Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra aplikované fyziky a techniky

Matematické metody a úlohy v astronomii

Diplomová práce

Vypracoval: Bc. Jiří Brom

Vedoucí práce: doc. RNDr. Josef Blažek, CSc.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě fakultou, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby touto cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 20.12 2015 ………………………..

Jiří Brom

Poděkování

Touto formou děkuji vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Josefu Blažkovi, CSc. za odborné konzultace a připomínky. Stejně tak i za poskytnutí odborné literatury.

Anotace

Cílem této diplomové práce je vytvoření sbírek příkladů pro předmět *Astronomie*, vyučovaný na pedagogických fakultách pro obory s fyzikou. Vzhledem k rozdílné úrovni vstupních znalostí studentů jsou k vybraným partiím astronomie sestaveny typické a nepříliš složité úlohy. Součástí práce jsou rovněž stručné teoretické úvody k jednotlivým tematickým celkům. Úroveň je v rozsahu od příkladů zcela jednoduchých až po příklady složitější. V souladu se zaměřením studentů – budoucích učitelů – je důraz kladen na úlohy, týkající se pohybů v radiálním gravitačním poli.

Klíčová slova

Vesmír, Slunce, Země, planeta, početní příklady, sluneční soustava, zákon gravitace, radiální gravitační pole, kosmická rychlost, paralaxa, aberace, precese, zářivý výkon, hvězda, magnituda, spektrální posuv, Wienův zákon, černá díra, neutronová hvězda.

Abstract

The aim of this thesis is to create collections of examples for the subject Astronomy taught for students of pedagogical faculties, studying this discipline as a part of physics courses. Due to very different mathematical knowledge of students I have chosen typical and not much difficult examples oriented to several branches of astronomy. Each part of examples begins with a self-contained theoretical introduction. The difficulty rises gradually from trivial to more complicated examples. The examples are mainly focused on motions in radial gravitational fields.

Keywords

Universe, Sun, Earth, planet, numerical examples, Solar System, law of gravity, radial gravitational field, cosmic speed, parallax, aberration, precession, luminosity, star, magnitude, spectral shift, Wien´s law, black hole, neutron star.

Obsah

Úvod 7

1. Historie 8

2. Sluneční soustava a Keplerovy zákony 11

2.1 Sluneční soustava 11

2.2 Mechanika Sluneční soustavy 11

2 2.1 Zákon první (Zákon drah) 11

2.2.2 Zákon druhý (Zákon ploch) 13

2.2.3 Zákon třetí 13

3. Gravitační pole Země, pohyby v něm 15

3.1 Gravitační zrychlení radiálního pole 16

3.2 Dynamika pohybu těles – síly 16

3.3 Odvození první kosmické rychlosti 17

3.4 Odvození druhé kosmické (parabolické) rychlosti 19

3.5 Odvození třetí kosmické rychlosti 19

3.6 Zákony pohybu družice po kruhové dráze 19

4. Pohyby družic 20

4.1 Pohyb družic po kružnici 20

Úlohy 20

4.2 Pohyb družic po elipse 26

Úlohy 26

4.3 Pohyby komet 29

Úlohy 29

4.4 Gravitační zrychlení v radiálním poli 33

Úlohy 33

4.5 Keplerovy zákony 38

Úlohy 38

4.6. Hohmannova elipsa 40

Úlohy 40

5. Vzdálenosti hvězd, paralaxa 43

Úlohy 43

6. Precese 47

Úlohy 47

7. Aberace 49

Úlohy 49

8. Zářivý výkon hvězd, zářivý tok, magnituda 51

Úlohy 51

9. Spektrální posuv, Wienův posunovací zákon, intenzita vyzařování absolutně černého tělesa 56

Úlohy 57

10. Hubbleův zákon, Einsteinova teorie o ekvivalenci hmoty a energie 59

Úlohy 60

11. Čas, souřadnice 63

11.1. Čas T 63

11.1.1. Hvězdný čas θ 63

11.1.2. Sluneční čas T_V, T_M 63

11.1.3. Pásmový čas 64

11.2. Souřadnice 65

11.2.1. Obzorníkové (horizontální) A, h, z 65

11.2.2. Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice 1. druhu t, δ 66

11.2.3. Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice 2. druhu α, δ 66

Úlohy 68

12. Neutronová hvězda, černá díra 71

Neutronová hvězda 71

Černá díra 72

Úlohy 73

13. Závěr 75

14. Příloha 76

15. Seznam použité literatury 78

Úvod

Cílem práce je vytvoření podpůrného studijního textu k předmětu astronomie, vyučovanému na pedagogických fakultách pro obor Fyzika. Vzhledem k tomu, že vstupní znalosti studentů v oblasti fyziky a matematiky jsou velmi rozdílné, jsou vybrané úlohy relativně jednoduché, což ovšem neznamená, že jsou triviální. Postupováno je od jednodušších příkladů ke složitějším. Vzhledem k zaměření studentů na učitelství je v této práci kladen důraz především na pohyb těles v gravitačních polích. Toto učivo slouží jako základ, na nějž navazují úlohy z dalších oborů astronomie.

Jako stěžejní pro nebeskou mechaniku jsou zde podrobně procvičovány Keplerovy zákony a Newtonův gravitační zákon a jejich vzájemné vztahy. Jsou odvozeny vztahy pro kosmické rychlosti a vztahy pro pohyb těles v radiálním poli Země. Výběr příkladů proto často zahrnuje pohyb družic (přirozených i umělých) a pohyb komet. Jednotlivé okruhy nelze vždy jasně vymezit, neboť jejich tematika se obvykle prolíná. Tato skutečnost je např. markantní u úloh využívajících 3. Keplerův zákon. Ten lze často nahradit Newtonovým gravitačním zákonem, a naopak. V práci je mj. i obsáhlá úloha na téma Hohmannovy elipsy.

Následují příklady na téma paralaxa, precese, aberace, zářivý výkon a magnituda. Poté následují úlohy s tematikou spektrálního posuvu a s ním spojeného Wienova posunovacího zákona a úlohy na absolutně černé těleso. Přidané je téma Hubbleova zákona a Einsteinovy ekvivalence hmoty a energie. Další téma, kterého jsem se dotknul, je problematika času a nebeských souřadnic. Poslední kapitola se týká neutronových hvězd a černých děr.

Součástí textu je i stručný pohled do historie, který pomůže lépe pochopit, jakým složitým vývojem věda, zvaná astronomie, prošla.

V příloze práce jsou uvedeny tabulky, ve kterých jsou uvedeny hodnoty základních fyzikálních konstant a hodnoty, které se týkají naší sluneční soustavy. V úlohách je možno tyto hodnoty použít.

1. Historie

Formulaci stěžejních zákonů J. Keplera předcházely výzkumy jiných učenců, které pocházely již od 17. století př. Kr. Tyto práce byly (z hlediska dnešního stavu poznání) někdy jen částečně pravdivé, někdy nevědecké a často naprosto mylné. V rámci objektivity si však musíme přiznat, že bez těchto někdy zcela mylných tezí by Kepler a jeho následovníci nedospěli k zákonům, jimiž se řídí pohyb nebeských těles. V rámci této práce považuji proto za nutné zmínit se o průkopnících, kteří stáli na počátku našeho poznání vesmírných zákonitostí a zákonů. I když se mnozí mýlili, bezpochybně si zaslouží naši úctu i obdiv. Třeba i kvůli tomu, že někteří za svoje přesvědčení zaplatili pobytem ve vězení, případně i ztrátou života.

Stejně tak si naší pozornost zaslouží i následovníci Keplera, byť těm již za jejich výzkum život nikdo neohrožoval [1].

17. st. př. Kr. Po dlouhodobých pozorováních souhvězdí, planet a Měsíce, zjistili babylonští astronomové, že existují jisté pravidelnosti, které umožňují předpovídat zatmění Měsíce.

6. st. př. Kr. Pythagoras tvrdil, že Země je kulatá, pravděpodobně znal i klimatická pásma. Předpokládáme, že vycházel z pozorování řeckých námořníků, kteří si všimli změn noční oblohy v závislosti na zeměpisné šířce.

5. st. př. Kr. Anaxagoras vysvětlil měsíční fáze a zatmění. Zároveň tvrdil, že vesmírná tělesa jsou stejné povahy jako Země, mohou být obývaná lidmi. Za toto tvrzení byl v Athénách obžalován z bezbožnosti a přinucen z Athén utéct.

3. st. př. Kr. Aristarchos ze Samu se pokusil určit vzdálenost Slunce od Země z úhlu Slunce – Země – Měsíc v okamžiku 1. čtvrti Měsíce. Pomocí poměru relativních velikostí Země a Slunce, stanoveného z velikosti stínu Země na Měsíci při jeho zatmění, odhadl jejich vzájemnou vzdálenost. Ze skutečnosti, že během roku nevidíme změny polohy hvězd na obloze, předpokládal, že hvězdy jsou v mnohem větší vzdálenosti od Země než Slunce. I když jeho výpočty byly z dnešního hlediska značně nepřesné, je první, o kterém víme, že odhalil kvalitativní podstatu vesmíru, nebo alespoň naší sluneční soustavy. Ve stejném století vypočítal, a to velice přesně, obvod Země Eratosthenes.

2. st. př. Kr. V tomto století působil Hipparchos, předchůdce moderních astronomů. Je proslulý svými přesnými měřeními a pozorováními. Mj. sestavil první katalog hvězd.

2. st. po Kr. Dílo Hipparcha rozvíjí Ptolemaios. Píše svoje stěžejní dílo „Matematická soustava“ (z arabštiny známé jako „Almagest“), které se stává základem astronomie po dalších čtrnáct století. Nejvýznamnější částí tohoto díla je teorie epicyklů. Epicykly a také deferenty do astronomie zavedl již Apollónios z Pergy. Tyto pomocné kružnice umožňují popis pohybu planet a výpočet jejich poloh. Nesrovnalosti v jejich pohybu, vyvolané mylným přesvědčením, že Země je nehybná a Slunce se otáčí okolo ní, vysvětlovali oba astronomové tím, že planety se pohybují nejen po hlavní kružnici – deferentu, nýbrž i po kružnici vedlejší – epicyklu, díky čemuž se na svých drahách zastavují a posouvají jak jedním směrem, tak i opačným.

Až po dílo Mikuláše Koperníka procházel obor astronomie v dalších staletích stagnací. Tomuto oboru se věnovali pouze Arabové. Nehledali však nové vysvětlení pohybu planet v důsledku nesrovnalostí Ptolemaiova matematického modelu, nýbrž jej pouze upřesňovali.

1543 Polský astronom Mikuláš Koperník publikoval svoji práci „O otáčení nebeských sfér“. V něm publikuje svoji teorii o tom, že Země obíhá okolo Slunce, nikoli naopak. Zásadním problémem jeho díla bylo to, že i ono vycházelo z kruhových drah planet, nikoli drah eliptických. Ponechal tedy ve své práci i některé epicykly, s jejichž existencí pracoval i Ptolemaios.

1547 – 1600 V této době žil Giordano Bruno, původně mnich, poté univerzitní učitel. Jeho tvrzení, že Slunce není středem vesmíru, že vesmír je nekonečný, že existuje mnoho jiných planetárních systémů, se mu stalo osudným. Jako kacíř byl souzen inkvizicí a roku 1600 upálen.

1546 – 1601 Dánský astronom Tycho Brahe s použitím velmi přesných přístrojů shromáždil ohromné množství dat o pohybu Slunce, planet a Měsíce. Je třeba se zmínit, že mimo svoji vlast působil na závěr svého života i v Praze. Z jeho přesných pozorování vycházel Kepler, který na jejich základě odvodil svoje tři zákony. Zajímavá je Brahova teorie planetární soustavy, představující jistý kompromis s teorií Koperníka. Brahe tvrdil, že Slunce obíhá okolo Země, avšak ostatní planety obíhají již okolo Slunce.

1609 Johannes Kepler v tomto roce publikoval svoje přelomové dílo „Astronomia nova“, v němž formuloval svoje první dva zákony. (Třetí zákon formuloval až roku 1619.)

1564 – 1642 Tento časový úsek dějin je vyhrazen pro matematika, fyzika a astronoma Galilea Galileiho. Jako první pozoroval oblohu dalekohledem. Jeho pravděpodobně nejvýznamnější objev přispěl k radikální změně pohledu na vesmír. Týká se pozorování fází Venuše, jež zcela vylučovalo geocentrální teorii Ptolemaiovu. Navíc v dalekohledu pozoroval soustavu čtyř měsíců obíhajících okolo Jupitera, která mu připomínala model planetární soustavy. Stal se zastáncem Koperníkovy heliocentrické teorii. Za tyto názory byl pronásledován církví a přinucen svoje názory odvolat.

1665 V tomto roce a v letech následujících udělal Isaac Newton mnoho převratných objevů. Ve vztahu ke Keplerovi nás zajímá jeho gravitační zákon, který odvodil z Keplerových tří zákonů. Od té doby je možno vypočítat pohyby libovolných těles v gravitačním poli [1].

2. Sluneční soustava a Keplerovy zákony

Z práce Johannese Keplera, významného astronoma, astrologa a matematika, čerpá naše věda dodnes, přestože žil a bádal na přelomu 16. a 17. století našeho letopočtu. Původem Němec žil několik let na dvoře císaře Rudolfa II. v Praze, kde formuloval svoje první dva zákony. V naší literatuře se používá jeho počeštěné jméno, tedy Jan Kepler.

V roce 1609 během svého pobytu v Praze publikoval svoje stěžejní dílo, nazvané: „Astronomia Nova“, které obsahuje jeho první dva zákony: Planety se pohybují po elipsách a jejich průvodič projde za stejnou dobu stejnou plochou. V roce 1619 v publikaci Harmonices Mundi uvedl svůj třetí zákon, který zní: „Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.“

2.1 Sluneční soustava

Sluneční soustavu tvoří hlavně Slunce a jeho planety. Dále k ní patří nespočet planetek, v řádu stovek až tisíců. Zároveň i měsíce planet, komety s periodickou dráhou letu a meteorů. Do této soustavy můžeme počítat i tělesa umělá, vytvořená člověkem, tedy umělé družice. Od roku 2006, kdy byla ze seznamu planet vyjmuta planeta Pluto, je planet osm. Planety obíhající uvnitř dráhy Země nazýváme „vnitřní“, tedy Merkur a Venuše, planety obíhající vně dráhy Země nazýváme vnější. Jsou to planety Mars, Jupiter, Saturn, Uran a Neptun.

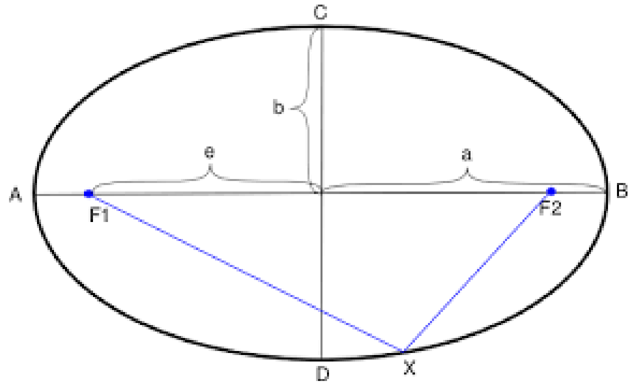
2.2 Mechanika Sluneční soustavy

Základem pro výpočty pohybu těles jsou tři Keplerovy zákony.

2.2.1 Zákon první (Zákon drah)

Planety obíhají okolo Slunce po eliptických drahách s malou výstředností, málo se lišících od kružnic, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.

Připomeňme si v této souvislosti některé vlastnosti elipsy, které budeme potřebovat při řešení úloh. Elipsa vznikne jako množina bodů X, které mají od dvou bodů – ohnisek F_1 a F_2 – stálý součet vzdáleností, tedy $|\mathrm{F}_1\,\mathrm{X}| + |\mathrm{F}_2\,\mathrm{X}| = 2a$ (obrázek 1).

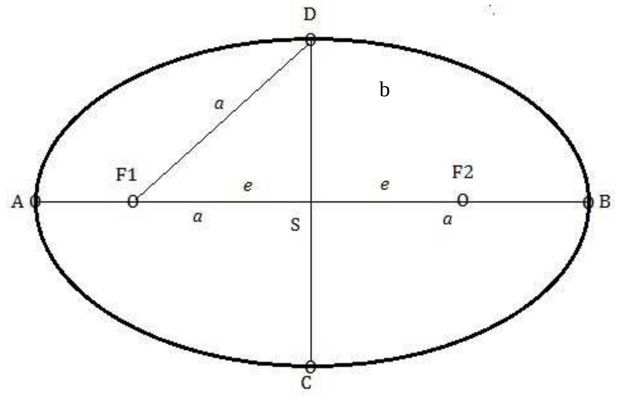


Obr. 1: Elipsa (parametry)

Elipsa má střed S, dvě velké poloosy SA a SB a dvě malé poloosy SC a SD (obr. 2). V matematice se tyto poloosy nazývají hlavní a vedlejší, v astronomii používáme pojmy velká a malá poloosa. Platí tedy, že $|\mathrm{AS}| = |\mathrm{BS}| = a$, $|\mathrm{CS}| = |\mathrm{SD}| = b$. Výstřednost elipsy je $|\mathrm{SF}_1| = |\mathrm{SF}_2| = e$.

Na základě obr. 2 a Pythagorovy věty platí mezi délkou hlavní poloosy a, délkou vedlejší poloosy b a excentricitou e vztah

$$b^2 + e^2 = a^2; \text{ tj. } b = \sqrt{a^2 - e^2}. \tag{1}$$



Obr. 2: Elipsa (excentricita)

Na základě obr. 2 lze také určit minimální vzdálenost $r_{\min}$ a maximální vzdálenost $r_{\max}$ planety od Slunce ve tvaru

$$r_{\min} = a - e\,; r_{\max} = a + e. \tag{2}$$

V dalším vyjádříme rovnici elipsy v polárních souřadnicích. Pokud ohnisko F_2 leží v počátku souřadnicové soustavy a polární osa je polopřímka $\mathrm{F}_2\mathrm{B}$, pak

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \tag{3}$$

kde číslo $\varepsilon = e/a$, jež je pro elipsu menší než jedna, je číselná excentricita, a $p = b^2/a$ je tzv. parametr elipsy. Je zřejmé, že

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}\ ;\ r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \tag{4}$$

V astronomii používáme především výstřednost číselnou, krátce nazývanou „excentricita“.
U kružnice je tato hodnota rovna nule, u elipsy je menší než 1. Čím bližší je k 1, tím je elipsa protáhlejší.

Obsah plochy ohraničené elipsou je

$$S = \pi ab \text{ [2]}. \tag{5}$$

2.2.2 Zákon druhý (Zákon ploch)

Plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné. Průvodičem nazýváme úsečku, která spojuje Slunce a planetu. Plochu, kterou průvodič opíše za jednotku času, nazýváme plošnou rychlostí. Můžeme tedy prohlásit, že plošná rychlost planety je stálá [2]. Vyjádřeno matematicky:

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{konstantní}. \tag{6}$$

2.2.3 Zákon třetí

Druhé mocniny oběžných dob dvou planet T_1, T_2 jsou úměrné třetím mocninám jejich velkých poloos a_1, a_2 [2]. Tedy:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{7}$$

respektive

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{konst}. \tag{8}$$

Jak později uvidíme, pokud vyjdeme z Newtonova gravitačního zákona, můžeme tento vztah zapsat i s vyjádřením příslušné konstanty:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Zde G je gravitační konstanta o velikosti $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ (případně $\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$) a M je hmotnost Slunce [3].

3. Gravitační pole Země, pohyby v něm

Než se začneme zabývat touto problematikou, připomeňme si některé obecné fyzikální pojmy a veličiny, které s daným tématem úzce souvisejí.

Pohyb po kružnici

Pohyb tělesa o hmotnosti m po kružnici o poloměru r je důsledkem dostředivé síly

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r}, \qquad (1)$$

Newtonův gravitační zákon

Dvě homogenní koule nebo hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 se vzdáleností jejich středů *r* na sebe působí silami

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (2)$$

Potenciální energie dvou těles, které na sebe gravitačně působí, je rovna

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (3)$$

Potenciální energie je určena až na konstantu. Dohodou je určeno, že dvě nekonečně vzdálená tělesa mají potenciální energii nulovou. Jinak řečeno, nulová hladina potenciální energie je volena v nekonečnu.

Pohyb těles v centrálním gravitačním poli Země

Pokud uvažujeme o pohybech družic, raket a dalších těles v okolí Země, pohybují se s velkou přesností v radiálním gravitačním poli, s gravitační silou orientovanou do středu Země. Pro praktické využití, například v kosmonautice, mají význam pohyby umělých objektů ve velké vzdálenosti od Země, kde je minimální odpor vzduchu. Těleso se přibližně pohybuje po elipse, jejíž ohnisko leží ve středu Země.

Pro pohyb umělých družic okolo Země má velký význam rychlost kruhová, kterou značíme v_k .Těleso, které se pohybuje po kruhové dráze ve výšce, která je zanedbatelná ve srovnání se zemským poloměrem, dosahuje rychlosti, která se nazývá první kosmická rychlost [4].

3.1 Gravitační zrychlení radiálního pole

Uvažujme těleso o hmotnosti m, které se nachází ve vzdálenosti r od středu Země, kterou pro zjednodušení považujeme za homogenní kouli o poloměru R_Z a hmotnosti M_Z. Podle gravitačního zákona působí Země na toto těleso silou

$$F_\mathrm{g} = G\,\frac{M_Z m}{r^2}\,, \tag{4}$$

která uděluje tělesu dostředivé zrychlení a_g. Ze vztahu $F_\mathrm{g} = m a_\mathrm{g}$ dostaneme

$$a_\mathrm{g} \ = \ G\,\frac{M_\mathrm{Z}}{r^2}. \tag{5}$$

Gravitační zrychlení není tedy závislé na hmotnosti tělesa, je ale závislé na vzdálenosti tělesa od středu Země, případně od jiné planety.

Musíme se zmínit i o intenzitě gravitačního pole. Ta je definována jako síla, působící na jednotku hmotnosti,

$$E = \frac{F}{m} = \frac{GmM}{mr^2} = \frac{GM}{r^2}, \tag{6}$$

kde r je vzdálenost od středu Země. Intenzita gravitačního pole je tedy rovna gravitačnímu zrychlení v daném místě.

3.2 Dynamika pohybu těles - síly

Z hlediska astronomie je nejdůležitější Newtonův gravitační zákon. Isaac Newton žil v době po Keplerovi, tudíž již znal jeho třetí zákon, který aplikován na kružnici praví, že poměr třetí mocniny poloměru r a druhé mocniny periody oběhu T je konstantní, $r^3/T^2 = \mathrm{konst.}$ Z tohoto vztahu lze již odvodit gravitační zákon. Např. Měsíc na trajektorii okolo Země udržuje dostředivá síla gravitačního původu. Z druhého Newtonova zákona

$$F = M_\mathrm{M}\,\frac{v^2}{r} \tag{7}$$

pro kruhový pohyb po dosazení za $v = 2\pi r/T$ obdržíme

$$F = \frac{4\pi^2\, r M_\mathrm{M}}{T^2}. \tag{8}$$

Pravou stranu rozšíříme ještě výrazem r^2/r^2 a dospějeme k vyjádření síly ve tvaru

$$F = 4\pi^2\, M_\mathrm{M}\,\frac{r^3}{T^2}\,\frac{1}{r^2}\,. \tag{9}$$

Avšak člen

$$4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \tag{10}$$

je podle 3. Keplerova zákona konstantní, tedy

$$F = \frac{K}{r^2} M_{\mathrm{M}}, \tag{11}$$

kde K je konstanta. Jelikož přitažlivé síly mezi Měsícem a Zemí jsou stejné a $F \sim M_{\mathrm{M}}$, musí současně být $F \sim M_{\mathrm{Z}}$, takže

$$F \sim \frac{M_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{Z}}}{r^2}. \tag{12}$$

Z úměrnosti uděláme rovnost zavedením vhodné konstanty G

$$F = G \frac{M_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{Z}}}{r^2}. \tag{13}$$

Z 3. Keplerova zákona jsme tak odvodili Newtonův gravitační zákon. Gravitační konstantu

G změřil poprvé Henry Cavendish. V jednotkách SI je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

3.3 Odvození první kosmické rychlosti

Těleso o hmotnosti m se pohybuje po kruhové dráze okolo planety, v tomto případě Země, která má hmotnost M_{z} a poloměr R_{z}, po kružnici o poloměru: $r = R_{\mathrm{z}} + h$, kde h je vzdálenost tělesa od povrchu Země. Na levé straně pohybové rovnice máme součin hmotnosti tělesa a jeho dostředivého zrychlení, na pravé straně stojí vyjádření dostředivé síly z gravitačního Newtonova zákona:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{m M_z}{r^2}, \tag{14}$$

Po úpravě obdržíme:

$$v = \sqrt{G \frac{M_z}{R_{\mathrm{z}} + h}}. \tag{15}$$

Podle tohoto vztahu nemá hmotnost obíhajícího tělesa na kruhovou rychlost vliv. Pro výšku mnohem menší než je poloměr Země dostáváme vztah pro první kosmickou rychlost

$$v_{\mathrm{k}} = \sqrt{G \frac{M_z}{R_z}}. \tag{16}$$

Číselně $v_{\mathrm{k}} = 7{,}92$ km s^{-1}.

3.4 Odvození druhé kosmické (parabolické) rychlosti

Je to minimální rychlost potřebná k tomu, aby se družice odpoutala od povrchu Země a natrvalo ji opustila. V nekonečnu je potenciální energie nulová a nulová je i minimální možná hodnota energie kinetické. Ze zákona zachování energie tedy platí pro tento mezní případ nulové rychlosti v nekonečnu $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 0$, tj.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_\mathrm{Z}m}{R_\mathrm{Z}} = 0. \quad (17)$$

Po úpravě:

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} = v_k\sqrt{2}\,. \quad (18)$$

Číselně $v_\mathrm{p} = 11{,}2\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

3.5 Odvození třetí kosmické rychlosti

Je to rychlost, při jejímž dosažení těleso trvale opouští sluneční soustavu. Pro odvození této rychlosti musíme stanovit vzdálenost r, z jaké družici vypouštíme. V našem případě se jedná o Zemi. Kruhová a parabolická rychlost pro těleso ve vzdálenosti R_SZ od Slunce jsou

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{R_\mathrm{SZ}}} = 29{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{m\ s^{-1}}\ ;\ \ v_\mathrm{p} = v_\mathrm{k}\sqrt{2} = 42{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{m\ s^{-1}} \quad (19)$$

kde R_SZ je vzdálenost Země od Slunce.

Při vypouštění družice je dobré využít oběhu Země okolo Slunce. Pak nám postačí dodat rychlost, která je rovna rozdílu rychlosti parabolické a kruhové, tedy rychlost vůči Zemi $12{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. Tato hodnota však není přesná, neboť jsme ještě nezapočítali vliv gravitačního pole Země. Přesné hodnoty se dobereme tehdy, pokud ještě připočteme energii, kterou musíme dodat k překonání zemské přitažlivosti. Po těchto korekcích bychom dospěli k hodnotě třetí kosmické rychlosti: $16{,}7 \cdot 10^3\mathrm{m\ s^{-1}}$ [4].

3.6 Zákony pohybu družice po kruhové dráze

Jak již víme, trajektorie družic má v ideálním radiálním poli tvar elipsy. Pro naše výpočty často vystačíme s aproximativní trajektorií kruhovou, jejíž poloměr je roven součtu poloměru Země a jedné poloviny součtu vzdáleností výšky družice
v apogeu a perigeu. Matematicky vyjádřeno[2]:

$$r = R + \frac{1}{2}\left(h_\mathrm{a} + \mathrm{h_p}\right). \quad (20)$$

Při pohybu po kružnici působí na družici síla dostředivá:

$$F = G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}\,. \tag{21}$$

Vyjádříme odtud dobu oběhu

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\,. \tag{22}$$

Pro obvodovou rychlost družice můžeme také alternativně použít vztah

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R^2}\frac{R^2}{r^2}\,r} = \frac{R}{r}\sqrt{g_0 r}\,, \tag{23}$$

kde $g_0 \approx 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ je zrychlení na povrchu Země.

4. Pohyby družic

4.1 Pohyb po kružnici

Výpočet pohybů družic se objevuje již na střední škole. Podklady pro tuto kapitolu jsou částečně čerpány z publikací [2, 5, 6].

Úloha 4.1.1:

Určete průměrnou rychlost pohybu Měsíce, pokud předpokládáme, že se okolo Země pohybuje po trajektorii ve tvaru kružnice. Je znám její poloměr $r = 3,840 \cdot 10^5$ km a oběžná doba $T = 27{,}32$ dne.

Řešeni:
Měsíc při jednom oběhu urazí dráhu $s = 2\pi r = 2{,}415 \cdot 10^6$ km, doba oběhu je $T = 2{,}360 \cdot 10^6$ s. Odtud

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1{,}023 \text{ km s}^{-1}. \qquad (1)$$

■

Obr. 3: Porovnání velikosti Země a Měsíce

Převzato ze [7].

Úloha 4.1.2:

Určete hmotnost Slunce, pokud je znám poloměr oběžné dráhy Země a její obvodová rychlost. Dráhu Země uvažujte jako kruhovou. Poloměr dráhy je $r = 1{,}50 \cdot 10^8$ km, obvodová rychlost Země je $v = 29{,}8$ km s^{-1}.

Řešení:

Slunce působí na Zemi sílou dostředivou, která se rovná síle gravitační (3.1, 3.2):

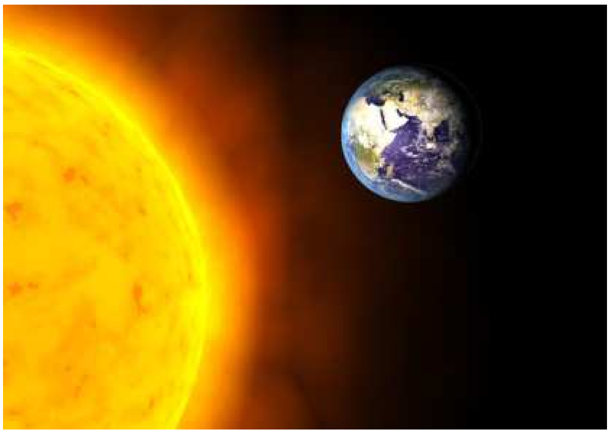
$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM_s}{r^2}, \tag{2}$$

Odtud vyjádříme

$$M_s = \frac{rv^2}{G}. \tag{3}$$

Po dosazení vyjde hmotnost Slunce $M_s \doteq 2{,}02 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$.

■



Obr. 4: Porovnání Země a Slunce

Převzato z [8]

Úloha 4.1.3:

Vzdálenost r_m mezi středem jistého měsíce Uranu a středem této planety je třikrát menší, než vzdálenost r_M středu Měsíce od středu Země. Oběžná doba T_m měsíce Uranu, je dvacetkrát menší než doba T_M oběhu Měsíce okolo Země. Vypočítejte z těchto údajů poměr hmotnosti Uranu M_U a hmotnosti Země M_Z. Pohyb obou měsíců pokládejte za kruhový.

Řešení:

Obě dostředivá zrychlení vyjádříme jednak z gravitačního zákona, jednak kinematicky:

$$\frac{GM_\mathrm{U}}{r_\mathrm{m}^2} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{m}}{T_\mathrm{m}^2}, \tag{4}$$

$$\frac{GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{M}^2} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}^2}. \tag{5}$$

Z výše uvedeného vyjádříme poměr obou hmotností, tedy:

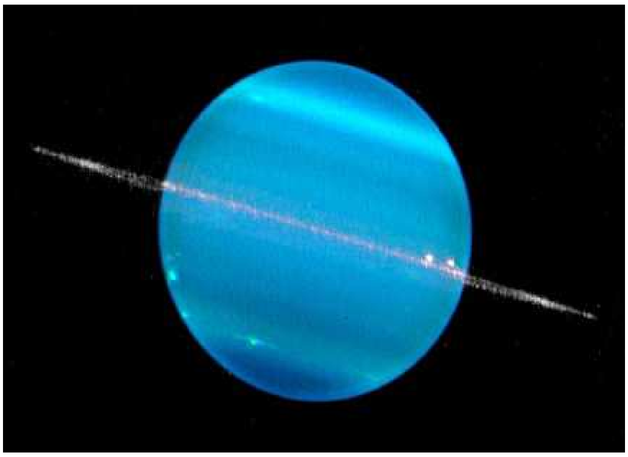
$$p = \frac{M_{\mathrm{U}}}{M_{\mathrm{Z}}} = \left(\frac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{m}}}\right)^2 \left(\frac{r_{\mathrm{m}}}{r_{\mathrm{M}}}\right)^3. \tag{6}$$

Ze zadání dosadíme

$$\frac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{m}}} = 20\,;\ \frac{r_{\mathrm{m}}}{r_{\mathrm{M}}} = \frac{1}{3} \tag{7}$$

a tedy $p \doteq 15$.

■



Obr. 5: Uran

Převzato z [9]

Úloha 4.1.4:

Těleso o hmotnosti $m = 83{,}6$ kg obíhá nad Zemí ve vzdálenosti $s_1 = 227$ km v perigeu a ve vzdálenosti $s_2 = 974$ km v apogeu. Vypočítejte jeho rychlost na kruhové dráze, aproximující skutečnou trajektorii.

Řešení:

Průměrná výška tělesa je

$$h = \frac{1}{2}(\mathrm{s}_1 + \mathrm{s}_2)\ \mathrm{km} = 587\ \mathrm{km}. \tag{8}$$

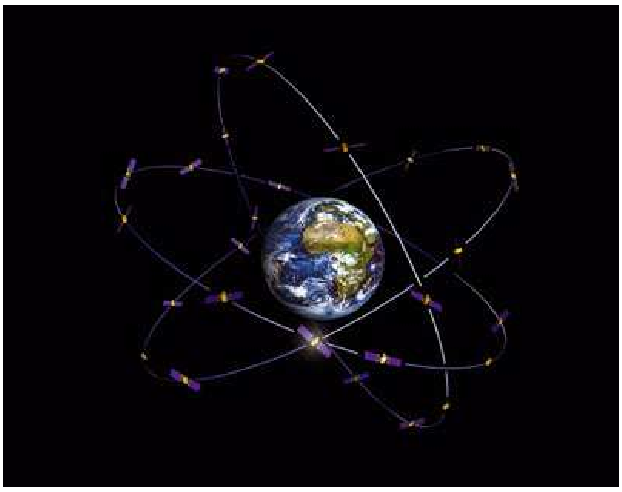
Aproximující kružnice má tak poloměr $r = (587 + 6378)$ km $\doteq 6{,}96 \cdot 10^6$ m.

Z Newtonova gravitačního zákona a druhého pohybového zákona dostaneme výraz (3.2)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,. \tag{9}$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme $v \doteq 7{,}58\ \mathrm{km\ s^{-1}}$.

■



Obr. 6: Pohyby družic okolo Země

Převzato z [10]

Úloha 4.1.5:

Víme, že telekomunikační družice mají dva optimální oběhy okolo Země: s periodami 8 a 24 hodin. V jakých výškách se musí družice pohybovat, aby byly splněny výše uvedené podmínky?

Řešení:

$$T_{\mathrm{d},1} = 2{,}88 \cdot 10^4\ \mathrm{s}\ ;\ T_{\mathrm{d},2} = 8{,}64 \cdot 10^4\ \mathrm{s}\ .$$

Poloměr *r* určíme z (2.9) rovnice

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{GMT_{\mathrm{d}}^2}{4\pi^2}} - R. \qquad (10)$$

Odtud

$$h_1 \doteq 139 \cdot 10^2\ \mathrm{km}\ \ ;\ h_2 \doteq 358 \cdot 10^2\ \mathrm{km}\ .$$

■

Úloha 4.1.6:

Družice, obíhá ve výšce $h = 8{,}50 \cdot 10^4$ km nad povrchem Země. Zjistěte oběžnou dobu družice a její obvodovou rychlost.

Řešení:

Z tabulek v příloze si zjistíme poloměr a hmotnost Země. Po dosazení do vzorců

$$T_d = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \;;\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (11)$$

obdržíme výsledek: $T_d \doteq 2{,}74 \cdot 10^5$ s $\doteq$ 3 d 4 h ; $v = 2{,}09$ km s^{-1} .

■

Úloha 4.1.7:

Po takřka kruhové dráze se pohybuje družice Země s dobou oběhu 88 min 12 s. Jaká je její výška nad povrchem Země?

Řešení:

Převedeme nejdříve minuty na sekundy: $T_\mathrm{d} = 88{,}2$ min $\doteq 530 \cdot 10^1$ s. Po dosazení do vzorce (4.10)

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{GMT_\mathrm{d}^2}{4\pi^2}} - R \qquad (12)$$

obdržíme: $h \doteq 183$ km .

■

Úloha 4.1.8:

Umělá družice oběhla Zemi za 88,1 minut. Jakou dráhu přitom urazila?

Řešení:

Poloměr oběžné dráhy r stanovíme ze vzorce (2.9) po jeho menší úpravě:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT_\mathrm{d}^2}{4\pi^2}} \qquad (13)$$

Délka dráhy $2\pi r$ je tedy

$$s = 2\pi\sqrt[3]{\frac{GMT_\mathrm{d}^2}{4\pi^2}} \doteq 4{,}06 \cdot 10^4 \text{ km} . \qquad (14)$$

■

Úloha 4.1.9:

Umělá družice obíhala Zemi po dobu 71 hod., přičemž její průměrná výška nad povrchem Země byla 200 km. Vypočtěte počet obletů a celkovou dráhu letu.

Řešení:

Jako první určíme počet vykonaných obletů

$$n = \frac{t}{T_\mathrm{d}}. \tag{15}$$

Oběžnou dobu stanovíme ze vztahu

$$T_\mathrm{d} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\,. \tag{16}$$

Číselně: $T_\mathrm{d} \doteq 1{,}49$ h ; $t = 71$ h ; $n \doteq 48$; $s = 2\pi r n = 1{,}98 \cdot 10^7$ km .

■

Úloha 4.1.10:

Okolo planety Mars se pohybují dva měsíce – Phobos a Deimos. První s oběžnou dobou 7 h 39 min 14 s, druhý s oběžnou dobou 30h 17 min 53 s. Vypočtěte výšku obou měsíců nad povrchem Marsu a jejich obvodové rychlosti.

Řešení:

Výšky obou měsíců nad povrchem Marsu, vypočítáme ze vztahu (2.10):

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{GMT_\mathrm{d}^2}{4\pi^2}} - R. \tag{17}$$

Obdržíme hodnoty $h_1 \doteq 6{,}02 \cdot 10^6$ m, $h_2 \doteq 2{,}01 \cdot 10^7$ m.

Ze vztahu (4.15) určíme poloměry drah dosazením do vzorce (4.11):

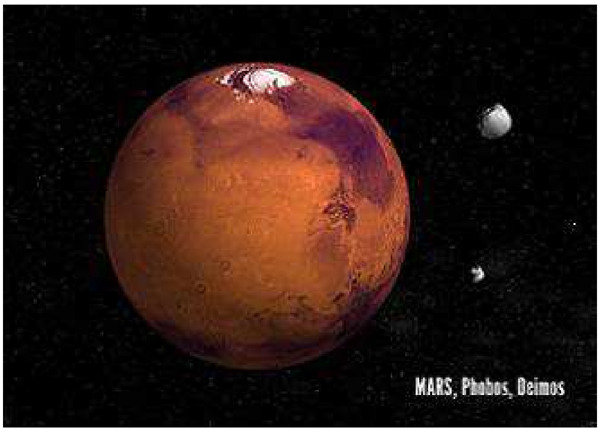
$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT_\mathrm{d}^2}{4\pi^2}}\,. \tag{18}$$

Číselně $r_1 \doteq 9{,}42 \cdot 10^6$ m ; $r_2 \doteq 2{,}35 \cdot 10^7$ m.

Pro výpočet rychlosti použijeme vztah

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{19}$$

a číselně obdržíme $v_1 \doteq 213 \cdot 10^1$ m s^{-1} ; $v_2 \doteq 132 \cdot 10^1$ m s^{-1}.



Obr. 7: Mars a jeho měsíce

Převzato z [11]

■

4.2. Pohyb družic po elipse

Úloha 4.2.1:

Těleso o hmotnosti 508,3 kg se pohybuje ve vzdálenostech od Země 225 km v perigeu a 1671 km v apogeu. Určete jeho oběžnou dobu T_d . Závisí tato doba na hmotnosti tělesa?

Řešení:

Oběžná doba pro elipsu o hlavní poloose a je stejná jako oběžná doba pro kružnici o poloměru $r = a$. Elipsy, které mají stejnou hlavní poloosu, mají dle III. Keplerova zákona stejnou dobu oběhu T. Poloměr odpovídající kruhové dráhy je $r \doteq 7{,}32 \cdot 10^6$ m. Ze vztahu

$$F = G\frac{mM}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T_\mathrm{d}^2}r \qquad (20)$$

vyjádříme

$$T_\mathrm{d} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\,. \qquad (21)$$

Jak je z výsledku zřejmé, oběžná doba na hmotnosti tělesa nezáleží.

Po dosazení $T_\mathrm{d} \doteq 6\,220$ s $\doteq 104$ min.

■

Úloha 4.2.2:

Stanovte nejmenší a největší rychlost Země při pohybu kolem Slunce. Průměrná vzdálenost Země od Slunce je $149{,}6 \cdot 10^6$ km, číselná excentricita její dráhy $\varepsilon = 1/60$.

Řešení:

Největší rychlost pohybu je v perihéliu, nejmenší v aféliu. Pro výpočet rychlosti Země (a jakékoli jiné družice obíhající Slunce) v místě ve vzdálenosti r platí ze zákona zachování energie vztah

$$v = \sqrt[2]{GM_\mathrm{S}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \tag{22}$$

Průměrnou vzdálenost Země od Slunce ztotožníme s velkou poloosou elipsy. Za průvodič r postupně dosadíme vzdálenosti perihélia a afélia

$$r_\mathrm{p} = a(1 - \varepsilon)\ ;\ \ r_\mathrm{a} = a(1 + \varepsilon). \tag{23}$$

Pro výpočet rychlosti v perihéliu vyjdeme ze vztahu pro výpočet potenciální energie v nekonečnu (3.3), ze vztahu (3.5), tedy druhého Keplerova zákona a ze zákona zachování energie. Obdržíme soustavu rovnic:

$$v_\mathrm{a}\ (a + e) = v_\mathrm{p}\ (a - e), \tag{24}$$

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 - G\,\frac{M_S m}{a - e} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{a}^2 - G\,\frac{M_S m}{a + e} \tag{25}$$

po vyřešení soustavy rovnic obdržíme vztah :

$$v_\mathrm{p} = \sqrt[2]{\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\left(\frac{2}{1 - \varepsilon} - 1\right)}\,. \tag{26}$$

což po úpravě můžeme vyjádřit jako

$$v_\mathrm{p} = \sqrt[2]{\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)}\,. \tag{27}$$

Obdobně dostaneme

$$v_\mathrm{a} = \sqrt[2]{\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\,\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}}\,. \tag{28}$$

Po dosazení číselných hodnot obdržíme výsledky:

$$v_\mathrm{p} \doteq 30{,}36\ \mathrm{km\ s^{-1}};\ v_\mathrm{a} \doteq 29{,}37\ \mathrm{km\ s^{-1}}\ .$$

■

Úloha 4.2.3:

Družice se pohybuje po eliptické dráze, její výška v apogeu je h_a, v perigeu h_p. Stanovte její rychlosti v_a v apogeu a v_p v perigeu. Porovnejte s rychlostmi kruhovými v daných místech. Řešte obecně.

Řešení:

Vyjdeme ze (4.28, 4.27)vztahů pro rychlosti v apogeu a aféliu:

$$v_a = \sqrt[2]{\frac{GM_\mathrm{S}(a-e)}{a(a+e)}}\ ;\ v_\mathrm{p} = \sqrt[2]{\frac{GM_\mathrm{S}(a+e)}{a(a-e)}}. \tag{29}$$

Vyjádříme ještě veličiny a a e,

$$a = R + \frac{h_\mathrm{a}+h_\mathrm{p}}{2}\ ;\ e = \frac{h_\mathrm{a}+h_\mathrm{p}}{2}, \tag{30}$$

a jejich dosazením do vztahů (4.29) obdržíme po úpravě

$$v_\mathrm{a} = \sqrt[2]{GM\frac{R+h_\mathrm{p}}{(R+h_\mathrm{a})(R+h_\mathrm{s})}}, \tag{31}$$

$$v_\mathrm{p} = \sqrt[2]{GM\frac{R+h_a}{\left(R+h_\mathrm{p}\right)(R+h_\mathrm{s})}}, \tag{32}$$

přičemž hodnota h_s je vyjádřena vztahem

$$h_\mathrm{s} = \frac{h_\mathrm{a}+h_\mathrm{p}}{2}. \tag{33}$$

Odpovídající kruhové rychlosti ve vzdálenostech afélia a perihélia jsou dány známými vztahy

$$v_\mathrm{ka} = \sqrt[2]{\frac{GM}{R+h_\mathrm{a}}}\ ;\ v_\mathrm{kp} = \sqrt[2]{\frac{GM}{R+h_\mathrm{p}}}. \tag{34}$$

Oba výsledky pro eliptický a kruhový pohyb ještě porovnáme:

$$v_\mathrm{a} = v_\mathrm{ka}\sqrt[2]{\frac{R+h_\mathrm{p}}{R+h_\mathrm{s}}}\ ;\ v_\mathrm{p} = v_\mathrm{kp}\sqrt[2]{\frac{R+h_a}{R+h_\mathrm{s}}}. \tag{35}$$

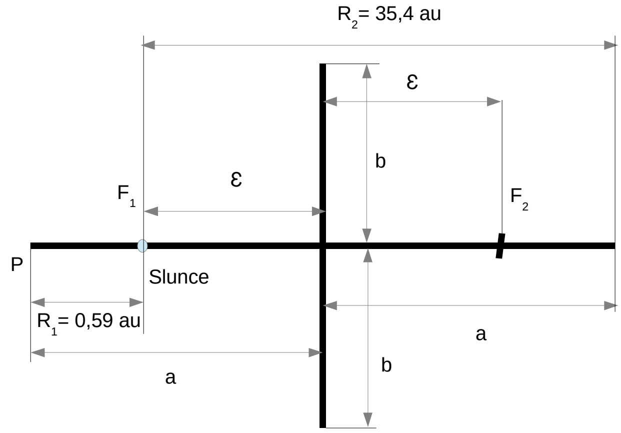
■

4.3. Pohyby komet

Úloha 4.3.1:

Nejmenší vzdálenost Halleyovy komety od Slunce je 0,59 au, největší vzdálenost 35,4 au. Určete číselnou excentricitu ε dráhy a oběžnou dobu komety.

Řešení:



Obr. 8: Parametry dráhy komety

Jak vyplývá z teorie a jak je také zřejmé z obrázku, platí pro číselnou excentricitu ε:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{r_2 - r_1}{2a}, \qquad (36)$$

Číselně $\varepsilon = 0{,}967$.

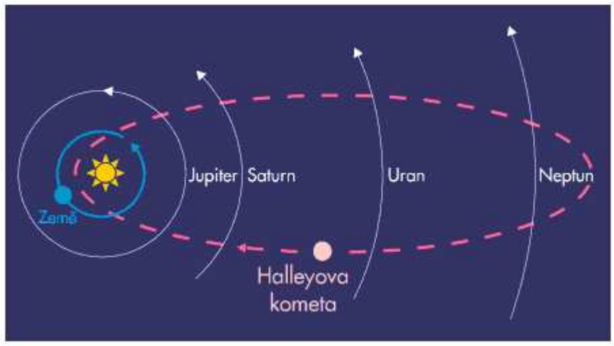
Pro velikost velké poloosy platí

$$a = \frac{r_2 + r_1}{2} = \frac{36{,}0}{2} = 18{,}0 \text{ au.} \qquad (37)$$

Pro výpočet oběžné doby vyjdeme z třetího Keplerova zákona (2.8):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \Rightarrow T = 76{,}6 \text{ roku.} \qquad (38)$$

■

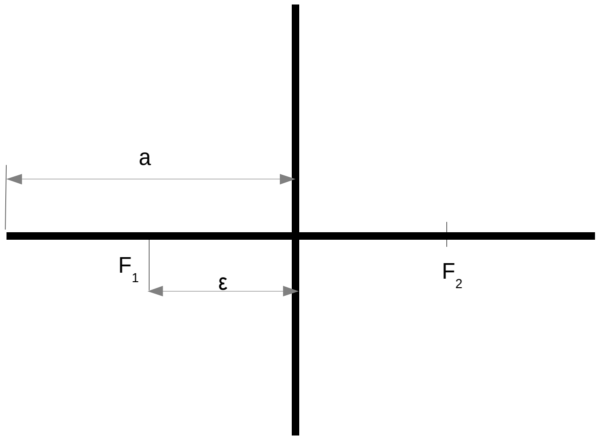


Obr. 9: Oběh Halleyovi komety

Převzato z [12]

Úloha 4.3.2:

Dráha komety má hlavní poloosu $2{,}22$ au a numerickou excentricitu $8{,}47 \cdot 10^{-1}$. Určete její periodu a vzdálenost od Slunce v perihéliu.



Obr. 10: Elipsa a její parametry

Řešení:

Vzdálenost Slunce v perihéliu:

$$r_{\mathrm{p}} = a - \varepsilon = a(1 - e) = 0{,}34 \text{ au.} \tag{39}$$

Výpočet oběžné doby vyplývá z třetího Keplerova zákona (2.9):

$$T = \pi a \sqrt{\frac{4a}{GM_{\mathrm{s}}}} = 3{,}3 \text{ roku.} \tag{40}$$

■

Úloha 4.3.3:

V jakých mezích se mění vzdálenost a rychlost Halleyovy komety na její trajektorii kolem Slunce, víme-li, že její doba oběhu je 76,1 roku, vzdálenost komety od Slunce v perihéliu je 0,59 au, a hmotnost Slunce je $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Řešení:

Nejprve užitím 3. Keplerova zákona stanovíme délku velké poloosy, přičemž s výhodou využijeme referenční údaje, vztažené k Zemi:

$$\frac{a^3}{a_{\mathrm{Z}}^3} = \frac{T^2}{T_Z^2}. \tag{41}$$

Odtud

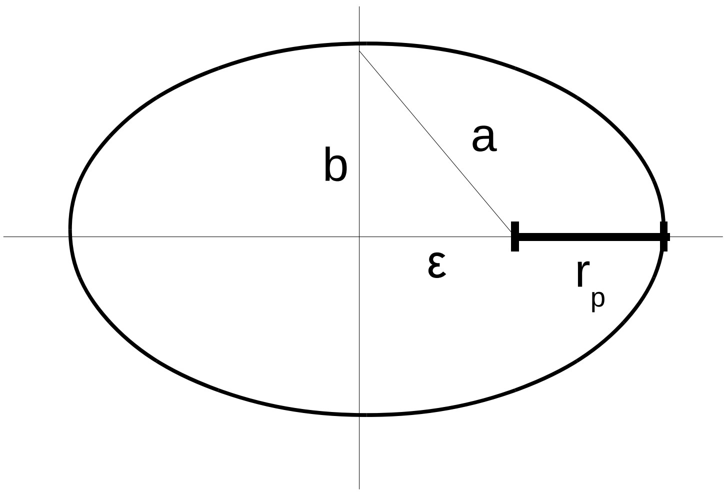
$$a = a_{\mathrm{Z}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_{\mathrm{z}}}\right)^2} = 17{,}96 \text{ au.} \tag{42}$$

K výpočtu poloosy a bychom mohli použít i vztah (2.9):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\mathrm{S}}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_{\mathrm{S}}}{4\pi^2}}. \tag{43}$$

K výpočtu vzdálenosti afélia využijeme vztah $r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}} = 2a$: (44)

$$r_{\mathrm{a}} = 2a - r_{\mathrm{p}} = 35{,}33 \text{ au.} \tag{45}$$



Obr. 11: Parametry elipsy

Rychlosti komety v aféliu a perihéliu stanovíme z plošné rychlosti komety. Z obrázku určíme $\varepsilon = a - r_{\mathrm{p}}$ a $b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}$. Z plochy elipsy $S = \pi ab$ a doby oběhu T

vyjádříme plošnou rychlost $\sigma = \pi ab/T$, kterou porovnáme s vyjádřením plošné rychlosti v perihéliu a aféliu. V obou těchto polohách je oběžná rychlost kolmá k polohovému vektoru:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{r_\mathrm{p} v_\mathrm{p}}{2} = \frac{r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}}{2}. \qquad (46)$$

Odtud dostáváme minimální a maximální rychlost komety:

$$v_\mathrm{a} = 0{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}\ ; \quad v_\mathrm{p} = 54{,}4\ \mathrm{km\ s^{-1}}.$$

Na závěr ještě stanovíme číselnou výstřednost:

$$e = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{2a} = 0{,}967. \qquad (47)$$

Vidíme, že velká číselná výstřednost trajektorie komety je spojena s velkými rozdíly v rychlostech v průběhu pohybu.

■

4.4. Gravitační zrychlení v radiálním poli

V následujících úlohách předpokládáme, že se dané těleso (družice) pohybuje v centrálním gravitačním poli jiného tělesa (planeta, slunce). Při pohybu tělesa okolo centrálního tělesa působí na něj gravitační síla směrem do centra. Její velikost závisí na hmotnosti obíhajícího tělesa a jeho vzdálenosti od centra.

V neinerciální soustavě obíhajícího tělesa je gravitační síla v rovnováze se silou odstředivou. Ta obecně závisí na hmotnosti tělesa, jeho rychlosti a poloměru křivosti trajektorie [3, 13].

Úloha 4.4.1:

Určete, jakou silou je přitahováno těleso o hmotnosti 80 kg na povrchu Pluta. Potřebné údaje naleznete v tabulkách.

Řešení:

Po nalezení hodnot v tabulce dosadíme do vzorce pro výpočet gravitačního zrychlení (3.4). Hmotnost Pluta je $0{,}21 \cdot 10^{-2}$ hmotnosti Země, která je $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg. Průměr planety Pluta je 1 150 km.

$$a_{\mathrm{g}} = G\frac{M_{\mathrm{p}}}{R_{\mathrm{p}}^2} = 0{,}63\ \mathrm{m\ s^{-2}}. \qquad (48)$$

Pro sílu, kterou je těleso přitahováno k planetě, platí vztah:

$$F = m\,a_{\mathrm{g}} = 50{,}4\ \mathrm{N}. \qquad (49)$$

Ob. 12: Puto

Převzato z [14]

■

Úloha 4.4.2:

Určete jakou silou je přitahováno těleso o hmotnosti 90 kg na povrchu Marsu. Potřebné údaje naleznete v tabulkách.

Řešení:

Hmotnost Marsu je 0,11 hmotnosti Země, hmotnost Země je $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg. Průměr Marsu je $34{,}0 \cdot 10^{2}$ km. Tyto hodnoty dosadíme do vzorce pro gravitační zrychlení (3.2):

$$a_{\mathrm{g}} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^{2}}. \qquad (50)$$

Obdržíme $a_{\mathrm{g}} = 3{,}70\ \mathrm{m\,s^{-2}}$; $F = ma_{\mathrm{g}} = 33{,}3 \cdot 10^{1}$ N. (51)

■

Úloha 4.4.3:

V jaké vzdálenosti od planety Merkur působí na těleso o hmotnosti 3 t síla $7{,}34 \cdot 10^{3}$ N? Potřebná data naleznete v tabulkách.

Řešení:

Úpravou Newtonova gravitačního zákona zjistíme vzdálenost *r* od středu planety:

$$F = \frac{GM_{\mathrm{D}}M_{\mathrm{M}}}{r^{2}}. \qquad (52)$$

Z toho vyjádříme vzdálenost

$$r = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{D}}M_{\mathrm{M}}}{F}}. \qquad (53)$$

Po dosazení $r = 3{,}00 \cdot 10^{3}$ km. Po odečtení poloměru Merkuru $R_{\mathrm{M}} = 2{,}44 \cdot 10^{3}$ km vypočteme výšku *h* od povrchu planety:

$$h = r - R_{\mathrm{M}} = 5{,}60 \cdot 10^{2}\ \mathrm{km}. \qquad (54)$$

■

Úloha 4.4.4:

Určete a) jakou silou je přitahována Země ke Slunci,

b) jakou rychlostí se pohybuje Země okolo Slunce.

Údaje potřebné pro výpočet naleznete v tabulkách.

Řešení:

a) Při výpočtu vycházíme z Newtonova gravitačního zákona (3.2). Po dosazení hmotností Slunce a Země, Gravitační konstanty a vzdělenosti mezi těmito tělesy dospějeme k řešení

$$F = 3{,}55 \cdot 10^{22}\ \text{N}.$$

b) Při výpočtu vyjdeme ze vztahu $v = 2\pi r/T$, kde r je 1 au $(149{,}59 \cdot 10^{9}\ \text{m})$ a T je doba oběhu, tedy 1 rok, což je $31\,536 \cdot 10^{3}$s. Po dosazení:

$$v = 29{,}789\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

■

Úloha 4.4.5:

Stanovte hmotnost Země ze znalosti gravitačního zrychlení $g \doteq 9{,}81\ \text{ms}^{-2}$ na jejím povrchu a jejího poloměru $R = 6\,371$ km.

Řešení:

Na těleso o hmotnosti m působí na povrchu Země přitažlivá síla o velikosti

$$F = G\frac{mM}{R^2} = mg. \tag{55}$$

Odtud určíme

$$M = \frac{gR^2}{G}. \tag{56}$$

Pro zadané hodnoty dospějeme k výsledku $M \doteq 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg .

■

Úloha 4.4.6:

Stanovte velikost gravitačního zrychlení na Marsu, Venuši a na Měsíci.

Řešení:

Z Newtonova gravitačního zákona (3.2) a jeho druhého zákona již známe vztah pro velikost gravitačního zákona pro těleso ve tvaru koule,

$$g = \frac{GM}{R^2}. \tag{57}$$

Potřebná data pro výpočet, tedy poloměry a hmotnosti jednotlivých těles, si najdeme v přiložené tabulce, případně v matematicko-fyzikálních tabulkách. Konkrétně hmotnost Měsíce a jeho poloměr, vyjádřené vzhledem k hmotnosti a poloměru Země, jsou

$$M_\mathrm{M} \doteq \frac{1}{81} M_\mathrm{Z}\,;\, R_\mathrm{M} \doteq 0{,}26\, R_\mathrm{Z}, \tag{58}$$

$$g_\mathrm{M} = \frac{G M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2} = \frac{1}{81 \cdot 0{,}26^2}\, g_\mathrm{Z}. \tag{59}$$

Vypočtené zrychlení vzhledem k Zemi tak je

$$g_\mathrm{M} \doteq \frac{1}{6} g_\mathrm{Z}. \tag{60}$$

Analogicky gravitační zrychlení pro planetu Mars pro hodnoty relativní hmotnosti a poloměru

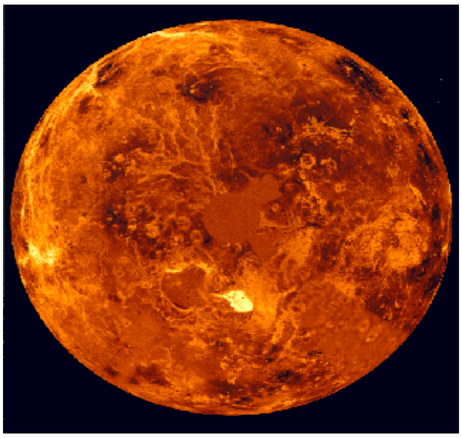
$$(M_\mathrm{Mr} \doteq 1{,}07 \cdot 10^{-1}\, M_\mathrm{Z}\,;\, R_\mathrm{Mr} \doteq 5{,}33 \cdot 10^{-1}\, R_\mathrm{Z})\ \text{je} \tag{61}$$

$$g_\mathrm{Mr} \doteq 0{,}38\, g_\mathrm{Z} = 3{,}70\ \mathrm{m\ s^{-2}}.$$

Výpočet tíhového zrychlení pro planetu Venuši

$$(M_\mathrm{V} \doteq 0{,}82\, M_\mathrm{Z}\ ;\ R_\mathrm{V} \doteq 0{,}95\, R_\mathrm{Z}), \tag{62}$$

$$g_\mathrm{V} \doteq 0{,}90\, g_\mathrm{Z} = 8{,}90\ \mathrm{m\ s^{-2}}.$$



Obr. 13: Venuše

Převzato z [15]

■

Úloha 4.4.7:

Určete velikost gravitačního zrychlení v gravitačním poli Země ve vzdálenosti poloměru Měsíce.

Řešení:

Vycházíme ze vztahu pro výpočet gravitačního zrychlení s tím rozdílem, že za poloměr R dosadíme poloměr Měsíce.

$$\mathrm{a}_{\mathrm{gZ}} = G\frac{M}{r_{\mathrm{M}}^2}. \tag{63}$$

Po dosazení dojdeme k výsledku $a_{\mathrm{ZM}} \doteq 2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

■

Úloha 4.4.8:

Určete bod na úsečce, která spojuje střed Země a Měsíce, kde je intenzita výsledného gravitačního pole nulová.

Řešení:

Vzdálenost bodu od středu Země, který hledáme, označíme x. Gravitační zrychlení Země má v tomto bodě velikost

$$a_{\mathrm{g,Z}} = \frac{GM_{\mathrm{Z}}}{x^2}. \tag{64}$$

Gravitační zrychlení Měsíce je

$$a_{\mathrm{g,M}} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{(r_{\mathrm{M}} - x)^2}, \tag{65}$$

kde jsme označili vzdálenost Měsíce od Země r_{M}. Hodnoty obou gravitačních zrychlení se v hledaném bodě přesně odečtou, číselně $a_{\mathrm{g,Z}} = a_{\mathrm{g,M}}$: (66)

$$\frac{x^2}{(r_{\mathrm{M}} - x)^2} = \frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{M}}}. \tag{67}$$

Do rovnice dosadíme:

$$r_{\mathrm{M}} \doteq 60R_{\mathrm{Z}}\ ;\ M_{\mathrm{M}} = \frac{1}{81}M_{\mathrm{Z}}. \tag{68}$$

Dostaneme dvojici řešení: $x_1 \doteq 68\,R_{\mathrm{Z}}$; $x_2 \doteq 54\,R_{\mathrm{Z}}$. První řešení musíme vyloučit, leží mimo úsečku Země-Měsíc a gravitační zrychlení by se sčítala. Úloze vyhovuje jediné řešení $x \doteq 54\,R_{\mathrm{Z}} \doteq 345\,600$ km .

■

4.5. Keplerovy zákony

Keplerovy zákony jsou stěžejními zákony vesmírné mechaniky, nacházíme je prakticky ve všech příkladech, které se týkají pohybů těles ve sluneční soustavě, byť občas „skrytě“ [2,3,5,6,13,]. V těchto příkladech jsou použity tak, aby jejich uplatnění bylo přímé.

Úloha 4.5.1:

Odvoďte třetí Keplerův zákon ze srovnání kruhového pohybu dvou těles v poli ústředního (podstatně hmotnějšího) ústředního tělesa.

Řešení:

Pro jednotlivá tělesa označme F_i sílu přitažlivou mezi tělesem obíhajícím (např. planeta) a tělesem ústředním (např. Slunce), m_i hmotnost obíhajícího tělesa, M hmotnost tělesa ústředního a r_i vzdálenost středů obou těles.

$$F_i = G\frac{m_i M}{r_i^2} = \frac{m_i v_i^2}{r_i} = \frac{m_i}{r_i}\left(\frac{2\pi r_i}{T_i}\right)^2 \implies \frac{T_i^2}{r_i^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \; i = 1, 2. \tag{69}$$

Na pravé straně poslední rovnosti stojí konstanta, nezávislá na indexu i. Odtud:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^2}. \tag{70}$$

■

Úloha 4.5.2:

Okolo Země obíhá družice ve výšce h s oběžnou dobou T_1. Měsíc obíhá okolo Země za dobu T_{M}. Ze srovnání oběžných dob určete vzdálenost Měsíce od Země r_{M}. Příklad řešte obecně.

Řešení:

Vzdálenost družice od středu Země je

$$r_1 = R + h\,. \tag{71}$$

Podle třetího Keplerova zákona platí

$$\frac{r_{\mathrm{M}}^3}{r_1^3} = \frac{r_{\mathrm{M}}^3}{(R+h)^3} = \frac{T_{\mathrm{M}}^2}{T_1^2}. \tag{72}$$

Odtud vyjádříme:

$$r_{\mathrm{M}} = r_1 \left(\frac{T_{\mathrm{M}}}{T_1}\right)^{2/3}. \tag{73}$$

■

Úloha 4.5.3:

Neptun je třicetkrát dále od Slunce než Země. Určete jeho oběžnou dobu.

Řešení:

Z třetího Keplerova zákona dostaneme

$$\frac{T_{\mathrm{N}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \frac{r_{\mathrm{N}}^3}{r_{\mathrm{Z}}^3}, \tag{74}$$

tj.

$$T_{\mathrm{N}} = T_{\mathrm{Z}} \left(\frac{r_{\mathrm{N}}}{r_{\mathrm{Z}}}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{75}$$

Indexy N a Z jsou příslušné Neptunu a Zemi. Po dosazení za $T_{\mathrm{Z}} = 1$ rok a $r_{\mathrm{N}} / r_{\mathrm{Z}} = 30$ dostáváme konečný výsledek $T_{\mathrm{N}} \doteq 164$ roky.

■

Úloha 4.5.4:

Dvě hvězdy, každá o hmotnosti Slunce, obíhají okolo společného těžiště s periodou $T = 3$ dny $= 2{,}59 \cdot 10^4$ s. Určete vzdálenost mezi hvězdami. Hmotnost Slunce je $M_{\mathrm{s}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Řešení:

Vyjdeme ze třetího Keplerova zákona (2.9), modifikovaného pro případ, kdy nelze zanedbat jednu z hmotností ve srovnání s druhou:

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}, \tag{76}$$

kde d je vzdálenost mezi hvězdami, T je doba oběhu neboli perioda, M_1 a M_2 jsou hmotnosti hvězd, v tomto případě stejné.

Po úpravě

$$d = \sqrt[3]{\frac{G(2M_s)T^2}{4\pi^2}} \Rightarrow d = 0{,}051 \text{ au.} \tag{77}$$

Poloměr trajektorií je $r = \mathrm{d}/2 \doteq 0{,}026$ au .

■

4.6 Hohmannova elipsa

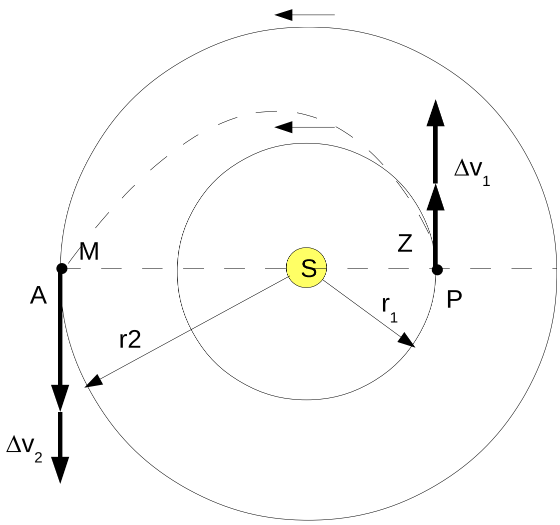
Je to téměř optimální dráha, z hlediska spotřeby paliva, pro přelet mezi dvěma blízkými planetami, které obíhají stejné centrální těleso [17]. Nazývá se podle německého vědce Waltera Hohmanna, který její teorii publikoval v roce 1925.

Úloha 4.6.1:

Oběžná sonda, pohybující se po kruhové trajektorii kolem Slunce ve vzdálenosti 1 au (oběžná dráha Země), byla vyslána na kruhovou oběžnou trajektorii Marsu, tj. na kruhovou trajektorii o poloměru 1,52 au. V průběhu letu této sondy budeme zanedbávat gravitační působeni planet a přihlížet pouze ke gravitačnímu působení Slunce. Dále budeme uvažovat, že sonda má zapnuté motory pouze v okamžicích, kdy přechází z kruhové dráhy na eliptickou, ve zbývající části pohybu budou motory vypnuty.

Připomeňme, co už bylo uvedeno v úvodu: energeticky nejvýhodnější pro takový přechod je eliptická přechodová trajektorie, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie Marsu v místě přistání. Tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce, jak je znázorněno na obrázku. Aby vše mohlo dobře proběhnout, je třeba sondě na oběžné trajektorii Země zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_1 a pak na oběžné dráze Marsu zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_2.

Máme určit velikosti změn rychlosti Δv_1 a Δv_2.



Obr. 14: K výpočtu Hohmannovy elipsy

Řešení:

Při přechodu k Marsu se sonda bude pohybovat po eliptické trajektorii s perihéliem ve vzdálenosti r_1 (poloměr dráhy Země) a aféliem ve vzdálenosti r_2 (poloměr dráhy Marsu). Hlavní poloosa elipsy bude $\mathrm{a} = (\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2)/2$.

K výpočtu budeme potřebovat vztah pro celkovou energii družice, pohybující se po eliptické dráze. Abychom si toto odvození zjednodušili, odvodíme si pouze vzorec pro energii pohybu po kruhové dráze a ten poté záměnou $r \to a$ zobecníme na pohyb po elipse.

Vyjdeme ze známého vztahu pro rychlost po kruhové dráze

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \tag{78}$$

Celková energie pro kruhový pohyb je tedy:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{GmM}{r}\right) = \frac{GmM}{2r} - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r}. \tag{79}$$

Po zobecnění $r \to a$ dostáváme výraz [5]:

$$E = -\frac{GmM}{2a}. \tag{80}$$

Ze zákona zachování energie obecně vyplývá :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = E, \tag{81}$$

a tedy

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{2a}\,. \qquad (82)$$

Po úpravách vztahů pro celkovou energii pro kruhový pohyb (5.79) dospějeme k výrazu pro rychlost pohybu po elipse v závislosti na vzdálenosti od Slunce

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,. \qquad (83)$$

Před počátečním urychlením je sonda na kruhové dráze Země a tudíž má počáteční rychlost

$$v_{\mathrm{k1}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{r_1}}\,. \qquad (84)$$

Změna rychlosti $\Delta v_1 = v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{k1}}$, potřebná k přechodu z kruhové trajektorie na eliptickou s perihéliem v místě r_1, je tak

$$\Delta v_1 = v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{k1}} = \sqrt{2GM_{\mathrm{s}}\frac{r_2}{r_1\,(r_{1+}r_2)}} - \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{r_1}}\,, \qquad (85)$$

respektive

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \doteq 2{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}. \qquad (86)$$

Na konci Hohmannovy trajektorie je sonda v aféliu ve vzdálenosti r_2 od Slunce a má rychlost o velikosti $v_{a.}$ Tuto rychlost je třeba zvýšit tak, aby družice přešla z eliptické trajektorie na kruhovou o poloměru r_2, tedy aby získala rychlost o velikosti

$$v_{\mathrm{k2}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{r_2}}\,. \qquad (87)$$

Odpovídající změna rychlosti $\Delta v_2 = v_{\mathrm{k2}} - v_{\mathrm{a}}$ je (88)

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{s}}}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \doteq 2{,}6\ \mathrm{km\ s^{-1}}. \qquad (89)$$

■

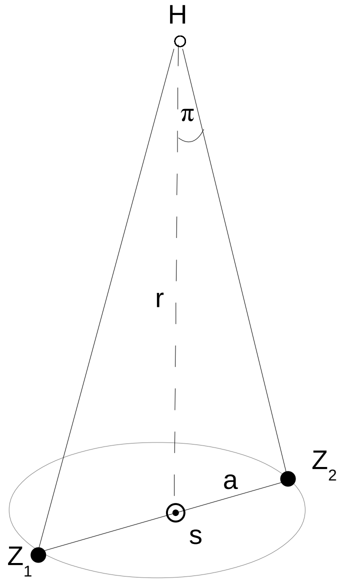
5 Vzdálenosti hvězd, paralaxa

Jelikož vzdálenosti ve vesmíru jsou obrovské, používáme k určení vzdáleností hvězd (mimo jiné způsoby) takzvanou paralaxu, což je obecně úhel, který svírají dvě přímky, které jsou vedené ze dvou různých míst k jednomu bodu. Případně tak nazýváme zdánlivý rozdíl polohy bodu vzhledem k vzdálenému pozadí při pozorování ze dvou různých míst. Platí, že čím je pozorovaný objekt ve větší vzdálenosti, tím je jeho paralaxa menší. V astronomii používáme pro vyjádření vzdálenosti v souvislosti s paralaxou jednotku parsek (pc)[2,13]. Tato jednotka je definována jako vzdálenost, z níž bychom viděli velkou poloosu zemské dráhy pod úhlem 1". Mezi vzdáleností r, vyjádřenou v parsecích, a paralaxou, vyjádřenou v obloukových vteřinách, platí podle definice parseku vztah $r = 1/\pi$. Paralaxy všech hvězd jsou menší než 1". Pro představu uveďme, že paralaxa nejbližší hvězdy Proxima Centauri je $\pi = 0{,}763''$. Její vzdálenost tedy je $r = 1/0{,}763 \doteq 1{,}31$ pc. Pokud chceme vyjádřit parsek v metrech, můžeme při výpočtu vyjít z obrázku č. 8. V pravoúhlém trojúhelníku $\mathrm{Z_2SH}$ je úhel π velmi malý. Je-li vyjádřen v radiánech, platí přibližně $\pi \cong \mathrm{tg}\,\pi = \mathrm{a/r}$, kde a je vzdálenost Země od Slunce a r je vzdálenost hvězdy. Odtud $r = a/\pi$. Po dosazení poloměru zemské dráhy a v metrech a paralaxy π v radiánech dostaneme vzdálenost r rovněž v metrech [18]. Podle definice má bod ve vzdálenosti jednoho parseku paralaxu $\pi = 1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ rad. Jeden parsek má tedy hodnotu:

$$1\mathrm{pc} = \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}}{4{,}85 \cdot 10^{-6}} = 3{,}08 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}.$$

Důležitý je i pojem „rovníková paralaxa“, která je definována jako úhel, pod kterým je vidět z daného objektu poloměr Země.

Poznamenejme ještě, že trigonometrické měření vzdálenosti je možné pouze u poměrně blízkých hvězd, u vzdálenějších se používá jiných metod.



Obr. 15: Paralaxa

Úloha 5.1:

Určete, kolik čtverečních stupňů pokrývá celou oblohu. (Vyjádřete plný prostorový úhel ve čtverečních stupních.)

Řešení:

Povrch koule je 4π steradiánů. Jeden steradián je $(180/\pi)^2$čtverečních stupňů. Celá obloha, má tedy $4\pi(180/\pi)^2$. Po dosazení a výpočtu obdržíme výsledek <u>41 253</u> čtverečních stupňů.

■

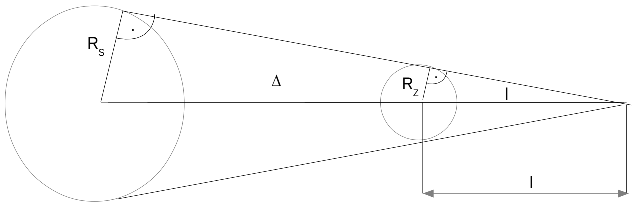
Úloha 5.2:

Vypočtěte délku kužele zemského stínu, pokud známe poloměr Slunce R_S, poloměr Země R_Z, a vzdálenost středů Slunce a Země Δ.

Řešení:

Vyjdeme z podobnosti trojúhelníků (obr. 16):

$$\sin\alpha = \frac{R_S}{\Delta + l} = \frac{R_Z}{l}. \qquad (1)$$



Obr. 16: Kužel stínu Země

Po úpravě

$$l = \frac{\Delta \cdot R_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{S}} - R_{\mathrm{Z}}} \doteq 217{,}5\ R_{\mathrm{Z}}. \tag{2}$$

Pro větší názornost jsme výsledek vyjádřili prostřednictvím zemského poloměru. Stín dosahuje do vzdálenosti 216,5 poloměrů Země od jejího povrchu.

■

Úloha 5.3:

Rovníková paralaxa Slunce je 8,80" (úhel, pod kterým je ze Slunce vidět poloměr Země), úhlový poloměr Slunce je 16´01". Určete poměr poloměru Slunce k poloměru Země.

Řešení:

Pro řešení tohoto příkladu vyjdeme ze vztahu $\mathrm{tg}\,\alpha = R/d$, kde R je poloměr Slunce nebo Země, d je vzdálenost obou těles a α je úhel, pod kterým vidíme poloměr R jednoho tělesa z místa tělesa druhého. Je zřejmě

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{\mathrm{Z}} = \frac{R_{\mathrm{Z}}}{d}\ ;\ \mathrm{tg}\,\alpha_{\mathrm{S}} = \frac{R_{\mathrm{S}}}{d}, \tag{3}$$

kde α_{Z} a α_{S} jsou úhly, pod kterými jsou vidět poloměry Země a Slunce. Oba úhly jsou malé a tedy

$$\frac{R_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{Z}}} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_{\mathrm{S}}}{\mathrm{tg}\,\alpha_{\mathrm{Z}}} \doteq \frac{\alpha_{\mathrm{S}}}{\alpha_{\mathrm{Z}}}, \tag{4}$$

$$R_{\mathrm{S}} = \frac{\alpha_{\mathrm{S}}}{\alpha_{\mathrm{Z}}} R_{\mathrm{Z}} = \frac{16'01''}{8{,}8''} R_{\mathrm{Z}} = 109\ R_{\mathrm{Z}}. \tag{5}$$

■

Úloha 5.4:

Jaká je roční paralaxa planety X, která leží ve vzdálenosti $d = 10{,}0$ ly (světelných let) od Slunce?

Řešení:

Nejprve převedeme světelné roky na parseky ($1\text{pc} = 3{,}26$ ly)

$$d = \frac{10}{3{,}26}\,\text{pc} = 3{,}07\ \text{pc}. \tag{6}$$

Nyní můžeme použít vztah mezi paralaxou v úhlových vteřinách a vzdáleností v parsecích:

$$\pi = \frac{1}{d} = 0{,}325''. \tag{7}$$

■

Úloha 5.5:

Jaká je vzdálenost Země a Slunce, pokud známe vzdálenost daného objektu a jeho roční paralaxu? V našem případě je tato vzdálenost $4{,}30$ ly a úhel pozorování je $3{,}70 \cdot 10^{-6}$ rad.

Řešení:

Tato úloha je modifikací k úloze 5.4, což však neznamená, že je totožná. Vyjdeme ze vztahu $\pi = R/d$, kde R je (hledaná) vzdálenost Země Slunce, d je vzdálenost objektu a π je jeho paralaxa. Vzdálenost Země a Slunce tedy je:

$$R = \pi d \Rightarrow 1{,}51 \cdot 10^{11}\ \text{m}. \tag{8}$$

■

6. Precese

Je to kuželový pohyb zemské osy, který vzniká gravitačním působením Měsíce a Slunce. Tento pohyb se projevuje změnou polohy roviny zemského rovníku vzhledem ke hvězdám a tedy posuvem jarního bodu. Precese zemské osy činí $50{,}37''$ za rok [2,13]. Jev precese můžeme pozorovat na setrvačníku, např. na pohybu osy dětské „káči“. Jde o poměrně složitý pohyb, skládající se z několika složek. Nejvýznamnějším vlivem, způsobujícím precesi zemské osy, je gravitační působení Měsíce a Slunce na zemské těleso. Protože Země nemá tvar koule, ale v prvním přiblížení tvar rotačního elipsoidu, snaží se Měsíc stočit osu zemského tělesa tak, aby se rovníková výduť Země dostala do roviny oběhu Měsíce kolem Země. Podobně gravitační síla Slunce se snaží stejným způsobem dostat rovníkovou výduť do roviny oběhu Země kolem Slunce (tedy do roviny ekliptiky). Oba tyto vlivy působí na Zemi, kterou si můžeme představit jako obrovský setrvačník, tak, že její osa vykonává precesní pohyb (vychyluje se ve směru kolmém na okamžitou polohu osy zemské rotace a zároveň kolmou na dvojici gravitačních sil působících na rovníkovou výduť). Tato rozhodující části precese zemské osy se nazývá lunisolární precese. Současná hodnota posuvu jarního bodu je, jak již bylo uvedeno, $50{,}37''$ za rok, a to proti směru zdánlivého pohybu Slunce po nebeské sféře. Z této hodnoty asi $60\ \%$ připadá na gravitační vliv Měsíce a $40\ \%$ na vliv Slunce. Podrobnosti lze nalézt v literatuře [16,19].

Úloha 6.1:

Za jak dlouho opíše, v důsledku precese, světový pól úhel 5°? Precesní konstanta je $50{,}37''$ za rok.

Řešení:

$1° = 3600'',\ 5° = 18\,000'',$

$$t = \frac{18\,000''}{50{,}25''/1\ \mathrm{rok}} = \ 358\ \mathrm{let}.$$

■

Úloha 6.2:

Vypočtěte délku platónského roku.

Řešení:

Tento příklad je obdobou příkladu předchozího. Podstatný rozdíl je však ve velikosti úhlu, který opíše světový pól je $360°$.

Tedy

$$t = \frac{130 \cdot 10^4"}{50{,}25"/1\ \text{rok}} = \ 2{,}59 \cdot 10^4\ \text{let.}$$

Přesná hodnota je $25\ 870{,}646$, dle výpočtu.

■

7. Aberace

Jako aberace světla (též roční aberace nebo hvězdná aberace) se označuje odchýlení světelného paprsku, přicházejícího od pozorovaného tělesa k pozorovateli, které je způsobené konečnou rychlostí světla, pohybem pozorovaného tělesa a pohybem pozorovatele: Tato odchylka je určena vztahem [2].

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{c}. \tag{1}$$

K jevu dochází při ročním pohybu Země kolem Slunce. V průběhu roku dochází ke změně směru její rychlosti a tedy i ke změně úhlu, pod kterým pozorujeme paprsky, přicházející z jednotlivých hvězd. Pohyb Země kolem Slunce tedy způsobuje zdánlivý pohyb hvězd vzhledem k pozorovateli [13,16].

Úloha 7.1:

Jak velká je aberace pro pozorovatele z Venuše? Vzdálenost ke Slunci je $r = 0{,}723 \cdot$ au, oběžná doba Venuše $T = 0{,}615$ roku.

Řešení:

Převedeme oběžnou dobu na sekundy:

$$P = 0{,}615 \cdot 365{,}256 \text{ dní} = 19\,408\,205 \text{ s}.$$

Z periody oběhu vypočítáme rychlost

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} = 3{,}49 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}. \tag{2}$$

Nakonec použijeme vzorec pro výpočet aberace (7.1):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{c} \Rightarrow \alpha \doteq 22{,}1''. \tag{3}$$

■

Úloha 7.2:

Vypočtěte rychlost světla, znáte-li aberační konstantu hvězd na obloze $20{,}47''$ a střední rychlost Země okolo Slunce $v = 29{,}77$ km s^{-1}.

Řešení:

Použijeme vzorec (7,1) pro výpočet aberace:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{c} \Longrightarrow c \doteq 3\,000 \cdot 10^2 \text{ km s}^{-1}. \tag{4}$$

Tímto způsobem určil rychlost světla roku 1729 anglický astronom James Bradley.

■

Úloha 7.3:

Vypočtěte pomocí aberačního posuvu $\alpha = 20{,}47''$ hvězd, pozorovaných ze Země, dobu, za kterou k nám dorazí světlo ze Slunce, a určete střední vzdálenost Země od Slunce.

Řešení:

Ze vzorce pro výpočet aberace (7.1) vypočítáme rychlost, kterou se pohybuje Země okolo Slunce:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{c}\ ;\ v = 29{,}77\ \mathrm{km\ s^{-1}}. \tag{5}$$

Z vypočítané rychlosti a ze známé doby oběhu (1 rok) vypočteme střední vzdálenosti Země od Slunce:

$$r = \frac{vT}{2\pi} \doteq 150 \cdot 10^6\ \mathrm{km}. \tag{6}$$

Doba, za kterou k nám dorazí světlo ze Slunce, je tedy:

$$t = \frac{r}{c} = 500\ \mathrm{s} = 8\ \mathrm{min}\ 19\ \mathrm{s}\,. \tag{7}$$

■

8. Zářivý výkon hvězd, zářivý tok, magnituda

Zářivý výkon je celkový výkon, který hvězda vyzařuje do prostoru. Jeho značka je L, jednotka je watt [W]. Můžeme ho vyjádřit pomocí absolutní magnitudy, případně ze Stefanova – Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, kde R je poloměr hvězdy, σ je Stefanova konstanta $(5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}K^{-4}})$ a T je teplota hvězdy [1]. Zářivý tok (zářivý výkon, procházející nějakou plochou S, např. sběrnou plochou objektivu dalekohledu) ve vzdálenosti r od hvězdy můžeme vyjádřit pomocí zářivého výkonu L:

$$\phi = \frac{S}{4\pi r^2} L \,. \qquad (1)$$

Hvězdná velikost (zdánlivá magnituda, zdánlivá hvězdná velikost, zdánlivá jasnost, symbol mag nebo m) je fotometrická veličina používaná v astronomii, která udává jasnost objektu (světelného zdroje), jak se jeví pozorovateli. Nejedná se o jednotku SI. Vztah pro její výpočet je [2]

$$m = -2{,}5 \cdot \log \frac{\phi}{\phi_0} \,, \qquad (2)$$

kde ϕ_0 je referenční zářivý tok, odpovídající nulové magnitudě.

Absolutní hvězdnou velikost počítáme z hodnoty, kterou by měla hvězda ve vzdálenosti deseti parseků. Tuto hvězdnou velikost nazýváme absolutní magnitudou. Mezi zdánlivou a absolutní magnitudou platí vztah [13]

$$\mathrm{M} = \mathrm{m} + 5 - 5 \log \mathrm{r}. \qquad (3)$$

Přitom vzdálenost r v tomto vztahu vyjadřujeme v parsecích. Některé příklady jsou čerpány z [20].

■

Úloha 8.1:

Jaký je zářivý tok objektivem dalekohledu o obsahu $S = 1\mathrm{m}^2$, pokud pozorujeme hvězdu, jejíž zářivý výkon je $L = 1{,}31 \cdot 10^{-23}$ W, ze vzdálenosti $r = 1{,}31$ pc? Hvězdu pozorujeme mimo atmosféru.

Řešení:

Vzdálenosti přepočteme na metry. Při této příležitosti si připomeneme převodní vztahy pro vzdálenosti, užívané v astronomii:

$1\ \mathrm{pc} = 3{,}26\ \mathrm{ly}$, $1\ \mathrm{ly} = 9{,}469 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m} = 6\ 3241\ \mathrm{au}$, $1\ \mathrm{pc} = 206\ 265\ \mathrm{au}$. (4)

Tedy $r = 4{,}04 \cdot 10^{16}$ m a pro zářivý tok platí (8.1):

$$\phi = \frac{S}{4\pi r^2} L = 8{,}03 \cdot 10^{-58}\ W. \qquad (5)$$

■

Úloha 8.2:

Jasnost proměnné hvězdy je v maximu 16krát větší než v minimu. Jaký je rozdíl hvězdných velikostí?

Řešení:

Vyjdeme z Pogsonovy rovnice:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\frac{\phi_1}{\phi_2} = -2{,}5\ \log\frac{\phi_1}{16\ \phi_1}, \qquad (6)$$

$$m_1 - m_2 = 3\ \mathrm{mag}. \qquad (7)$$

■

Úloha 8.3:

Jakou zdánlivou jasnost má nejslabší hvězda, kterou můžeme pozorovat dalekohledem s průměrem objektivu 50 mm? Průměr zornice uvažujeme 5 mm.

Řešení:

Plochu zornice označíme S_1, plochu dalekohledu S_2. Podobně d_1 je průměr zornice a d_2 je průměr dalekohledu. Porovnáme toky elektromagnetického záření pro pozorování pouhým okem (ϕ_1) a dalekohledem (ϕ_2)

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\frac{S_1 L}{4\pi r^2}}{\frac{S_2 L}{4\pi r^2}} = \frac{S_1}{S_2}. \qquad (8)$$

Číselně

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{1}{100}. \qquad (9)$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice $m_1 - m_2 = -2{,}5 \log(\phi_1/\phi_2)$ vypočteme magnitudu m_1 hvězdy. Parametr $m_2 = 6$ v rovnici značí zdánlivou magnitudu nejslabší hvězdy, kterou můžeme ještě v dalekohledu spatřit.

$$m_1 - 6 = -2{,}5 \log \frac{1}{100} \;\Rightarrow\; m_1 = 11 \text{ mag.} \qquad (10)$$

■

Úloha 8.4:

Určete vzdálenost galaxie, pokud víte, že tam vzplála nova, která dosáhla maximální hvězdné velikosti $+7{,}00$ mag, přičemž absolutní hvězdná velikost novy je $-\ 16{,}2$ mag.

Řešení:

Při výpočtu vyjdeme z rovnice (8.3), jež vyjadřuje absolutní magnitudu pomocí magnitudy zdánlivé, tedy ze vztahu:

$$M - m = 5 - 5 \log r. \qquad (11)$$

Odtud

$$r = 10^{\frac{28{,}2}{5}} \text{pc} = 4{,}37 \cdot 10^5 \text{ pc}.$$

■

Úloha 8.5:

Sluneční konstanta $K = 1\,390 \text{ W m}^{-2}$ vyjadřuje intenzitu záření Slunce ve vzdálenosti 1au. Číselně se rovná výkonu paprsků, dopadajících na jednotku plochy (1m^2), postavenou kolmo ke směru jejich šíření. Vypočtěte zářivý výkon Slunce a jeho povrchovou efektivní teplotu. Poloměr Slunce je $R_\text{S} = 6{,}96 \cdot 10^5$ km, Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{W K}^{-1}$.

Řešení:

Zářivý výkon Slunce je

$$L = 4\pi r^2 K \doteq 3{,}91 \cdot 10^{26} \text{ W}, \qquad (12)$$

kde jsme dosadili $r = 1\ \mathrm{au} = 1{,}50 \times 10^{11}\mathrm{m}$. Efektivní hodnotu teploty získáme ze Stefanova – Boltzmanova zákona $L = 4\pi R_\mathrm{S}^2 \sigma T^4$. Z něho plyne $T = 5780\ \mathrm{K}$.

■

Úloha 8.6:

Vypočtěte sluneční konstantu pro Mars, jehož střední vzdálenost od Slunce je 1,52 au, znáte-li sluneční konstantu pro Zemi $K_\mathrm{Z} = 1\,370\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.

Řešení:

Porovnáme celkový zářivý výkon Slunce ve vzdálenostech Země a Marsu:

$$L = 4\pi r_\mathrm{Z}^2 K_\mathrm{Z} = 4\pi r_\mathrm{M}^2 K_\mathrm{M}. \qquad (13)$$

Odtud

$$K_\mathrm{M} = \frac{r_\mathrm{Z}^2}{r_\mathrm{M}^2} K_\mathrm{Z} = 593\ \mathrm{W\,m^{-2}}. \qquad (14)$$

■

Úloha 8.7:

Do jaké vzdálenosti je možno při měření vzdálenosti galaxie využit supernovy, která v ní zazářila, když její maximální absolutní magnituda je -16^M a jestliže máme dalekohled, kterým pozorujeme hvězdy do zdánlivé hvězdné magnitudy $+22^\mathrm{m}$?

Řešení:

Při výpočtu vyjdeme z rovnice (8.3), jež vyjadřuje absolutní magnitudu, tedy ze vztahu

$$M - m = 5 - 5\log r. \qquad (15)$$

Za magnitudy dosadíme zadané číselné hodnoty a určíme maximální vzdálenost:

$$r = 10^{8,6}\ \mathrm{pc} = 3{,}98 \cdot 10^8\ \mathrm{pc} = 398\ \mathrm{Mpc}.$$

■

Úloha 8.8:

Hvězda má zdánlivou magnitudu $m_1 = 4$. Jaká by byla zdánlivá magnituda m_2 této hvězdy, kdyby byla v dvojnásobné vzdálenosti od nás?

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu pro zářivý výkon (8.5) :

$$L = 4\pi r_1^2\, \phi_1 = 4\pi r_2^2 \phi_2. \qquad (16)$$

Po úpravě:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\,. \tag{17}$$

Zdánlivé magnitudy porovnává vztah

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \log\frac{\phi_1}{\phi_2}\,. \tag{18}$$

Po dosazení ze vztahu (8.17) můžeme rovnici (8.18) přepsat takto:

$$m_1 - m_2 = -5 \cdot \log\frac{r_2}{r_1}\,. \tag{19}$$

Po dosazení dostáváme výsledek:

$$m_2 = 5{,}5\,.$$

Zdánlivá magnituda hvězdy ve dvojnásobné vzdálenosti by tedy byla $m = 5{,}5$.

■

Úloha 8.9:

Jaká je absolutní magnituda Slunce, pokud víme, že jeho relativní magnituda $m = -26{,}6$?

Řešení:

Nejprve je nutné převést vzdálenost Slunce od Země na parseky

$$r = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3{,}1 \cdot 10^{16}}\ \text{pc} = 4{,}84 \cdot 10^{-6}\ \text{pc}\,. \tag{20}$$

Z Pogsonovy rovnice (8.3)

$$M = m + 5 - 5\log r \tag{21}$$

obdržíme výsledek $M \doteq 5$.

■

9. Spektrální posuv,Wienův posunovací zákon, intenzita vyzařování absolutně černého tělesa

Spektrální analýza záření je nejdůležitějším prostředkem zkoumání vzdálených hvězd a jiných objektů. Podle přítomnosti čar ve spektru a jejich intenzity určíme chemické složení tělesa, relativní zastoupení prvků. Z průběhu intenzity ve spektru, můžeme usuzovat na povrchovou teplotu hvězdy. Ze spektrálního posuvu čar určíme radiální rychlost objektu vůči Zemi.

Podle Hubbleova zákona je rudý posuv spektrálních čar u vzdálených objektů tím větší, čím větší je jejich vzdálenost od Země. Hubleův zákon můžeme matematicky zapsat ve tvaru [26,28].

$$v = Hr. \tag{1}$$

kde H je Hubbleova konstanta, momentálně má hodnotu $68\ \mathrm{km\ s^{-1} Mpc^{-1}}$. Rychlost rozpínání je v, vzdálenost je r.

Opakem rudého posuvu je modrý posuv, ke kterému dochází, když se vysílač elektromagnetického záření přibližuje k pozorovateli (přijímači). Vlnová délka se v místě přijímače jeví kratší.

Rudý a modrý posuv jsou zvláštní případy Dopplerova jevu [13,21], který objevil a popsal v roce 1841 za svého pobytu v Praze rakouský fyzik Christian Doppler. Změna vlnové délky, způsobená pohybem zářiče radiální rychlostí v vzhledem k přijímači, je dána vztahem [2]

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}. \tag{2}$$

Wienův posunovací zákon [13,22] konstatuje, že v záření absolutně černého tělesa je maximální energie vyzařována na vlnové délce, která se s rostoucí termodynamickou teplotou úměrně snižuje (tj. čím teplejší je těleso, tím maximum jeho vyzařování připadá na kratší vlnovou délku). Můžeme tedy tvrdit, že vlnová délka λ_{max} na kterou připadá maximum vyzařování, je nepřímo úměrná absolutní teplotě tělesa. Matematicky vyjádřeno

$$\lambda_{\mathrm{max}} = b/T. \tag{3}$$

Konstanta b má hodnotu 2,898 mm K, resp. $2{,}898 \cdot 10^{-3}$ m K.

Záření tzv. absolutně černého tělesa je předmětem výzkumu již od 19. století. Ostatně i ze zkušenosti víme, že těleso vyzařuje tepelné záření, jehož spektrální složení je ovlivněno teplotou T tělesa. Bylo zjištěno, že zákony záření závisí i na barvě povrchu tělesa. Tedy na tom, jaké vlnové délky těleso pohlcuje, odráží nebo propouští. Proto fyzika definuje „absolutně černé těleso“ jakožto těleso, které pohlcuje záření všech vlnových délek bez rozdílu, žádné tedy neodráží. Takové těleso reálně neexistuje, dá se však vytvořit v laboratorních podmínkách jako malý otvor do dutiny v tělese o dané teplotě [23,24]. Bylo zjištěno, že intenzita vyzařování černého tělesa (energie vyzářená za jednotku doby z jednotky povrchu tělesa) závisí pouze na absolutní teplotě povrchu. Tuto skutečnost vyjadřuje Stefanův – Boltzmanův zákon [2] v matematické formě $M_\mathrm{e} = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}K^{-4}}$.

Úloha 9.1:

Jak se posune sodíková čára, jejíž vlnová délka je $\lambda = 589{,}3\ \mathrm{nm}$, ve spektru hvězdy, která má radiální rychlost vzdalování od Země $161\ \mathrm{km\,s^{-1}}$?

Řešení:

Vyjdeme ze vzorce (9.2) pro spektrální posuv a převedeme zadané veličiny na základní jednotky:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = 0{,}316\ \mathrm{nm}. \tag{4}$$

Hvězda se od Země vzdaluje, proto se sodíková čára posune k červenému konci spektra.

■

Úloha 9.2:

Ve spektru novy byla čára vodíku H_γ ($\lambda = 421{,}1\ \mathrm{nm}$) posunuta o 1,01 nm k fialovému konci. Jaká byla rychlost plynu, který hvězda vyvrhla?

Řešení:

Opět vyjdeme ze vzorce (9.2) pro spektrální posuv. Po úpravě dojdeme k výsledku:

$$v = \frac{\Delta\lambda c}{\lambda} \doteq 700\ \mathrm{km\,s^{-1}}. \tag{5}$$

Plyn atmosféry novy se k Zemi přibližuje.

■

Úloha 9.3:

Při proměřování spektra galaxie bylo zjištěno, že spektrální čára vodíku o vlnové délce 434 nm má ve spektru galaxie vlnovou délku 470 nm. Jak velkou rychlostí se od nás galaxie vzdaluje a jaká je její vzdálenost?

Řešení:

Pro výpočet budeme potřebovat znát Hubbleův zákon pro rychlosti, kterými se vzdalují galaxie, a zároveň vztah pro spektrální posuv, který vychází z Dopplerova jevu. Podle Hubbleova zákona [28,11]

$$v = Hr, \tag{6}$$

kde $H = 68\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ je Hubbleova konstanta.

Ze vztahu (2) pro spektrální posuv pro rychlost vzdalování odtud dostáváme

$$v \doteq 24{,}9\ \mathrm{km\ s^{-1}}.$$

Vzdálenost od naší galaxie určíme z rovnice (9.6):

$$r = \frac{v}{H} \doteq 366\ \mathrm{Mpc}. \tag{7}$$

■

Úloha 9.4:

Jaká je vlnová délka, na kterou připadá maximum vyzařování, a intenzita vyzařování hvězdy? Povrch hvězdy lze přibližně aproximovat povrchem absolutně černého tělesa o teplotě $3{,}0 \cdot 10^4$ K.

Řešení:

Vycházíme z Wienova posunovacího zákona (9.3) a z hodnoty Wienovy konstanty b:

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \frac{b}{T} = 97\ \mathrm{nm}. \tag{8}$$

Pro výpočet intenzity vyzařování hvězdy použijeme Stefanův – Boltzmanův zákon:

$$M_{\mathrm{e}} = \sigma\, T^4 = 4{,}6 \cdot 10^{10}\ \mathrm{W\ m^{-2}}.$$

■

10. Hubbleův zákon, Einsteinova teorie o ekvivalenci hmoty a energie

Tyto oblasti fyziky jsou relativně mladé a zajímavé jsou i jejich aplikace v nejrůznějších oborech astronomie [1,13].

Edwin Hubble v roce 1929 zjistil, že čím je galaxie vzdálenější, tím větší rychlostí se od nás vzdaluje. Zjistil, že spektrální čáry chemických prvků ve spektrech těchto objektů jsou vzhledem k měřením v pozemských laboratořích posunuty směrem k dlouhovlnnému konci spektra. Později objevil, že tento rudý posuv spektrálních čar je tím větší, čím větší je vzdálenost pozorovaného objektu od Země, a tedy že galaxie se od sebe vzájemně vzdalují rychlostí tím větší, čím jsou od sebe vzdálenější (Hubbleův zákon). To potvrzovalo teorii o rozpínání vesmíru, jak vyplývá z obecné teorie relativity: Kosmologický rudý posuv je dán expanzí prostoru[26].

Koeficient úměry mezi rychlostí a vzdáleností se nazývá Hubbleova konstanta, značíme ji H. Tato konstanta je neustále zpřesňována, její aktuální velikost je $H = 68\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$. Hubbleův zákon má tedy tvar

$$v = Hr, \tag{1}$$

kde v je rychlost expanze a r je vzdálenost. Tento vztah platí pouze statisticky a pro velmi vzdálené galaxie. U galaxií blízkých je rychlost rozpínání malá, převládají zde lokální vzájemné pohyby galaxií [1].

Asi nejpopulárnější ve fyzice je vztah $E = mc^2$ [1], který odvodil Albert Einstein v roce 1905. Podle této rovnice je celkové množství energie, obsažené v tělese, rovno hmotnosti tělesa, vynásobené druhou mocninou rychlosti světla. V praxi lze klidovou hmotnost (nesprávně "hmotu") převádět na „čistou“ energii s nízkou účinností v jaderných elektrárnách. Příkladem úplné přeměny je reakce hmoty s antihmotou [28].

Naopak tato rovnice říká, že každému druhu energie lokalizované v tělese nebo v poli přísluší i odpovídající hmotnost, projevující se setrvačnými a gravitačními vlastnostmi. Vzhledem k velikosti druhé mocniny rychlosti světla jsou však v běžných makroskopických poměrech změny hmotnosti, dané dodáním či odebráním energie, velmi malé. Část příkladu je čerpána z [25]

Úloha 10.1:

Určete čas, po který se náš vesmír rozpíná. Jinak řečeno určete čas, který uplynul od „Velkého třesku“ po současnost. Při výpočtu zanedbejte změnu rychlosti expanze v čase.

Řešení:

Pro výpočet musíme znát Hubbleův zákon (10.1) a velikost Hubbleovy konstanty musíme převést do jednotek SI. Při svých výpočtech použijeme hodnotu, která je uvedena na začátku této kapitoly.

Vzdálenost r v Hubbleově zákoně vyjádříme přibližně vztahem $r = vt$. V tomto hrubém přiblížení zanedbáváme změnu rychlosti v v průběhu expanze. Po dosazení do Hubblova zákona odhadneme dobu t, která uplynula od „Velkého třesku“:

$$t = \frac{1}{H} = 14{,}7 \text{ miliardy let.} \qquad (2)$$

■

Úloha 10.2:

Dokažte, že Hubbleův zákon nutně platí v případě, že je vesmír homogenní.

Řešení:

Předpokládejme, že body A, B a C leží na přímce a jsou stejně vzdálené. Tedy platí AB = BC:

+	+	+
A	B	C

Z homogenity vesmíru vyplývá stejná relativní rychlost mezi sousedními stejně vzdálenými body, $v_{\mathrm{BA}} = v_{\mathrm{CB}}$. Pro relativní rychlost v_{CA} mezi body dvojnásobně vzdálenými platí

$$v_{\mathrm{CA}} = v_{\mathrm{C}} - v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{C}} - v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{CB}} + v_{\mathrm{BA}} = 2\, v_{\mathrm{BA}}\,. \qquad (3)$$

Odtud vyplývá lineární vztah

$$v = Hr. \qquad (4)$$

■

Úloha 10.3:

Zářivý výkon Slunce je $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W. Vypočtěte, o jakou hodnotu se zmenší hmotnost Slunce za jeden den.

Řešení:

Zářivý výkon je množství energie, vyzářené tělesem za jednotku času,

$$L = \frac{\triangle E}{\triangle t}. \tag{5}$$

Pro úbytek energie za dobu $\triangle t$ dostáváme $\triangle E = L \triangle t$. Porovnáním s Einsteinovým vztahem $\triangle E = \triangle m\, c^2$ dostáváme vztah pro úbytek hmotnosti:

$$\triangle m = \frac{L \triangle t}{c^2}. \tag{6}$$

Za dobu $\triangle t$ dosadíme délku dne v sekundách, rychlost světla známe. Po dosazení dostáváme $\triangle m = 3{,}67 \cdot 10^{14}$ kg.

■

Úloha 10.4:

Zářivý výkon Slunce je $3{,}83 \cdot 10^{26}$W. V nitru Slunce probíhají termojaderné reakce, při nichž se jádra vodíku postupně přeměňují na jádra helia. Je známo, že hmotnost hélia je o 0,7% menší než hmotnost čtyř jader vodíku (tzv. hmotnostní úbytek). Vypočítejte, kolik kilogramů vodíku se ve Slunci přemění na helium za 1 sekundu.

Řešení:

Zářivý výkon L udává energii E, kterou hvězda vyzáří za čas t do prostoru:

$$L = \frac{E}{t} \Longrightarrow E = Lt. \tag{7}$$

Pro množství energie uvolněné při termojaderné reakci platí Einsteinův vztah

$$E = \Delta m\, c^2. \tag{8}$$

Porovnáním obou těchto vztahů dostáváme

$$\frac{\Delta m}{t} = \frac{L}{c^2}. \tag{9}$$

Po dosazení

$$\frac{\Delta m}{t} \doteq 4{,}26 \cdot 10^9 \text{ kg s}^{-1}. \tag{10}$$

Tato hodnota tvoří 0,7 % z celkové hmotnosti vodíku, který se přeměnil na hélium. Celkové množství spotřebovaného vodíku za sekundu je tak $6{,}08 \cdot 10^{11}$ kg s^{-1}.

■

Úloha 10.5:

Kolik procent hmoty Slunce ubude za dva tisíce let, pokud bude vyzařovat stejný výkon jako dnes? Celkový zářivý výkon Slunce je přibližně $L = 4{,}0 \cdot 10^{26}$ W.

Řešení:

Musíme nalézt poměr hmoty, která ubude. Tedy vyjdeme ze vzájemných poměrů úbytku hmoty a hmoty celkové. Zároveň aplikujeme Einsteinův vztah pro uvolněné množství energie $E = \Delta m c^2$. Tedy

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{\frac{\Delta E}{c^2}}{M} = \frac{\frac{L\Delta t}{c^2}}{M} = \frac{L\Delta t}{Mc^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-10}. \qquad (11)$$

Úbytek hmotnosti činí pouze 14 miliardtin procenta.

■

11. Čas, souřadnice

11.1. Čas T

11.1.1. Hvězdný čas θ

Hvězdný čas [2] je určen (hodinovým) úhlem jarního bodu γ. Jde o úhlovou veličinu, běžně měřenou v „časových“ jednotkách, v nichž je $360°$ ztotožněno s 24 hvězdnými hodinami, resp. s jedním hvězdným dnem. Jedna hvězdná sekunda je tak $86\,400.$ díl hvězdného dne přesně. Hvězdnou sekundu (úhlovou veličinu) bychom neměli ztotožňovat s jednotkou času, spojenou se Sluncem: $1\,\text{hvězdná sekunda} = 0{,}997269566\,\text{sekund}$ středního slunečního času.

Pravý hvězdný čas je hodinový úhel okamžitého jarního bodu. Střední hvězdný čas je hodinový úhel středního jarního bodu, který nepodléhá nutaci (periodickému kolísání zemské osy). Rozdíl mezi pravým a středním časem se nazývá rovnice ekvinokcií.

Mezi hvězdným časem θ, rektascenzí hvězdy α a jejím hodinovým úhlem, tyto pojmy budou blíže vysvětleny v kapitole 11.2, platí t platí vztah [2]:

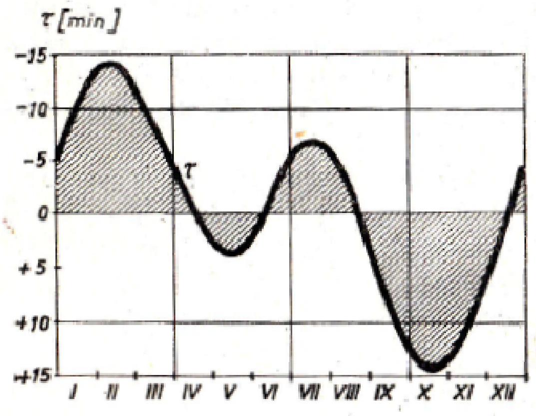
$$\theta = \alpha + t. \tag{1}$$

11.1.2. Místní sluneční časy T_{V}, T_{M}

Sluneční čas [2] je obecně určován polohou Slunce vzhledem k danému místu na Zemi.

Pravý sluneční čas (T_{V}) je dán hodinovým úhlem skutečného Slunce. Zdánlivý pohyb Slunce na obloze je nerovnoměrný, proto i pravý slunečný čas plyne nerovnoměrně.

Střední sluneční čas (T_{M}) je dán hodinovým úhlem myšleného Slunce, které se pohybuje rovnoměrně po světovém rovníku. Rozdíl mezi pravým a středním slunečním časem se nazývá časová rovnice, případně korekce. Je definována vztahem $\tau = T_{\mathrm{M}} - T_{\mathrm{V}}$. Následující graf znázorňuje časovou korekci v průběhu roku.



Obr. 17: Průběh časové rovnice τ

Převzato z [2]

11.1.3. Pásmový čas

Tento čas byl zaveden jako místní sluneční čas pro vhodně zvolený poledník v daném časovém pásu. Země byla pro tyto účely rozdělena do 24 pásem po 15° zeměpisné délky [2].

Světový čas (SČ) je čas nultého poledníku.

Středoevropský čas (SEČ) je čas na 15°poledníku východní délky. Je o hodinu napřed vzhledem k světovému času.

11.2. Souřadnice

Úhlové souřadnice určují polohu těles na sféře. V astronomii rozeznáváme několik druhů sférických souřadnic [2,18], lišících se volbou tzv. základních rovin, od kterých se měří úhly.

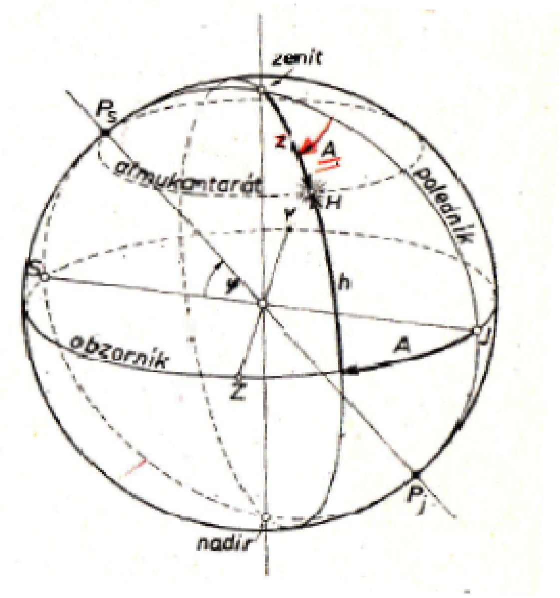
11.2.1. Obzorníkové (horizontální) A, h, z

Základní rovinou je rovina horizontu (kolmá na směr zemské tíže v daném místě) a rovina místního poledníku (meridiánu). Odpovídající souřadnice jsou azimut a výška hvězdy nad obzorem (případně zenitová vzdálenost, což je doplněk výšky do 90°).

Azimut A je úhel, který svírá svislá rovina procházející zenitem a tělesem na sféře s rovinou místního meridiánu. Počítá se od jižního bodu J ($A = 0°$), přes západ Z ($A = 90°$) a sever S ($A = 180°$) na východ V ($A = 270°$).

Výška hvězdy h udává úhlovou vzdálenost objektu od horizontu. Nabývá hodnot od 0° do 90° (zenit). Pro hvězdy pod obzorem je tato veličina záporná. Zenitová vzdálenost $z = 90° - h$ [2,28].

Zavedení úhlů je zřejmé z obrázku 18.



Obrázek 18: Obzorníkové souřadnice

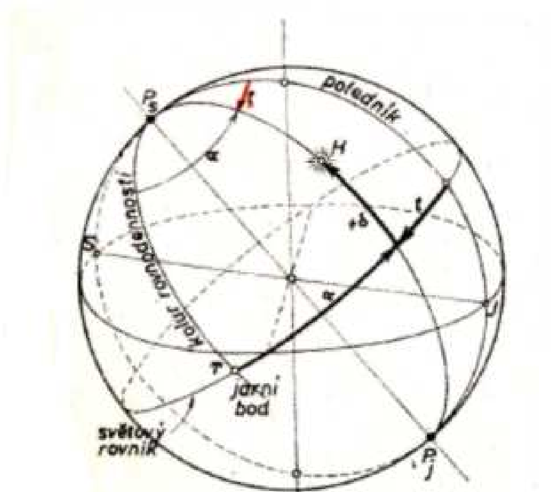
Převzato a upraveno z [2]

11.2.2. Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice 1. druhu t, δ

Základní roviny jsou světový poledník a místní meridián. Odpovídající úhlové souřadnice jsou hodinový úhel a deklinace.

Hodinový úhel t je úhel, který svírá rovina, procházející světovými póly (P_s, P_j) a tělesem (např. hvězdou), s rovinou místního meridiánu. Měří se ve směru denního pohybu oblohy a vyjadřuje se v časové míře nebo ve stupních. Platí $1^h = 15°$.

Deklinace δ je úhel, který měříme na deklinační kružnici (poledník procházející tělesem) od roviny světového rovníku k tělesu. Počítá se od $0°$ do $90°$. Na severní polokouli kladně, na jižní záporně [2].



Obrázek 19: Rovníkové souřadnice I. a II. druhu

Převzato a upraveno z [2]

11.2.3. Rovníkové (ekvatoriální) souřadnice 2. druhu α, δ

V tomto případě nahrazujeme hodinový úhel rektascenzí. Základní roviny jsou světový rovník a kolur rovnodennosti. Kolur rovnodennosti je deklinační kružnice, která prochází oběma póly a jarním (γ) bodem. Souřadnice nazýváme rektascenze a deklinace [28].

Rektascenze α je úhel, který svírá rovina procházející oběma světovými póly a tělesem s rovinou, procházející póly a jarním bodem. Měří se proti směru denního pohybu oblohy a vyjadřuje se v časové míře $\left(\text{od } 0^h \text{ do } 24^h\right)$, nebo ve stupních $(\text{od } 0^\circ \text{ do } 360^\circ)$. (Připomeňme, že se nejedná se o skutečný čas, ale o úhlovou proměnnou: $24^h = 360^\circ$).

Výpočet rovníkových souřadnic z obzorníkových [2]:

$$\sin t \cos \delta = \cos h \sin A, \tag{2}$$

$$\cos t \cos \delta = \cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cos h \cos A, \tag{3}$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos A. \tag{4}$$

Zde t je hodinový úhel objektu, $t = \theta - \alpha$, kde α je rektascenze objektu a θ je místní hvězdný čas. Symbol φ značí zeměpisnou šířku pozorovacího místa.

Výpočet obzorníkových souřadnic z rovníkových:

$$\sin A \cos h = \cos \delta \sin t, \tag{5}$$

$$\cos A \cos h = -\cos \varphi \sin\delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t, \tag{6}$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \ \cos t. \tag{7}$$

Tyto vztahy jsou inverzní ke vztahům předešlým.

Výpočet vzdáleností dvou hvězd ve sféře:

Výpočet úhlové vzdálenosti Δ dvou hvězd ve sféře, jejichž rovníkové souřadnice jsou α_1, δ_1 a α_2, δ_2, vypočteme ze vzorce:

$$\cos \Delta = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \ \cos \delta_2 \ \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{8}$$

Výpočet zenitové vzdálenosti:

Při horní kulminaci (hvězda v meridiánu) je zenitová vzdálenost $z_0 = \delta - \varphi$, jestliže hvězda kulminuje mezi zenitem a světovým pólem. Pokud vrcholí mezi zenitem a světovým rovníkem, platí vztah:

$$z_0 = \varphi - \delta. \tag{9}$$

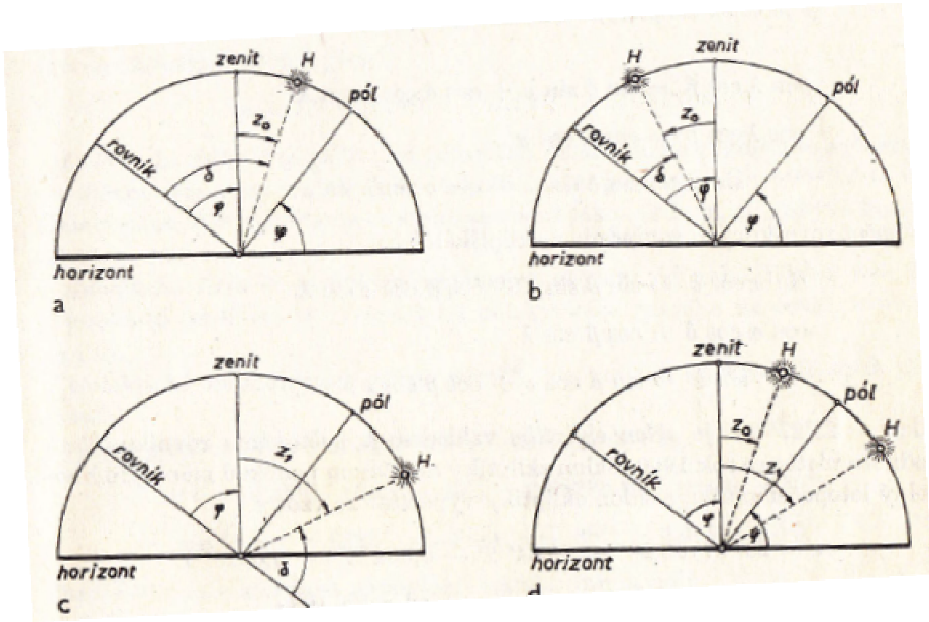
Pro dolní kulminaci (hvězda v poledníku protějším k meridiánu) je zenitová vzdálenost:

$$z_1 = 180° - (\varphi + \delta). \tag{10}$$

Pomocí zenitových vzdáleností téže hvězdy při horní a dolní kulminaci můžeme vypočítat zeměpisnou šířku φ pozorovacího místa ze vzorce:

$$\varphi = 90° - 1/2\ (z_0 + z_1). \tag{11}$$

Situaci ozřejmuje obrázek 20. Na obr. 20a vidíme hvězdu, která vrcholí mezi zenitem a světovým pólem. Na obr. 20b vrcholí hvězda mezi zenitem a světovým rovníkem. Obrázek 20c znázorňuje dolní kulminaci. Poslední obrázek 20d znázorňuje využití zenitové vzdálenosti stejné hvězdy při horní a dolní kulminaci pro výpočet zeměpisné šířky φ místa, z kterého pozorujeme hvězdu.



Obr. 20: Horní a dolní kulminace hvězdy

Převzato a upraveno z [2]

Úloha 11.2.1:

Určete hodinový úhel Aldebaranu dne 12. 10. 2000 ve 23 h 10 min v centru Prahy, které leží na $14^\circ 23'$ zeměpisné délky a $50^\circ 07'$ zeměpisné šířky. Rektascenze Aldebaranu je $4\text{h}\ 33\text{min}$, deklinace je 16°. Hvězdný čas Aldebaranu k půlnoci je pro daný den $12.10.2000\ 1\text{h}\ 2\text{min}$.

Řešení:

Nejprve určíme místní hvězdný čas. Pro převod úhlových jednotek užijeme 1° = 4 min (15° = 1 h), resp. 1' = 4 s (15′ = 1 min).

Výpočet místního hvězdného času

$$\theta_{\mathrm{M}} = \theta + \lambda + t_{\mathrm{m}} = 1\text{h}\ 2\text{min} + 0\text{h}\ 58\text{min} + 23\text{h}\ 10\text{min} = 25\text{h}\ 10\ \text{min}. \quad (12)$$

Výraz t_{m} značí místní čas, λ je časový posun daný zeměpisnou délkou místa oproti času V Greenwich, θ_{M} je hvězdný čas hvězdy. Pokud bychom chtěli počítat velmi přesně, převedli bychom nejdříve místní čas na úhel (1 úhlová minuta není totožná s 1 hodinou středního slunečního dne – $26\ \text{h}\ \ 56\ \text{min}.\ \ 4\ \text{s}$ časové odpovídá 24 hodinám úhlovým $360°$), a stejně tak by se výsledný hodinový úhel měl převést zpětně na čas sluneční. Jelikož jsou rozdíly malé, pro naši potřebu nám stačí výpočet uvedený výše.

Překročili jsme plný úhel. Proto od této hodnoty odečteme 24 h (=360°). Dospějeme k výsledku 1h 10min.

Dále určíme hodinový úhel hvězdy:

$$t = \theta_{\mathrm{M}} - \alpha = 20\mathrm{h}37\,\mathrm{min}. \tag{13}$$

Podle tohoto výsledku bude Aldebaran kulminovat za 3h 23min (kulminace nastává pro nulový hodinový úhel).

■

Úloha 11.2.2:

Určete výšku h a azimut A hvězdy pro místo se zeměpisnou šířkou φ=$59^\circ 56' 30''$ v $16\,\mathrm{hod}\,24\,\mathrm{min}\,33\,\mathrm{s}$ hvězdného času. Rektascenze hvězdy je $\alpha = 14\,\mathrm{h}\,01\,\mathrm{min}\,57\,\mathrm{s}$ a deklinace $\delta = +64^\circ 48' 08''$.

Řešení:

Vypočteme hodinový úhel $t = \theta_{\mathrm{M}} - \alpha = 2\mathrm{h}\,22\,\mathrm{min}\,36\,\mathrm{s}$. Ten nejdříve převedeme na stupně, $t = 35^\circ 39' 00''$. Ze vztahu (11.7)

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{14}$$

vypočteme výšku hvězdy $h = \ 73^\circ 01' 36''$.

Azimut vypočteme ze vzorce (11.5)

$$\sin \mathrm{A} = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h} \Longrightarrow A' = 58^\circ 12' 30''\ ? \tag{15}$$

Tato hodnota není jednoznačná, neboť azimut daný pouze funkcí sinus může ležet ještě ve druhém kvadrantu. Proto azimut určíme ještě z rovnice (11.6):

$$\cos A = \frac{-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\ \delta \cos t}{\cos h}. \tag{16}$$

Po dosazení zjistíme, že $\cos A$ je záporný. Jelikož $\sin \mathrm{A}$ je kladný, leží azimut ve druhém kvadrantu. Po této korekci $A = 180^\circ - A' = 121^\circ 47' 30''$.

■

Úloha 11.2.4:

Porovnejte úhlovou vzdálenost dvou bodů, určených svými úhlovými souřadnicemi α a δ, počítanou (nesprávně) z Pythagorovy věty, se vzdáleností, počítanou správně ze vztahu pro sférické souřadnice [28].

Řešení:

Vzorec pro vzdálenost dvou objektů v rovině je zcela odlišný od vzorce pro (úhlovou) vzdálenost na kulové ploše. Předpokládejme pro konkrétnost rovníkové souřadnice hvězdy A: $\alpha_1 = 10$ h, $\delta_1 = 70°$, a hvězdy B: $\alpha_2 = 11$ h, $\delta_2 = 80°$.

Použitím Pythagorovy věty pro rovinný případ bychom obdrželi výsledek

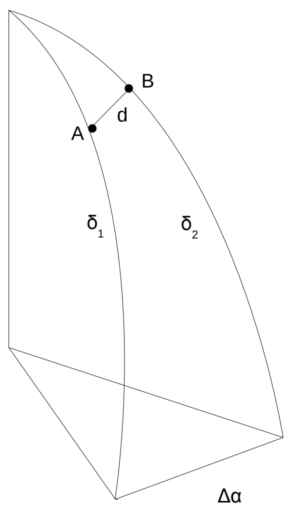
$$\varDelta = \sqrt{(15°)^2 + (10°)^2} = 18°.$$

Pokud ale použijeme vztah (11.8), dospějeme k výsledku

$$\cos\varDelta = \cos(\propto_1 - \propto_2) \cdot \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2 + \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 = 0{,}983. \qquad (17)$$

V tomto případě je výsledek $\varDelta = 10{,}6°$. Z obrázku 22 je patrno, proč tomu tak je. Pro objekty, posunující se k pólům, se vzdálenost zmenšuje, ačkoli je rozdíl úhlů α a δ konstantní.

■



Obr. 21: Vzdálenost dvou bodů na sféře

12. Neutronová hvězda, černá díra

Neutronová hvězda

Neutronová hvězda je pozůstatek některých hmotných hvězd, je to konečná fáze života supernov. Tyto hvězdy se podstatným způsobem liší od hvězd typu našeho Slunce [13]. Slunce ukončí svoji existenci jako bílý trpaslík, v kterém gravitaci drží degenerovaný elektronový plyn. Hmotnější hvězdy mohou skončit jako neutronové hvězdy, u nich gravitaci drží degenerovaný neutronový plyn. U neutronové hvězdy jsou elektrony vmáčknuty do jader atomů, následně se protony v jádře mění na neutrony při současném vyzáření neutrin, přičemž dochází ke vzniku neutrového degenerovaného plynu. Dochází k tzv. neutronizaci. Neutronová hvězda se tedy skládá z neutronů a gravitace je kompenzována tlakem, který má původ v Pauliho vylučovacím principu. Zjednodušeně by se dalo říci, že z kvantové mechaniky vyplývá „nechuť" částic jako jsou neutrony (obecněji fermiony) sdílet stejný stav, a to se projevuje jako tlak, bránící dalšímu smršťování.

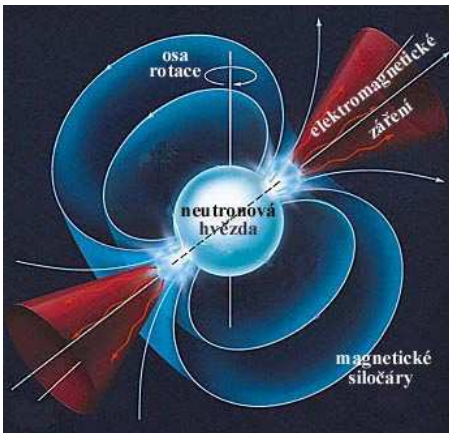
Jejich hmotnost se pohybuje od 1,5 do 3 až 5 hmotnosti Slunce [29]. Teoretická horní mez se nazývá Tolman-Oppenheimer-Volkoffova. Po překročení této meze se těleso zhroutí do černé díry, případně změní skupenství a přemění se v kvarkovou hvězdu. Jelikož je v okolí těchto hvězd silné gravitační pole, přitahuje toto těleso další objekty. Při srážkách dochází k uvolnění velkého množství energieve formě gama záření.

Pro existenci neutronových hvězd je velmi důležitý Schwarzschildův poloměr [30]. Je-li do koule o Schwarzschildově poloměru nebo menším vtlačena veškerá hmota objektu, pak žádná známá síla nedokáže odvrátit zhroucení tohoto objektu do gravitační singularity. Tedy do teoretického, myšleného bodu v centru černé díry, kde by gravitační pole a další fyzikální veličiny měly nabývat nekonečných hodnot. Je nutno dodat, že dosud chybí přesná teorie, která by dění v černé díře přesně vysvětlovala. Byť je naše poznání na jisté kvalitativní úrovni, s mnoha záhadami vesmíru, nejen jeho, si poradit nedokáže.

Schwarzschildův poloměr r_s objektu je přímo úměrný jeho hmotnosti m. Je dán vzorcem :

$$r_\mathrm{s} = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{1}$$

Hodnota G v tomto vzorci je nám dobře známá gravitační konstanta, c je rychlost světla. Při bližším pohledu zjistíme, že vzorec nápadně připomíná vztah pro únikovou rychlost. Tato podobnost jespíše dílem náhody. Sám Schwarzschild odvozoval tento vztah na základě přesného řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole vně nerotujícího sféricky symetrického tělesa. Pokud do tohoto vzorce dosadíme číselné hodnoty konstant, obdržíme jednodušší vztah ve tvaru $r_s = m \cdot 1{,}48 \cdot 10^{-27}$, kde r_s je je uváděno v metrech a m v kilogramech [20].



Obr.22: Neutronová hvězda

Převzato z [31]

Černá díra

Černá díra [13,32] je objekt tak hmotný, že jeho gravitační pole je tak silné, že přitahuje vše, včetně světla a to tak, že již nemohou z černé díry uniknout. Existenci černé díry teoreticky předpověděl Albert Einstein v roce 1915 v rámci své obecné teorie relativity.

Jako jisté vodítko k důkazu o existenci černé díry, můžeme považovat výskyt záření gama a rentgenového záření, není však stoprocentně jisté, zda jde o černou díru. Gama a rentgenové záření je vlastní i neutronovým hvězdám či bílým trpaslíkům. Pokud však pozorujeme spektrum daného objektu v dlouhodobém horizontu, můžeme učinit jisté závěry. Pokud je spektrum nepravidelné a vyskytují se v něm záblesky, o černou díru se nejedná. Nepravidelnost je dána dopadem částic na povrch, doprovázeným uvolněním energie. Tato skutečnost byla popsána v předešlém oddílu, věnováném neutronovým hvězdám. Pokud je spektrum pravidelné, může se jednat o černou díru, neboť ta pevný povrch nemá, nemůže tedy docházet k nárazu částic.

Jako rozhodující faktor pro potvrzení toho, že je objekt černou dírou, se jeví výskyt akrečních disků. Emise rentgenového a gama záření z těchto disků vzniká tak, že materiál během spirálovitého pohybu směrem ke gravitačnímu centru ztrácí gravitační potenciální energii a část z této potenciální energie se přemění vzájemným třením materiálu na teplo. Tím se akreční disk zahřívá. Při dosažení teploty několika miliónů kelvinů emituje materi8l rentgenové a gama záření.

Jako další projev existence černých děr je nutno uvést takzvané gravitační čočky [33]. Jak již bylo zmíněno, černé díry jsou tak hmotné, že výrazně přitahují i světlo. Pokud tedy zjistíme, že světlo se v určitém místě ohýbá, na základě tohoto poznatku můžeme konstatovat, že někde mezi objektem a pozorovatelem se vyskytuje velmi hmotné těleso, např. černá díra.

Pokud objevíme v oblasti předpokládaného výskytu černé díry tělesa, které jí obíhají, můžeme aplikovat Keplerovy zákony a na základě zjištěné hmotnosti a periody oběhu určit, zda je objekt černá díra či ne.

Úloha 12.1:

Určete Schwarzschildův poloměr pro Zemi a Slunce. Potřebné parametry naleznete v tabulkách.

Řešení:

Pro výpočet použijeme vztah (1), případně vztah, do kterého jsme již dosadili fundamentální konstanty, $r_S = m \cdot 1{,}48 \cdot 10^{-27}$. Po dosazení za hmotnosti obdržíme

$$r_{\mathrm{Z}} = 8{,}88 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\,;\ r_{\mathrm{S}} = 2{,}94 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m}\,.$$

Schwarzschildův poloměr pro Zemi je tedy necelý centimetr, pro Slunce necelé 3 km.

■

Úloha 12.2:

Určete hraniční poloměr hvězdy, která má hmotnost $1{,}70\,M_{\mathrm{s}}$ a rotuje s periodou $2{,}10$ ms. Zjistěte, zda je možné, aby tato hvězda byla hvězdou neutronovou. Potřebné údaje naleznete v tabulkách.

Řešení:

Pomineme rovnice obecné a speciální teorie relativity a vyjdeme z klasické rovnice, vyjadřující, že odstředivá síla, která působí na danou látku o hmotnosti m na povrchu hvězdy, nesmí být větší než síla gravitační, aby nedošlo k odvržení této hmoty do okolí.

Pro hraniční poloměr platí tedy

$$mr\omega^2 = G\frac{mM}{r^2}\ ;\ \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Odtud

$$r = \sqrt[3]{G\frac{MT^2}{4\pi^2}} \approx 6{,}30\ \mathrm{km}\,. \tag{3}$$

Dále musíme vypočítat Schwarzschildův poloměr dle vztahu (1). Po dosazení hodnot, které nalezneme v tabulkách, obdržíme výsledek

$$r_s = 5{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{m}.$$

Jelikož je hodnota r vyšší než Schwarzschildův poloměr, jde o hvězdu neutronovou.

■

Úloha 12.3:

Určete hustotu černé díry, jak se jeví pro vnějšího pozorovatele.

Řešení:

Vyjdeme ze vzorce pro výpočet hustoty:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi r_g^3}{3}} = \frac{3M}{4\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3}\,\frac{1}{M^2}. \tag{4}$$

Zdánlivá hustota černých děr rychle klesá s hmotností a může tak paradoxně dosahovat velmi nízkých hodnot [20].

■

Úloha 12.4:

Vypočítejte velikost maximálního úhlového momentu hybnosti černé díry o hmotnosti 1,40 M_S.

Řešení:

Pro černou díru je velikost úhlového momentu hybnosti [34]

$$L_\mathrm{max} = \frac{GM^2}{c}\,. \tag{5}$$

Po dosazení obdržíme výsledek $L_\mathrm{max} = 1{,}72 \cdot 10^{42}\ \mathrm{m^2\ kg\ s^{-1}s}$.

■

13. Závěr

Jak jsem již zmínil v úvodu, účelem mojí práce bylo vytvoření podpůrného studijního textu k předmětu astronomie, který se vyučuje na pedagogických fakultách v rámci oboru Fyzika.

Jelikož je celková úroveň znalostí, se kterými dnes vycházejí žáci ~~z~~e středních škol, všeobecně nízká a navíc i rozdílná, jsou vybrané úlohy relativně jednoduché, bez větších nároků na matematický aparát. Jen minimum příkladů je převzatých včetně postupu řešení. Většinu příkladů, které zde předkládám, jsem buď samostatně počítal na základě zadání, bez udaného autorského postupu řešení, nebo jsem jejich autorem.

Ve výběru úloh je největší důraz kladen na pohyby v radiálním gravitačním poli, především na tři Keplerovy zákony. Keplerovy zákony jsou stěžejní pro pochopení pohybů ve sluneční soustavě, navíc jsou stálou součástí středoškolského učiva fyziky. Příklady od kapitoly 5 jsou poněkud náročnější a studenti se v nich setkají se skutečnostmi, které by je mohli zajímat: Stáří vesmíru, teplota na povrchu Slunce apod.

Jsem přesvědčen, že zadání práce se mi podařilo naplnit, tedy vytvořit podpůrný studijní text pro obor fyzika – astronomie, a podnítit zájem studentů o tento obor. Jistý nedostatek lze spatřit v menším počtu úloh k některým tématům. Tato skutečnost je však dána tím, že moje práce je zaměřena hlavně na nebeskou mechaniku, protože je jednodušší a matematicky méně náročná než ostatní oblasti astronomie. Navíc je limitován celkový rozsah práce.

Pokud by měl někdo na moji práci navázat, bylo by asi vhodné, aby se věnoval i oblastem, které jsou na poli astronomie poměrně mladé. Mám například na mysli moderní metody měření vzdáleností ve vesmíru a s tím související poznatky o rozpínání vesmíru a temné energii.

Byl bych velice rád, kdyby tato práce svým dílem přispěla u studentů k oživení zájmu o astronomii.

14. Příloha

TABULKY ZÁKLADNÍCH KONSTANT	
GRAVITAČNÍ KONSTANTA	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
RYCHLOST SVĚTLA	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
PLANCKOVA KONSTANTA	$h = 1.05 \cdot 10^{-34}$ J s
STEFAN – BOLZMANNOVA KONSTANTA	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
WIENOVA KONSTANTA	$b = 0{,}00289$ K m
HUBBLEOVA KONSTATNTA	$H = 68$ km s^{-1} Mpc^{-1}
SOLÁRNÍ KONSTANTA	$I = 1.39$ kW m^{-2}

Tab. 1

JEDNOTKY VZDÁLENOSTÍ	
ASTROMICKÁ JEDNOTKA	1 au $= 150 \cdot 10^{6}$ km
SVĚTELNÝ ROK	1 ly $= 9{,}47 \cdot 10^{12}$ km
PARSEK	1 pc $= 30{,}9 \cdot 10^{12}$ km

Tab. 2

HODNOTY VELIČIN	
VZDÁLENOST ZEMĚ - SLUNCE	$R_{\mathrm{ZS}} = 150 \cdot 10^{6}$ km
VZDÁLENOST ZEMĚ - MĚSÍC	$R_{\mathrm{ZM}} = 384 \cdot 10^{3}$ km
CELKOVÝ ZÁŘIVÝ VÝKON SLUNCE	$P_{\mathrm{S}} = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W
RYCHLOST ZEMĚ KOLEM SLUNCE	$v = 29{,}8$ km s^{-1}
ZÁŘIVÝ VÝKON SLUNCE	$L_{\mathrm{S}} = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ W·
HODNOTA PRECESE ZEMSKÉ OSY	$P = 50{,}37''$ /rok
TÍHOVÉ ZRYCHLENÍ NA ZEMI	$g = 9{,}81$ m s^{-2}
PRVNÍ KOSMICKÁ RYCHLOST	$v_k = 7{,}9$ km s^{-2}
DRUHÁ KOSMICKÁ RYCHLOST	$v_p = 11{,}2$ km s^{-2}
TŘETÍ KOSMICKÁ RYCHLOST	$v = 16{,}7\ km\ s^{-2}$

Tab. 3

KOSMICKÁ TĚLESA - PARAMETRY						
	a	m	r	T	ρ	v_k
	au	M_Z	km	r	Kg/m^3	km/s
SLUNCE	-	$1.99\ 10^{30}$ kg	$6.96\ 10^{5}$ km	-	1 409	440.000
MĚSÍC	$3.84\ 10^{8}$ m	$7.35\ 10^{22}$ kg	$1.74\ 10^{6}$ m	27.322 d	3 340	1.680
MERKUR	0.3871	0.055	2440	0.241	5 400	3.010
VENUŠE	0.7233	0.815	6050	0.615	5 248	7.330
MARS	1.5237	0.107	3402	1.881	3 940	3.560
JUPITER	5.2026	317.892	71500	11.862	1 330	42.110
SATURN	9.5602	95.168	60250	29.458	690	25.100
URAN	19.2854	14.559	25500	84.013	1 600	15.600
NEPTUN	30.2653	17.239	24800	167.794	1 580	16.620
PLUTO	39.482	0.0021	1150	284.43	2 030	1.200
ZEMĚ	1	$6\ 10^{24}$ kg	6378	1	5 520	7.905

Tab. 4

15. Seznam použité literatury

[1] Macháček, M.: *Astrofyzika pro gymnázia*. Praha: Prometheus 2004

[2] Široký, J., Široká, M.: *Základy astronomie v příkladech*. Praha: SPN 1966

[3] Svoboda, E.:*Přehled středoškolské fyziky*. Praha: Prometheus 2008g

[4] Bajer, J.:*Mechanika 2*. Olomouc Nakladatelství RNDr. Vladimír Chlup 2008

[5] Volf, I.: *Škola mladých fyziků*. Praha: SPN 1985

[6] Volf, I.: *Pohyb umělých družic*. Praha: SPN 1984

[7] https://www.google.cz/search?q=zem%C4%9B+a+mesic&espv=2&biw=1245&bih=597&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIxqma-Y2pyAIVw1wsCh0kqgK8 [cit. 10.09.2015]

[8] https://www.google.cz/search?q=zem%C4%9B+a+slunce&espv=2&biw=1245&bih=597&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMI3sLh446pyAIVQZYsCh11xQgm [cit. 10.09.2015]

[9] https://www.google.cz/search?q=uran&espv=2&biw=1245&bih=597&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMI6tDvsZCpyAIVAVssCh0c5woR[cit. 10.09.2015]

[10] https://www.google.cz/search?q=pohyby+dru%C5%BEic+okolo+zem%C4%9B&espv=2&biw=1213&bih=614&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMI25C3-YSuyAIVSdgsCh1f0Az_ [cit. 10.09.2015]

[11] https://www.google.cz/search?q=mars&espv=2&biw=1213&bih=614&site=webhp&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIs4_Lo4WuyAIVhAgsCh3XWQ0M#tbm=isch&q=mars+phobos+and+deimos [cit. 10.09.2015]

[12] https://www.google.cz/search?q=halleyova+kometa&espv=2&biw=1213&bih=614&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIoPr43YWuyAIVxpAsCh0yLgcM&dpr=1.1 [cit. 10.09.2015]

[13] Vanýsek, V.: *Základy astronomie a astrofyziky*. Praha: Academia 1980

[14] https://www.google.cz/search?q=pluto&espv=2&biw=1227&bih=554&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiA87m8g97JAhWMXCwKHeynBfwQ_AUIBigB&dpr=1.1#imgrc=[cit. 10.09.2015]

[15] https://www.google.cz/search?q=venu%C5%A1e&espv=2&biw=1224&bih=559&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIrqORhcTHyAIVQYosCh0ijQRU&dpr=1.1#imgrc=VvvMo3h6FUf2ZM%3A [cit. 10.09.2015]

[16] Anderle, P.: *Základy nebeské mechaniky*. Praha: Akademia 1971

[17] Volf, I.: *Fyzika je kolem nás*. Hradec Králové: MAFY 2009

[18] Hlaváč, Z.: *Základy sférické astronomie a nebeské mechaniky*. Plzeň: Západočeská univerzita 2000

[19] https://cs.wikipedia.org/wiki/Precese_zemsk%C3%A9_osy [cit. 10.07.2015]

[20] http://www.aldebaran.cz/studium/astrofyzika.pdf [cit. 10.07.2015]

[21] https://cs.wikipedia.org/wiki/Doppler%C5%AFv_jev [cit. 11.07.2015]

22] https://cs.wikipedia.org/wiki/Wien%C5%AFv_posunovac%C3%AD_z%C3 A1kon [cit. 11.07.2015]

[23] http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/538-zareni-absolutne-cerneho-telesa [cit. 11.07.2015]

[24] https://cs.wikipedia.org/wiki/Stefan%C5%AFv-Boltzmann%C5%AFv_z%C3%A1kon[cit. 11.07.2015]

[25] http://www.sbirkaprikladu.cz/sbirka_prikladu/astrofyzika/12.html?ida=12&pp=astrofyzi ka&cp=8&stupen=s&stranka=0 [cit. 11.07.2015]

[26] https://cs.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble [cit. 11.07.2015]

[27] https://cs.wikipedia.org/wiki/E%3Dmc%C2%B2 [cit. 11.07.2015]

[28] Karttunen H. a kol.: *Fundamental Astronomy*. Springer 2007

[29] https://cs.wikipedia.org/wiki/Neutronov%C3%A1_hv%C4%9Bzda [cit. 2.10.2015]

[30] https://cs.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild%C5%AFv_polom%C4%9Br [cit. 2.10.2015]

[31] https://www.google.cz/search?q=neutronov%C3%A1+hv%C4%9Bzda&espv=2&biw=1215&bih=575&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMIpMf1l7amyAIVgb8sCh3sTQgT [cit. 2.10.2015]

[32] http://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cern%C3%A1_d%C3%ADra [cit. 2.10.2015

[33] http://hvezdy.astro.cz/dira/37-pozorovani-cernych-der [cit. 2.10.2015]

[34] Štefl, V. Krtička, J. : *Úlohy z astrofyziky*. Brno: Masarykova univerzita 2000