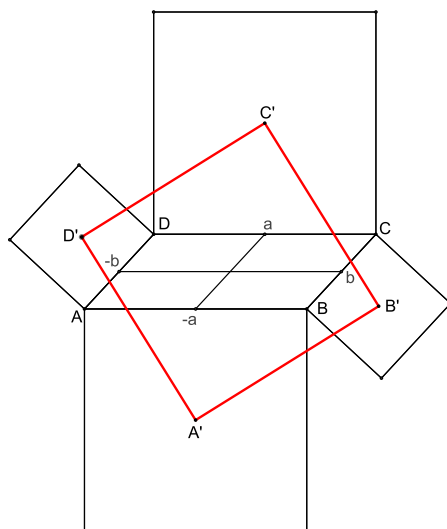
Středem strany AD je komplexní číslo $-b$, přičemž nazveme-li ho bodem U , potom úsečka DU odpovídá komplexnímu číslu a a úsečka $D'U$ odpovídá komplexnímu číslu ai . To znamená, že bod D' je reprezentován komplexním číslem $-b + ai$. Podobně bychom získali i zbývající body čtyřúhelníku $A'B'C'D'$, tj. $C' = a + bi$, $B' = b - ai$ a $A' = -a - bi$. Potom pro stranu $A'B'$ platí komplexní číslo

$$\begin{aligned} c &= (b - ai) - (-a - bi), \\ c &= (1 + i)b + (1 - i)a, \end{aligned} \tag{5.1}$$

a pro stranu $D'C'$ komplexní číslo

$$\begin{aligned} d &= (a + bi) - (-b + ai), \\ d &= (1 + i)b + (1 - i)a. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Protože se vztahy (5.1) a (5.2) sobě rovnají, můžeme o stranách $A'B'$ a $C'D'$ říct, že $|A'B'| = |C'D'|$ a zároveň $A'B' \parallel C'D'$.



Obrázek 5.5: Thébaultova věta - komplexní čísla

Nyní tento postup zopakujeme pro strany $A'D'$ a $B'C'$. Straně $A'D'$ odpovídá komplexní číslo

$$\begin{aligned} e &= (-b + ai) - (-a - bi), \\ e &= (i - 1)b + (1 + i)a, \end{aligned} \tag{5.3}$$

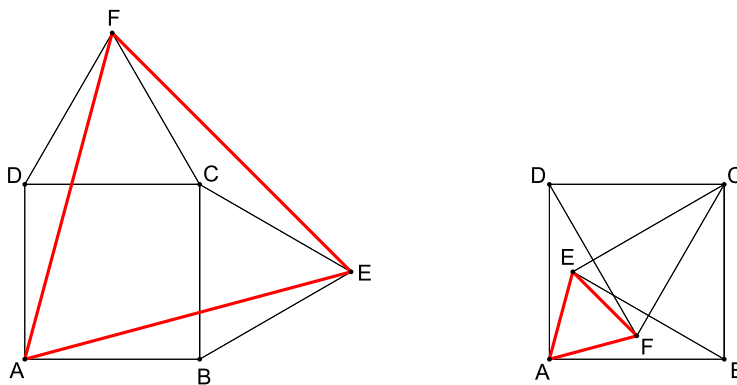
a straně $B'C'$ komplexní číslo

$$\begin{aligned} f &= (a + bi) - (b - ai), \\ f &= (i - 1)b + (1 + i)a. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Z rovnosti vztahů (5.3) a (5.4) opět plyne, že $|A'D'| = |B'C'|$ a zároveň $A'D' \parallel B'C'$. Protože $ci = f$, znamená to, že $A'D' \perp A'B'$, čímž máme dokázáno, že čtyřúhelník $A'B'C'D'$ je čtvercem [28].

Victor Thébault je autorem ještě jedné věty, ve které se tentokrát hovoří o rovnostranném trojúhelníku, jakožto o výsledném útvaru.

Nad stranami BC a CD čtverce $ABCD$ sestrojme rovnostranné trojúhelníky BEC a CFD (oba vně nebo dovnitř). Pak trojúhelník AEF je rovnostranný (Obr. 5.6) [29].



Obrázek 5.6: Thébaultova věta - vnější a vnitřní rovnostranný trojúhelník

Důkaz 5.3: Úhel při vrcholu B v $\triangle ABE$ je roven 150° (Obr. 5.7). Protože $\triangle ABE$ je rovnoramenný, pak na úhly při základně AE zůstává 30° , tj. po 15° pro každý z vrcholů A a E . Stejné rozložení a velikosti úhlů mají i trojúhelníky ECF a FDA , neboť $\triangle ABE \cong \triangle ECF \cong \triangle FDA$ podle věty *sus*. Potom

$$\angle FAE = \angle DAB - (\angle DAF + \angle EAB),$$

$$\angle FAE = 90^\circ - 30^\circ,$$

$$\angle FAE = 60^\circ.$$

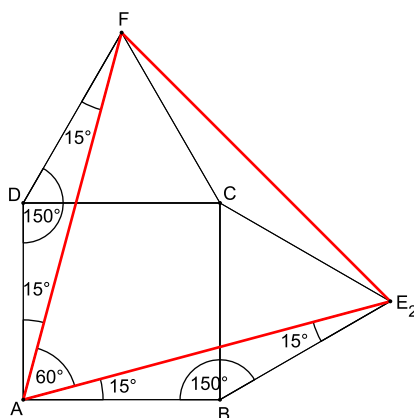
Dále

$$\angle EFA = \angle CFD - \angle AFD + \angle EFC,$$

$$\angle EFA = 60^\circ - 15^\circ + 15^\circ,$$

$$\angle EFA = 60^\circ,$$

což znamená, že $\triangle AEF$ je rovnostranný [30].

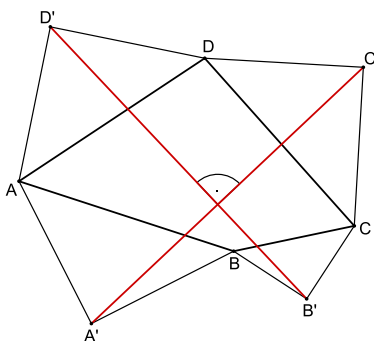


Obrázek 5.7: Thébaultova věta - důkaz (2)

5.3 Van Aubelova věta

Další významnou větou, která je spojována s PDN větou, je van Aubelova věta. Jejím autorem je M. H. van Aubel, který ji publikoval v roce 1878 v následujícím znění:

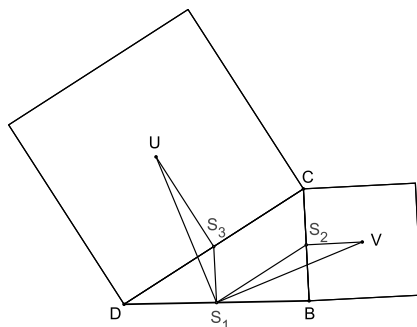
Nad stranami čtyřúhelníka ABCD sestrojte rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich vrcholy tvoří čtyřúhelník A'B'C'D', pro který platí $A'C' \perp B'D'$, $|A'C'| = |B'D'|$ (Obr. 5.8) [22].



Obrázek 5.8: Van Aubelova věta

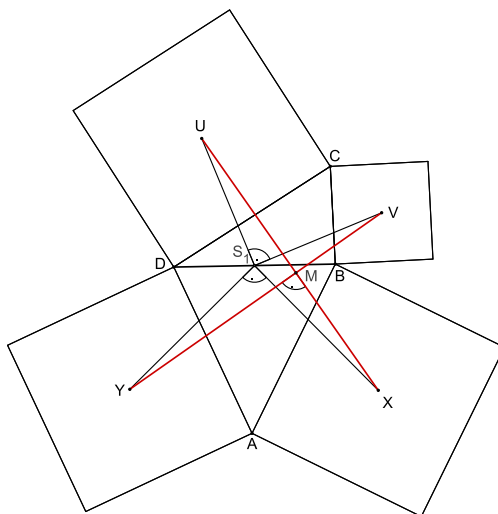
Důkaz 5.4: Necht' bod S_1 je středem strany BD , bod S_2 je středem strany BC a bod S_3 je středem strany CD (Obr. 5.9). Potom platí, že $|S_2V| = |S_2C|$, $S_2V \perp S_2C$ a $|S_3U| = |S_3C|$, $S_3U \perp S_3C$. Pokud provedeme posunutí S_2C do S_1S_3 a S_3C do S_1S_2 , pak $\triangle S_1S_2V \cong \triangle S_1S_3U$, neboť $|S_2V| = |S_1S_3|$, $|S_3U| = |S_1S_2|$ a $\angle S_1S_3U =$

$\angle VS_2S_1 = (90^\circ + \angle BCD)$. Je tedy zřejmé, že $S_3U \perp S_1S_2$, $S_2V \perp S_1S_3$ a strany S_1U a S_1V jsou stejně dlouhé a na sebe kolmé. Obdobně bychom dokázali, že $|S_1X| = |S_1Y|$ a $S_1X \perp S_1Y$ (Obr. 5.10).



Obrázek 5.9: Van Aubelova věta - důkaz

Nyní se zamysleme nad $\triangle S_1UX$ a $\triangle S_1VY$. Platí, že $|S_1U| = |S_1V|$, $|S_1X| = |S_1Y|$ a $\angle US_1X = \angle VS_1Y = (90^\circ + \angle VS_1X)$, potom tedy $\triangle S_1UX \cong \triangle S_1VY$. Protože $\triangle S_1UX$ je otočen do $\triangle S_1VY$, kde středem otočení je bod S_1 a úhel otočení je 90° , pak $|UX| = |VY|$ a $UX \perp VY$ [21].



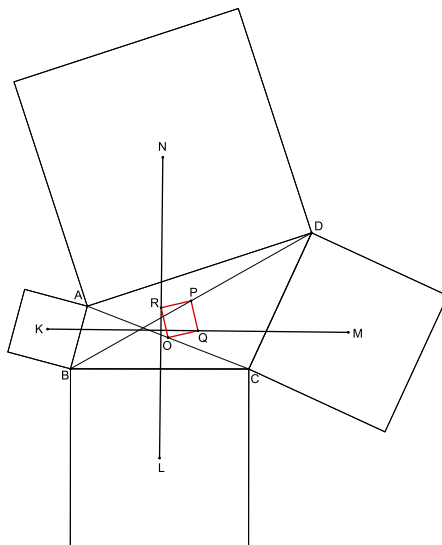
Obrázek 5.10: Van Aubelova věta - důkaz (2)

Můžeme si všimnout, že průsečík M úseček UX a VY se neshoduje s bodem S_1 (Obr. 5.10). Tato situace nastává v případě, že čtyřúhelník $ABCD$ je obecný. Kdyby však čtyřúhelník $ABCD$ byl čtvercem, kosočtvercem, obdélníkem či rovnoběžníkem,

pak by došlo ke splynutí bodů M a S_1 . Protože by výsledným čtyřúhelníkem byl čtverec $UVXY$, pak by bod M byl průsečíkem úhlopříček UX a VY , přičemž víme, že úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé a půlí sebe navzájem [21].

Nyní si ukážeme tvrzení, které nám doplňuje van Aubelovu větu:

Necht' je dán čtyřúhelník $ABCD$. Body K, L, M, N jsou středy čtverců sestrojených nad stranami čtyřúhelníku $ABCD$. Potom body O, P, Q, R , které jsou po řadě středy úseček AC, BD, KM, LN , tvoří čtverec (Obr. 5.11) [6].

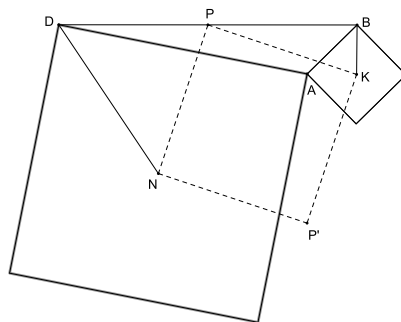


Obrázek 5.11: Van Aubelova věta a čtverec $OPQR$

Důkaz 5.5: Provedme rotaci $\triangle DNP$ o 90° ve směru záporném okolo bodu N . Potom bod A je obrazem bodu D a bod P' je obrazem bodu P , což znamená, že $\triangle DNP \cong \triangle ANP'$. Obdobně provedeme-li rotaci $\triangle BKP$ o 90° ve směru kladném okolo bodu K , pak $\triangle BKP \cong \triangle AKP'$.

Součet úhlů v pětiúhelníku $AKBPD$ je roven 540° , přičemž platí $\angle PDN + \angle KAN + \angle KBP = 360^\circ$. Z toho tedy vyplývá, že bod P se zobrazí do bodu P' a čtyřúhelník $PNP'K$ je čtverec, neboť $|NP| = |NP'|$, $|KP| = |KP'|$ a $\angle PNP' = \angle P'KP = 90^\circ$. Otočíme-li bod N okolo bodu P ve směru kladném o 90° , dostaneme se do bodu K .

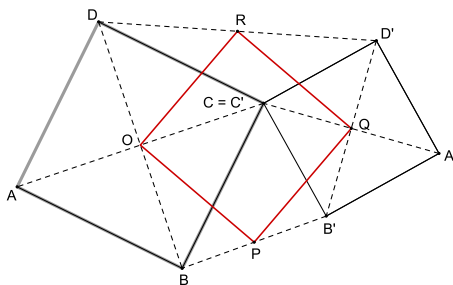
Pomocí stejné rotace se zobrazí bod L do bodu M . Rovněž úsečka NL se nám zobrazí na úsečku KM a s nimi i bod R do bodu Q (Obr. 5.11). Pak tedy platí, že $|PR| = |PQ|$ a $\angle QPR = 90^\circ$. Stejně tak $|OR| = |OQ|$ a $\angle ROQ = 90^\circ$, což znamená, že čtyřúhelník $OPQR$ je čtverec. [6].



Obrázek 5.12: Van Aubelova věta a čtverec $OPQR$ - důkaz

5.4 Hadwiger-Finslerova věta

Nechť jsou dány čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$, které mají společný vrchol $C = C'$. Potom středy P, R úseček BB', DD' a středy O, Q čtverců $ABCD, A'B'C'D'$ tvoří čtverec (Obr. 5.13) [7].

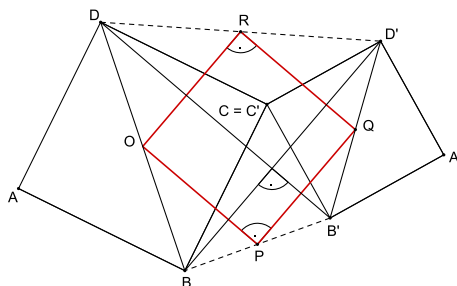


Obrázek 5.13: Hadwiger-Finslerova věta

Důkaz 5.6: Podívejme se na trojúhelníky CBD' a CDB' . Protože $|CB| = |CD|$, $|CB'| = |CD'|$ a $|BD'| = |DB'|$, pak $\triangle CBD' \cong \triangle CDB'$. Navíc $BD' \perp DB'$.

Body Q, R jsou středy stran $B'D', DD'$ trojúhelníku $DB'D'$. To znamená, že úsečka QR je střední příčkou $\triangle DB'D'$. Pak o této střední příčce můžeme říct, že $QR \parallel DB'$

a $|QR| = \frac{|DB'|}{2}$. Obdobně body O, R jsou středy stran BD, DD' trojúhelníku BDD' . Pak úsečka OR je střední příčkou $\triangle BDD'$ a platí, že $OR \parallel BD'$ a $|OR| = \frac{|BD'|}{2}$. Je tedy zřejmé, že $OR \perp QR$. Stejným způsobem bychom dokázali, že v trojúhelnících $BB'D'$ a BDB' platí $OP = PQ$ a zároveň $OP \perp PQ$. Proto čtyřúhelník $OPQR$ je čtverec [1].



Obrázek 5.14: Hadwiger-Finslerova věta - důkaz

5.5 Napoleon-Barlottiho věta

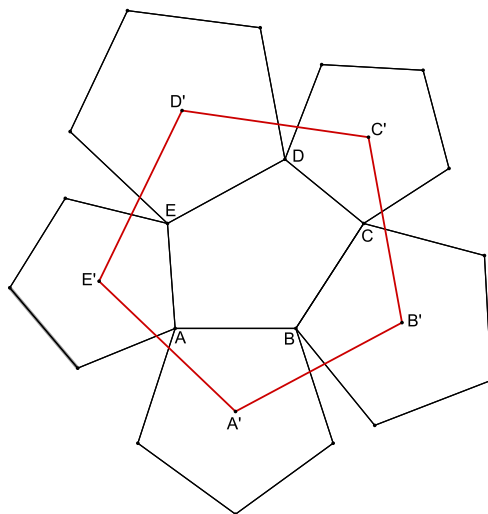
Napoleonova věta připouští řadu zobecnění a my se jednomu takovému zobecnění budeme v poslední části této kapitoly věnovat. Pozornost zaměříme na Napoleon-Barlottiho (rovněž Barlottiho) větu, kterou objevil italský matematik Adriano Barlotti v roce 1955:

Nad stranami afinně-regulárního n -úhelníka sestrojme pravidelné n -úhelníky (všechny vně nebo všechny dovnitř). Potom středy těchto pravidelných n -úhelníků tvoří pravidelný n -úhelník [22].

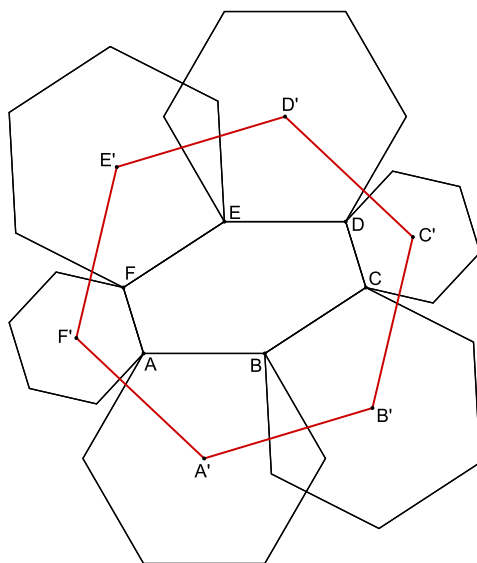
Při hlubším zamyšlení zjistíme, že Napoleon-Barlottiho věta je zároveň zobecněním i Thébaultovi věty pro $n = 4$, neboť afinním obrazem čtverce je rovnoběžník. V případě, že je dán libovolný trojúhelník, pak se jedná o afinní obraz pravidelného (rovnostanného) trojúhelníku.

Následující obrázky nám demonstrují Napoleon-Barlottiho větu pro $n = 5$ (Obr. 5.15)

a $n = 6$ (Obr. 5.16) [22], [12].



Obrázek 5.15: Napoleon-Barlottiho věta pro $n = 5$



Obrázek 5.16: Napoleon-Barlottiho věta pro $n = 6$

Kapitola 6

Zobecnění

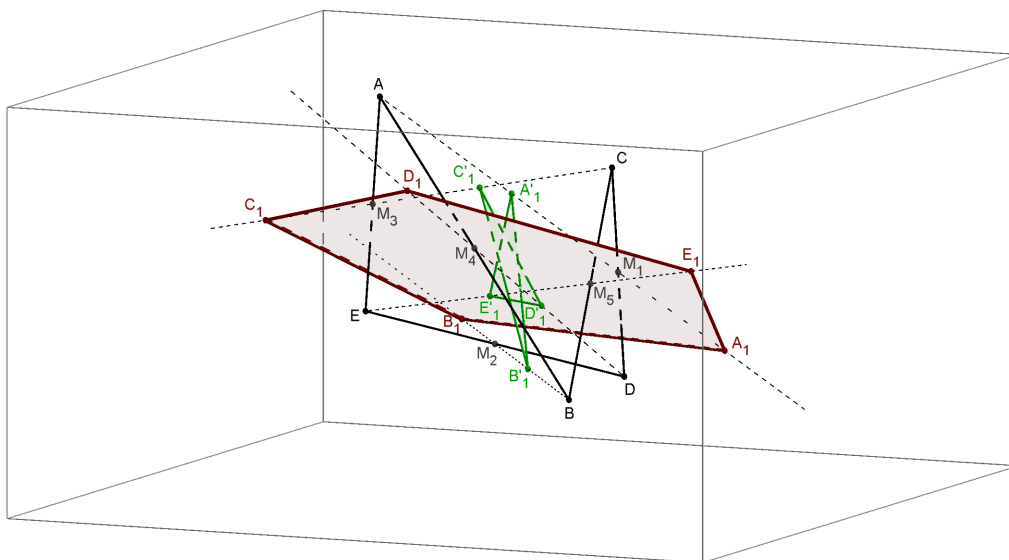
Petr-Douglas-Neumannovy věty v prostoru

V závěrečné kapitole se podíváme na zobecnění PDN věty v prostoru. Ukážeme si elegantní metodu, kdy nepravidelnému prostorovému n -úhelníku jsme schopni přiřadit dvojici rovinných, afinně pravidelných n -úhelníků (vnější a vnitřní). Kromě toho součet obsahů obou afinních obrazů je roven obsahu původního nepravidelného pětiúhelníka (analogie s PDN větou v rovině). Toto prostorové zobecnění PDN věty budeme demonstrovat na příkladech pětiúhelníka a šestiúhelníka.

Jako první, kdo publikoval proces "regularizace" v prostoru, byl J. Douglas v roce 1960. Věta, ve které se hovoří o tzv. Douglasovu pětiúhelníku, nám říká [3], [22]:

Je dán prostorový pětiúhelník $ABCDE$. Označme po řadě M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 středy stran ležících proti vrcholům A, B, C, D, E . Sestrojme polopřímku AM_1 a nanese na ni z bodu M_1 vně úsečky AM_1 vzdálenost $1/\sqrt{5}|AM_1|$. Získaný bod označme A_1 . Podobně na polopřímku BM_2 nanese z bodu M_2 vně vzdálenost $1/\sqrt{5}|BM_2|$, získáme B_1 , atd. až dostaneme pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$. Potom je pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$

rovinný a afinně pravidelný. Budeme-li nanášet stejné vzdálenosti dovnitř, dostaneme jiný pětiúhelník $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$. Tento pětiúhelník je opět rovinný a afinně pravidelný [22].



Obrázek 6.1: Douglasovy pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$

Můžeme vidět (Obr. 6.1), že afinně pravidelný pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$ je konvexní, zatímco afinně pravidelný pětiúhelník $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$ je nekonvexní. Tento nekonvexní pětiúhelník je hvězdicovitého tvaru, tzv. pentagram.

Zajímavostí je, že těžiště, které je shodné pro oba afinně pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$ je zároveň těžištěm i prostorového pětiúhelníku $ABCDE$ [22].

Nyní se podíváme na zobecnění PDN věty v prostoru na příkladu šestiúhelníka [26].

Nechť

$$\pi_x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

je libovolný prostorový šestiúhelník ve vektorovém prostoru. Pro zjednodušení budeme psát $\pi_x = (x_k)$, kde $k = 0, 1, \dots, 5$.

Potom definujeme nový šestiúhelník $\pi_y = (y_k)$ tak, že

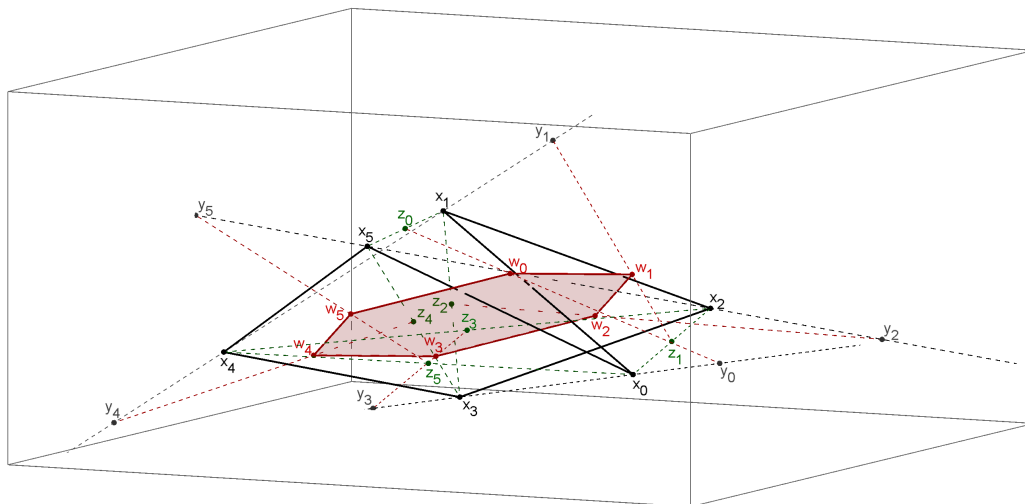
$$\pi_y : y_k = x_k + \frac{1}{2}(x_k - x_{k-3}).$$

Všimněme si, že vektory $\overrightarrow{y_0y_3}$, $\overrightarrow{y_1y_4}$, $\overrightarrow{y_2y_5}$ leží na vektorech $\overrightarrow{x_0x_3}$, $\overrightarrow{x_1x_4}$, $\overrightarrow{x_2x_5}$ z π_x , nicméně jejich délka je oproti vektorům z π_x dvojnásobná.

Necht' $z_k = \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_{k-1})$ rozumíme středy příslušných stran. Potom definujeme poslední šestiúhelník $\pi_w = (w_k)$ tak, že

$$\pi_w : w_k = z_k + \frac{1}{3}(y_k - z_k),$$

přičemž takovýto šestiúhelník je konvexní afinně pravidelný [26].



Obrázek 6.2: Afinně pravidelný šestiúhelník $w_0w_1w_2w_3w_4w_5$

Kapitola 7

Závěr

Ústředním pojmem této práce byl princip tzv. "regularizace". Ten spočívá v pravidelném uspořádání bodů, které byly původně chaoticky rozmístěné, ať už v rovině nebo v prostoru. O tomto nádherném procesu nám pojednává Petr-Douglas-Neumannova věta (PDN věta).

Stěžejní část této práce byla věnována speciálnímu případu PDN věty, tj. Napoleonově větě. Ve dvou kapitolách jsme se nejprve seznámili s několika důkazy této věty a poté jsme zaměřili pozornost na její podstatné vlastnosti. Protože s PDN větou je spojena řada dalších vět, věnovali jsme těmto větám kapitolu číslo 5. Mezi ty nejznámější můžeme zařadit např. Thébaultovu větu, Napoleon-Barlottiho větu atd.

Síla PDN věty je mimo jiné umocněna i tím, že princip "regularizace" je uplatňován nejen v prostoru \mathfrak{R}^2 ale i v prostoru \mathfrak{R}^3 . Prostorové zobecnění PDN věty jsme v kapitole 6 demonstrovali na případech pětiúhelníku a šestiúhelníku.

Cílem této práce bylo představit geometrické věty, které jsou nějak spojeny s principem "regularizace", a poukázat na to, jak krásné a někdy i překvapivé výsledky může geometrie mít. Závěrem bych si dovil říct, že podobné věty, které mají schopnost fascinace, mohou být motivačním prvkem ve výuce geometrie na základní, případně střední škole. Obliba geometrie u žáků z mnoha důvodů klesá a před učiteli matematiky

tak stojí těžký úkol, aby zvýšili u dětí jejich zájem o tento předmět. Jednou z cest, ke které v současnosti dochází, je zavádění moderních technologií a výukových programů (Cabri, DGS GeoGebra atd.) do výuky geometrie. To znamená, že žáci v hodinách pracují s tablety, s interaktivními dotykovými tabulemi apod. Učitelům tyto technologie usnadňují a urychlují práci, žákům zas mohou pomoci v názornosti a pochopení dané problematiky. Pro žáky tak geometrie přestává být pouhým abstraktním pojmem.

Druhým faktorem je sám učitel a jeho pojetí výuky. Zde si myslím, že věty typu Napoleonovy věty aj., mohou být nejen zajímavým oživením výuky, ale i vhodným motivačním prvkem. Pokud se rozhodneme pro tento způsob zpestření výuky, je však zapotřebí přihlídnout na schopnosti a dovednosti dané skupiny žáků tak, aby výběr vět měl přínos a byl žákům srozumitelný.

Literatura

- [1] A Problem of Hinged Squares. What is it? A Mathematical Droodle [online]. [cit. 05-11-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/SqFromSq.shtml>>.
- [2] BREDEHOFT, Plarenta. *Special cases of napoleon triangles* [online]. University of central Missouri, 2014, 37 s. Dostupné z WWW: <https://centralspace.ucmo.edu:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/356/Bredehoft_MATHEMATICS.pdf?sequence=1>.
- [3] BURKHOLDER, Douglas G. *Visualizing Affine Regular, Area-Preserving Decompositions of Irregular 3D Pentagons and Heptagons* [online]. Lenoir-Rhyne University, North Carolina, 2014, 4 s. Dostupné z WWW: <<http://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-333.pdf>>.
- [4] CUKR, Pavel. *Verifikace v systémech dynamické geometrie*. Bakalářská práce, PF JU, České Budějovice, 2005, 36 s.
- [5] DLAB, Vlastimil. *Komplexní čísla* [online]. MFF KU, Praha, 2010, 18 s. Dostupné z WWW: <<http://www.talnet.cz/documents/18/ffe5d266-8894-4377-8a24-7582d8205e8f>>.
- [6] Extra Feature of Van Aubel Configuration [online]. [cit. 30-10-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/SquaresOnSidesOfQuadri.shtml>>.

- [7] Finsler-Hadwiger Theorem [online]. [cit. 02-11-2015]. Dostupné z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/Finsler-HadwigerTheorem.html>>.
- [8] Kiepert Hyperbola [online]. [cit. 16-11-2015]. Dostupné z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html>>.
- [9] KUCHARÍK, Jan. *Některé netradiční vhledy do geoetrie* [online]. Gymnázium Jihlava, Jihlava, 2011, 81 s. Dostupné z WWW: <http://forum.matematika.cz/files/prace/SOC_Nektere_netradicni_vhledy_do_geometrie.pdf>.
- [10] Napoleon Points [online]. [cit. 12-09-2015]. Dostupné z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/NapoleonPoints.html>>.
- [11] Napoleon Theorem [online]. [cit. 17-09-2015]. Dostupné z WWW: <<http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa09/Arican/emat6690/Napoleon%20Theorem/Napoleon%20Theorem.html>>.
- [12] Napoleon-Barlotti Theorem [online]. [cit. 07-11-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Barlotti.shtml>>.
- [13] Napoleon's Hexagon [online]. [cit. 19-09-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/NapoleonsHexagon.shtml>>.
- [14] Napoleon's Theorem [online]. [cit. 17-04-2014]. Dostupné z WWW: <<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Kim/emat6690/essay1/Napoleon's%20Theorem/Napoleon%20theorem.htm>>.
- [15] Napoleon's theorem. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 14-06-2015]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon's_theorem>.
- [16] Napoleon's theorem [online]. [cit. 14-06-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm>>.

- [17] Napoleon's theorem via two rotations [online]. [cit. 09-04-2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NapoleonSmyth.shtml>>.
- [18] Napoleon's Theorem: Third Proof with Complex Numbers [online]. [cit. 20-09-2014]. Dostupné z WWW: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NapoleonBollobas.shtml#Bollobas%22>>.
- [19] Napoleon's Theorem, A second proof with complex numbers [online]. [cit. 14-11-2015]. Dostupné z WWW: <http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_complex2.shtml>.
- [20] Napoleon's Theorem, Two Simple Proofs [online]. [cit. 29-04-2014]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml>>.
- [21] NISHIYAMA, Yutaka. *Beautiful theorems of geometry as van Aubel's theorem* [online]. Faculty of Information Management, Osaka University of Economics, 2010, 10 s. Dostupné z WWW: <<http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/math2010/aubel.pdf>>.
- [22] PECH, Pavel. *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2005, 172 s.
- [23] PECH, Pavel. *Různé způsoby dokazování nerovností v geometrii*. Matematika - fyzika - informatika, 2013, Vol. 22, s. 253-261.
- [24] Petr-Douglas-Neumann theorem. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 07-04-2014]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Petr%E2%80%93Douglas%E2%80%93Neumann_theorem>.
- [25] Second Fermat Point [online]. [cit. 11-09-2015]. Dostupné z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html>>.

- [26] SCHOENBERG, Isaac Jacob. *Outdoor Sculptures. Libertas Mathematica*, 1988, Vol. 8, s. 11-17.
- [27] SMYTH, M. R. F. *MacCool's Proof of Napoleon's Theorem* [online]. Irish Mathematical Society, č. 59, 2007, s. 71-72. Dostupné z WWW: <<http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull59/M5903.pdf>>.
- [28] Thebault's Theorem [online]. [cit. 10-10-2015]. Dostupné z WWW: <<http://nrich.maths.org/1939&part=solution>>.
- [29] Thébault's Problem II [online]. [cit. 11-10-2015]. Dostupné z WWW: <<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Thebault2.shtml>>.
- [30] Two results about squares [online]. [cit. 12-10-2015]. Dostupné z WWW: <<https://amca01.wordpress.com/2011/06/07/two-results-about-squares/>>.

Seznam obrázků

3.1	Napoleonova věta	11
3.2	Napoleonova věta - rotace stran v Napoleonově trojúhelníku	12
3.3	Napoleonova věta - důkaz užitím kosinovy věty (1)	13
3.4	Napoleonova věta - důkaz užitím kosinovy věty (2)	14
3.5	Důkaz Weitzenböckovy nerovnosti	17
3.6	Napoleonova věta	17
3.7	Napoleonova věta - rotace celé soustavy (1)	18
3.8	Napoleonova věta - rotace celé soustavy (2)	18
3.9	Napoleonova věta - komplexní čísla (1)	20
3.10	Napoleonova věta - komplexní čísla (2)	22
4.1	Fermatův bod	24
4.2	Fermatův bod - $\Re_{\triangle AFB}(B, 60^\circ)$ a $\Re_{\triangle ASB}(B, 60^\circ)$	25
4.3	Fermatův bod - úhly AFC , AFB a BFC	26
4.4	Druhý Fermatův bod	26
4.5	Důkaz Napoleonovy věty pomocí Fermatova bodu	27
4.6	Napoleonovy body	28
4.7	Společné těžiště pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$	29
4.8	Společné těžiště pro trojúhelníky ABC a $A''B''C''$	30
4.9	Obsahy Napoleonových trojúhelníků $A'B'C'$ a $A''B''C''$	31
4.10	Napoleonův šestiúhelník	32
4.11	Napoleonův šestiúhelník - důkaz	32

4.12	Kiepertova hyperbola	33
5.1	PDN věta pro čtyřúhelník	36
5.2	PDN věta pro čtyřúhelník - vnitřní čtverec	37
5.3	Thébaultova věta - vnější a vnitřní čtverec	37
5.4	Thébaultova věta - důkaz	38
5.5	Thébaultova věta - komplexní čísla	39
5.6	Thébaultova věta - vnější a vnitřní rovnostranný trojúhelník	40
5.7	Thébaultova věta - důkaz (2)	41
5.8	Van Aubelova věta	41
5.9	Van Aubelova věta - důkaz	42
5.10	Van Aubelova věta - důkaz (2)	42
5.11	Van Aubelova věta a čtverec $OPQR$	43
5.12	Van Aubelova věta a čtverec $OPQR$ - důkaz	44
5.13	Hadwiger-Finslerova věta	44
5.14	Hadwiger-Finslerova věta - důkaz	45
5.15	Napoleon-Barlottiho věta pro $n = 5$	46
5.16	Napoleon-Barlottiho věta pro $n = 6$	46
6.1	Douglasovy pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E_1$ a $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$	48
6.2	Afinně pravidelný šestiúhelník $w_0w_1w_2w_3w_4w_5$	49