



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Diplomová práce

VERIFIKACE A DOKAZOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH VĚT S PODPOROU POČÍTAČE

Vypracoval: Bc. Pavel Cukr

Vedoucí práce: prof. RNDr. **Pavel Pech**, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlašuji, že svojí diplomovou prací na téma Verifikace a dokazování geometrických vět s podporou počítače jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

Datum: 17. 6. 2016

Podpis:.....

ANOTACE

Cílem diplomové práce *Verifikace a dokazování geometrických vět s podporou počítače* je ověření a dokazování vybraných geometrických vět a tvrzení pomocí programů GeoGebra a CoCoA. Každý problém je nejprve demonstrován v programu GeoGebra, poté následuje ověření (verifikace) problému v tomtéž programu. Dále je uveden klasický důkaz a důkaz, případně určení rovnice křivky, pomocí matematického programu CoCoA. Využití programu dynamické geometrie současně s programem počítačové algebry je vhodné jako učební pomůcka v hodinách matematiky na základních a středních školách.

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis *Computer aided verification and proving of geometric theorems* is verification and proving of selected geometric theorems and statements using dynamic geometry software (GeoGebra) and computer algebra programs (CoCoA). Each problem is first demonstrated and verified in the GeoGebra program. Then classical proof and computer aided proof, or determination of the equation of a curve, using the program CoCoA follow. The use of dynamic geometry software and computer algebra programs is suitable as a teaching tool in maths lessons at primary and secondary schools.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu své diplomové práce panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení a konzultaci při řešení diplomové práce.

Obsah

1	ÚVOD.....	6
2	VERIFIKACE A DOKAZOVÁNÍ TVRZENÍ S PODPOROU POČÍTAČE.....	7
3	VERIFIKACE A DOKAZOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH TVRZENÍ.....	11
3.1	Wallace – Simsonova věta	11
3.1.1	Verifikace a konstrukce Wallace – Simsonovy věty pomocí DGS	12
3.1.2	Klasický důkaz Wallace – Simsonovy věty	15
3.1.3	Důkaz Wallace – Simsonovy věty pomocí CAS.....	16
3.2	Brahmaguptova věta	18
3.2.1	Verifikace a konstrukce Brahmahuptovy věty pomocí DGS.....	19
3.2.2	Klasický důkaz Brahmaguptovy věty	22
3.2.3	Důkaz Brahmaguptovy věty pomocí CAS.....	23
3.3	Cevova věta	25
3.3.1	Verifikace a konstrukce Cevovy věty pomocí DGS.....	26
3.3.2	Klasický důkaz Cevovy věty.....	27
3.3.3	Důkaz Cevovy věty pomocí CAS.....	29
3.4	Routhova věta.....	31
3.4.1	Verifikace a konstrukce Routhovy věty pomocí DGS	32
3.4.2	Klasický důkaz Routhovy věty.....	34
3.4.3	Důkaz Routhovy věty pomocí CAS	36
3.5	Feynmanův trojúhelník	38
3.5.1	Konstrukce Feynmanova trojúhelníku pomocí DGS.....	39
3.5.2	Klasický důkaz tvrzení o Feynmanově trojúhelníku	40
3.5.3	Důkaz tvrzení o Feynmanově trojúhelníku pomocí CAS	41
4	URČOVÁNÍ MNOŽIN BODŮ.....	43
4.1	Kardioida.....	43
4.2	Strofoida.....	50
5	ZÁVĚR.....	55
6	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	56

1 Úvod

Velice dobré a vítané učební pomůcky k výuce matematiky představují dynamické počítačové softwary. S jejich pomocí se dají názorněji vysvětlit některá složitější témata, díky čemuž je mohou žáci snadněji pochopit. Jako námět své diplomové práce jsem si zvolil programy GeoGebra a CoCoA, které jsou volně stažitelné na internetu a mají přehledné pracovní prostředí. Další výhodou a předností těchto programů je možnost širokého využití, protože dokáží pracovat s geometrickými i algebraickými problémy.

Můj zájem o matematiku a obzvlášť o geometrii trvá delší čas. Již ve své bakalářské práci jsem se věnoval verifikaci a nyní jsem se v diplomové práci rozhodl rozšířit toto téma ještě navíc o dokazování zjištěných tvrzení prostřednictvím matematického softwaru. Vždy je uvedena definice, ověření věty spolu s konstrukcí a klasický důkaz.

Práce je rozdělena do dvou základních kapitol. Kapitola nazvaná *Verifikace a dokazování geometrických tvrzení* se věnuje geometrickým větám a je rozčleněna na pět podkapitol, popisujících postupně Wallace - Simsonovu větu, Brahmaguptovu větu, Cevovu větu, Feynmanův trojúhelník, Routhovu větu.

V další kapitole se pojednává o množinách bodů (křivkách), konkrétně o kardioidě a strofoidě. Jejich určování patří mezi obtížná témata školské matematiky a užití nových technologií zjednodušuje jejich zkoumání. Pomocí programu GeoGebra lze danou křivku vykreslit a následně určit rovnici křivky.

V každé ze sedmi podkapitol se zaměřujeme na tři fáze daných matematických tvrzení – zadání; verifikace a konstrukce; důkaz v případě geometrických vět nebo určení rovnice křivky.

Součástí předkládané diplomové práce tvoří stručný závěr a seznam použité literatury.

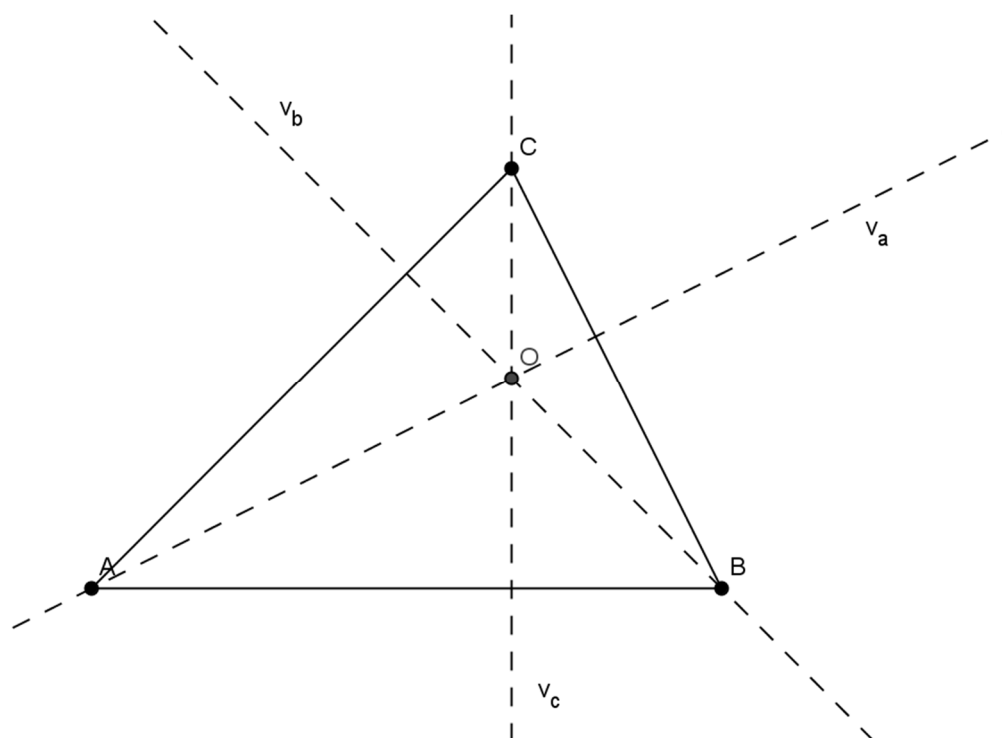
2 Verifikace a dokazování tvrzení s podporou počítače

Slovo verifikace pochází z latinského *verum facere*, což v překladu znamená *činit pravdivým* a do českého jazyka ho můžeme volně přeložit jako ověřování, kontrola pravdivosti výroku nebo tvrzení argumentu. Mezi soubor matematických počítačových programů patří například programy GeoGebra a CoCoA, které v této práci aplikujeme pro demonstraci ověřování problémů z planimetrie. V případě GeoGebry se provádí verifikace ověřením daného tvrzení na základě numerických výpočtů. Verifikaci nemůžeme považovat za čistý matematický důkaz, ale můžeme tvrdit, že s vysokou pravděpodobností je tvrzení pravdivé. Program CoCoA umožňuje dokazování tvrzení na základě aritmetických propočtů.

Protože na základních školách je dokazování matematických problémů složité a studenti jej nemají rádi, lze výuku doplnit simulací ve výše zmiňovaných programech. GeoGebra i CoCoA napomáhají k relativně větší motivaci a k snadnějšímu pochopení výkladu daných problémů z planimetrie. Žáci si s programy hrají a zároveň se učí. Vysvětlení každého problému může při výuce začínat verifikací v GeoGebře, pak podle úrovně žáků pokračovat klasickým dokazováním a pak ověřením důkazu v CoCoe.

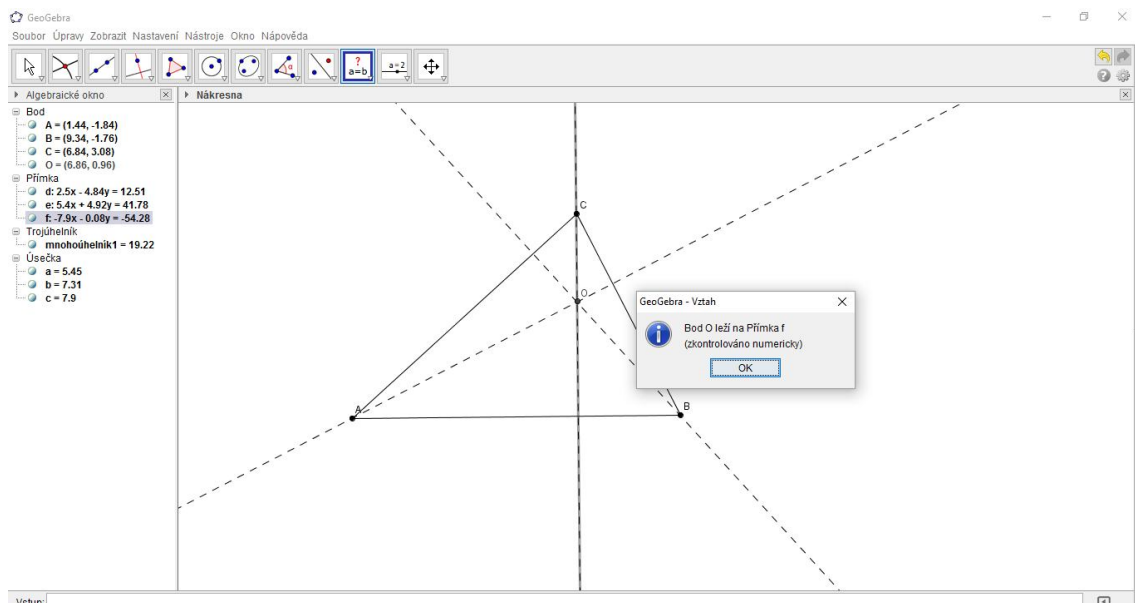
Jako ukázkové tvrzení, kde si ukážeme verifikaci a automatické dokazování vět pomocí počítače volíme jednoduchý příklad (Obr. 1).

Dokažte, že se výšky v trojúhelníka protínají v jediném bodě. [1]



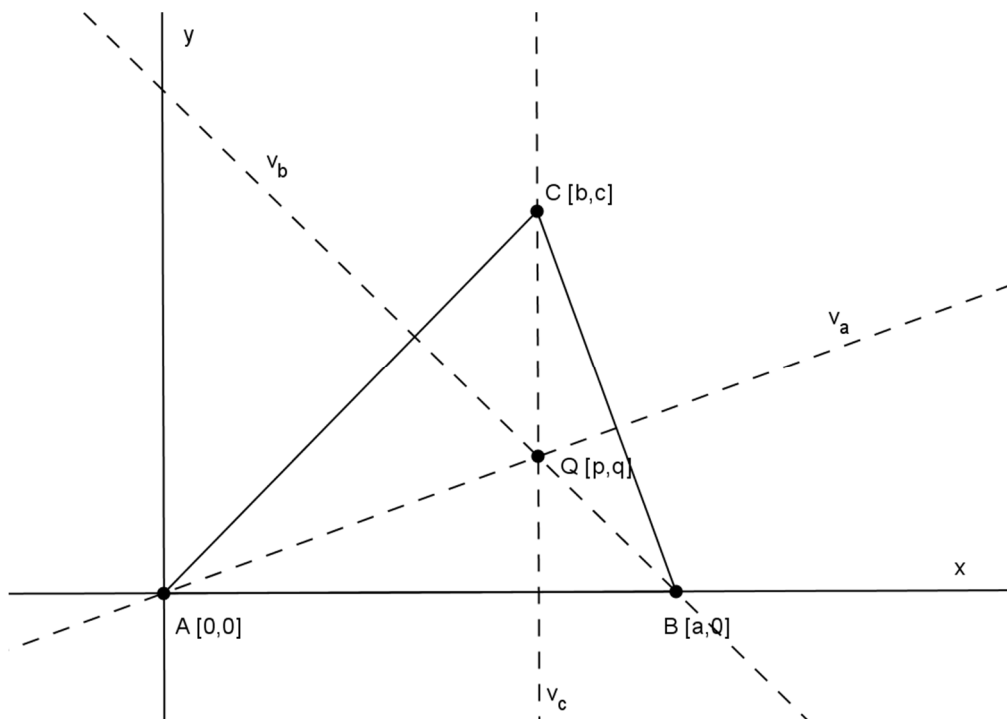
Obr. 1 Výšky trojúhelníka ABC procházejí jedním bodem

Chceme dokázat, že výšky trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě, v našem případě v bodě O . Nejprve si sestojíme pomocí nástroje *Mnohouhelník* libovolný trojúhelník ABC . Pak sestojíme výšky v_a a v_b díky funkci *Kolmice*. Průsečík výšek nazveme bod O . V programu GeoGebra vidíme, že i výška v_c procházejí nejspíš bodem O . Kliknutím pomocí *Vztah mezi dvěma objekty* na bod O a na přímkou v_c nám GeoGebra generuje a numericky ověří, že *Bod O leží na přímce v_c* (zkontrolováno numericky). Můžeme takto ověřit i se zbývajících výškami v_a a v_b (Obr. 2).



Obr. 2 Verifikace tvrzení pomocí programu GeoGebra

Jako důkaz s podporou počítače musíme nejprve zvolit vhodnou soustavu souřadnic. A to tak, aby vztahy, kterými budeme analyticky celou geometrickou situaci popisovat, byly co nejjednodušší. Označíme $A=[0,0]$, $B=[a,0]$, $C=[b,c]$ jako vrcholy trojúhelníka ABC (Obr. 3).



Obr. 3 Výšky trojúhelníka ABC se protínají v jednom bodě – počítačový důkaz

Vyjádříme si rovnice výšek v_a , v_b a v_c :

$$v_a : (b-a)x + cy = 0, v_b : bx + cy - ab = 0, v_c : x - b = 0.$$

Náš předpoklad je, že výšky v_b a v_c se protínají v bodě $O = [p, q]$. Platí tyto relace

$$O = v_b \Leftrightarrow h_1 : bp + cq - ab = 0,$$

$$O = v_c \Leftrightarrow h_2 : p - b = 0.$$

Chceme dokázat, že platí: výška v_a obsahuje bod O .

$$O = v_a \Leftrightarrow h_3 : (b-a)p + cq = 0.$$

Máme dokázat následující tvrzení

$$\forall p, q, bp + cq - ab = 0, p - b = 0 \Rightarrow (b-a)p + cq = 0.$$

V tomto jednoduchém případě ukážeme ručně bez užití počítače, že tvrzení je pravdivé. Uvědomujeme si, že platí

$$(b-a)p + cq = 1 \cdot (bp + cq - ab) - a \cdot (p - b).$$

Vyjádříme si polynom závěru $(b-a)p + cq$ jako lineární kombinaci polynomů předpokladů $bp + cq - ab$ a $p - b$. Pomocí platnosti rovnic $bp + cq - ab = 0$ a rovnice $p - b = 0$ plyne z $(b-a)p + cq = 1 \cdot (bp + cq - ab) - a \cdot (p - b)$ platnost rovnice $(b-a)p + cq = 0$. Ukázali jsme si, že polynom $(b-a)p + cq$ náleží ideálu $I = (bp + cq - ab, p - b)$.

Do softwaru CoCoA zapíšeme

```
Use R := Q[a, b, c, p, q];  
I := Ideal(bp+cq-ab, p-b);  
NF((b-a)p+cq, I);
```

Program nám generuje odpověď $\text{NF}((b-a)p+cq, I) = 0$ z čehož vyplývá, že tvrzení je obecně pravdivé a počítačový důkaz je hotov.

Příkaz NF počítačového programu CoCoA, který používáme, je zkratka pro *Normální formu*. Jeden z hlavních problémů při řešení příkladů algebraické geometrie je, že nedokážeme rozpoznat, že polynom h patří do ideálu, který je generován polynomy h_1, \dots, h_n . Problém byl vyřešen pomocí Gröbnerovy báze ideálu. Hlavní vlastností Gröbnerovy báze popisuje tato věta [1]:

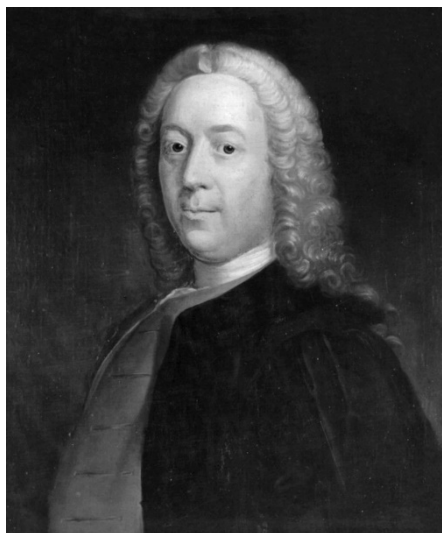
Nechť $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ je Gröbnerova báze ideálu $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ a necht' $h \in K[x_1, \dots, x_n]$. Potom $h \in I$, právě když zbytek r přidělení polynomu h polynomu z G je roven 0.

Při zkoumání, jestli polynom h patří do ideálu I , stačí spočítat Gröbnerovu bázi ideálu I a zjistit jaký je zbytek r při dělení polynomu h . Je-li zbytek r roven 0, potom polynom h je prvkem ideálu I , jestliže je zbytek r různý od nuly, potom polynom h nepatří do ideálu I . Tento zbytek je nazýván *Normální forma*.

3 Verifikace a dokazování geometrických tvrzení

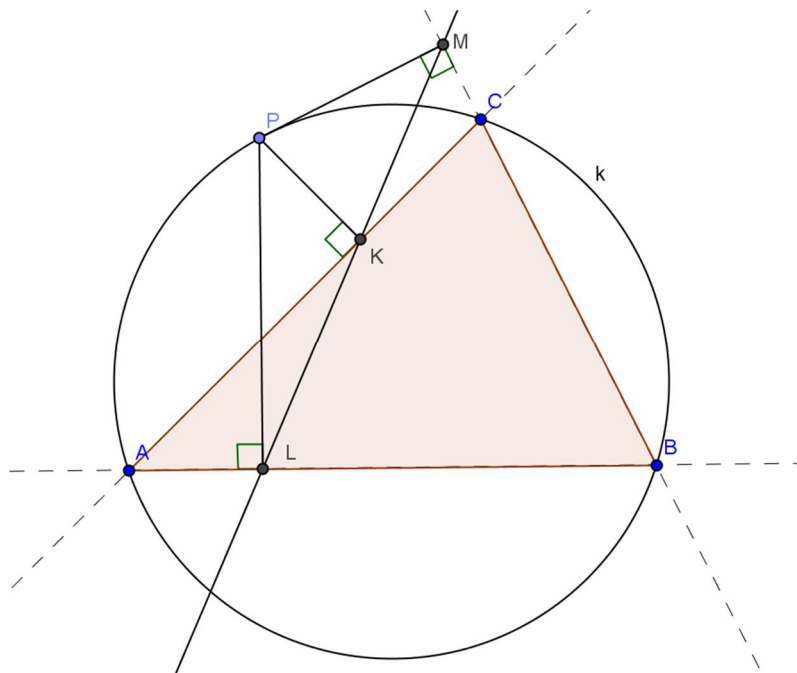
3.1 Wallace – Simsonova věta

Simsonova věta je nazývána podle skotského matematika R. Simsona (Obr. 4). Ve skutečnosti větu dokázal jako první v roce 1797 matematik W. Wallace. Proto místo dřívějšího názvu Simsonova věta užívá spíše pojmenování Wallace – Simsonova věta. Tato věta nám ukazuje vlastnost bodů ležících na kružnici opsané trojúhelníku a její znění je:



Obr. 4 R. Simson

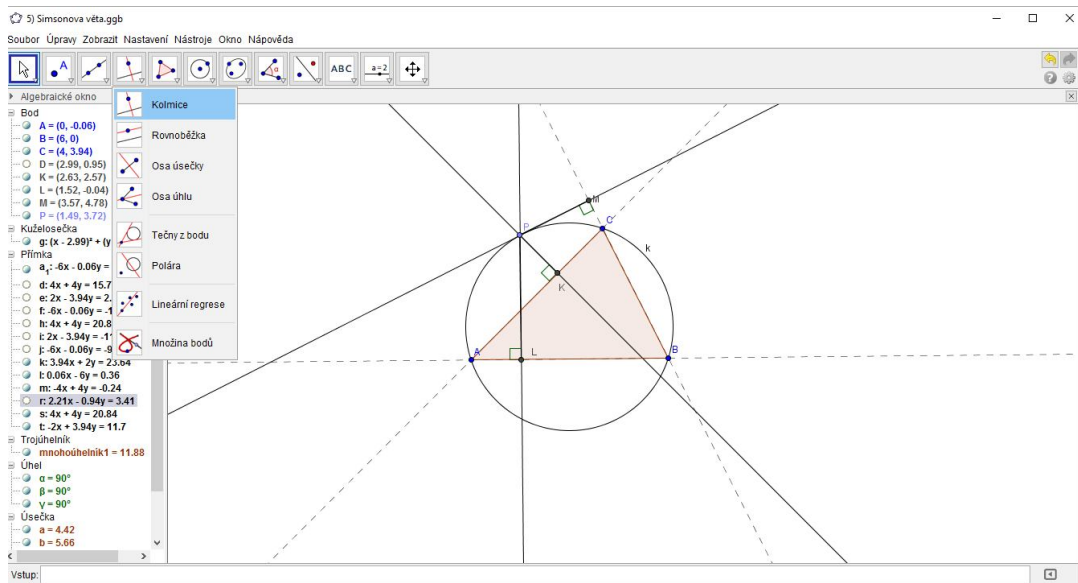
Nechť ABC je trojúhelník a P je bod kružnice opsané trojúhelníku ABC . Potom paty kolmic K , L , M spuštěných z bodu P na strany trojúhelníka ABC leží na jedné přímce [1].



Obr. 5 Wallace – Simsonova věta

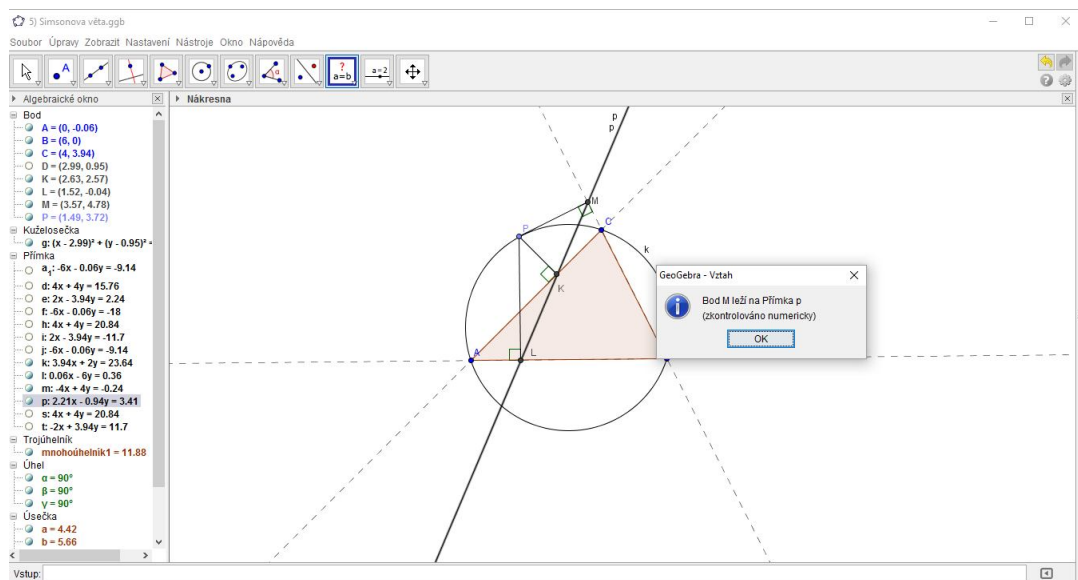
3.1.1 Verifikace a konstrukce Wallace – Simsonovy věty pomocí DGS

Pomocí nástroje *Mnohouhelník* sestrojíme trojúhelník ABC . Následně vlastností *Kružnice daná třemi body* sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníka ABC . Program GeoGebra nám automaticky pojmenuje kružnici d . Díky funkci *Přejmenovat* přepíšeme kružnici d na k . Volíme libovolný bod na kružnici k , stejně jako v předchozím případě přejmenujeme bod D na P . Díky vlastnosti *Kolmice* spouštíme z bodu P kolmice na strany trojúhelníka ABC (Obr. 6).



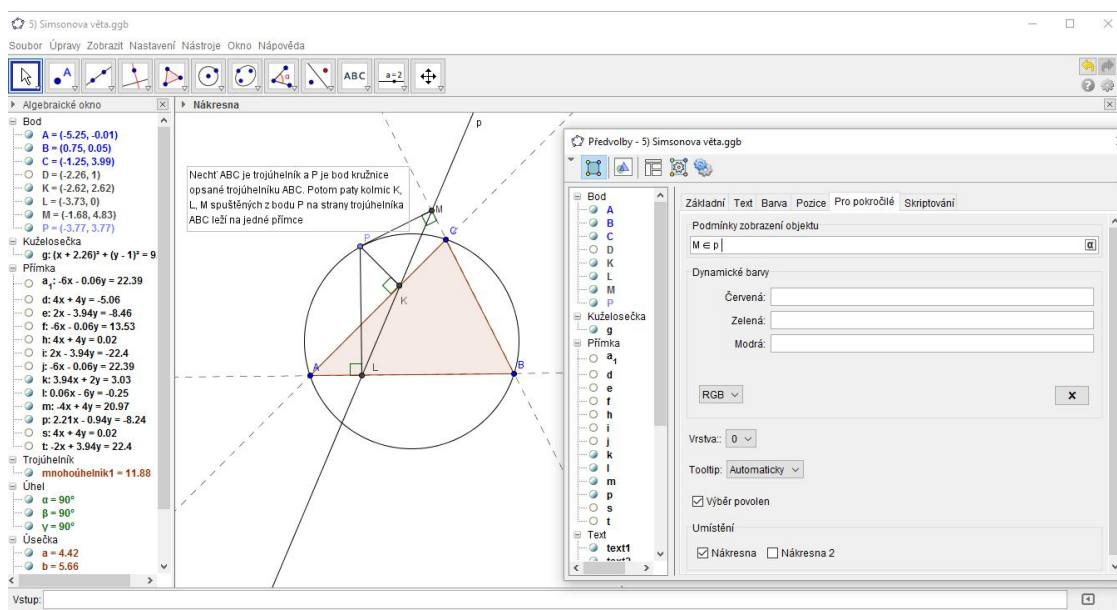
Obr. 6 Spuštění kolmic z bodu P na strany trojúhelníka ABC

Vzniklé paty kolmic přejmenujeme na body K , L , M . Sestrojíme pomocí vlastnosti *Přímka* přímku p danou body KL . Na první pohled vidíme, že bod M leží na vzniklé přímce p . Naším cílem je tedy dokázat a potvrdit, že bod M leží na přímce, kterou tvoří body K a L . Body K , L , M jsou kolineární. To znamená, že body leží na jedné přímce. Program GeoGebra nám umožňuje pomocí vlastnosti *Vztah mezi dvěma objekty* ověřit numericky, jestli bod M leží na přímce p (Obr. 7). Vidíme, že bod M skutečně leží na dané přímce.



Obr. 7 Bod K leží na přímce p

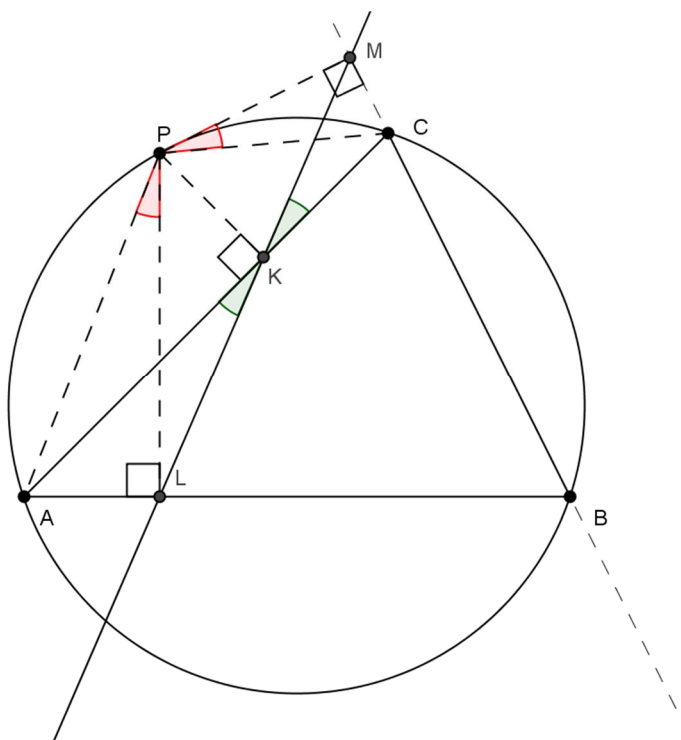
Pomocí vlastnosti *Ukazovátka* pohybuje bodem P po kružnici k opsané trojúhelníka ABC , pohybem se nám mění paty kolmic spuštěné z bodu P na jednotlivé strany trojúhelníka. Ziskáváme jednotlivé přímky, díky funkci *Vložit text* napíšeme znění Wallace – Simsonovy věty a pomocí nástroje *Vlastnosti...* v záložce *Pro pokročilé* zapíšeme do kolonky *Podmínky zobrazení objektu* vztah $M \in p$, který nám umožní zobrazení Wallace – Simsonovy věty pouze, když bod K bude součástí přímky p (Obr. 8).



Obr. 8 Zobrazení textu Wallace – Simsonovy věty

Verifikaci provedeme tak, že funkcí *Připojit/Oddělit bod* oddělujeme bod P od kružnice opsané trojúhelníka ABC , znění Wallace – Simsonovy věty se nám ztrácí. Bod M již neleží na přímce p . Verifikace je tím pádem hotová.

3.1.2 Klasický důkaz Wallace – Simsonovy věty

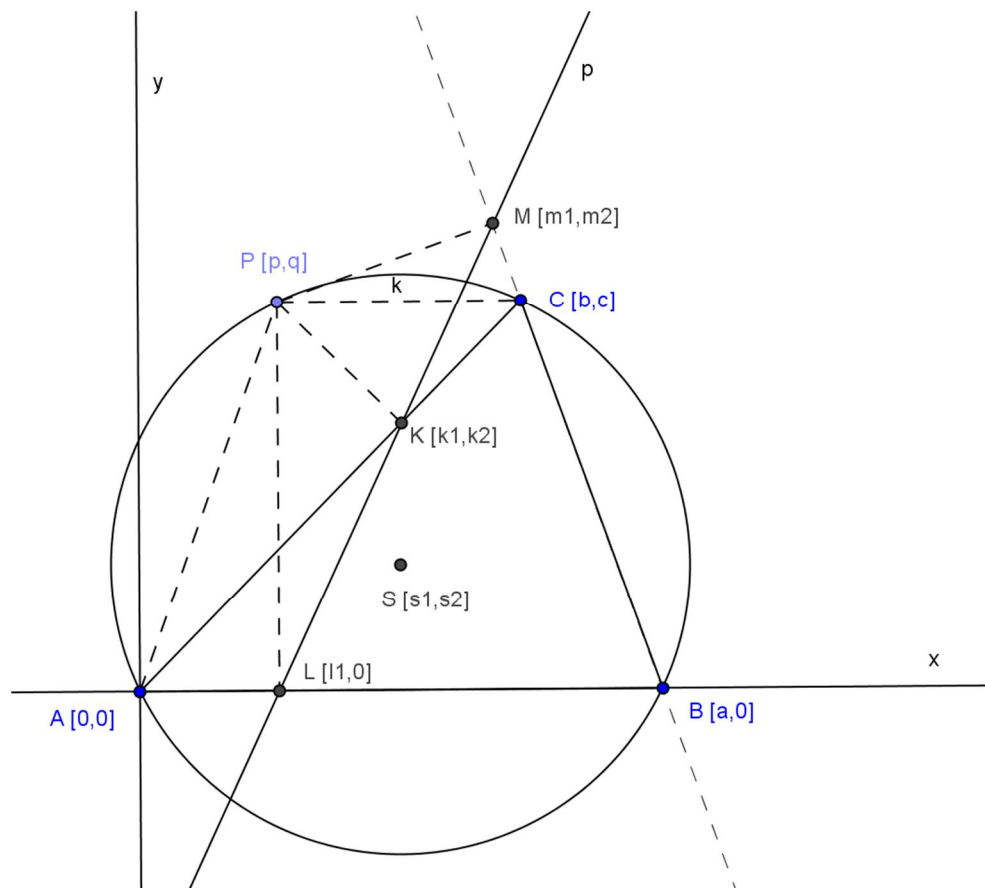


Obr. 9 Wallace – Simsonova přímka

Naším úkolem bude dokázat kolinearitu bodů K , L , M . Ke zjištění klasického důkazu bude stačit ukázat, že $|\angle AKM| = |\angle CKM|$. Vidíme, že vzniklé čtyřúhelníky $ALKP$ a $CKPM$ jsou tětiové. Což znamená, že dokážeme sestrojít kružnici opsanou daným čtyřúhelníkům. Podle věty o obvodových úhlech dostáváme $|\angle APL| = |\angle AKL|$ a $|\angle CPM| = |\angle CKM|$. K důkazu stačí pouze ukázat shodnost úhlů $|\angle APL|$ a $|\angle CPM|$. Čtyřúhelníky $BCPA$ a $BMPL$ jsou rovněž tětiové, protože součet protějších úhlů v tětiovém čtyřúhelníku musí být roven 180° . Musí platit $|\angle APC| = 180^\circ - |\angle ABC|$ a $|\angle LPM| = 180^\circ - |\angle ABC|$ z toho vyplývá $|\angle APC| = |\angle LPM|$. Dále $|\angle APC| = |\angle APL| + |\angle LPC|$ a $|\angle LPM| = |\angle LPC| + |\angle CPM|$. A odtud již vidíme, že úhly $|\angle APL|$ a $|\angle CPM|$ jsou shodné.

3.1.3 Důkaz Wallace – Simsonovy věty pomocí CAS

Nejprve si volíme pravoúhlou soustavu souřadnic tak, že platí $A=[0,0]$, $B=[a,0]$, $C=[b,c]$, $P=[p,q]$, $K=[k_1,k_2]$, $L=[l_1,0]$, $M=[m_1,m_2]$, $S=[s_1,s_2]$ (Obr. 10).



Obr. 10 Zavedení souřadnic bodů

Zavedeme předpoklady:

$$PL \perp AB \Leftrightarrow h_1 : p - l_1 = 0,$$

$$K \in AC \Leftrightarrow h_2 : ck_1 - bk_2 = 0,$$

$$PK \perp BC \Leftrightarrow h_3 : (p - k_1)b + (q - k_2)c = 0,$$

$$M \in BC \Leftrightarrow h_4 : ac + bm_2 - cm_1 - am_2 = 0,$$

$$PM \perp BC \Leftrightarrow h_5 : (p - m_1)(b - a) + (q - m_2)c = 0,$$

$$|AS| = r \Leftrightarrow h_6 : s_1^2 + s_2^2 - r^2 = 0,$$

$$|BS| = r \Leftrightarrow h_7 : (a - s_1)^2 + s_2^2 - r^2 = 0,$$

$$|CS| = r \Leftrightarrow h_8 : (b - s_1)^2 + (c - s_1)^2 - r^2 = 0,$$

$$|DS| = r \Leftrightarrow h_9 : (p - s_1)^2 + (q - s_1)^2 - r^2 = 0,$$

Body K , L , M jsou kolineární, což znamená, že leží na jedné přímce. Vycházíme ze známého předpokladu:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 1 \\ l_1 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Dostáváme závěrečné tvrzení ve tvaru:

$$K, L, M \text{ leží na jedné přímce} \Leftrightarrow z : l_1 m_2 + k_2 m_1 - k_1 m_2 - k_2 l_1 = 0.$$

Musíme zjistit, zda z patří do ideálu I , který je generován polynomy $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$. V programu CoCoA dostáváme

```
Use R := Q[a,b,c,p,q,r,s[1..2],k[1..2],l[1..2],m[1..2],t];
I := Ideal(p-l[1],ck[1]-bk[2],(p-k[1])b+(q-k[2])c,ac+bm[2]-cm[1]-
am[2],(p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c,
s[1]^2+s[2]^2-r^2,(a-s[1])^2+s[2]^2-r^2,(b-s[1])^2+(c-s[2])^2-
r^2,(p-s[1])^2+(q-s[2])^2-r^2,(l[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-
k[2]l[1])t-1);
NF(1,I);
```

Program CoCoA nám dává odpověď 1. Z toho vyplývá, že normální forma je rovna 1, což znamená, že nedokážeme rozhodnout, je-li toto tvrzení pravdivé nebo nepravdivé. Příčinou může být to, že pro některé parametry trojúhelník degeneruje a nemusí platit tvrzení pro tyto hodnoty. Budeme hledat podmínky degenerace. V programu CoCoA použijeme příkaz `Elim`, který nám eliminuje závislé proměnné $p, q, k_1, k_2, l_1, m_1, m_2$, a pomocnou proměnnou t z ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, z)$, kde $z = (l_1 m_2 + k_2 m_1 - k_1 m_2 - k_2 l_1)t - 1$ je negace z a určuje nám podmínky pro nedegeneraci.

```
Use R := Q[a,b,c,p,q,r,s[1..2],k[1..2],l[1..2],m[1..2],t];
I := Ideal(p-l[1],ck[1]-bk[2],(p-k[1])b+(q-k[2])c,ac+bm[2]-cm[1]-
am[2],(p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c,
s[1]^2+s[2]^2-r^2,(a-s[1])^2+s[2]^2-r^2,(b-s[1])^2+(c-s[2])^2-
r^2,(p-s[1])^2+(q-s[2])^2-r^2,(l[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-
k[2]l[1])t-1);
Elim(p..t,I);
```

Pomocí programu dostáváme podmínku $((b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)) = 0$, což znamená, že pro vrcholy trojúhelníka platí $C = A$ nebo $B = C$. Tyto případy musíme vyloučit, budeme předpokládat nerovnost $C \neq A$ a $B \neq C$. Přidáme polynom $(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)v - 1$ do ideálu I a $J = I \cup \{(b^2 + c^2)((a - b)^2 + c^2)v - 1\}$, kde v je další pomocná proměnná. A celou akci zopakujeme.

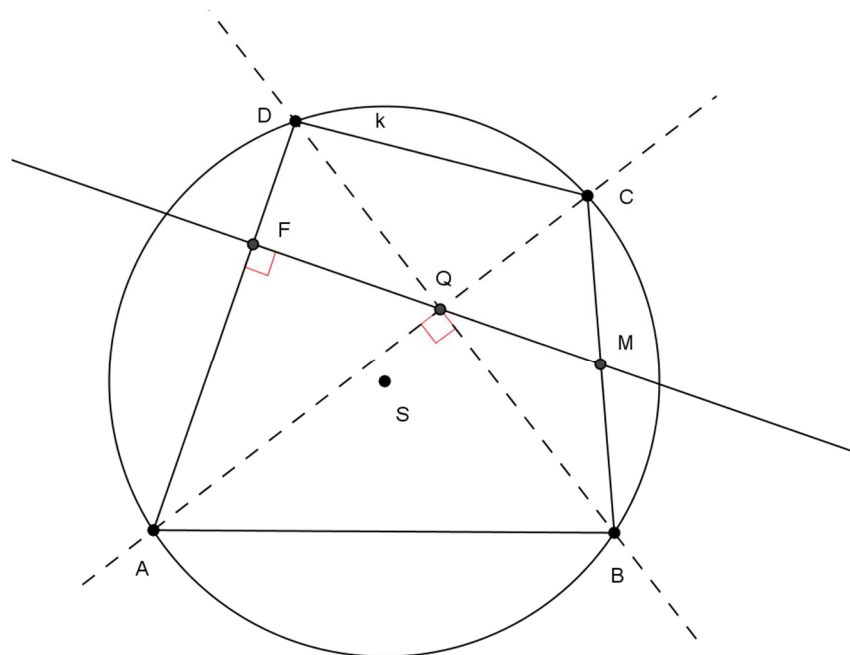
```
Use R := Q[a,b,c,p,q,r,s[1..2],k[1..2],l[1..2],m[1..2],t,v];
J := Ideal(p-l[1],ck[1]-bk[2],(p-k[1])b+(q-k[2])c,ac+bm[2]-cm[1]-
am[2],(p-m[1])(b-a)+(q-m[2])c,
s[1]^2+s[2]^2-r^2,(a-s[1])^2+s[2]^2-r^2,(b-s[1])^2+(c-s[2])^2-
r^2,(p-s[1])^2+(q-s[2])^2-r^2,(l[1]m[2]+k[2]m[1]-k[1]m[2]-
k[2]l[1])t-1,(b^2+c^2)((a-b)^2 + c^2)v-1);
NF(1,J);
```

NF = 0 z toho plyne, že Wallace – Simsonova věta je dokázána.

3.2 Brahmaguptova věta

Tato matematická věta je pojmenovaná podle významného indického matematika a astronoma Brahmagupty (žil 598–670), který jako první užíval nulu a řešil mnoho matematických a geometrických problémů. Brahmaguptova věta zní (Obr. 11):

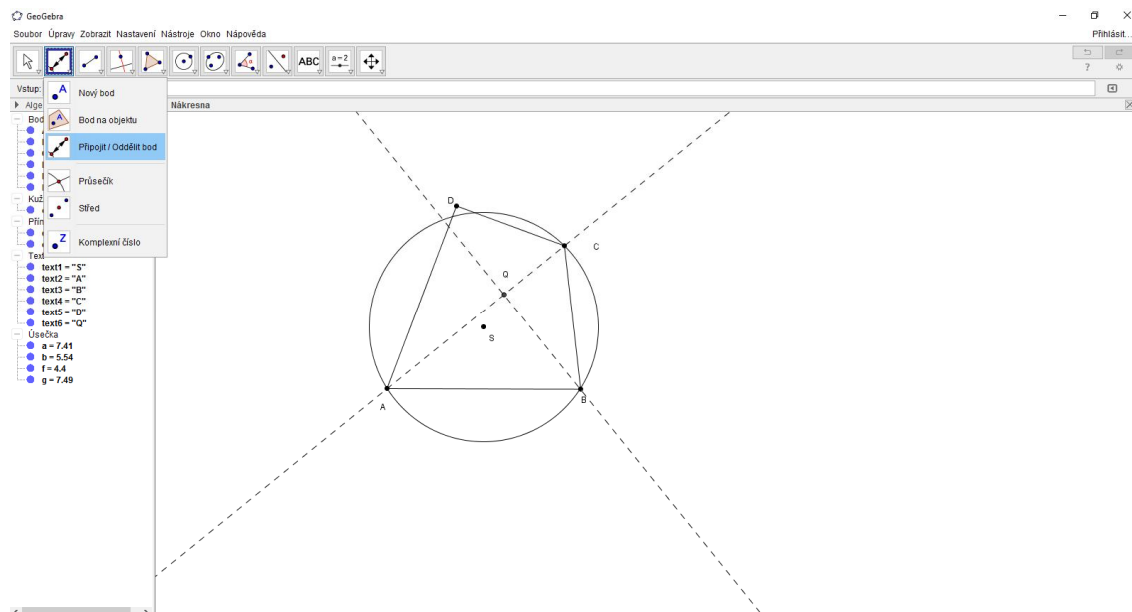
Nechť je dána opsaná kružnice k tětíkového čtyřúhelníka ABCD s navzájem kolmými úhlopříčkami, můžeme průsečíkem úhlopříček X vést kolmici na stranu AB. Tato kolmice nám pak pŕlží protější stranu CD.



Obr. 11 Brahmaguptova věta

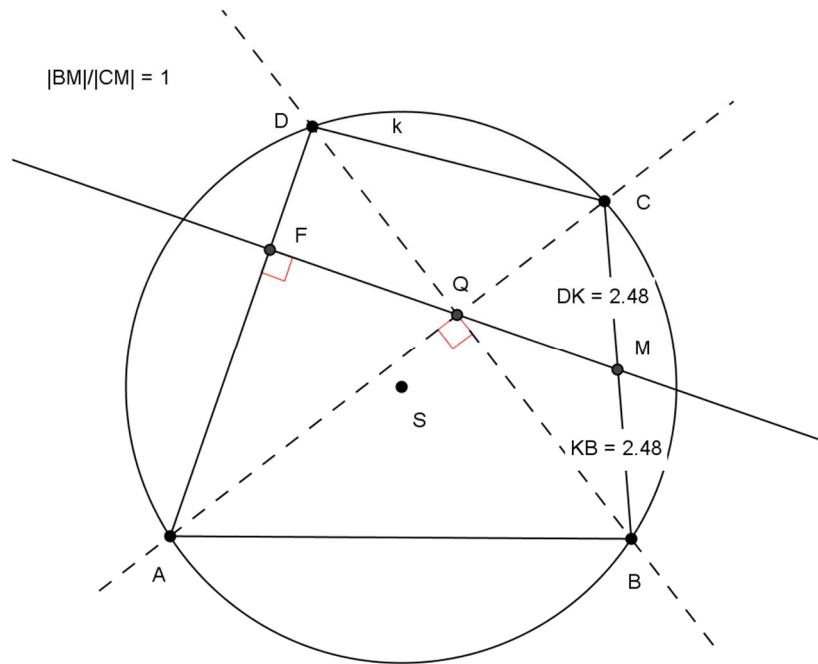
3.2.1 Verifikace a konstrukce Brahmaguptovy věty pomocí DGS

Nejprve si sestrojíme kružnici k se středem S . Na kružnici si volíme body A , B a C . Pomocí funkce *Úsečka* spojíme jednotlivé body AB a BC . Nástrojem *Přímka* sestrojíme budoucí úhlopříčku čtyřúhelníku danou body AC . Sestrojíme kolmici na úhlopříčku bodem B . Průnik kolmice a úhlopříčky označíme jako bod Q a průnik kružnice k s úhlopříčkou AC jako bod D . Body $ABCD$ nám vytváří čtyřúhelník, který má úhlopříčky na sebe kolmé a kružnice k je opsaná vzniklého čtyřúhelníku. Pomocí *Připojit/Oddělit bod* dokážeme připojit nebo oddělit bod D od kružnice k (Obr. 12).

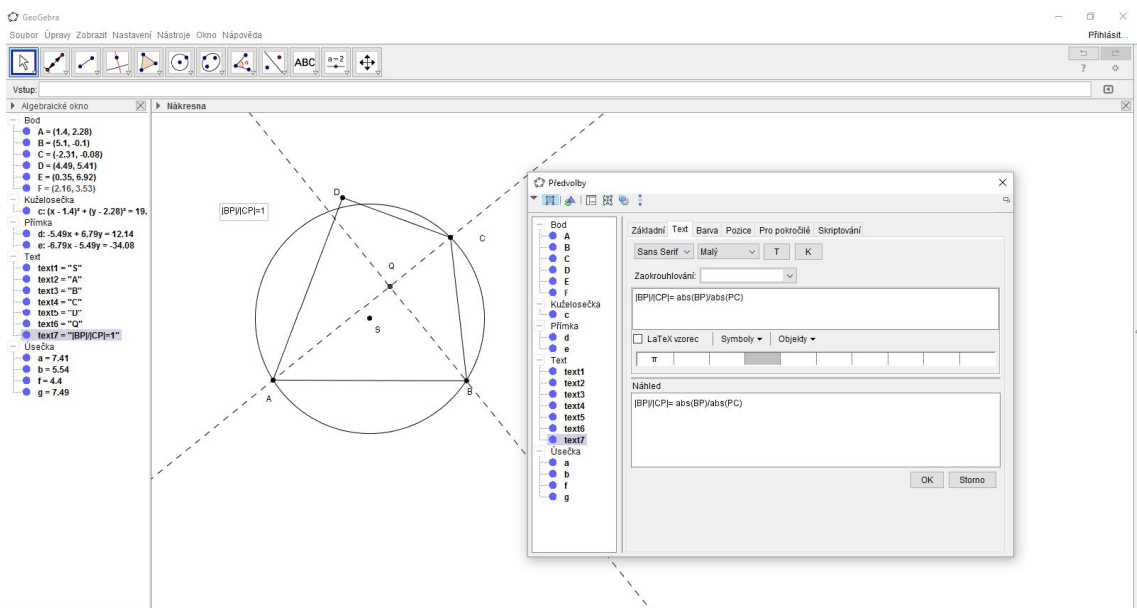


Obr. 12 Připojit/Oddělit bod

Bodem Q sestrojíme kolmici na stranu AD . Tato kolmice nám pak půlí stranu BC v bodě P . Pomocí nástroje *Vzdálenost* vidíme, že $|BM| = |CM|$. Chceme dokázat, že opravdu kolmice půlí protější stranu. Pomocí nástroje *Vložit text* napíšeme $|BM|/|CM| = \text{abs}(BM)/\text{abs}(MC)$ (Obr. 14). Pomocí vlastností z nabídky *Připojit/Oddělit bod* označíme bod D , který se nám oddělí od kružnice k . Zároveň nám program GeoGebra vygeneroval, že poměr vzdáleností již není roven jedné. Verifikace je tím pádem hotová. Tato verifikace probíhá na základě numerických výpočtů, a nelze jí proto považovat za plnohodnotný matematický důkaz.



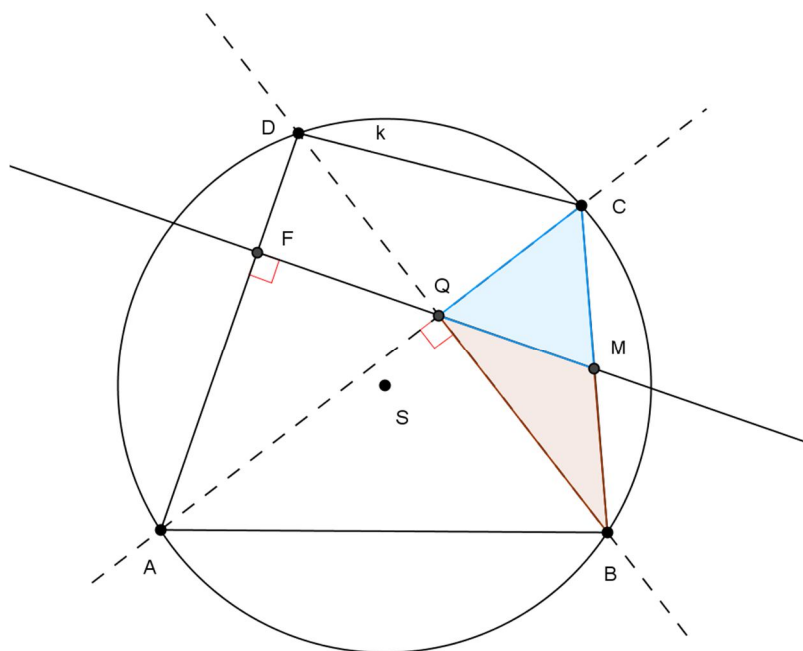
Obr. 13 Verifikace Brahmaguptovy věty



Obr. 14 Vkládání textu

3.2.2 Klasický důkaz Brahmaguptovy věty

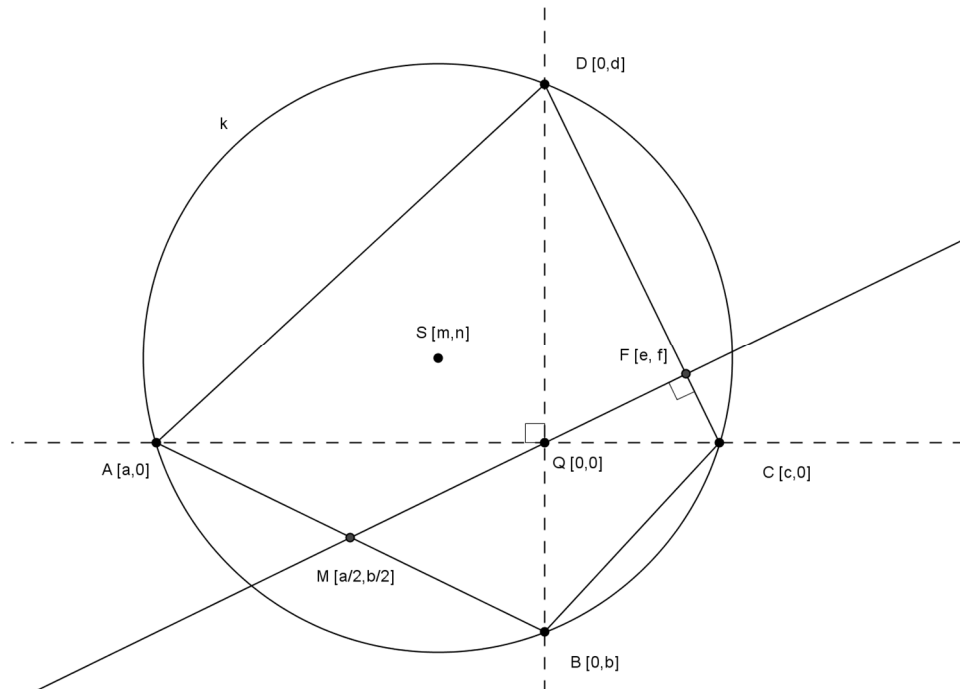
Patu kolmice z bodu Q na stranu AD označíme jako bod X . Půjde nám o to dokázat, že bod P je střed strany BC . Zavedeme úhly $|\angle QAC| = \alpha$, $|\angle QDA| = \beta$. Platí, že $\alpha + \beta = 90^\circ$, protože zbývající úhel v trojúhelníku AQD je pravý. Úhly $|\angle QAX|$ a $|\angle QAD|$ jsou shodné (oba jsou rovny α) a úhly $|\angle AXQ|$ a $|\angle AQD|$ jsou pravé. Vidíme, že vzniklé trojúhelníky AQX a DAQ jsou podobné. Tím pádem i zbývající úhel $|\angle AQX|$ je shodný s úhlem $|\angle QDA|$ s velikostí β . Velikost úhlu $|\angle DQX|$ získáme jako doplněk do 90° , má tedy velikost α . Odtud snadno určíme ze znalosti vrcholových úhlů, že $|\angle BQM| = \alpha$, $|\angle CQM| = \beta$. Pomocí věty o shodnosti obvodových úhlů víme, že $|\angle CAD| = \alpha$, $|\angle CBD| = \alpha$, analogicky víme, že $|\angle BDA| = \beta$, také platí $|\angle BCA| = \beta$. Ze shodnosti úhlů $|\angle MBQ|$ a $|\angle BQM|$ je na první pohled vidět, že trojúhelník BQM je rovnoramenný se základnou BQ (Obr. 15). Z toho vyplývá, že $|BM| = |MQ|$. Ze shodnosti úhlů $|\angle MCQ|$ a $|\angle CQM|$ je zřejmé, že trojúhelník CQM je též rovnoramenný se základnou CQ , tudíž $|CM| = |MQ|$. Pokud platí $|BM| = |MQ|$ a $|CM| = |MQ|$, tak zároveň platí $|BM| = |CM|$. Tím pádem je vidět, že bod M je střed úsečky BC , důkaz je hotov.



Obr. 15 Rovnoramenné trojúhelníky BQM a CQM

3.2.3 Důkaz Brahmaguptovy věty pomocí CAS

Zavedeme si souřadnicový systém $A=[a,0]$, $B=[0,b]$, $C=[c,0]$, $D=[0,d]$,
 $M=[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, $S=[m,n]$, $Q=[0,0]$, $F=[e,f]$ (Obr. 16).



Obr. 16 Zavedení soustavy souřadnic

Dále zavedeme jednotlivé předpoklady:

$$|AS| = r \Leftrightarrow h_1 : (a - m)^2 + n^2 - r^2 = 0,$$

$$|BS| = r \Leftrightarrow h_2 : m^2 + (b - n)^2 - r^2 = 0,$$

$$|CS| = r \Leftrightarrow h_3 : (c - m)^2 + n^2 - r^2 = 0,$$

$$|DS| = r \Leftrightarrow h_4 : m^2 + (d - n)^2 - r^2 = 0,$$

$$F \in CD \Leftrightarrow h_5 : cd - cf - ed = 0,$$

$$CD \perp FQ \Leftrightarrow h_6 : ce - df = 0,$$

Závěrné tvrzení z má tvar:

Body F , Q , M jsou kolineární, což znamená, že leží na jedné přímce. Vycházíme ze známého předpokladu:

$$\begin{bmatrix} e & f & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Z toho vyplývá tvrzení $z : be - af = 0$. Naším úkolem je zjistit, zda závěr z patří do ideálu I , který je generován polynomy $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$. Postupně zapíšeme vzniklé relace a jednotlivé tvrzení do programu CoCoA.

```
Use R:=Q[a,b,c,d,e,f,m,n,r,t];
I:=Ideal((a-m)^2+n^2-r^2,m^2+(b-n)^2-r^2,(c-m)^2+n^2-r^2,m^2+(d-
n)^2-r^2,cd-cf-ed,ce-df,(be-af)(t-1));
NF(1,I);
```

Program nám generuje odpověď $NF = 1$. Nemůžeme rozhodnout, jestli tvrzení je pravdivé nebo nepravdivé. Budeme eliminovat proměnné:

```
Use R:=Q[a,b,c,d,e,f,m,n,r,t];
I:=Ideal((a-m)^2+n^2-r^2,m^2+(b-n)^2-r^2,(c-m)^2+n^2-r^2,m^2+(d-
n)^2-r^2,cd-cf-ed,ce-df,(be-af)(t-1));
Elim(e..t,I);
```

Dostáváme

```
Ideal(1/2a^2bc - 1/2abc^2 - 1/2ab^2d - 1/2a^2cd + 1/2b^2cd +
1/2ac^2d + 1/2abd^2 - 1/2bcd^2)
```

Pomocí funkce Factor dostáváme

```
Factor(1/2a^2bc - 1/2abc^2 - 1/2ab^2d - 1/2a^2cd + 1/2b^2cd +
1/2ac^2d + 1/2abd^2 - 1/2bcd^2);
-----
[[b - d, 1], [ac - bd, 1], [a - c, 1], [1/2, 1]]
```

Pomocí programu dostáváme podmínky $B = D$ a $A = C$. Z toho plyne, že pro vrcholy čtyřúhelníku platí $B = D$ nebo $A = C$. Tyto případy musíme vyloučit, budeme předpokládat nerovnost $B \neq D$ a $A \neq C$. Přidáme polynom $(b - d)(a - c)v - 1$ do ideálu I

a $J = I \cup \{(b - d)(a - c)v - 1\}$, kde v je další pomocná proměnná. A celou akci zopakujeme.

```
Use R := QQ[a,b,c,d,e,f,m,n,r,t,v];
J := Ideal((a-m)^2+n^2-r^2,m^2+(b-n)^2-r^2,(c-m)^2+n^2-r^2,m^2+(d-
n)^2-r^2,cd-cf-ed,ce-df,(be-af)(t-1),(b-d)(ac-bd)(a-c)v-1);
NF(1,J);
```

0

Vidíme, že nám program generuje odpověď 0, což znamená, že počítačový důkaz je hotov (Obr. 17).

```
CoCoA 4.7.4: D:/bvw
File Edit CoCoA CoCoAServer Settings Help
-- Version      : 4.7.4
-- Online Help  : type ? or ?keyword
-- Web site     : http://cocoa.dima.unige.it
-----
-- The current ring is R := QQ[x,y,z];
-----
Use R := QQ[a,b,c,d,e,f,m,n,r,t,v];
I := Ideal((a-m)^2+n^2-r^2,m^2+(b-n)^2-r^2,(c-m)^2+n^2-r^2,m^2+(d-n)^2-r^2,cd-cf-ed,ce-df,(be-af)(t-1),(b-d)(ac-bd)(a-c)(1/2)v-1);
NF(1,I);
0
-----
Interactive (0)  bvw (1)
Use R := QQ[a,b,c,d,e,f,m,n,r,t,v];
I := Ideal((a-m)^2+n^2-r^2,m^2+(b-n)^2-r^2,(c-m)^2+n^2-r^2,m^2+(d-n)^2-r^2,cd-cf-ed,ce-df,(be-af)(t-1),(b-d)(ac-bd)(a-c)(1/2)v-1);
NF(1,I);
Ready [109ms] Line: 1 Col: 1 Hi: 2 Ww: Normal AC: Off Al: Off
```

Obr. 17 Výpočet v programu CoCoA

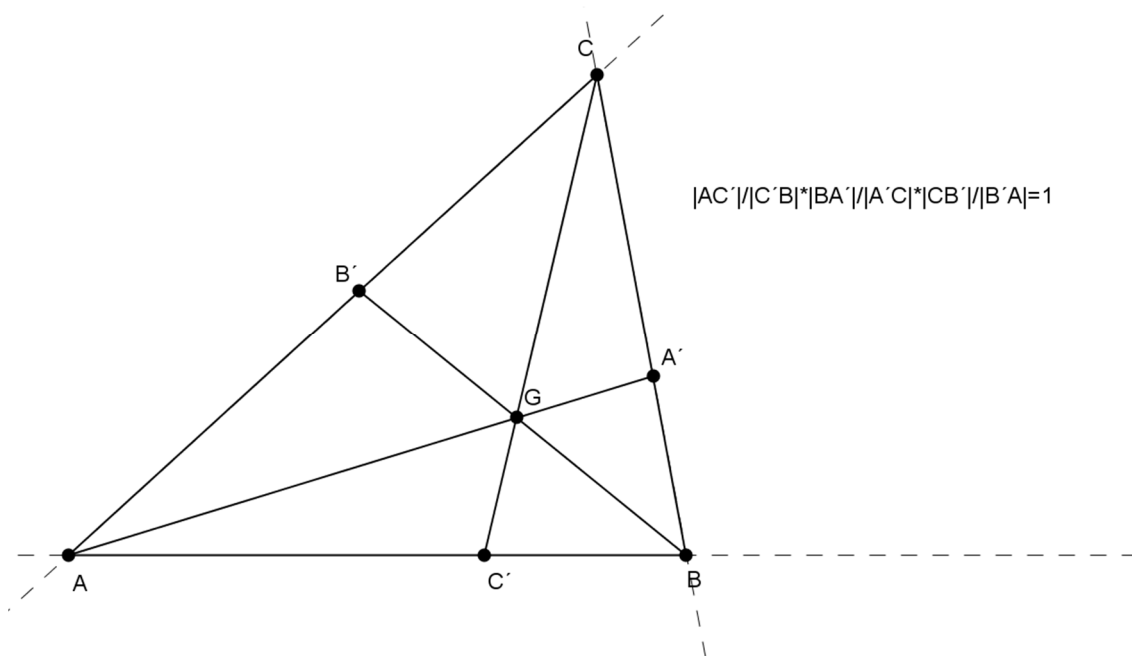
3.3 Cevova věta

Tato věta je pojmenovaná podle italského matematika Giovanniho Cevy, který ji zformuloval v roce 1678.

Cevova věta zní (Obr. 18) [1]:

Je dán trojúhelník ABC a tři body A', B', C' po řadě na stranách BC, AC, AB nebo jejich prodloužení. Potom přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem právě když

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$



Obr. 18 Cevova věta

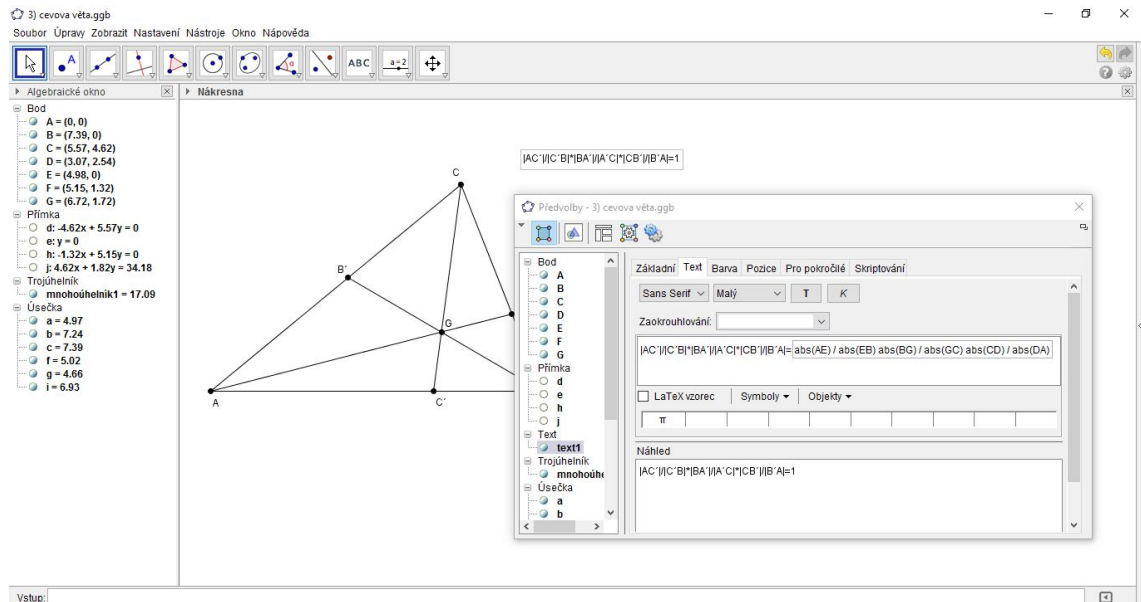
3.3.1 Verifikace a konstrukce Cevovy věty pomocí DGS

Pomocí *Mnohouhelník* narýsujeme libovolný trojúhelník ABC . Sestrojíme přímky x, y, z pomocí bodů AB, AC, BC . Na přímce x volíme libovolný bod C' a pomocí nástroje *Úsečka* sestrojíme úsečku CC' . Stejně jako v předchozím případě s bodem C' volíme libovolný bod A' na přímce z . Vzniklý průsečík F úseček CC a AA pomocí nástroje *Přejmenovat* přejmenujeme na bod G . Sestrojíme polopřímku BG , která nám protne přímku y v bodě B' .

Samotnou verifikaci provedeme pomocí *Vložení textu*, do ikony pro text napíšeme

$|AC'|/|C'B| \cdot |BA'|/|A'C| \cdot |CB'|/|B'A| = \text{abs}(AC')/\text{abs}(C'B)/\text{abs}(BA')/\text{abs}(A'C)/\text{abs}(CB')/\text{abs}(B'A)$ (Obr. 19). Program GeoGebra nám generuje $|AC'|/|C'B| \cdot |BA'|/|A'C| \cdot |CB'|/|B'A| = 1$.

Pomocí funkce *Ukazovátka* vidíme, že pohybováním jednotlivých bodů A' , B' , C' se nám poměr v zadaném textu nemění. Tím je verifikace hotová.



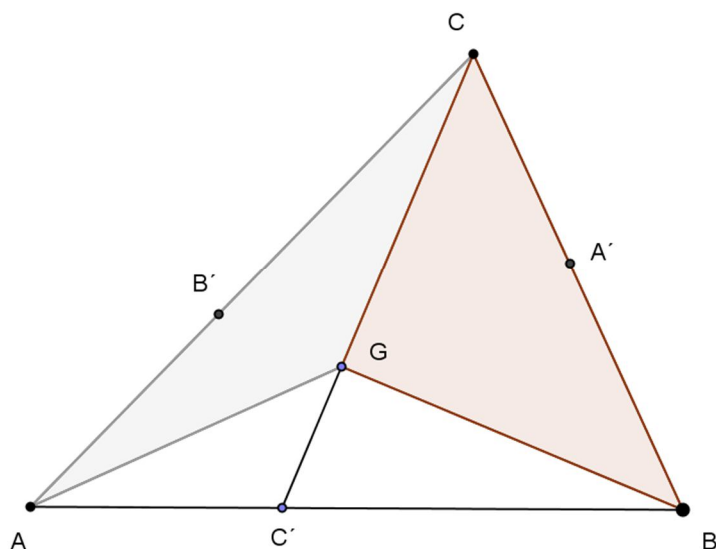
Obr. 19 Vložení textu

3.3.2 Klasický důkaz Cevovy věty

Podmínka pro Cevovu větu se často zapisuje ve tvaru, který použijeme pro klasický důkaz.

$$\frac{|AC'|}{|C'B'|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C'|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A'|} = 1.$$

Větu dokážeme použitím tzv. *areální metody*, kde využíváme poměry obsahů trojúhelníků. Když mají dva trojúhelníky společnou základnu, pak jejich poměr obsahů je roven poměru odpovídajících výšek.



Obr. 20 Areální metoda

Poměr délek $|AC'|/|C'B|$ je roven poměru trojúhelníků GCA a GCB , kde G, C jsou dva libovolné body na společné přímce, která prochází bodem C' . Poměr obsahů trojúhelníků GCA , GCB je roven poměru výšek na společnou základnu GC a zároveň je roven poměru délek $|AC'|/|C'B|$.

Předpokládejme, že pro klasický důkaz Cevovy věty se přímky AA' , BB' , CC' protínají v bodě G . Podle *areální metody* platí:

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{||CAG||}{||BCG||}.$$

Kde $||AGC||$ značí orientovaný obsah trojúhelníka AGC atd. Obdobně se dokáže, že platí

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{||ABG||}{||CAG||} \text{ a } \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{||BCG||}{||ABG||}.$$

Tedy

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{||CAG||}{||BCG||} \cdot \frac{||ABG||}{||CAG||} \cdot \frac{||BCG||}{||ABG||} = 1.$$

Zjistili jsme, že podmínka $\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1$ je nutná. Teď dokážeme, že podmínka je dostačující a z její platnosti můžeme říct, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v jednom bodě. V našem případě v bodě G . Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme platnost podmínky a to, že se přímky AA' , BB' , CC' v jednom bodě neprotínají. Necht' AA' , BB' se protínají v bodě G . Bodem G vedeme přímku CG , která protíná stranu AB v bodě $C'' \neq C'$. Dokázali jsme, že platí

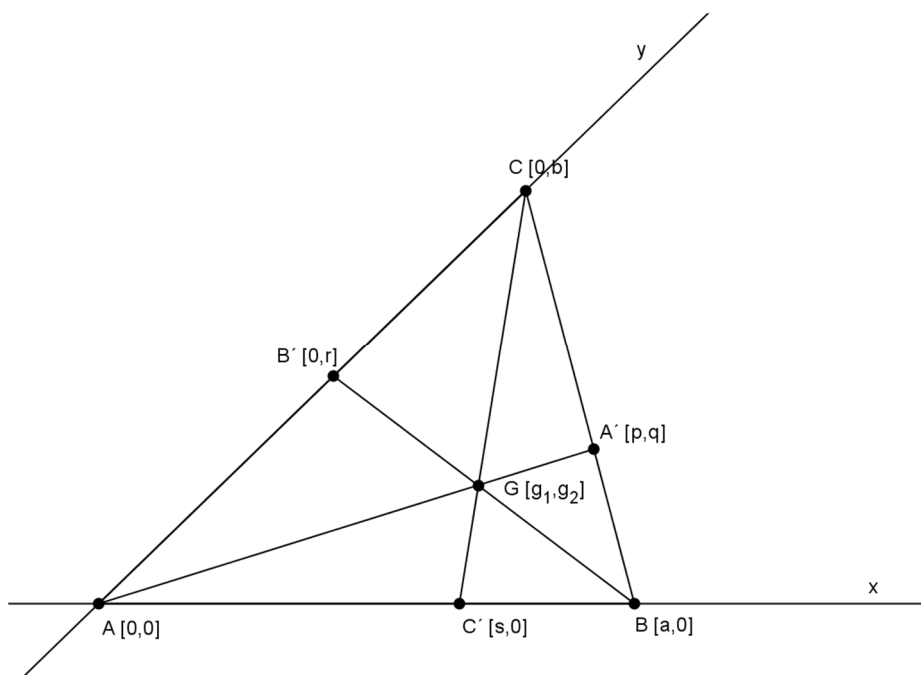
$$\frac{|AC''|}{|C''B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'C|} = 1.$$

Po porovnání s předpokladem dostáváme

$$\frac{|AC''|}{|C''B|} = \frac{|AC|}{|C'B|}.$$

Vidíme, že $C' = C''$, takže důkaz sporem je tím pádem hotov.

3.3.3 Důkaz Cevovy věty pomocí CAS



Obr. 21 Zavedení soustavy souřadnic

Pro dokázání Cevovy věty použijeme dělicí poměr. Jsou-li A, B, C tři body ležící na přímce, $A \neq B$, potom dělicí poměr bodu $C \neq B$ vzhledem k bodům A, B nazveme takové číslo λ , pro které platí $C - A = \lambda (C - B)$. Značíme $\lambda = (ABC)$. Zvolíme si soustavu souřadnic $A=[0,0], B=[a,0], C=[0,b], A'=[p,q], B'=[0,r], C'=[s,0], G=[g_1,g_2]$ (Obr. 21). Pomocí dělicího poměru nám vyplynou rovnice $l_1(s - a, 0) = (s, 0), l_2(p, q - b) = (p - a, q), l_3(0, r) = (0, r - b)$. Odtud plynou následující předpoklady:

$$(ABC) = l_1 \Leftrightarrow h_1 : l_1 (s - a) - s = 0,$$

$$(BCA) = l_2 \Leftrightarrow h_2 : l_2 p - p + a = 0, \quad h_3 : l_2 (q - b) - q = 0,$$

$$(CAB) = l_3 \Leftrightarrow h_4 : l_3 r - r + b = 0,$$

$$G \in AA' \Leftrightarrow h_5 : qg_1 - pg_2 = 0,$$

$$G \in BB' \Leftrightarrow h_6 : rg_1 + ag_2 - ar = 0,$$

$$G \in CC' \Leftrightarrow h_7 : bg_1 + sg_2 - sb = 0.$$

Budeme předpokládat, že se přímky AA', BB', CC' protínají v bodě G . Naším úkolem je dokázat, že platí počáteční podmínka Cevovy věty. Podmínku odvodíme z daných předpokladů tak, že v ideálu I , který obsahuje polynomy $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$, budeme eliminovat všechny proměnné až na vstupní proměnné a, b a proměnné l_1, l_2, l_3 , které nám znázorňují dělicí poměr. V ideálu I eliminujeme zbylé proměnné a a p, q, r, s, g_1, g_2 . V programu CoCoA napíšeme:

```
Use R:=Q[a,b,p,q,r,s,g[1..2],l[1..3]];
I:=Ideal(l[1](s-a)-s,l[2]p-p+a,l[2](q-b)-q,l[3]r-r+b,qg[1]-
pg[2],rg[1]+ag[2]-ar,bg[1]+sg[2]-sb);
Elim(p..g[2],I);
```

Vychází nám $\text{Ideal}(ab l_1 l_2 l_3 + 1)$. Vidíme, že se jedná o jediný polynom $ab(l_1 l_2 l_3 + 1)$. Dle předpokladu $a \neq 0, b \neq 0$, znamená, že v trojúhelníku ABC je $A \neq B, B \neq C$. Nyní zkoumáme, jestli $l_1 l_2 l_3 + 1 = 0$ je hledanou podmínkou.

```
Use R:=Q[a,b,p,q,r,s,g[1..2],l[1..3],t];
I:=Ideal(l[1](s-a)-s,l[2]p-p+a,l[2](q-b)-q,l[3]r-r+b,qg[1]-
pg[2],rg[1]+ag[2]-ar,abt-1,bg[1]+sg[2]-sb);
NF(l[1]l[2]l[3]+1,I);
```

Implikace platí, protože normální forma je rovna 0.

Dále musíme dokázat opačnou implikaci. Pro body A', B', C' platí počáteční podmínka. Chceme dokázat, že se přímky AA', BB', CC' protínají v jednom bodě. Za předpokladu, že bod G je společný pro přímky AA' a BB' a naším cílem je zjistit, že bod G leží taky na přímce CC' , platí podmínka $bg_1 + sg_2 - sb = 0$ a na základě předchozí implikace $ab \neq 0$.

```
Use R := Q[a,b,p,q,r,s,g[1..2],l[1..3],t];
I := Ideal(l[1](s-a)-s, l[2]p-p+a, l[2](q-b)-q, l[3]r-r+b, qg[1]-
pg[2], rg[1]+ag[2]-ar, abt-1, l[1]l[2]l[3]+1);
NF(bg[1]+sg[2]-sb, I);
```

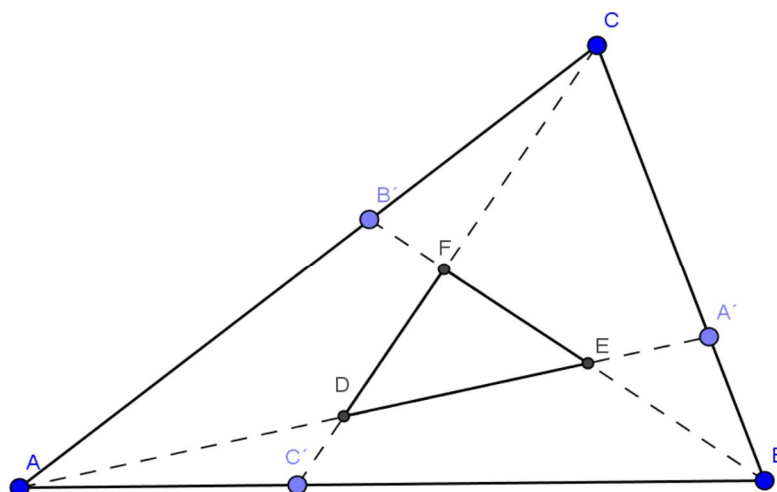
Program CoCoA nám generoval $NF=0$. Tvrzení Cevovy věty je dokázáno.

3.4 Routhova věta

Následující větu zveřejnil v roce 1896 anglický matematik E. J. Routh a její znění je [2]:

Je dán trojúhelník ABC a tři body A', B', C' po řadě na stranách BC, AC, AB nebo jejich prodloužení. Poměry jejich vzdáleností od krajních bodů příslušných stran nazveme $\frac{|CA'|}{|BA'|} = x, \frac{|AB'|}{|CB'|} = y, \frac{|BC'|}{|AC'|} = z$. Dále průsečky D, E a F vzniklé průnikem dvojic úseček AA', BB' a CC' takto $D \in AA' \cap CC', E \in AA' \cap BB', F \in BB' \cap CC'$. Potom poměr obsahů trojúhelníků DEF a ABC je dán výrazem:

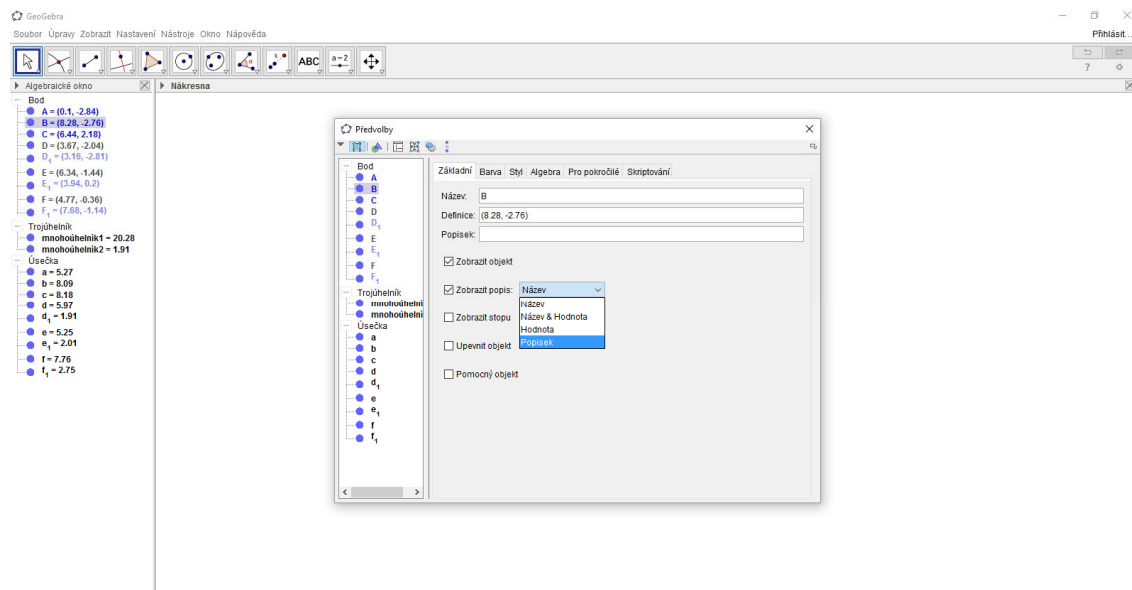
$$\frac{||DEF||}{||ABC||} = \frac{(xyz + 1)^2}{(xy - x + 1)(yz - y + 1)(zx - z + 1)}.$$



Obr. 22 Routhova věta

3.4.1 Verifikace a konstrukce Routhovy věty pomocí DGS

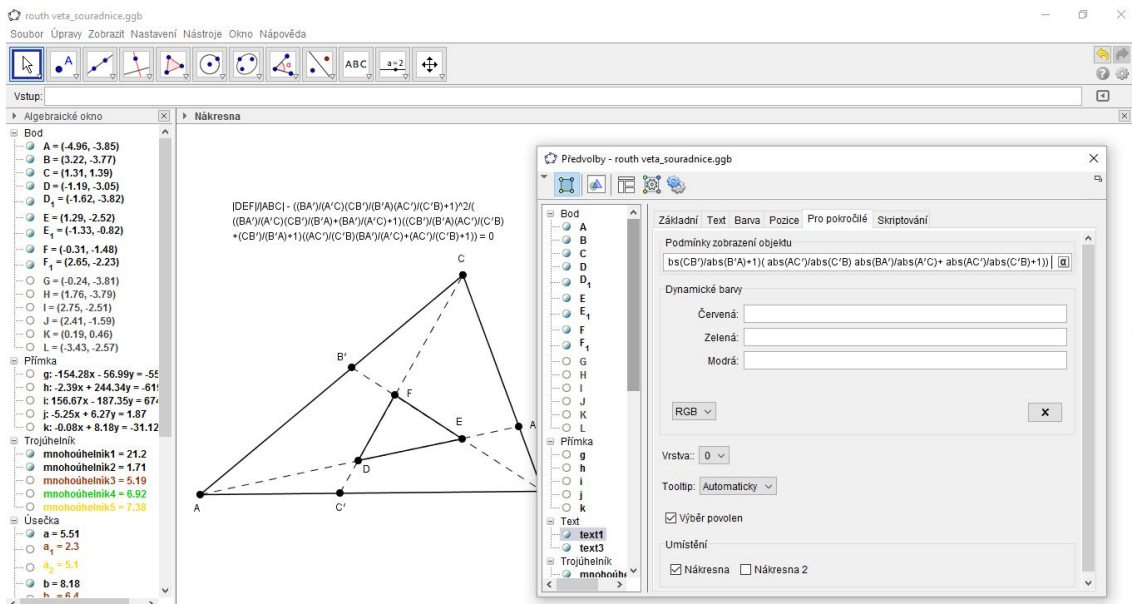
Pomocí funkce *Nový bod* v programu GeoGebra sestrojíme tři body A , B a C . Nástrojem *Mnohoúhelník* spojíme vytvořené body a vznikne nám trojúhelník ABC . Na stranách AB , BC a AC volíme postupně body D , E a F , program GeoGebra nám generuje popis bodů, jak jsou písmena v abecedním pořadí. Proto musíme body D , E a F přejmenovat. Tuto operaci nám program neumožní nástrojem *Přejmenovat*. Musíme tak nástrojem *Vlastnosti...* vybrat položku *Základní*, kde do kolonky s názvem *Popisek* napíšeme popořadě v našem případě A' , B' a C' . Dále musíme změnit ještě *Zobrazení popisu* pomocí výběru *Popisek* (Obr. 23).



Obr. 23 Změna Zobrazení popisu

Pomocí funkce *Úsečka* spojíme jednotlivé body AA' , BB' a CC' . Vlastností *Průsečík* získáváme body D , E a F , který nám tvoří trojúhelník DEF .

Verifikaci Routhovy věty provedeme podobně jako u Cevovy věty, pomocí dosazení vzorce do kolonky *Podmínky zobrazení objektu* (Obr. 24)



Obr. 24 Ověření Routhovy věty

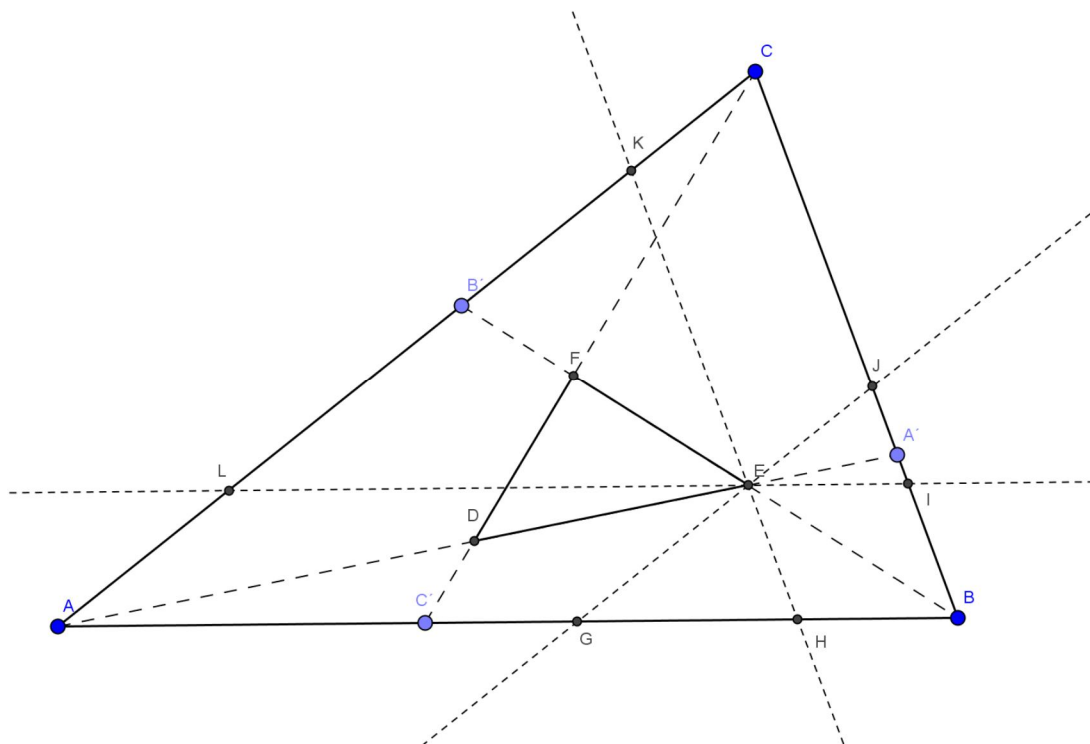
Vidíme, že verifikace je tím pádem hotová.

3.4.2 Klasický důkaz Routhovy věty

Klasický důkaz, který si uvedeme, dokázali jako první J. S. Kline a D. J. Velleman. Routhovu větu budeme dokazovat ve tvaru

$$\frac{||DEF||}{||ABC||} = \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)}.$$

Pomocí rovnoběžky bodem E se stranami trojúhelníka ABC (Obr. 25).



Obr. 25 Rovnoběžky bodem E

$$\frac{|HE|}{|EK|} = \frac{|BA'|}{|A'C|} = x,$$

odtud dostáváme vztah $|EK| = |HE| / x$. Z podobnosti trojúhelníků EGH a EIJ dostáváme vztah

$$\frac{|IJ|}{|HE|} = \frac{|JE|}{|JG|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = y,$$

a platí $|IJ| = y \cdot |HE|$.

Dále můžeme tvrdit, že platí $|BC| = |BJ| + |IJ| + |JC| = |HE| + |IJ| + |EK| = |BC| + |HE| + y \cdot |HE| + \frac{1}{x} \cdot |HE|$,

tedy

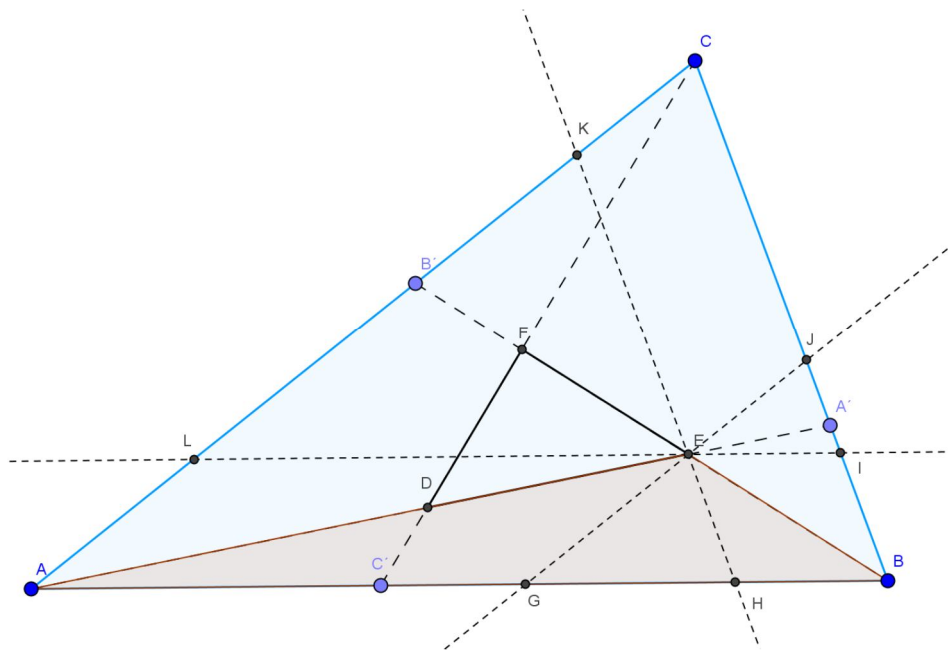
$$\frac{|HE|}{|BC|} = \frac{x}{xy + x + 1}.$$

Trojúhelníky ABC a EGH jsou podobné s koeficientem podobnosti

$$\frac{x}{xy + x + 1}.$$

Ve stejném poměru jako je koeficient podobnosti, jsou i délky všech stran GH a AB . Můžeme říci, že obsah trojúhelníka ABE ku obsahu trojúhelníka ABC je roven (Obr. 26)

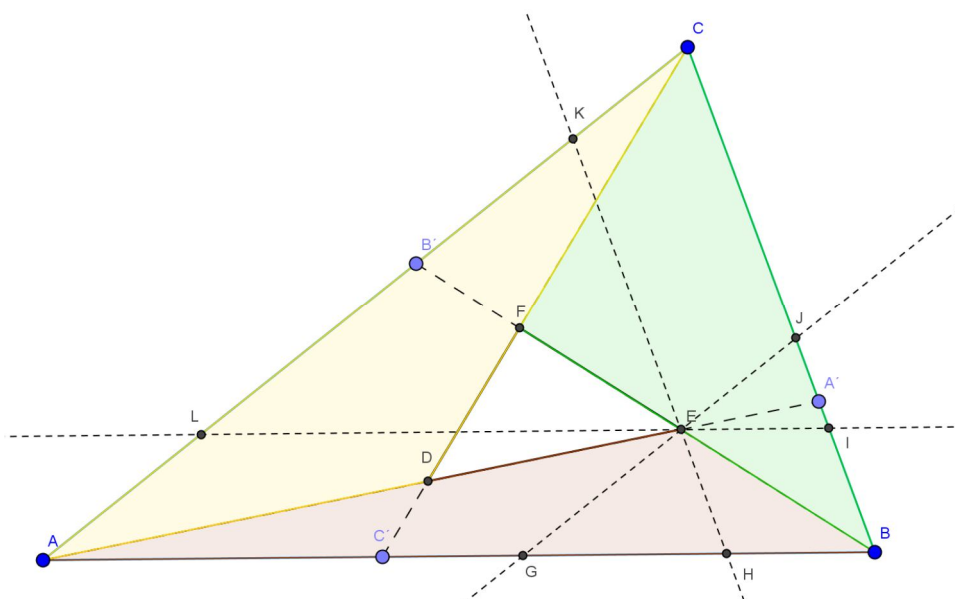
$$\frac{||ABE||}{||ABC||} = \frac{x}{xy + x + 1}.$$



Obr. 26 Obsahy trojúhelníků ABE a ABC

Obdobně pro obsahy trojúhelníků BCF a CAD (Obr. 27) platí

$$\frac{||BCF||}{||ABC||} = \frac{y}{yz + y + 1} \quad \text{a} \quad \frac{||CAD||}{||ABC||} = \frac{z}{zx + z + 1}.$$



Obr. 27 Důkaz Cevovy věty

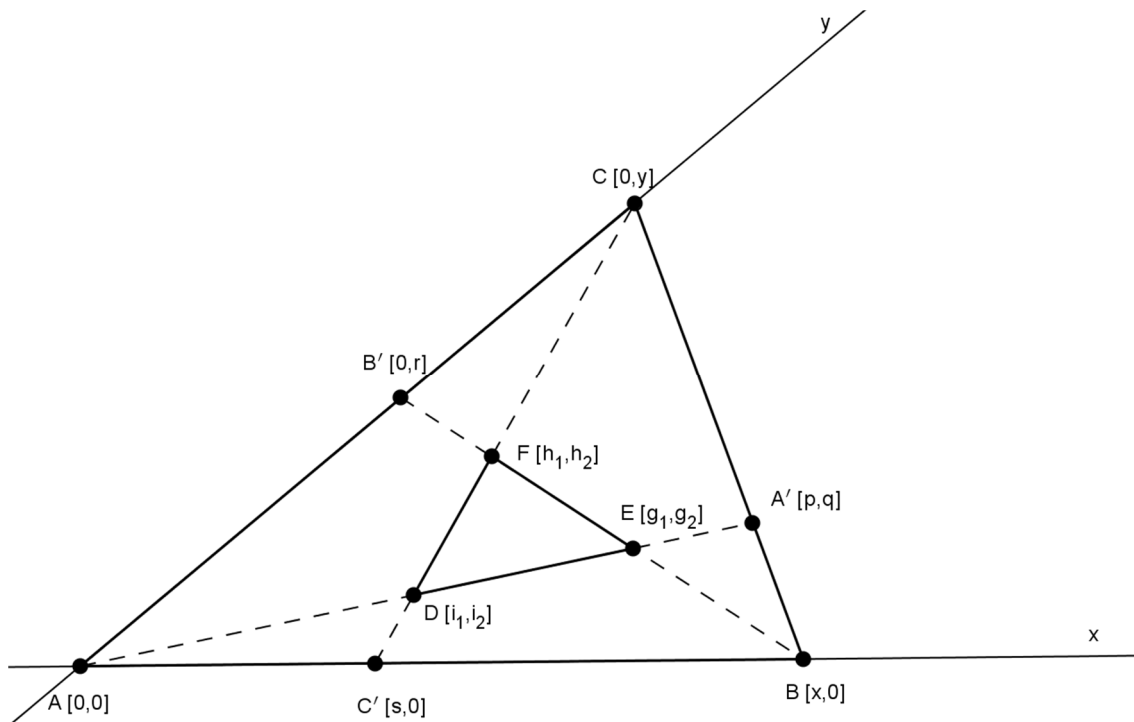
Vidíme, že platí

$$\begin{aligned} \frac{||DEF||}{||ABC||} &= 1 - \frac{x}{(xy + x + 1)} - \frac{y}{(yz + y + 1)} - \frac{z}{(zx + z + 1)} = \\ &= \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)}. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že jde o vztah, ze kterého jsme vycházeli na začátku. Důkaz věty je hotov.

3.4.3 Důkaz Routhovy věty pomocí CAS

Stejně jako v předchozí kapitole, kde jsme se zabývali Cevovou větou, si zvolíme soustavu souřadnic $A=[0,0]$, $B=[x,0]$, $C=[0,y]$, $A'=[p,q]$, $B'=[0,r]$, $C'=[s,0]$, $E=[g_1,g_2]$, $F=[h_1,h_2]$, $D=[i_1,i_2]$ (Obr. 28).



Obr. 28 Zavedení soustavy souřadnic

Pomocí dělicího poměru nám vyplynou rovnice $l_1(A'-C) = A'-B$. Analogicky můžeme zapsat $l_2(B'-A) = B'-C$, $l_3(C'-B) = C'-A$. Platí

$$h_1 : l_1(q-y) - q = 0,$$

$$h_2 : l_1p - p + x = 0,$$

$$h_3 : l_2r - r + y = 0,$$

$$h_4 : l_3(s-x) - s = 0.$$

Dále platí vlastnosti:

$$E \in AA' \Leftrightarrow h_5 : qg_1 - pg_2 = 0,$$

$$E \in BB' \Leftrightarrow h_6 : rg_1 + xg_2 - xr = 0,$$

$$F \in BB' \Leftrightarrow h_7 : rh_1 + xh_2 - xr = 0,$$

$$F \in CC' \Leftrightarrow h_8 : yh_1 + sh_2 - sy = 0,$$

$$D \in AA' \Leftrightarrow h_9 : qi_1 + pi_2 = 0,$$

$$D \in CC' \Leftrightarrow h_{10} : yi_1 + si_2 - sy = 0.$$

V soustavě souřadnic můžeme zvolit $x = y = 1$. Pro vzniklý poměr obsahů f trojúhelníků DEF a ABC platí

$$h_{11} : f = g_1h_2 + h_1i_2 + g_2i_1 - h_2i_1 - g_1i_2 - g_2h_1.$$

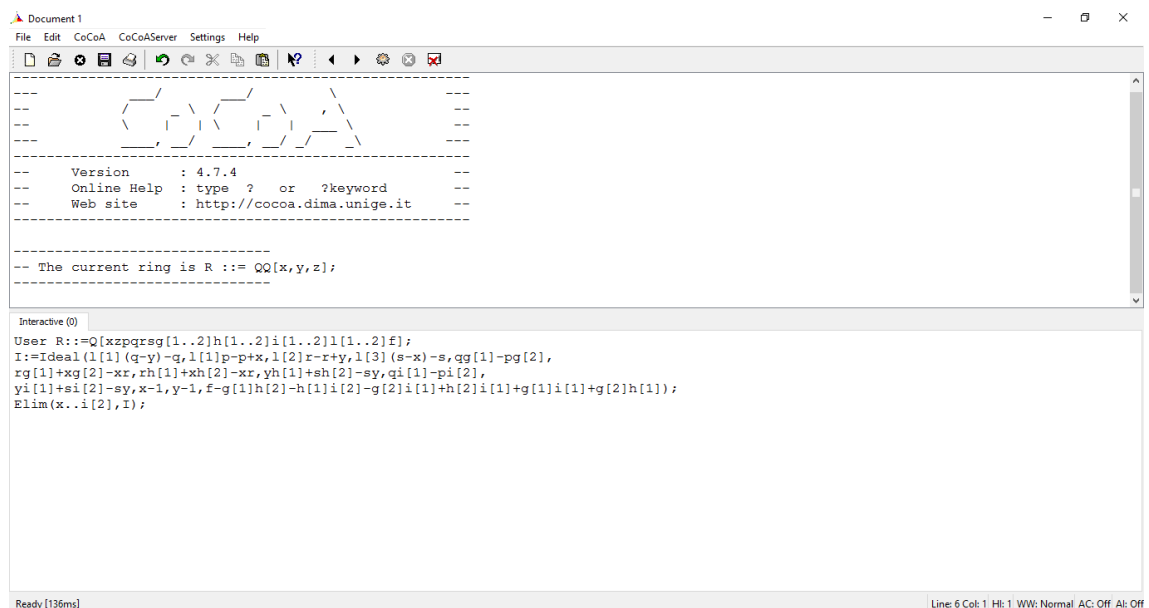
V programu CoCoA eliminujeme proměnné $x, y, p, q, r, s, g_1, g_2, h_1, h_2, i_1, i_2$ v ideálu $I = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$

```
Use R:=Q[x,y,p,q,r,s,g[1..2],h[1..2],i[1..2],l[1..3],f];
I:=Ideal(l[1](q-y)-q,l[1]p-p+x,l[2]r-r+y,l[3](s-x)-s,qg[1]-
pg[2],
rg[1]+xg[2]-xr,rh[1]+xh[2]-xr,yh[1]+sh[2]-sy,qi[1]-pi[2],
yi[1]+si[2]-sy,x-1,y-1,f-g[1]h[2]-h[1]i[2]-
g[2]i[1]+h[2]i[1]+g[1]i[1]+g[2]h[1]);
Elim(x..i[2],I);
```

po faktorizaci dostáváme jedinou rovnici

$$-f \cdot (l_2 l_3 - l_2 + 1)(l_1 l_3 - l_3 + 1)(l_1 l_2 - l_1 + 1) + (l_1 l_2 l_3 + 1)^2 = 0,$$

vidíme, že se jedná o vztah, který uvádíme na začátku kapitoly.



Obr. 29 Zavedení problematiky do softwaru CoCoA

3.5 Feynmanův trojúhelník

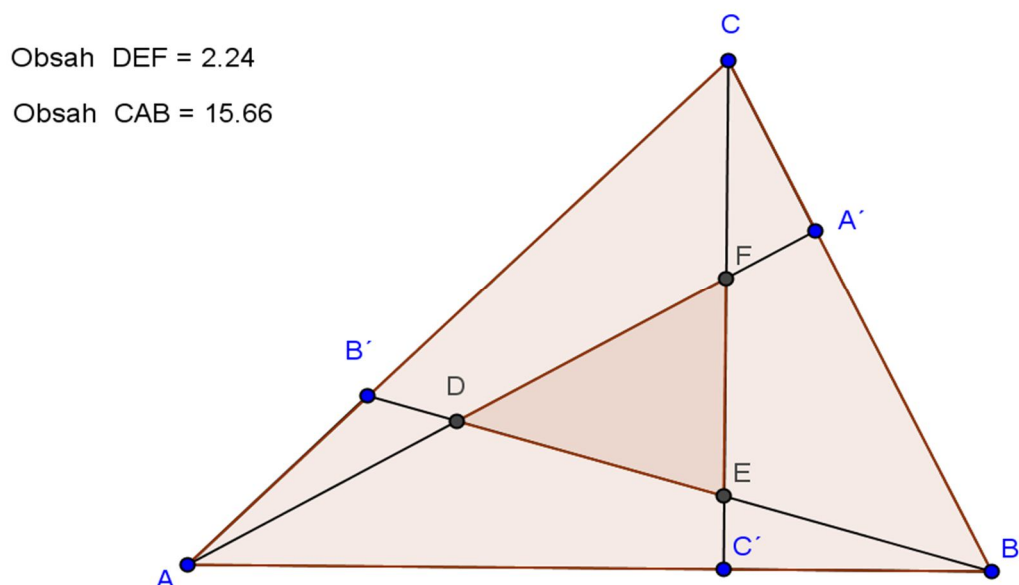
Tato matematická věta je speciálním případem Routhovy věty.

Rozdělíme-li strany trojúhelníka ABC na tři stejné díly, potom platí $l_1 = l_2 = l_3 = -1/2$.

Tím pádem ze vzorce

$$\frac{||DEF||}{||ABC||} = \frac{(l+1)^3}{(l^3+1)},$$

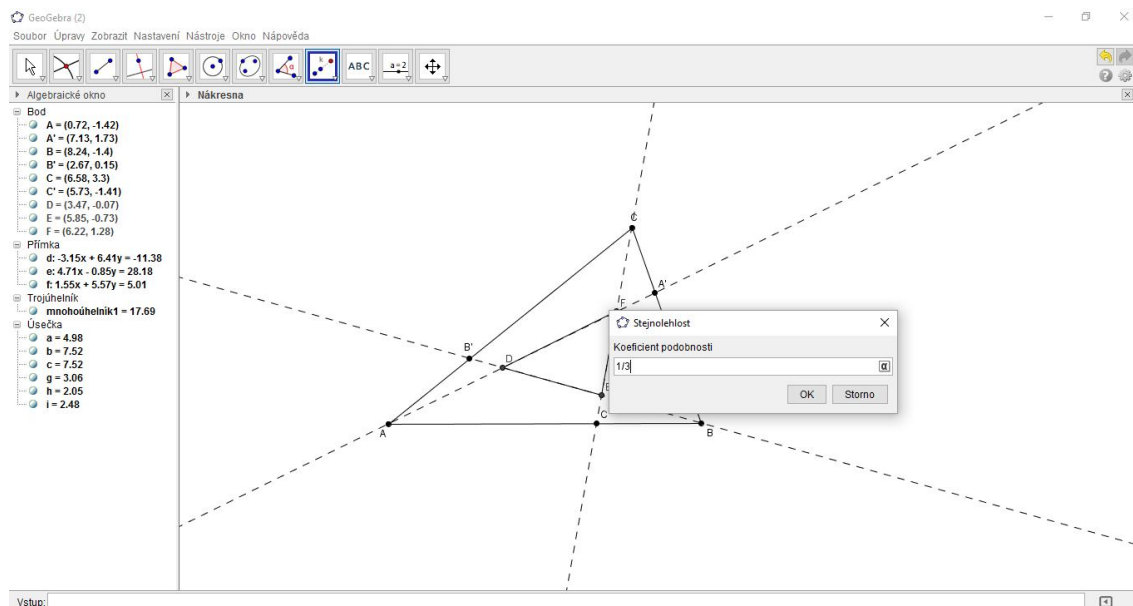
dostáváme, že obsah trojúhelníka DEF je roven $1/7$ obsahu trojúhelníka ABC (Obr. 30) [3].



Obr. 30 Feynmanův trojúhelník

3.5.1 Konstrukce Feynmanova trojúhelníku pomocí DGS

Feynmanův trojúhelník sestrojíme v programu GeoGebra pomocí vlastnosti *Stejnolehlost*. Nejprve si sestrojíme nástrojem *Mnohoúhelník* libovolný trojúhelník ABC . Poté využitím zmíněné funkce *Stejnolehlost* zkonstruujeme jednotlivé body A' , B' a C' na stranách AB , BC a CA trojúhelníka. Nejprve si označíme vzor pak *střed stejnoolehlosti* a následně zadáme do zobrazené kolonky *koeficient podobnosti* (Obr. 31).



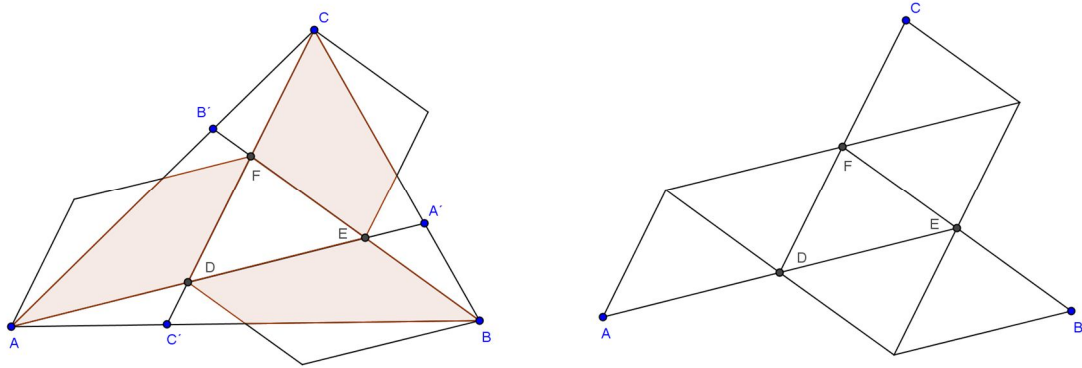
Obr. 31 Zadávání koeficientu podobnosti

V našem případě se jedná o jednu třetinu. Průsečíky DEF dvojic úseček AA' , BB' , CC' .

Verifikaci tvrzení o Feynmanově trojúhelníku dokážeme pomocí vlastnosti *Obsah*. Program GeoGebra nám určí obsahy trojúhelníků ABC a DEF . Vidíme, že nástrojem *Ukazovátka* měníme velikost trojúhelníka ABC a zároveň se nám mění obsah trojúhelníka DEF . Generovaný poměr trojúhelníků je $1/7$. Verifikace je tím pádem hotova.

3.5.2 Klasický důkaz tvrzení o Feynmanově trojúhelníku

Jako důkaz ukážeme elegantní řešení, které uvádí R. Nelsen v publikaci *Proofs Without Words II* [4], důkaz uvádíme stejně jako v publikaci *beze slov* (Obr. 32).



Obr. 32 R. Nelsenův důkaz beze slov tvrzení o Feynmanově trojúhelníku

3.5.3 Důkaz tvrzení o Feynmanově trojúhelníku pomocí CAS

Pro důkaz Feynmanova trojúhelníka pomocí CAS zavedeme soustavu souřadnic $A=[0,0]$, $B=[a,0]$, $C=[0,v]$, $G=[g_1,g_2]$, $H=[h_1,h_2]$, $I=[i_1,i_2]$ a použijeme zápis obsahů trojúhelníka. (Obr. 33) Zavedeme polynomy:

$$h_1 : -1/2 (q - y) - q = 0,$$

$$h_2 : -1/2(p - p + x) = 0,$$

$$h_3 : -1/2(r - r + y) = 0,$$

$$h_4 : -1/2((s - x) - s) = 0.$$

Dále platí vlastnosti:

$$E \in AA' \Leftrightarrow h_5 : qg_1 - pg_2 = 0,$$

$$E \in BB' \Leftrightarrow h_6 : rg_1 + xg_2 - xr = 0,$$

$$F \in BB' \Leftrightarrow h_7 : rh_1 + xh_2 - xr = 0,$$

$$F \in CC' \Leftrightarrow h_8 : yh_1 + sh_2 - sy = 0,$$

$$D \in AA' \Leftrightarrow h_9 : qi_1 + pi_2 = 0,$$

$$D \in CC' \Leftrightarrow h_{10} : yi_1 + si_2 - sy = 0.$$

V soustavě souřadnic můžeme zvolit $x = y = 1$. Pro vzniklý poměr obsahů f trojúhelníků DEF a ABC platí

$$h_{11} : f = g_1h_2 + h_1i_2 + g_2i_1 - h_2i_1 - g_1i_2 - g_2h_1.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & 1 \\ i_1 & i_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

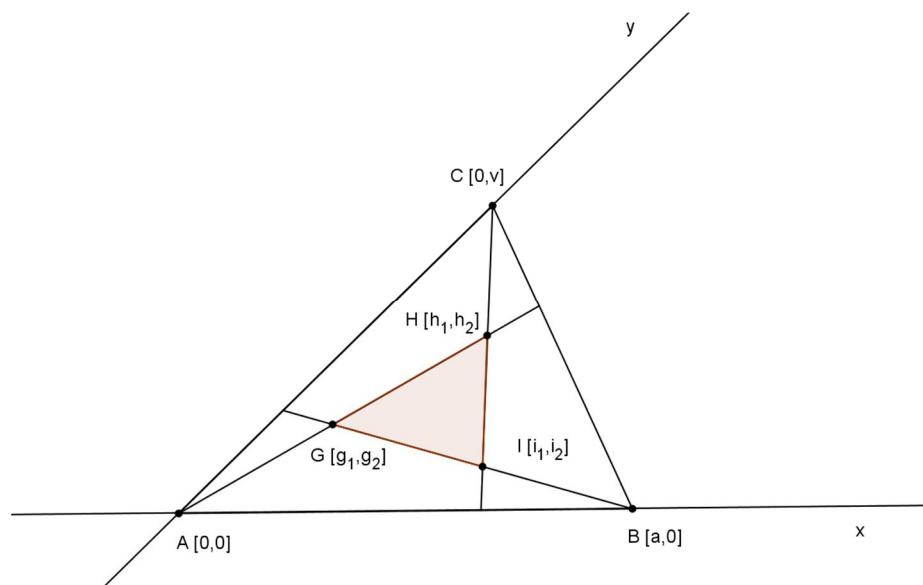
```
Use R:=Q[x,y,p,q,r,s,g[1..2],h[1..2],i[1..2],l[1..3],f];
I:=Ideal(l[1](q-y)-q,l[1]p-p+x,l[2]r-r+y,l[3](s-x)-s,qg[1]-
pg[2],rg[1]+xg[2]-xr,rh[1]+xh[2]-xr,yh[1]+sh[2]-sy,qi[1]-pi[2],
yi[1]+si[2]-sy,x-1,y-1,f-g[1]h[2]-h[1]i[2]-
g[2]i[1]+h[2]i[1]+g[1]i[2]+g[2]h[1],l[1]+1/2,l[2]+1/2,l[3]+1/2);
Elim(x..l[3],I);
```

Musíme dokázat, že poměr obsahů trojúhelníka GHI a obsah trojúhelníka ABC je roven $1/7$. Program CoCoA nám generuje odpověď:

```
Ideal(7/3f - 1/3)
```

Z toho vyplývá $\frac{1}{3}(7f - 1) = 0$ a tudíž $f = \frac{1}{7}$.

Vidíme, že tvrzení je pravdivé.



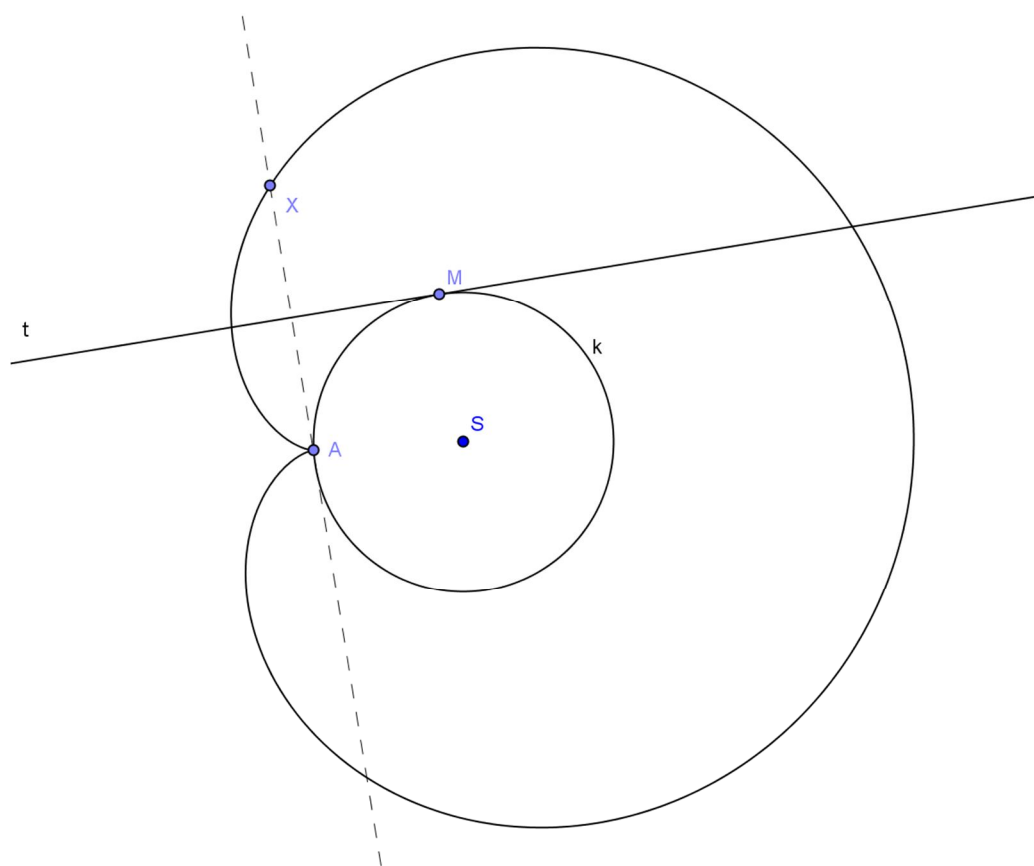
Obr. 33 Zavedení soustavy souřadnic

4 Určování množin bodů

4.1 Kardioida

Název rovinné křivky vychází z řeckého slova *καρδία*, které lze přeložit jako *srdce*. Můžeme se setkat s počestějším názvem *srdcovka*. V roce 1741 ji pojmenoval italský matematik Giovanni Salvemini [6].

Kardioida je množina všech bodů X , které jsou souměrné s bodem A podle tečny t a kružnice k s bodem dotyku M (Obr. 34).

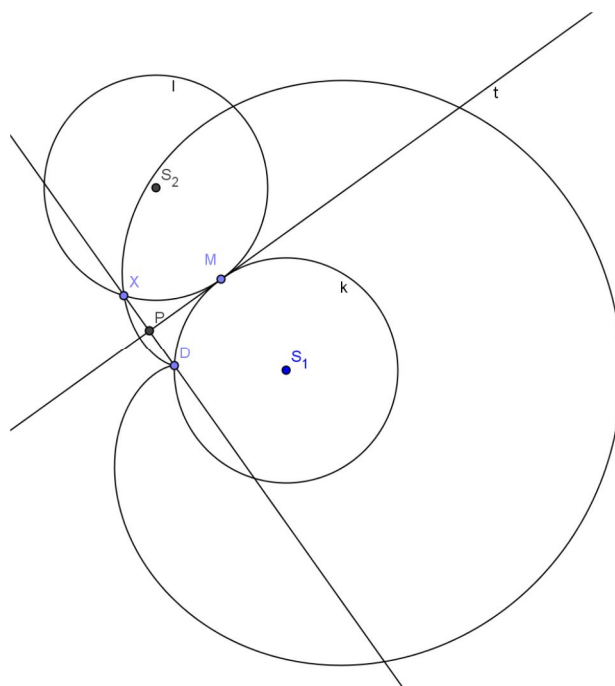


Obr. 34 Kardioida

4.1.1 Vykreslení křivky pomocí programu GeoGebra – I. způsob

Konstruovat kardioidu v programu GeoGebra můžeme několika způsoby. Nejprve si sestrojíme libovolnou kružnici danou středem a bodem, pomocí vlastností *Přejmenovat...* přejmenujeme původní kružnici c na kružnici k se středem S . Funkcí *Nový bod* volíme bod M na kružnici k . Tímto bodem vedeme tečnu díky nástroji *Tečny z bodu*.

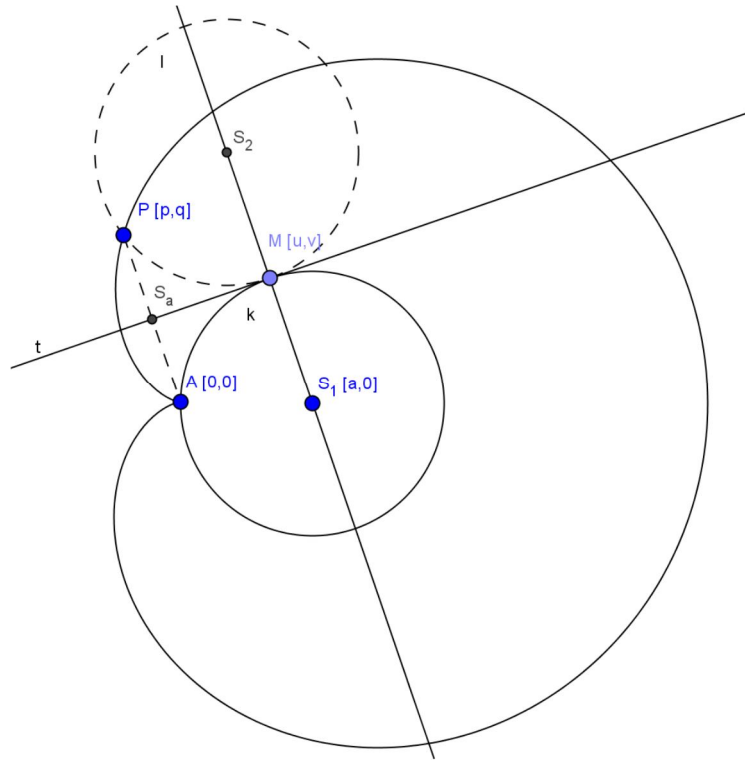
Kardioida patří mezi cyklické křivky, které lze sestrojít v programu GeoGebra několika způsoby. Jako první způsob si ukážeme trajektorii pevně daného bodu kružnice l , která se kotálí kolem kružnice k o stejném poloměru. Nejprve si sestrojíme libovolnou kružnici c danou středem A a bodem B . Pomocí funkce *Přejmenovat...* přejmenujeme střed A na S_1 , bod kružnice B na A a v poslední řadě kružnici c na k . Na kružnici k volíme libovolný bod M , kterým vedeme tečnu t . Dále sestrojíme pomocí funkce *Osová souměrnost* bod X . Nejprve označíme bod A jako vzor a pak osu souměrnosti v našem případě se jedná o tečnu t , získáváme bod X . Víme, že střed S_2 kotálející se kružnice l leží na spojnici S_1M . Střed S_2 sestrojíme tak, že osa úsečky XM nám protne přímkou tvořenou body S_1M právě v bodě S_2 (Obr. 35).



Obr. 35 Vykreslení kardioidy pomocí kotálející se kružnice

4.1.2 Určení rovnice křivky – I. způsob

Zavedeme si rovnice, ze kterých budeme vycházet (Obr. 36).



Obr. 36 Zavedení soustavy souřadnic

První vztah vychází z rovnice kružnice

$$M \in k \Leftrightarrow h_1 : (u - a)^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

$$S_a \in t \Leftrightarrow h_2 : (u - a)p/2 + vq/2 - (u - a)u - v^2 = 0, S_a \left[\frac{p}{2}, \frac{q}{2} \right],$$

$$PA \perp t \Leftrightarrow h_3 : pv + q(a - u) = 0.$$

Do příkazového řádku v softwaru CoCoA postupně zadáváme

Dostáváme

```
Use R := Q [u, v, a, q, p];
I := Ideal((u - a)^2 + v^2 - a^2, (u - a)p/2 + vq/2 - (u - a)u - v^2, pv + q(a - u));
Elim(u..v, I);
Ideal(-a^4q^2 + 1/4a^2q^4 - a^3q^2p + 1/2a^2q^2p^2 - a^3p^3 + 1/4a^2p^4),
```

Doplňme ještě o vlastnost Factor

Factor(-a⁴q² + 1/4a²q⁴ - a³q²p + 1/2a²q²p² - a³p³ + 1/4a²p⁴);

Program CoCoA nám generuje výsledek

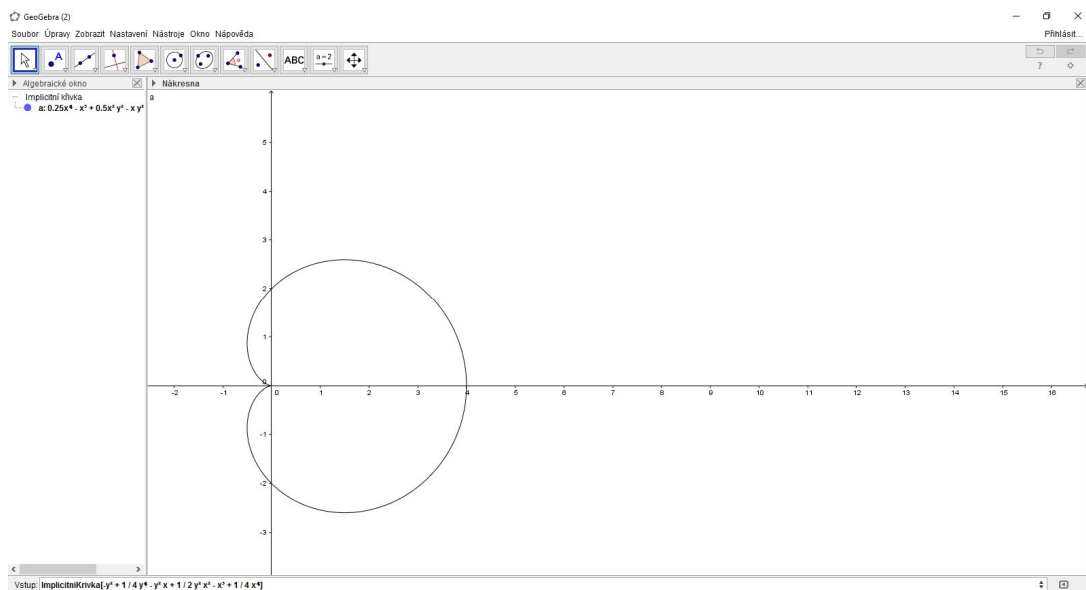
[[4a²q² - q⁴ + 4aq²p - 2q²p² + 4ap³ - p⁴, 1], [a, 2], [-1/4, 1]].

Vidíme, že hledaná rovnice kardioidy je

$$4a^2q^2 - q^4 + 4aq^2p - 2q^2p^2 + 4ap^3 - p^4 = 0.$$

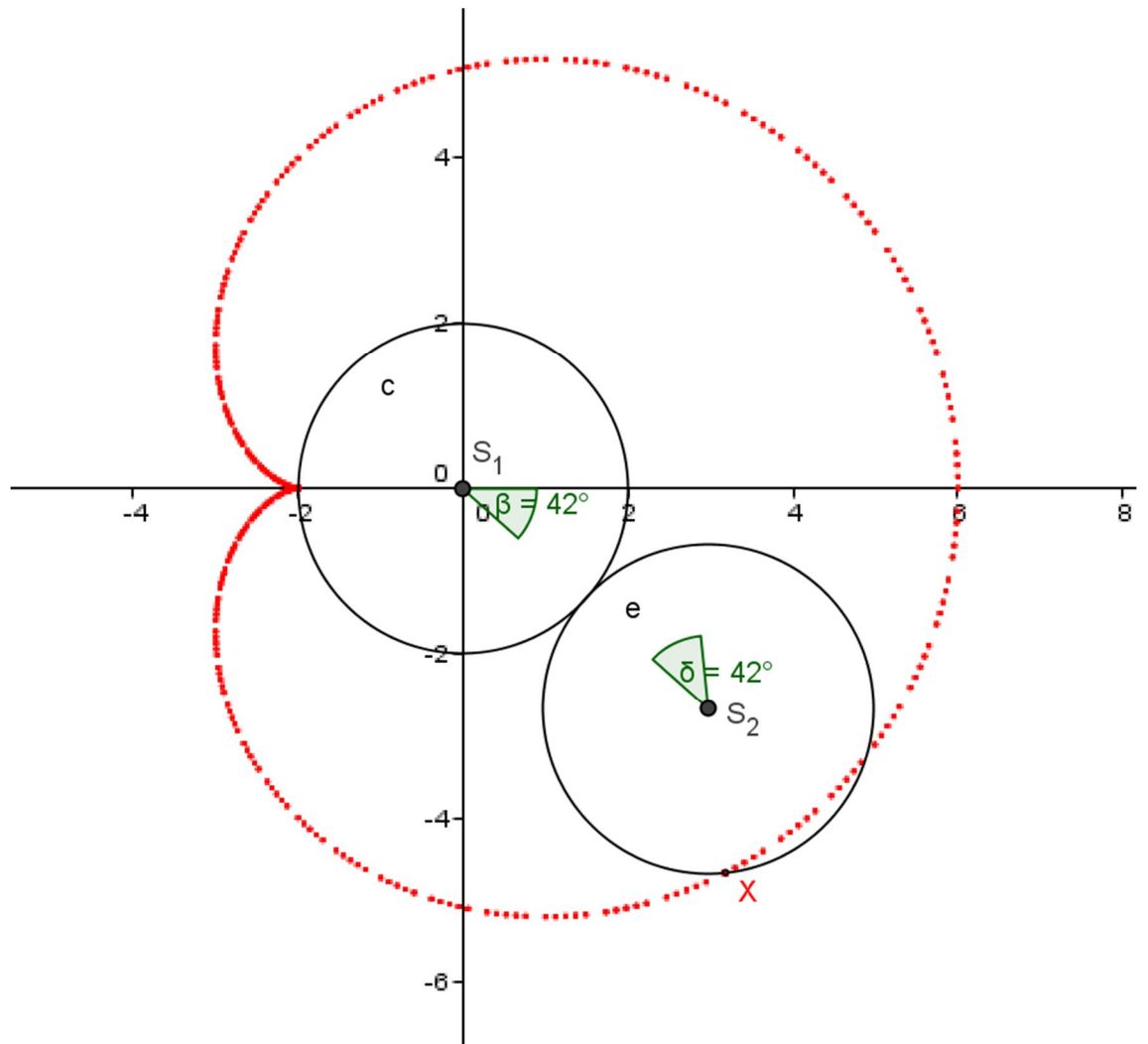
Ověříme pomocí programu GeoGebra, že se jedná o kardioidu. Do příkazového řádku zapíšeme danou rovnici pomocí funkce *Implicitní křivka*.

ImplicitniKrivka[-y² + 1/4 y⁴ - y²x + 1/2 y²x² - x³ + 1/4 x⁴].



Obr. 37 Dosazení funkce *ImplicitniKrivka* do programu GeoGebra

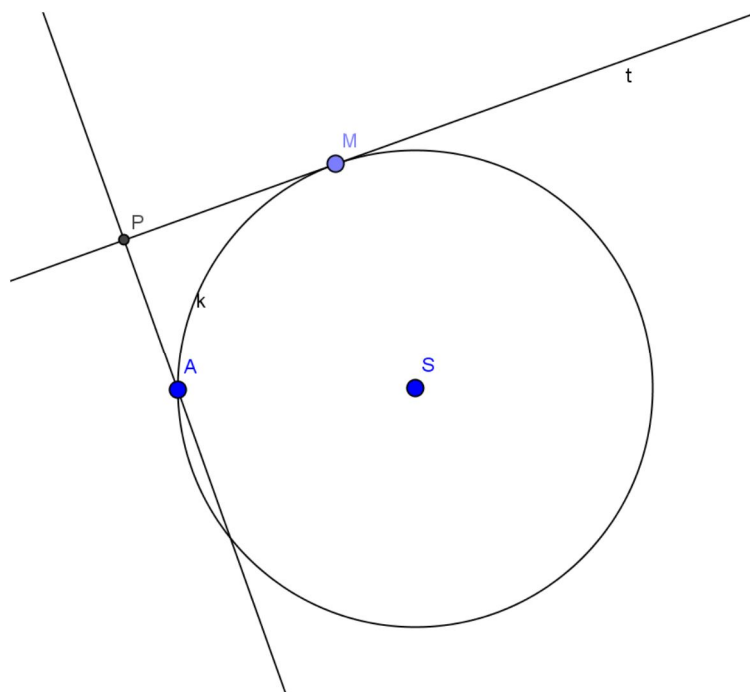
Vidíme, že vzniklá množina bodů, kterou nám vykreslil program GeoGebra, je hledaná množina bodů kardioida.



Obr. 38 Kardioida znázorněna kotálející se kružnicí

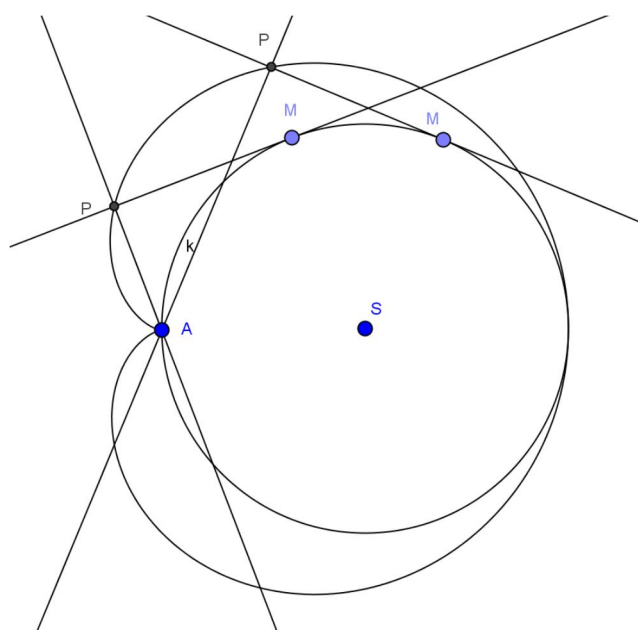
4.1.3 Vykreslení křivky pomocí programu GeoGebra – II. způsob

Další způsob jak konstruovat kardioidu v programu GeoGebra si ukážeme podobný způsob jako v předešlém vykreslení křivky. Jen nám hledanou křivku určí bod P . Vzniklý jako průsečík kolmice z bodu A na tečnu (Obr. 39).



Obr. 39 Vzniklý bod P

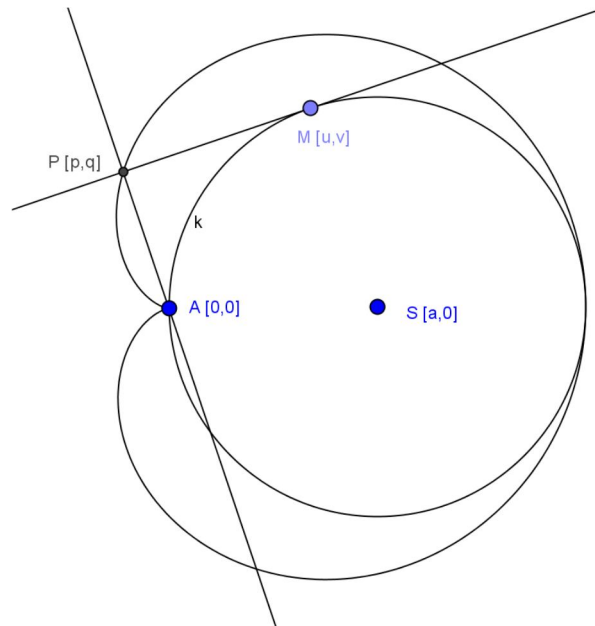
Program GeoGebra dokáže pomocí nástroje *Množina bodů* vykreslit množinu, kterou bod P vykreslí. Nejprve klikneme na bod P a následně na bod C , který je na kružnici k . Software nám okamžitě generuje křivku, která se na první pohled jeví jako srdcovka, ale mi nemůžeme považovat tento jev za opravdový důkaz (Obr. 40)



Obr. 40 Kardioida

4.1.4 Určení rovnice křivky – II. způsob

Nejprve volíme soustavu souřadnic (Obr. 41).



Obr. 41 Zavedení soustavy souřadnic

První vztah nám vychází z rovnice kružnice

$$k: (x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

dostáváme vztah:

$$M \in k \Leftrightarrow h_1: (u-a)^2 + v^2 - a^2 = 0.$$

Dále dostáváme pomocí rovnice tečny t ke kružnici k .

$$t: (u-a)x + vy - (u-a)u - v^2 = 0,$$

$$P \in t \Leftrightarrow h_2: (u-a)^2 + vq - (u-a)^2u - v^2 = 0,$$

a jako poslední rovnici musíme určit kolmost mezi tečnou t a úsečkou AP ,

$$h_3: pv + q(a-u) = 0.$$

Eliminací dostáváme rovnici kardioidy. Použijeme vytvořené rovnice

$$M \in k \Leftrightarrow h_1: (u-a)^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

$$P \in t \Leftrightarrow h_2: (u-a)^2 + vq - (u-a)^2u - v^2 = 0,$$

$$PA \perp t \Leftrightarrow h_3: pv + q(a-u) = 0.$$

V programu CoCoA eliminujeme dané rovnice

```
Use R:=Q[u,v,a,q,p];
I:=Ideal((u-a)^2+v^2-a^2,(u-a)p+vq-(u-a)u-v^2,pv+q(a-u));
Elim(u..v,I);
```

Dostáváme rovnici

```
Ideal(-a^4q^2 + a^2q^4 - 2a^3q^2p + 2a^2q^2p^2 - 2a^3p^3 +
a^2p^4).
```

Program CoCoA nám vygeneruje výsledek

```
[[a^2q^2 - q^4 + 2aq^2p - 2q^2p^2 + 2ap^3 - p^4, 1], [a, 2], [-1, 1]].
```

Neboli rovnice kardioidy je:

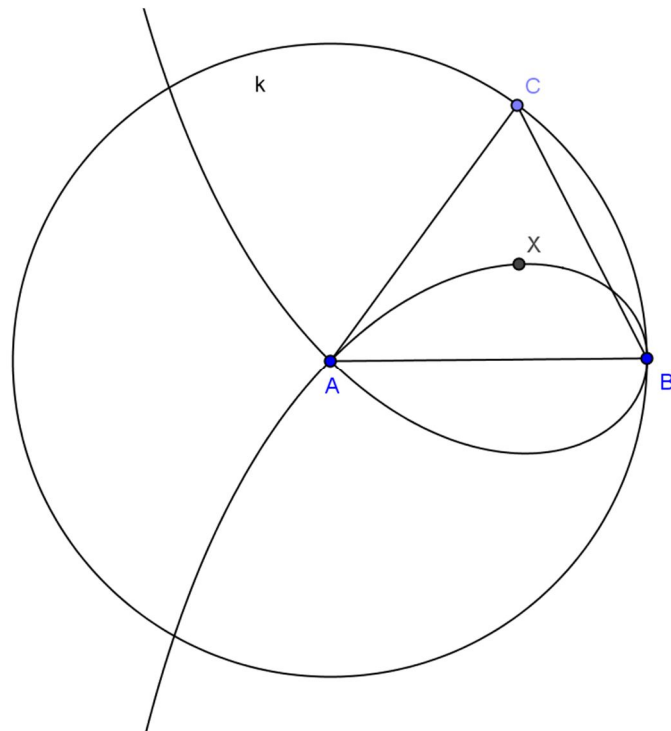
$$a^2q^2 - q^4 + 2aq^2p - 2q^2p^2 + 2ap^3 - p^4 = 0.$$

Pokud tuto rovnici zadáme do příkazového řádku v programu GeoGebra. Vidíme, že jde o kardioidu.

4.2 Strofoida

Patří mezi cyklické křivky, jako kardioida z předešlé kapitoly. Jedná se o rovinnou křivku třetího stupně, která vzniká jako množina všech průsečíků výšek v rovnoramenném trojúhelníku. Jméno strofoida pochází z řeckého slova *strophos*, které v překladu znamená *kroucený pás*. Strofoidu poprvé zmínil ve své práci Isaac Barrow v roce 1670, i když byla zmíněna již kolem roku 1645 v dopisech Evangelisty Torricelliho [5].

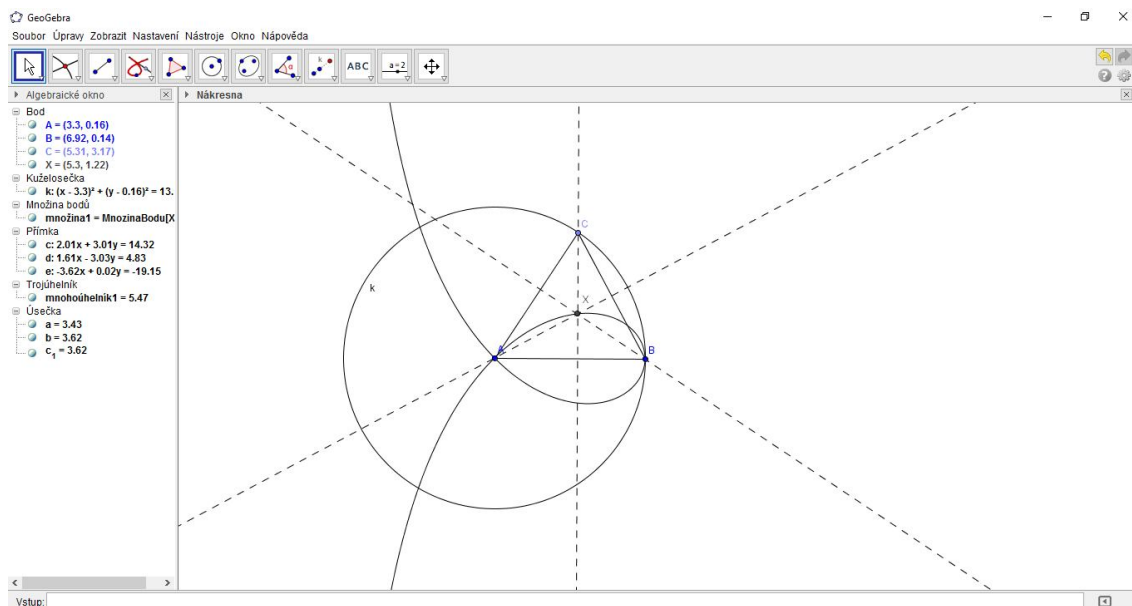
Je dán trojúhelník ABC se základnou AB a kružnice k, (A, r = |AB|). Ortocentrum X nám pohybem vrcholu C po kružnici k, vytváří množinu bodů (Obr. 42).



Obr. 42 Strofoida

4.2.1 Vykreslení křivky v programu GeoGebra

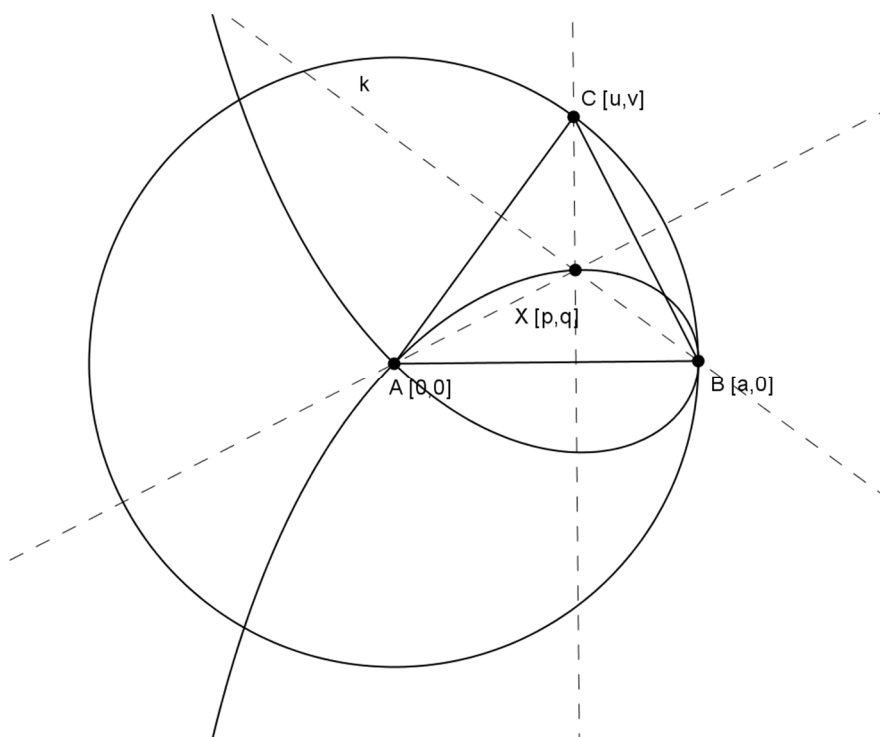
Nejprve sestrojíme kružnici k danou středem A a bodem B . Volíme libovolný bod C , který je prvkem kružnice k . Nástrojem *Mnohoúhelník* spojíme body A , B a C a dostáváme náš zmiňovaný trojúhelník ABC . Vlastností *Kolmice* sestrojíme výšky trojúhelníku ABC , vzniklý průsečík výšek pojmenujeme jako bod X . Program GeoGebra nám umožní díky funkci *Množina bodů* vykreslit množinu, kterou bod X znázorní. Nejprve klikneme na bod X a pak na bod C , kterým pohybem po kružnici vytváříme danou množinu (Obr. 43).



Obr. 43 Strofoida generovaná pomocí funkce *Mnozina bodu*

4.2.2 Určení rovnice křivky

Nejprve si zavedeme soustavu souřadnice $A = [0,0]$, $B = [a,0]$, $C = [u,v]$, $X = [p,q]$ (Obr. 44).



Obr. 44 Zavedení soustavy souřadnic

Nejprve si zavedeme rovnici kružnice, na které leží bod C . Analytický zápis kružnice je $x^2 + y^2 = a^2$ musíme dosadit vrchol $C = [u, v]$, který leží na kružnici k . Dostáváme rovnici ve tvaru:

$$C \in k \Leftrightarrow h_1 : u^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

Dále víme, že bod X leží na výšce v_a a v_c . Výška v_a je dána předpisem $(u - a)x + vy = 0$, do kterého když dosadíme bod X dostáváme relaci

$$X \in v_a \Leftrightarrow h_2 : (u - a)p + vq = 0,$$

Jako poslední rovnici určíme, že bod X je prvkem výšky v_c . Dostáváme rovnici

$$X \in v_c \Leftrightarrow h_3 : p - u = 0.$$

Musíme eliminovat parametry u a v . Parametr u eliminujeme velmi jednoduše, z poslední rovnice vidíme, že $u = p$. Po dosazení do zbylých rovnic dostáváme $p^2 + v^2 - a^2 = 0$ a $(p - a)p + vq = 0$ po úpravě těchto dvou rovnic dostáváme rovnici

$$(p - a) [p^2(p - a) + q^2(p + a)] = 0.$$

Rovnice

$$p^2(p - a) + q^2(p + a) = 0,$$

představuje algebraickou křivku třetího stupně. Můžeme zapisovat

$$q^2 = \frac{p^2(a - p)}{p + a},$$

toto je ekvivalentní s rovnicí

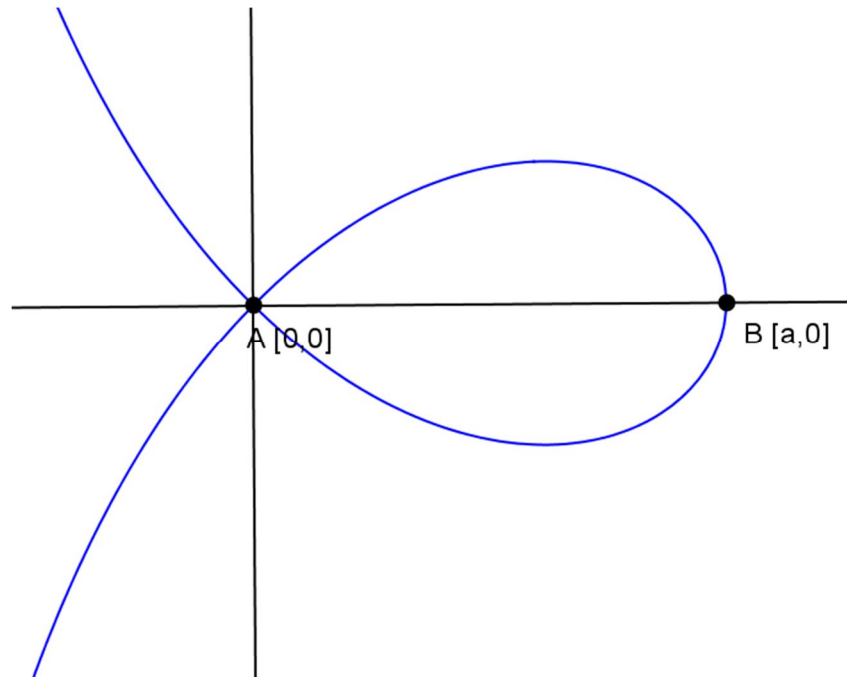
$$q = \pm p \sqrt{\frac{a - p}{a + p}}.$$

Parametry p, q nahradíme souřadnicemi x, y . A můžeme psát

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

$$y = -x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Kontrolu provedeme pomocí programu GeoGebra, který nám vygeneruje strofoidu (Obr. 45).



Obr. 45 Vykreslená strofoida

Postupně zapíšeme rovnice, které jsme generovali při eliminaci v předešlém dokazování.

```
Use R:=Q[a,u,v,p,q];
I:=Ideal(p-u,up-ap+vq,u^2+v^2-a^2);
Elim(u..v,I);
```

Program CoCoA nám generuje rovnici čtvrtého stupně

```
Ideal(-a^2p^2 + 2ap^3 - p^4 + a^2q^2 - p^2q^2),
```

Po změnění parametru p,q na x,y a následné úpravě dostáváme podobné rovnice jako u předešlého důkazu

$$x^2(x-a) = y^2(-x-a).$$

Po dosazení do příkazového řádku programu GeoGebra pomocí funkce *ImplicitniKřivka* zjišťujeme, že jde opravdu o strofoidu.

5 Závěr

GeoGebra a také CoCoA jsou počítačové programy, které usnadňují vysvětlení některých matematických problémů jak na základních, tak rovněž na středních školách. Díky těmto programům mohou žáci lépe pochopit danou problematiku. Velikou výhodou obou programů je jejich bezplatná licence a možnost volného stažení, díky čemuž lze GeoGebrou i CoCoA využívat při vyučování ve škole i při práci doma. Při používání programu GeoGebra jsem se nesetkal s negativními vlastnostmi, u programu CoCoA bych vytkl složité zadávání rovnic a možná snad ještě anglické prostředí softwaru.

6 Seznam použité literatury

[1] PECH, Pavel: Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii. 1. vyd. České Budějovice: Vlastimil Johanus TISKÁRNA, 2004.

[2] Routh's theorem. Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2014 [cit. 2015-02-11]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Routh%27s_theorem

[3] ŠTRAUSOVÁ, Irena: Afinní zobrazení trojúhelníku na rovnostranný trojúhelník, GeoGebra soubor, 2015. Dostupné z <http://tube.geogebra.org/student/m669905>

[4] NELSEN, R.: Proofs Without Words. MAA, 1933.

[5] HAŠEK, Roman: Strofoida. Dostupné z http://home.pf.jcu.cz/~hasek/VTM1/Strofoida_text.pdf

[6] JAREŠOVÁ, Miroslava, VOLF, Ivo: Matematika křivek. Dostupné z <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>