Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

Užití nových technologií při výuce matematiky na základních a středních školách

Vypracoval: Bc. Roman Bumbálek

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Užití nových technologií při výuce matematiky na základních a středních školách jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 21. 6. 2016 …………………………….

Roman Bumbálek

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu své diplomové práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za jeho cenné rady, odborné vedení a velice ochotnou spolupráci. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu během studia.

Anotace

S moderními informačními technologiemi se setkáváme každý den. Slouží k pomoci v práci, k zábavě, ale mají také velký potenciál pro využití ve vzdělávání. Tato práce se zabývá jejich vhodnou aplikací do výuky matematiky, na tematiku goniometrických funkcí. Cílem je vytvořit konstrukce, které by potenciál moderních technologií co nejlépe využily. Pro řešení problematiky byl vybrán program GeoGebra pro možnost tvorby dynamických konstrukcí a pro další nesporné výhody, zmíněné dále v práci. K vytvořeným konstrukcím jsou přidány podrobné návody, jak je lze sestrojit. Práce je také doplněna řešenými úlohami a pracovními listy, zaměřenými na aplikaci goniometrických funkcí do reálných situací.

Annotation

Modern information technologies accompany all of us in our daily life. They not only use to serve to our work and for the entertainment, they even have got a great potential to be used in the education. The submitted thesis deals with the appropriate utilization of the special IT application in the pedagogic process, especially in teaching of maths, the topic of trigonometric functions. The aim of this thesis is to create structures with a high potential of the modern technology handling. To tackle this task the graphical program GeoGebra was chosen due to its qualities for creating dynamic structures and the other advantages presented further in the thesis. To the created constructions the detailed instructions how they can be constructed are added. The thesis is also accompanied by worksheets with solved tasks, focusing on the application of trigonometric functions in real situations.

Obsah

1 Úvod

Pojem nové technologie je reprezentován informačními technologiemi, které v 21. století zažívají velký rozmach. Mezi ně se již neřadí pouze osobní počítače, ale také tablety a chytré telefony, jenž je mnohdy mohou zcela nahradit. V pracovním i osobním životě je využívá téměř celá populace západní civilizace, a proto je vhodné začít informační technologie využívat i ve vzdělávání. Avšak způsob jejich použití při výuce musí být promyšlený. V matematice může mít přínos tvorba dynamických konstrukcí a jejich aplikace na vybraná témata. Aby bylo využito co nejvíce potenciálu, který tyto technologie nabízí, je také třeba přizpůsobit výklad učiva, dát žákům čas na práci s konstrukcemi a prostor k vyvozování vlastních poznatků, které z nich mohou vyplývat.

Tato práce je zaměřena na tvorbu a využití dynamických konstrukcí v učivu goniometrických funkcí. Pro zpracování konstrukcí jsem vybral dynamický matematický software GeoGebra z několika důvodů. Základním důvodem výběru je jednoduché a přehledné pracovní prostředí programu, ve kterém zvládnou sestrojit dynamické konstrukci i žáci. GeoGebra je multiplatformní, open source aplikace. Možnost jejího využití nejen na PC, ale také na tabletech a chytrých mobilních telefonech, a bezplatná dostupnost jsou dalšími nespornými výhodami. Žáci tedy nejsou vázáni pouze na školní počítačové učebny, ale mohou využívat aplikaci takřka kdekoli.

Hlavní náplní práce je vyhotovení vhodných dynamických konstrukcí, které názorně demonstrují odvození goniometrických funkcí, jejich vlastnosti. Konstrukce jsou doplněny o podrobné návody, podle kterých by je měla zvládnout sestavit i osoba, jenž se s GeoGebrou dosud nesetkala. Poté následuje výklad na konstrukce navazujícího učiva. Tematický celek goniometrických funkcí je v práci rozdělen na čtyři části. Na konec každé části jsou přidány řešené příklady.

První část se zabývá funkcemi sinus a kosinus pro ostrý úhel. Nejprve je pomocí dynamických konstrukcí vysvětlen vztah stran v trojúhelníku, ze kterého odvození předpisu těchto funkcí pro ostrý úhel vyplývá. Následují konstrukce představující změnu velikosti hodnot funkcí a jejich základní vlastnosti. Další konstrukce znázorňuje převedení velikosti úhlu na osu x. Tato konstrukce se pomocí kružnice o poloměru 1, valící se po ose x, snaží vysvětlit jakým způsobem a proč lze velikost úhlu na tuto osu převést. Na základní škole se neuvádí oblouková míra, proto lze konstrukci považovat za její předstupeň, díky kterému by mohli žáci později obloukovou míru snáze pochopit. Posledními konstrukcemi v první části jsou dynamické grafy funkcí pro ostrý úhel. Závěr tvoří řešené příklady, ve kterých si žáci procvičí určování předpisu daných goniometrických funkcí, hodnot pro vybrané úhly a vyřeší několik slovních úloh využívajících danou tematiku v reálných situacích.

Druhá část je zaměřená na učivo goniometrických funkcí pro střední školy. Zabývá se rozšířením funkcí sinus a kosinus pro libovolně velký úhel. Na začátku je vysvětlen význam obloukové míry a jednotkové kružnice. Na to navazují dynamické konstrukce grafů funkcí a uvedení vlastností funkcí, které jsou z předchozích konstrukcí patrné. Kapitolu uzavírají dynamické konstrukce vlivu parametrů na funkce, ve kterých mohou žáci pozorovat, jak jednotlivé parametry funkcí ovlivňují jejich grafy. Poslední věcí v druhé části jsou opět řešené příklady zabývající se převodem velikosti úhlů ve stupních na radiány, určením hodnoty funkcí v úhlech daných velikostí a konstrukcí grafů funkcí.

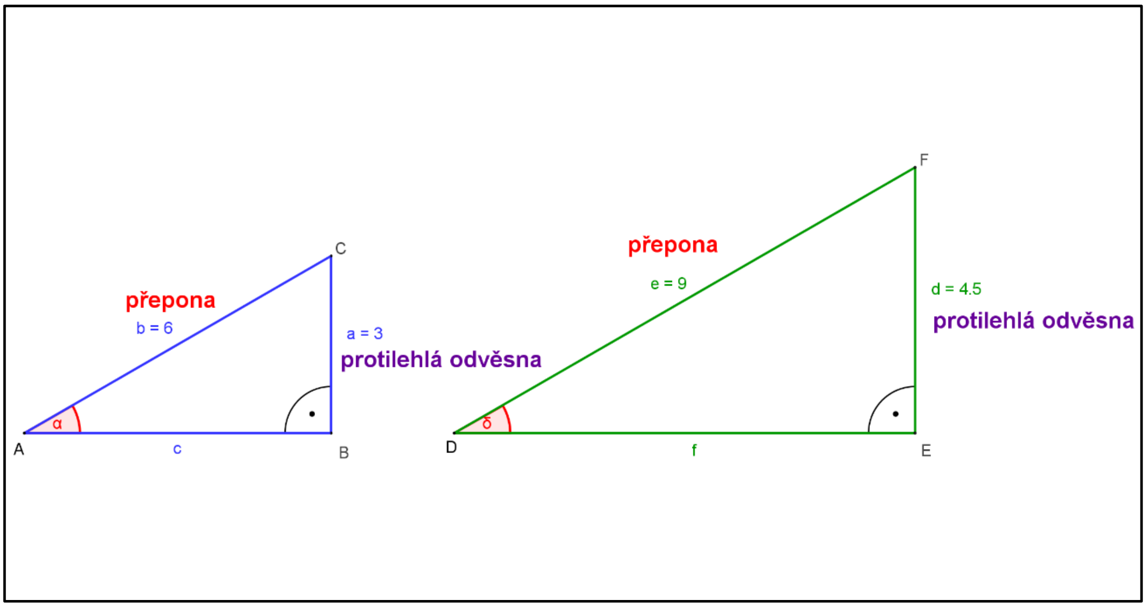
Třetí a čtvrtá část jsou zaměřeny na funkce tangens a kotangens. Jejich struktura je téměř totožná se strukturou předchozích částí.

Přílohu práce tvoří pracovní listy zaměřené na tematiku goniometrických funkcí a dynamické konstrukce popisované v práci. V pracovních listech si žáci procvičí aplikaci goniometrických funkcí do reálných situací pomocí slovních úloh. U jednodušších úloh žáci načrtnou i nákres dané situace. V úlohách, které mohou být náročnější na představivost, je nákres součástí zadání. Za každým pracovním listem následuje list se správným řešením.

2 Funkce sinus a kosinus pro ostrý úhel

K zavedení funkcí sinus a kosinus pro ostrý úhel můžeme využít podobnosti trojúhelníků. Pokud mají dva pravoúhlé trojúhelníky další shodný úhel, víme, že jsou shodné podle věty UU. Když známe délku jejich stran, tak dokážeme určit koeficient podobnosti. Zároveň by také měli mít dvě strany z jednoho trojúhelníku stejný poměr jako dvě jim odpovídající strany z druhého trojúhelníku. Jelikož u trojúhelníku ABC známe úhel α u vrcholu A a strany a, b, u trojúhelníku DEF úhel δ u vrcholu D a strany d, e, tak bychom se měli zaměřit na poměr mezi těmito stranami. Dělit budeme protilehlou stranu, kterou nazveme protilehlou odvěsnou, nejdelší stranou v trojúhelníku, kterou nazveme přeponou. Z Obr. 1 vidíme, že platí:

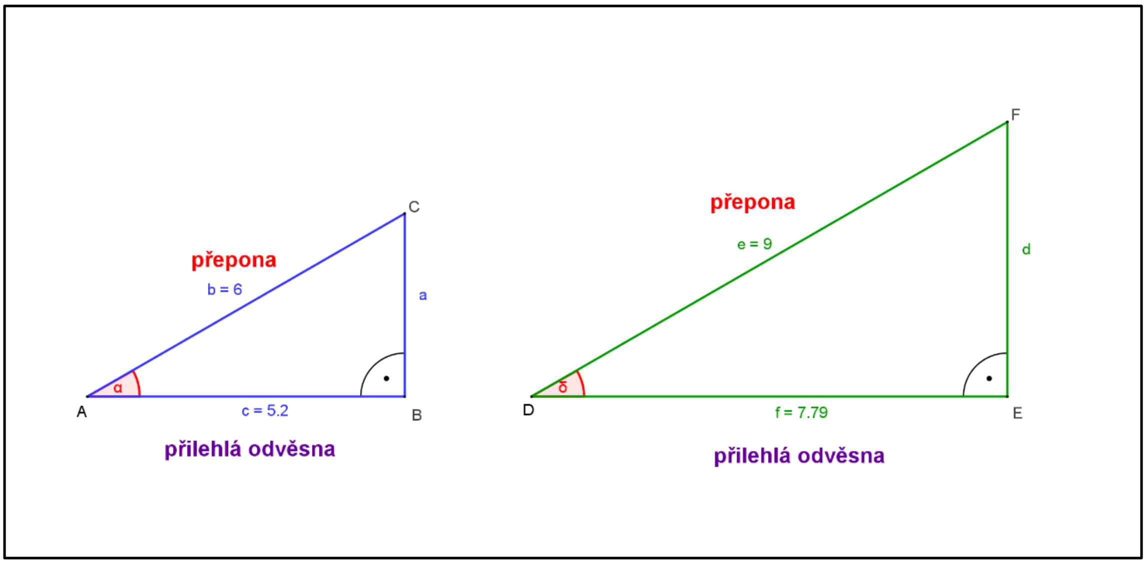
$$\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e} = 0{,}5$$



Obr. 1: Protilehlé strany a odvěsny v podobných pravoúhlých trojúhelnících

Pokud u trojúhelníku ABC neznáme velikost protilehlé odvěsny a, ale velikost strany c, a u trojúhelníku DEF známe místo velikosti protilehlé odvěsny d velikost strany f, tak se zaměříme na poměr stran b, c a na podíl stran e, f. Strany c, f, které s přeponou svírají dané úhly, nazveme přilehlé odvěsny. Z obr. 2 vyplývá, že platí:

$$\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} \rightarrow \frac{c}{b} = \frac{e}{f} \doteq 0{,}87$$

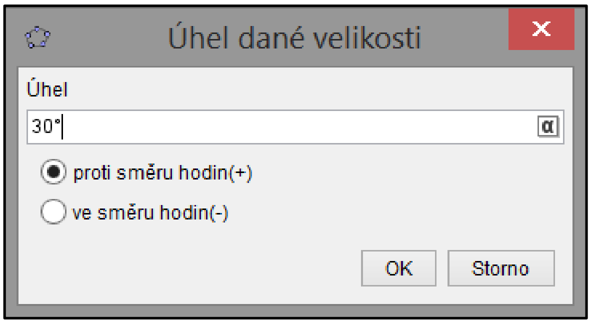


Obr. 2: Přilehlé strany a odvěsny v podobných pravoúhlých trojúhelnících

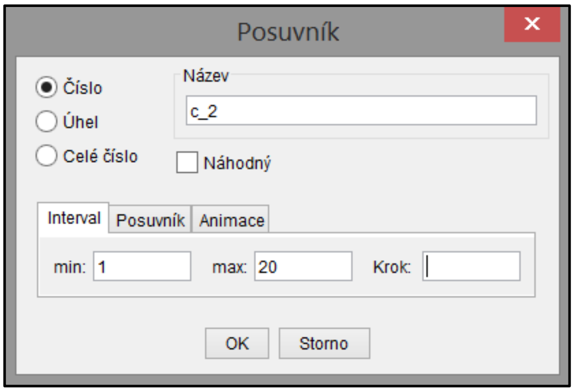
2.1 Dynamická konstrukce poměru protilehlé odvěsny úhlu a přepony

Nejprve si ve spodní části nákresny vytvoříme bod a pojmenujeme ho A. Objekty přejmenujeme tak, že na ně klikneme pravým tlačítkem myši a vybereme možnost *Přejmenovat*. Poté tímto bodem povedeme přímku, která by pro lepší přehlednost měla být rovnoběžná se souřadnicovou osou x. Tuto přímku vytvoříme pomocí nástroje *Rovnoběžka* tak, že klikneme kurzorem na osu x a poté na bod A. Vzniklou přímku pojmenujeme a_1 (napíšeme a_1, jelikož podtržítko před číslem udělá z čísla za ním dolní index) a na ní naneseme pomocný bod, který si nazveme P_1, tak, že bude napravo od bodu A. Nyní vytvoříme úhel α o velikosti 30° pomocí nástroje *Úhel dané velikosti*. Poté co si tento nástroj vybereme, klikneme na pomocný bod, poté na bod A a vyskočí okénko, do kterého vyplníme velikost úhlu. Možnost „proti směru hodin" necháme zvolenou a klikneme na tlačítko *OK* (Obr. 3). S vytvořeným úhlem vznikl další bod, který nazveme P_2. Body P_1, A, P_2 vymezují úhel α, platí $|\sphericalangle P_1AP_2| = \alpha$. Dále sestrojíme přímku c_1, která bude procházet body A a P_2. V dalším kroku vybereme nástroj *Posuvník*, klikneme kurzorem do nákresny, otevře se nám okno s nastavením posuvníku, za název posuvníku zvolíme c_2, interval dáme od 1 do 20, krokování po 0,1, klikneme na *OK* a tím se posuvník vytvoří (Obr. 4). Nyní zvolíme nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem*, klikneme na bod A, protože v tomto bodě potřebujeme mít střed kružnice, a za poloměr zvolíme posuvník c_2 (do pole *Poloměr* napíšeme pouze c_2).

Dále použijeme nástroj *Průsečík* a označením kružnice a přímky a_1 získáme jejich průsečíky. Průsečík napravo od bodu A nazveme bodem B, průsečík nalevo od bodu A skryjeme, jelikož pro nás v konstrukci nemá význam. Stejně tak můžeme skrýt i pomocné body P_1 a P_2, abychom měli konstrukci přehlednější. Body skryjeme kliknutím na modrý kruh, který je v algebraickém okně vedle daného bodu. Poté pomocí nástroje *Kolmice* vytvoříme kolmici k přímce a_1 procházející bodem B a pojmenujeme ji b_1. Průsečík b_1 a c_1 nazveme bodem C. Nyní použijeme nástroj *Mnohoúhelník*. Po kliknutí na body A, B, C a znovu na bod A se vytvoří trojúhelník ABC.



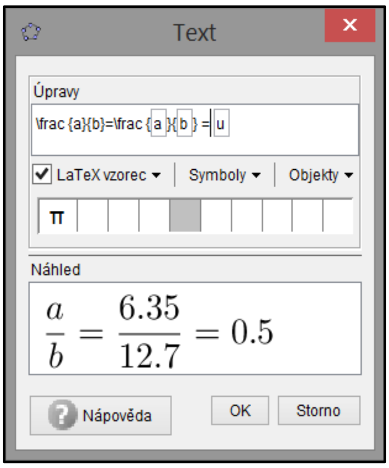
Obr. 3: Nastavení úhlu dané velikosti



Obr. 4: Nastavení posuvníku

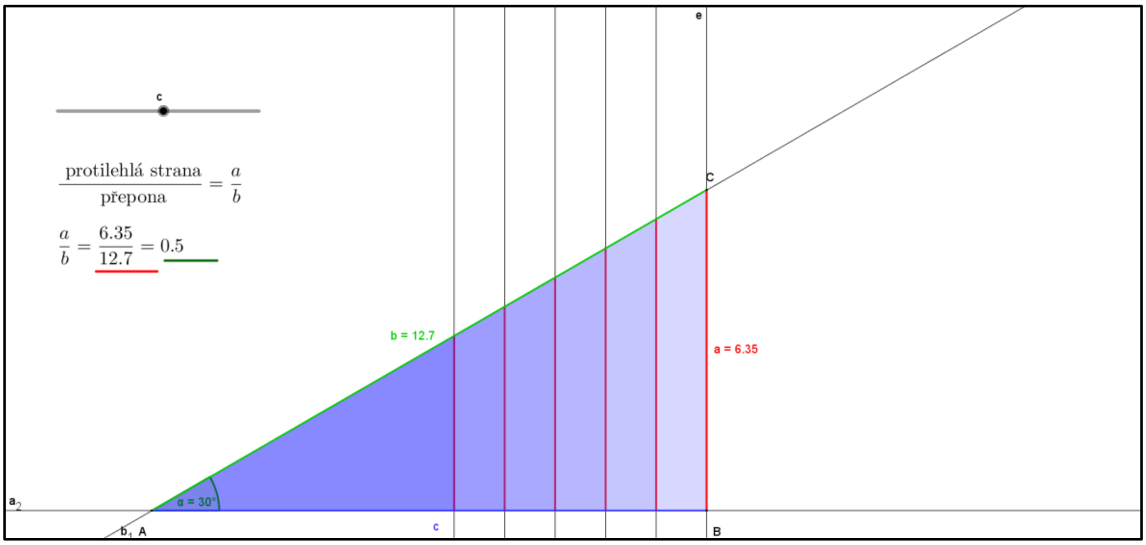
Ten můžeme ve vlastnostech pro lepší přehlednost barevně upravit. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na trojúhelník se zobrazí nabídka základních možností, mezi kterými je položka *Vlastnosti*. Vlastnosti objektu také můžeme najít po označení objektu levým tlačítkem a následným rozbalením položky *Úpravy* v hlavní nabídce. V *Úpravách* jsou *Vlastnosti* sedmou podpoložkou. Ve vlastnostech trojúhelníku ABC nejprve odznačíme pole *Zobrazit popis*, barvu a průhlednost můžeme změnit v záložce *Barva*. V levé části okna vlastností se nachází seznam objektů z algebraického okna a v této části můžeme vybrat další objekty, u kterých chceme změnit vlastnosti. Z tohoto seznamu vybereme stranu a, vedle pole *Zobrazit popis* uvidíme rozbalovací položku s nápisem *Název*, rozbalíme jí a zvolíme možnost *Název a hodnota*. U strany b zvolíme možnost *Název*. Poté u obou stran můžeme zvolit jinou barvu.

Protože zkoumáme poměr mezi stranami a, b trojúhelníka ABC, napíšeme vedle konstrukce pomocný text, podle kterého zjistíme, jak bude poměr mezi stranami vypadat. Nejprve si vytvoříme číslo u, které bude vyjadřovat číselnou hodnotu poměru a ku b. Do vstupního pole napíšeme $u = a/b$. Dále zvolíme nástroj *Text*, klikneme do nákresny a zobrazí se okno, do kterého napíšeme a/b $=$, poté v položce *Objekty* vybereme a, b, mezi ně napíšeme lomítko, pak znak rovná se a nakonec vybereme objekt u. Objekty vybíráme proto, že se v generovaném textu zobrazí jejich číselná hodnota. Pokud bychom chtěli mít místo lomítek zlomky, zaškrtneme možnost *LaTeX vzorec* a napíšeme: \frac {a}{b}=\frac {zde vybereme objekt a}{ zde vybereme objekt b}={zde vybereme objekt u} (Obr. 5).



Obr. 5: Nastavení textu

Nyní je konstrukce připravená ke zjišťování změn poměru stran a, b při změnách velikosti trojúhelníku ABC.



Obr. 6: Konstrukce podílu protilehlé odvěsny úhlu a přepony

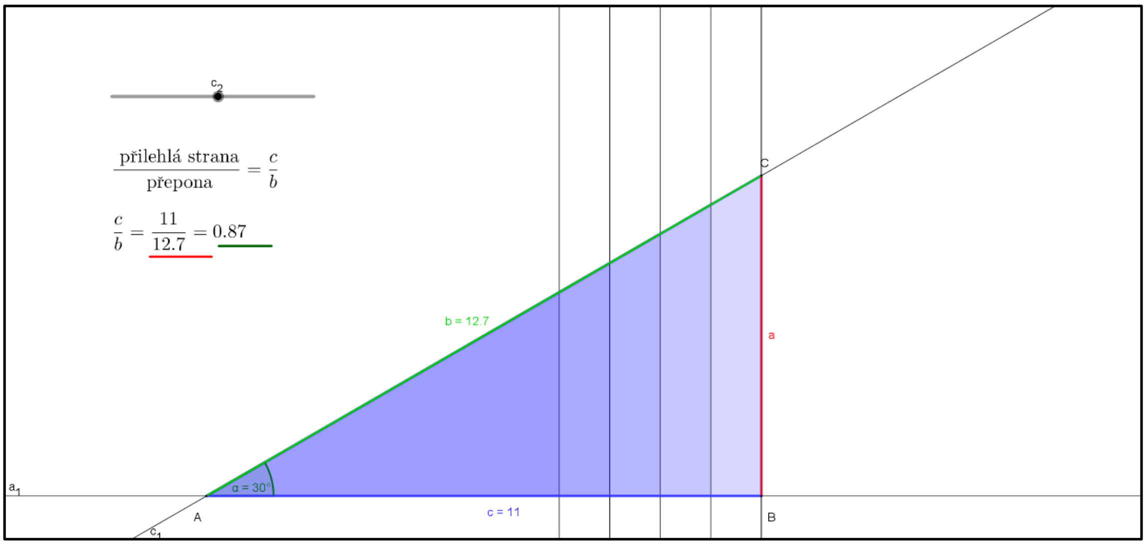
2.2 Dynamická konstrukce poměru přilehlé odvěsny úhlu a přepony

K názornému zobrazení poměru přilehlé odvěsny úhlu a přepony v podobných pravoúhlých trojúhelnících lze využít dvou konstrukcí.

1) První z nich vytvoříme pouhým upravením popisů dynamické konstrukce podílu protilehlé odvěsny úhlu a přepony.
2) Druhá, názornější konstrukce, je vytvořená na podobném principu jako dynamická konstrukce podílu protilehlé strany úhlu a přepony s tím rozdílem, že pohyblivá je strana c, nikoliv strana a.

Dynamická konstrukce č. 1

Jako základ vezmeme dynamickou konstrukci podílu protilehlé odvěsny úhlu a přepony. Ve vlastnostech objektů zvolíme u možnosti *Zobrazit popis* možnost *Název a hodnota* pro stranu b a možnost *Název* pro stranu a. Poté dvojklikem levého tlačítka myši na pomocný text otevřeme okno *Úpravy*. Místo a ve složené závorce napíšeme c, místo objektu a vybereme objekt c. Nakonec musíme změnit číslo u, aby zobrazovalo správný výsledek nového podílu. Dvojklikem na číslo u, které nalezneme v algebraickém okně, otevřeme okénko *Předdefinovat* a napíšeme do něj c/b.



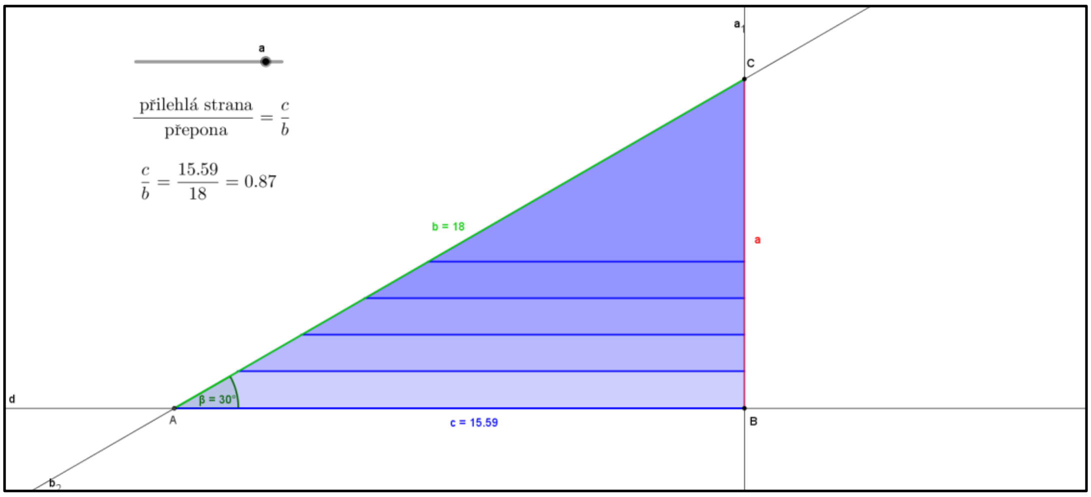
Obr. 7: Konstrukce podílu přilehlé odvěsny a přepony č. 1

Dynamická konstrukce č. 2

Začneme tím, že v horní části nákresny vytvoříme bod C. Poté tímto bodem povedeme přímku, která by pro lepší přehlednost měla být rovnoběžná se souřadnicovou osou y. Tuto přímku vytvoříme pomocí nástroje *Rovnoběžka* tak, že klikneme kurzorem na osu y a poté na bod C. Vzniklou přímku pojmenujeme b_1 (napíšeme b_1, jelikož podtržítko před číslem udělá z čísla za ním dolní index) a na ní naneseme pomocný bod, který si nazveme P_1, tak, že bude umístěn pod bodem C. Nyní vytvoříme úhel γ o velikosti 60°. (Jelikož úhlu α je vybraná velikost 30°, úhel β je pravoúhlý a součet velikostí úhlů v trojúhelníku činí 180°, tudíž úhel γ musí mít 60°. Pokud bychom chtěli úhlu α zvolit jinou velikost, úhel gama musí mít velikost $90° - \alpha$.) Vybereme si nástroj *Úhel dané velikosti.*, klikneme na pomocný bod, poté na bod C, a vyskočí okénko, do kterého vyplníme velikost úhlu. Možnost „proti směru hodin“ necháme zvolenou a klikneme na tlačítko *OK*. S vytvořeným úhlem vznikl další bod, který nazveme P_2. Body P_1, C, P_2 vymezují úhel γ, platí $|\sphericalangle P_1 C P_2| = \gamma$. Dále sestrojíme přímku c_1, která bude procházet body C a P_2. Úhel γ již není potřeba, a tak ho skryjeme kliknutím na modrý kruh, který je v algebraickém okně vedle daného bodu. V dalším kroku vybereme nástroj *Posuvník*, klikneme kurzorem do nákresny, otevře se nám okno s nastavením posuvníku, za název posuvníku zvolíme a_2, interval dáme od 1 do 20, krokování po 0,1, klikneme na *OK* a tím se posuvník vytvoří. Nyní zvolíme nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem*, klikneme na bod C, protože v tomto bodě potřebujeme mít střed kružnice, a za poloměr zvolíme posuvník a_2 (do pole Poloměr napíšeme pouze a_2).

Dále použijeme nástroj *Průsečík* a označením kružnice a přímky b_1 získáme jejich průsečíky. Průsečík dole od bodu C nazveme bodem B, průsečík nahoře od bodu C skryjeme, jelikož pro nás v konstrukci nemá význam. Stejně tak můžeme skrýt i pomocné body P_1 a P_2, abychom měli konstrukci přehlednější. Poté pomocí nástroje *Kolmice* vytvoříme kolmici k přímce b_1 procházející bodem B a pojmenujeme ji a_1. Průsečíka_1 a c_1 nazveme bodem A. Nyní použijeme nástroj *Mnohoúhelník*. Po kliknutí na body A, B, C a znovu na bod A se vytvoří trojúhelník ABC.

Nakonec stejně jako v dynamické konstrukci podílu protilehlé odvěsny úhlu a přepony strany trojúhelníku barevně upravíme, zobrazíme jejich název a u stran b, c a u úhlu α necháme zobrazit i jejich velikost. Poté vytvoříme číslo u, které bude mít hodnotu c/b. Nástrojem *Text* vytvoříme pomocný text tak, že klikneme do nákresny, zobrazí se okno, do kterého napíšeme *c/b* = $[c]/[b]=[u]$. (Místo $[c]$, $[b]$, $[u]$ vybereme objekty c, b, u z položky Objekty). Objekty vybíráme proto, že se v generovaném textu zobrazí jejich číselná hodnota. Pokud bychom chtěli mít místo lomítek zlomky, zaškrtneme možnost *LaTeX vzorec* a napíšeme: \frac $\{c\}\{b\}$=\frac {zde vybereme objekt c}{ zde vybereme objekt b}={zde vybereme objekt u}.



Obr. 8: Konstrukce podílu přilehlé odvěsny a přepony č. 2

2.3 Zavedení funkce sinus α a kosinus α

Z konstrukce poměru protilehlé odvěsny a přepony můžeme zjistit, že poměr mezi protilehlou odvěsnou a přeponou je u všech podobných pravoúhlých trojúhelníků stejný. Tento poměr označíme sinus úhlu α, zapisujeme $\sin \alpha$. Můžeme tedy napsat:

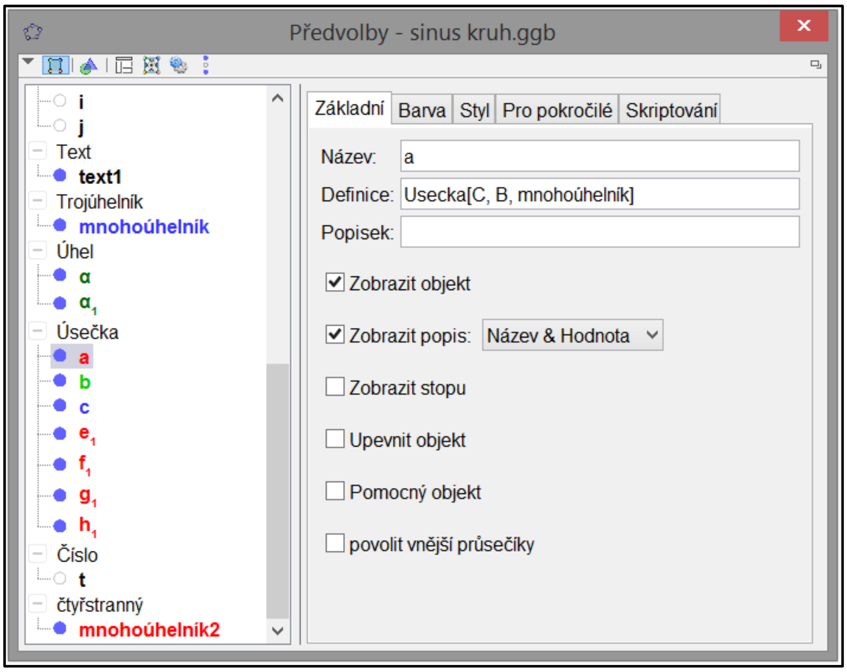
$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

Z konstrukce poměru přilehlé odvěsny a přepony je patrné, že poměr mezi zkoumanými stranami bude také u všech podobných pravoúhlých trojúhelníků stejný. Poměr mezi přilehlou odvěsnou a přeponou označíme jako kosinus úhlu α a zapisujeme $\cos \alpha$. Kosinus úhlu tedy definujeme jako:

$$\text{cosin}\,\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

2.4 Dynamická konstrukce změny velikosti sinu a kosinu úhlu

Začátek bude stejný jako při konstrukci poměru protější strany úhlu a přepony. Nejprve vytvoříme bod A, poté tímto bodem povedeme přímku a_1, rovnoběžnou s osou x, a na ní, napravo od bodu A, umístíme pomocný bod P. Dále vytvoříme dva posuvníky, první bude vyjadřovat velikost úhlu α a druhý poloměr kružnice k. V okně pro nastavení posuvníku zvolíme pro první posuvník možnost *Úhel*, za název zvolíme α_1 (napíšeme α_1) a interval nastavíme od 0° do 90°. Pro druhý posuvník ponecháme možnost *Číslo*, za název zvolíme r, interval nastavíme od 1 do 10 a u možnosti *Krokování hodnotu* 1. V dalším kroku použijeme nástroj *Úhel dané velikosti*, klikneme na bod P, potom na bod A, do kolonky velikosti úhlu napíšeme α_1. Spolu s novým úhlem α vznikne další bod, P'. Tímto bodem povedeme přímku tak, aby procházela i bodem A a označíme jí b_1. Nástrojem *Kolmice* vytvoříme přímku c_1, která bude na přímku b_1 kolmá a bude procházet bodem A.

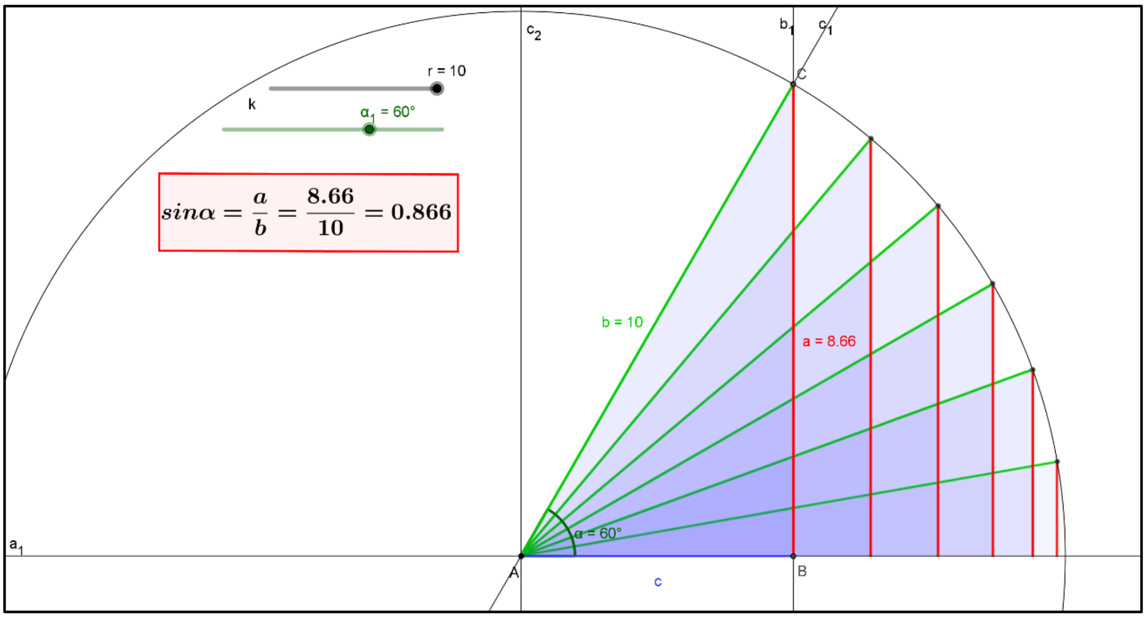


Obr. 9: Vlastnosti objektů

Nyní pomocí nástroje *Kružnice* daná středem a poloměrem vytvoříme kružnici k se středem v bodě A a poloměrem r. Na jednom z průniků přímky b_1 a kružnice bude ležet bod C. Ten sestrojíme pomocí nástroje *Průsečík*, kterým označíme kružnici a přímku b_1. Za bod C zvolíme průsečík ležící na straně úhlu α, druhý průsečík kliknutím na modrý kruh, nacházející se u každého objektu v algebraickém okně, skryjeme. Skrýt můžeme i body P a P'. Dále vytvoříme přímku kolmou k přímce a_1, která bude procházet bodem C. Průsečíkem těchto dvou přímek bude bod B. Po výběru nástroje *Mnohoúhelník* zkonstruujeme trojúhelník ABC. U trojúhelníku ABC stejně jako u předchozí konstrukce změníme barvu a popis jeho stran. V položce *Vlastnosti* v záložce *Základní* zvolíme u strany a i strany b zobrazení *Název a hodnota* (Obr. 9) a u mnohoúhelníku, tak je automaticky pojmenovaný trojúhelník ABC, odznačíme pole *Zobrazit popis*. Druhou záložkou vlastností je *Barva*, tam přidělíme každé straně jinou barvu.

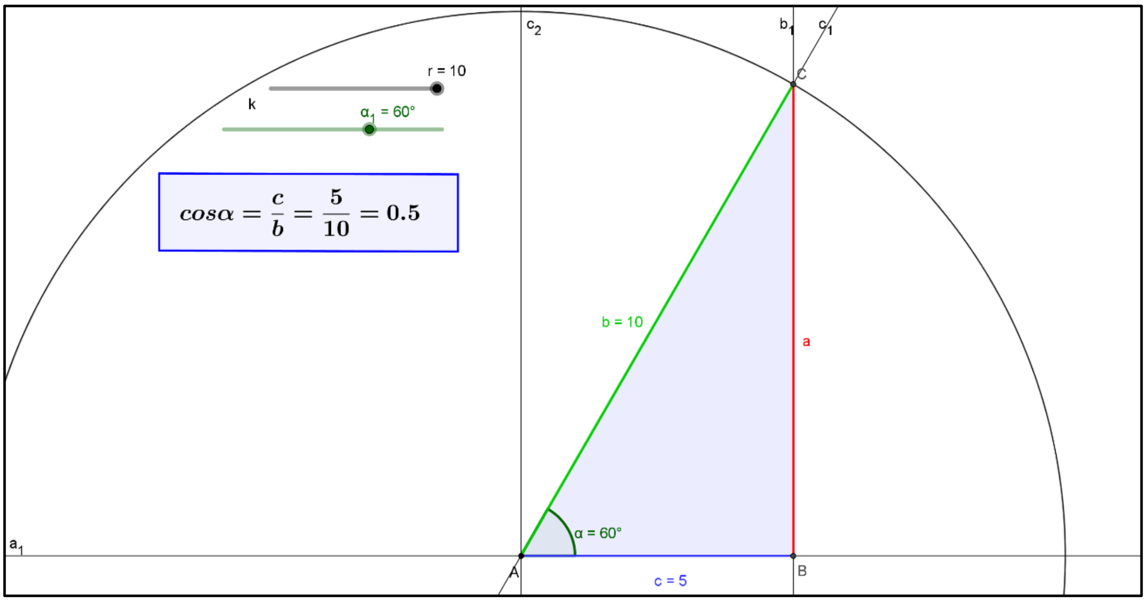
Nakonec vytvoříme číslo u, které bude odpovídat hodnotě $\sin\alpha$, a vedle konstrukce napíšeme pomocný vzorec, aby hodnota sinu úhlu α byla vidět. Do vstupního pole napíšeme $u := a/b$. Vzorec vytvoříme zvolením nástroje *Text*, do jehož okna napíšeme $\sin\alpha = a/b = [a]/[b] = [u]$ (místo $[a]$, $[b]$, $[u]$ vybereme v položce

Objekty a, b, u). Pokud bychom chtěli mít vzorec se zlomky, zaškrtneme pole *LaTeX vzorec* a napíšeme sinα=\frac{a}{b}=\frac{objekt a}{ objekt b}= objekt u.



Obr. 10: Dynamická konstrukce změny velikosti sinu úhlu

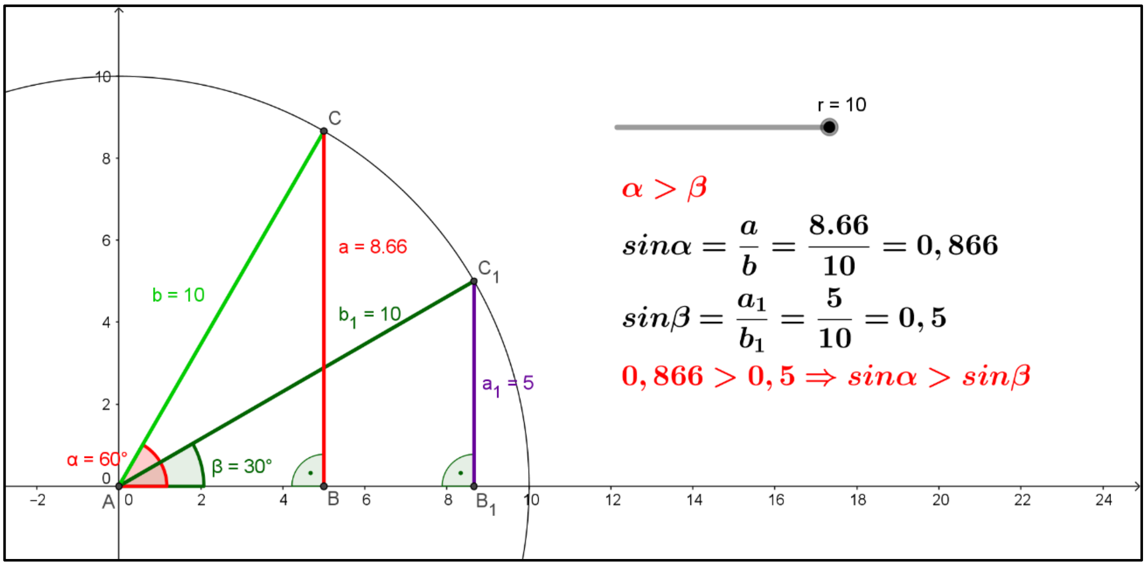
Dynamická konstrukce změny velikosti sinu úhlu bude vycházet z předchozí konstrukce, bude však obsahovat několik malých změn. U strany a nastavíme zobrazení pouze názvu, u strany c zobrazení názvu a hodnoty. Číslu u změníme přepis na $u := c/b$. Pomocný text přepíšeme do podoby $\cos\alpha = c/b = [c]/[b] = [u]$ (místo $[c]$, $[b]$, $[u]$ vybereme objekty c, b, u).



Obr. 11: Dynamická konstrukce změny velikosti kosinu úhlu

2.5 Změna velikosti a vlastnosti funkce sin α a cos α pro úhel v pravoúhlém trojúhelníku

Každý úhel α splňující podmínku $0° < \alpha < 90°$ má jinou hodnotu sin α. Pokud se zvětšuje velikost úhlu α, zvětšuje se i hodnota jeho sinu. Když se úhel α zmenšuje, klesá i hodnota jeho sinu (Obr. 12). To je dáno tím, že při zvětšování úhlu α se koncový bod přepony vzdaluje od základny trojúhelníku (přilehlé odvěsny) a protilehlá odvěsna tudíž musí zvětšit svou velikost, aby se s ním spojila.



Obr. 12: Změna velikosti sin α

Platí, že pokud je velikost úhlu v trojúhelníku od 0° do 90°, bude se velikost $\sin\alpha$ pohybovat v rozmezí od 0 do 1. Můžeme také zapsat $0° < \alpha < 90° \rightarrow 0 < \sin\alpha < 1$.

V případě, že úhel $\alpha = 0°$ nebo $\alpha = 90°$ nelze využít pravoúhlého trojúhelníku, protože žádný trojúhelník nemůže mít úhel 0° nebo dva pravé úhly.

Pokud $\alpha = 0°$, velikost protilehlé odvěsny je také nulová. Jelikož v této situaci nemáme trojúhelník, nahradíme pojem přepona pojmem rameno úhlu. Po dosazení do vzorce získáme:

$$\sin 0° = \frac{0}{\text{rameno úhlu}} = 0$$

Pokud $\alpha = 90°$, tak trojúhelník neexistuje a α nemá žádnou protější odvěsnu, ale čím více se bude α svou velikostí k 90° přibližovat, tím více se bude přibližovat velikost protější odvěsny k velikosti přepony.

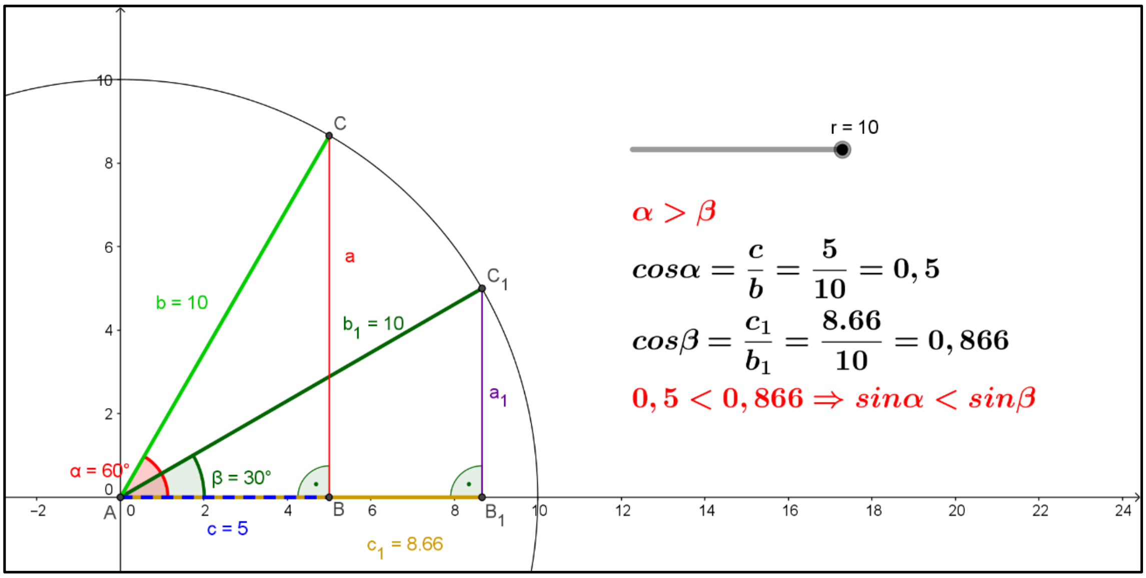
Proto pro $\sin\alpha,\ \alpha = 90°$, dosadíme do čitatele vzorce místo velikosti protilehlé odvěsny velikost ramene úhlu (jelikož nemáme trojúhelník a tak by nebylo přesné použít pojem přepona) a získáme:

$$\sin 90° = \frac{\text{rameno úhlu}}{\text{rameno úhlu}} = 1$$

Při změně poloměru kružnice k na velikost 1 bude velikost přepony trojúhelníku ABC rovna jedné. V tomto případě bude velikost protilehlé strany rovna velikosti sinu úhlu, jelikož platí:

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá strana}}{\text{přepona}} = \frac{a}{1} = a$$

Kosinus pro úhel α, $0° < \alpha < 90°$, má stejně jako $\sin\alpha$, pro každou velikost úhlu jinou hodnotu. Změna velikosti jeho hodnoty je oproti $\sin\alpha$ opačná. Se zvětšujícím se úhlem α se zmenšuje velikost strany b a tudíž i hodnota kosinu úhlu.



Obr. 13: Změna velikosti $\cos\alpha$

V případě velikosti úhlu α v rozmezí od 0° do 90° bude $\cos\alpha$ nabývat hodnot od 0 do 1.

Pokud bude úhel $\alpha = 0°$, bude situace stejná jako v případě $\sin\alpha$, kdy $\alpha = 90°$, jelikož se zmenšující se velikostí úhlu α roste velikost přilehlé strany. Trojúhelník ABC neexistuje, stranu c tedy nemůžeme označit za přeponu, ale rameno úhlu α. Strana b bude také představovat rameno úhlu, které bude mít stejnou velikost jako rameno c. Bude tedy platit:

$$\cos 0° = \frac{\text{rameno úhlu}}{\text{rameno úhlu}} = 1$$

V případě, kdy $\alpha = 90°$, bude situace stejná jako u $\sin\alpha$, kdy $\alpha = 0°$. S nulovou velikost strany c zaniká trojúhelník a přeponu trojúhelníku tedy označíme jako rameno úhlu. Dosazením do výrazu pro kosinus získáme:

$$\cos 90° = \frac{0}{\text{rameno úhlu}} = 0$$

Pokud poloměr kružnice k bude mít velikost 1, bude velikost přepony c také rovna jedné a tedy hodnota $\cos\alpha$ bude rovna velikosti strany.

$$\cos\alpha = \frac{\text{přitilehlá strana}}{\text{přepona}} = \frac{c}{1} = c$$

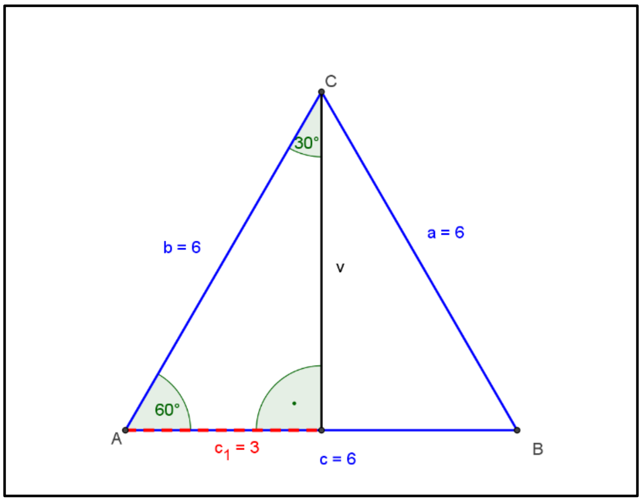
2.6 Vyjádření velikostí sin α a cos α některých úhlů pomocí zlomku

Hodnota $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ se pro většinu úhlů vyjadřuje desetinným číslem, ale u některých úhlů můžeme vyjádřit přesnou hodnotu jejich sinu pomocí zlomku či celého čísla (Tab. 1).

Tab. 1: Tabulka hodnot $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ vybraných úhlů

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Pro úhly $\alpha = 30°$ a $\alpha = 60°$ můžeme hodnotu jejich sinu odvodit z rovnostranného trojúhelníku (Obr. 14).



Obr. 14: Rovnostranný trojúhelník pro odvození hodnoty sin 30° a sin 60°

Rovnostranný trojúhelník ABC je výškou z bodu C rozdělen na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky s úhly o velikosti 30° a 60°. Protože je trojúhelník rovnostranný, platí, že:

$$a = b = c, c_1 = \frac{1}{2}c.$$

$$\sin 30° = \frac{c_1}{b}$$

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$$

Pro odvození sin 60° bude třeba vypočítat velikost výšky.

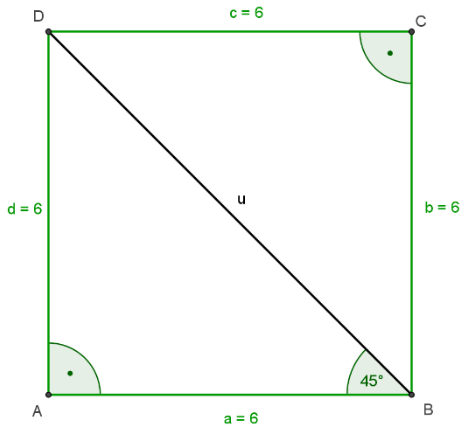
$$\sin 60° = \frac{v}{c}$$

$$v = \sqrt{c^2 - (\frac{1}{2}c)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pro odvození sin 45° využijeme čtverec rozdělený úhlopříčkou na dva pravoúhlé trojúhelníky (Obr. 15).



Obr. 15:Čtverec pro odvození sin 45°

$$\sin 45° = \frac{a}{u}$$

$$u = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Odvození hodnoty $\cos \alpha$ pro úhly $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$ a $\alpha = 60°$ je stejné jako u $\sin \alpha$. Také lze pozorovat, že platí $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$ protože:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$$

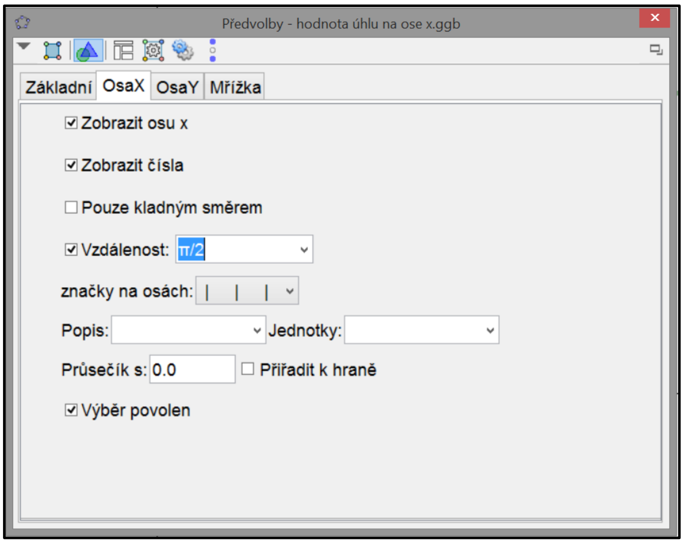
$$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$$

2.7 Převedení velikosti úhlu na osu x

Tuto konstrukci začneme vytvořením posuvníku α pomocí nástroje *Posuvník*. V nastavení posuvníku zvolíme možnost *Úhel* a v položce *Interval* necháme přednastavené rozmezí 0° do $360°$. Dále sestrojíme bod A tak, že do vstupního pole napíšeme $A = (\alpha, 1)$. Nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* vytvoříme kružnici k se středem v bodě A o poloměru 1. Poté sestrojíme průsečík kružnice k s osou x s názvem B. Pomocí nástroje *Otočení o úhel* vytvoříme bod $B‘$, který bude od bodu B otočen o úhel α se středem otočení v A. Po výběru *Otočení o úhel* klikneme nejprve na bod B, jelikož je to bod otáčení, poté na bod A, protože je to bod, kolem kterého se bod B má otočit.

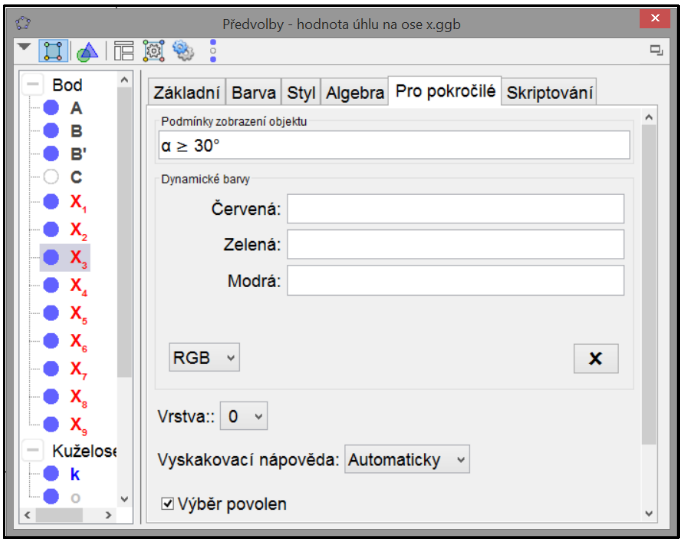
Následuje automatické otevření okna s nastavením otočení, kde do kolonky *Úhel* napíšeme α a zvolíme možnost ve směru hodin. Dále nástrojem *Úsečka* sestrojíme úsečku $|B‘A|$ (bude mít název a) a $|BA|$ (s názvem b) a nástrojem *Úhel* zobrazíme úhel $B’AB$ (β), který tyto dvě úsečky svírají. Potom zvolíme nástroj *Kruhový oblouk*, klikneme nejprve na bod A, pak na bod $B‘$ a nakonec na bod B a tím vytvoříme kruhový oblouk mezi body $B‘$ a B, pojmenujeme ho o. Nyní do počátku souřadnicové soustavy (bodu se souřadnicemi [0; 0]) zaneseme bod C a sestrojíme úsečku $|CB|$ s názvem c.

Vzniklou konstrukci ještě pro větší přehlednost barevně upravíme. V nabídce *Vlastnosti* u kružnice k a úsečky $|CB|$ (c) v záložce *Barva* nastavíme oběma objektům stejnou, nejlépe výraznou, barvu, např. modrou nebo červenou. V záložce *Styl* můžeme zvětšit tloušťku jejich čáry. Kruhovému oblouku o nastavíme nějakou světlou, méně výraznou, barvu a tloušťku čáry stejnou jako u kružnice k. Úsečce $|B'A|$ (a) také změníme barvu na nějakou výraznou, ale jinou než má kružnice k. Úsečce $|BA|$ ponecháme černou barvu a v záložce *Styl*, u položky *Styl čar*, zvolíme čárkovanou čáru. Dále u všech objektů konstrukce můžeme v záložce *Základní* odznačit pole *Zobrazit popis*, jen u úhlu β toto pole necháme označené a vybereme možnost *Hodnota*.



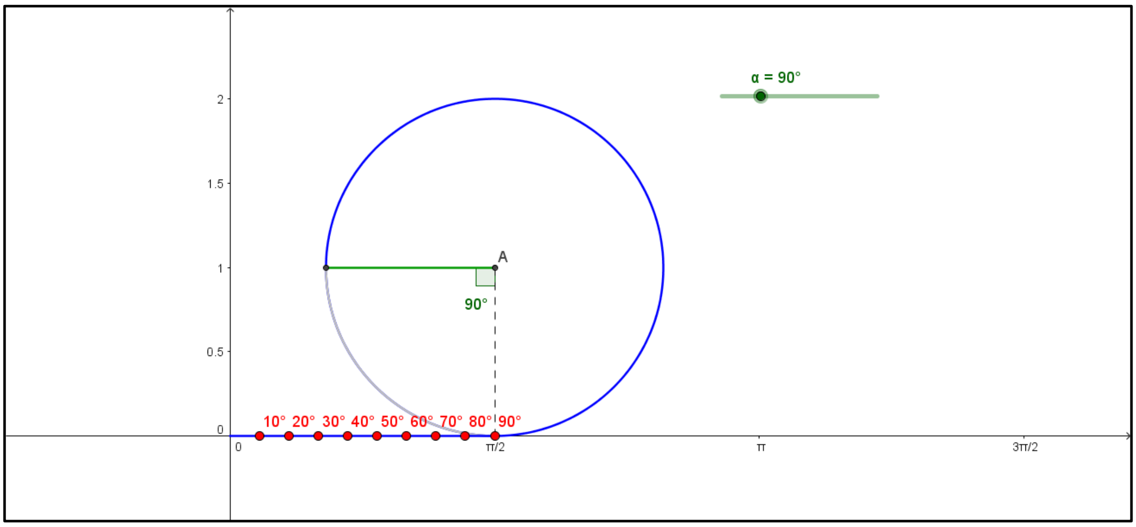
Obr. 16: Změna popisků osy x

Konstrukci ještě doplníme o znázornění velikosti úhlu na osu x. Vytvoříme stupnici bodů X_0 až X_9 znázorňujících velikost úhlů od 10° do 90° v intervalech po 10°. Do vstupního pole napíšeme $X\_1 = (10°;\ 0), X\_2 = (20°;\ 0)$, budeme pokračovat až do $X\_9 = (90°;\ 0)$. Dále ve vlastnostech u každého nově vzniklého bodu napíšeme do kolonky *Popisek* velikost úhlu, který vyznačuje (např. u bodu X_1 napíšeme 10°). U položky *Zobrazit popis* vybereme možnost *Popisek* a dále bodům nastavíme výraznou barvu (u všech stejnou). Poté se podíváme do záložky *Pro pokročilé* a do kolonky *Podmínky zobrazení objektu* napíšeme $\alpha \geq x$, za x dosadíme velikost daného úhlu, který bod znázorňuje (např. u bodu X_3 napíšeme $\alpha \geq 30°$)(Obr. 17).



Obr. 17: Podmínky zobrazení objektu

Nakonec změníme popisky osy x. Pravým tlačítkem myši klikneme do nákresny a vybereme položku *Nákresna*. Pokud máme označení nějaký objekt, tak nejprve klikneme do nákresny levým tlačítkem a až poté pravým. Otevře se okno *Předvolby*, ve kterém se podíváme do záložky *OsaX*. Tam označíme možnost *Vzdálenost* a zvolíme hodnotu $\pi/2$. Po tomto kroku okno *Předvolby* zavřeme a na ose x uvidíme nastavenou změnu popisků. Z osy x zmizela čísla a místo nich jsou zobrazeny popisky jako násobky $\pi/2$ (Obr. 18). Rozestupy od jednotlivých popisků jsou větší, než byly u číselných popisků. Dále můžeme zaznamenat, že popisek $\pi/2$ odpovídá velikosti úhlu 90°, π velikosti 180° a 2π znázorňuje úhel plný, tedy 360°.



Obr. 18: Konstrukce převedení velikosti úhlu na osu x

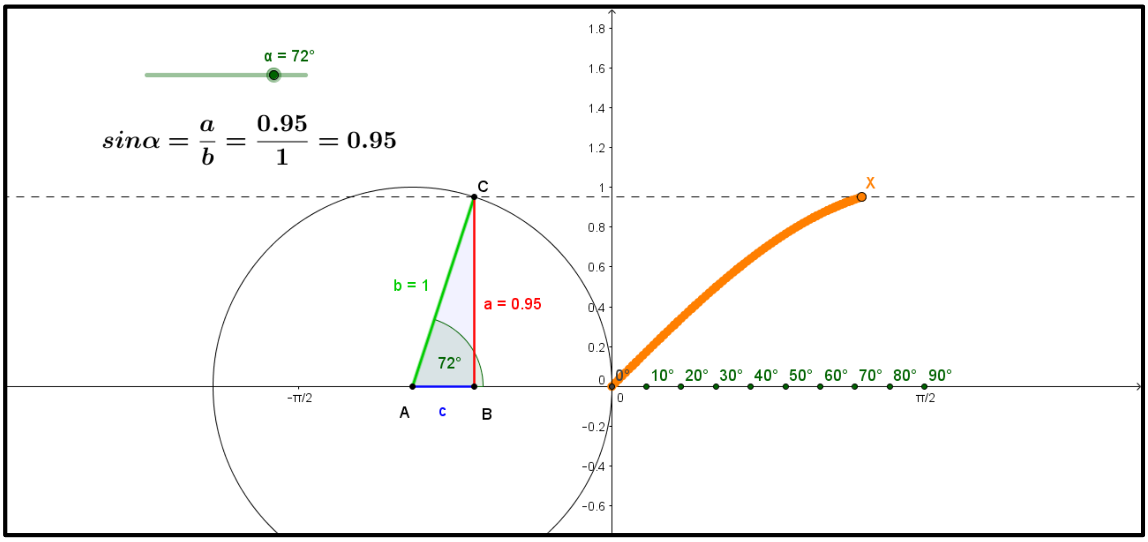
2.8 Graf funkce sinus pro ostrý úhel

Tvorbu konstrukce opět začneme vytvořením bodu A, tentokrát však nebude mít libovolné souřadnice jako v předchozích konstrukcích, ale bude ležet na souřadnicích $[-1;\ 0]$. Dále vytvoříme pomocný bod P o souřadnicích $[0;\ 0]$. Poté nástrojem *Posuvník* vytvoříme posuvník α, v jeho nastavení zvolíme možnost Úhel a interval nastavíme od 0° do $90°$. Dále nástrojem *Úhel dané velikosti* sestrojíme úhel PAP', α_1, (P' vznikne po použití tohoto nástroje) o velikosti α. Vzniklý bod P' přejmenujeme na C a vytvoříme přímku a_1 procházející body A, C. Nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* vytvoříme kružnici k se středem v bodu A a poloměrem 1. Průsečík kružnice a přímky bude bod C, protože vznikl otočením bodu P kolem bodu A, bod A je vzdálený od bodu P o 1 a kružnice má poloměr o této vzdálenosti. Přímku a_1 již můžeme skrýt. Pomocí nástroje *Kolmice* sestrojíme přímku b_1 kolmou na osu x, která bude procházet bodem C. Nástrojem *Průsečík* vytvoříme průsečík přímky b_1 a osy x a pojmenujeme ho B. Přímku b_1 můžeme také skrýt a nástrojem *Mnohoúhelník* vytvoříme trojúhelník ABC. Strany trojúhelníku upravíme stejně jako v předchozích konstrukcích. Otevřeme položku *Vlastnosti* u každé ze stran, zvolíme každé straně jinou barvu a stran a, b zvolíme za popis možnost *Název a hodnota*. Úhlu α_1 zvolíme za popis možnost *Hodnota*.

V dalším kroku si na ose x vyznačíme stupnici hodnot pro velikost úhlu od $10°$ do $90°$. Tyto hodnoty zobrazíme na ose x pomocí bodů. Do vstupního pole napíšeme $X\_1 = (10°;\ 0)$, $X\_2 = (20°;\ 0)$, budeme pokračovat až do $X\_9 = (90°;\ 0)$. Ve vlastnostech každého ze skupiny bodů X_1 až X_9 napíšeme do kolonky *Popisek* velikost úhlu, jakou vyjadřuje (např. u X_1 napíšeme $10°$). V položce *Zobrazit popis* zvolíme možnost *Popisek*. Poté změníme popisky osy x. Pravým tlačítkem myši klikneme do nákresny a z otevřené nabídky zvolíme položku *Nákresna*. V nově otevřeném okně vybereme druhou záložku, záložku *OsaX*, zaškrtneme políčko *Vzdálenost* a vybereme hodnotu $\pi/2$. Nyní můžeme okno zavřít. Na ose x uvidíme změnu jejích popisků, zmizely popisky ve formě čísel a zobrazily se ve větších rozestupech v podobě násobků jedné poloviny π. Můžeme si také všimnout, že hodnota $\pi/2$ odpovídá bodu X_9, čili hodnotě $90°$.V předposledním kroku vytvoříme pomocný text ve formě vzorce pro výpočet sinu. Vybereme nástroj *Text* a do jeho okna, které se otevře po kliknutí do nákresny, napíšeme

$\sin\alpha = a/b = [a]/[b] = [c]$ (místo $[a]$, $[b]$ vybereme v položce *Objekty* a, b). V této konstrukci není potřeba vytvořit číslo u, jelikož velikost strany b je 1, tudíž $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$. Pro zobrazení vzorce se zlomky zaškrtneme pole *LaTeX vzorec* a napíšeme sinα=\frac{a}{b}=\frac{objekt a}{ objekt b}= objekt a.

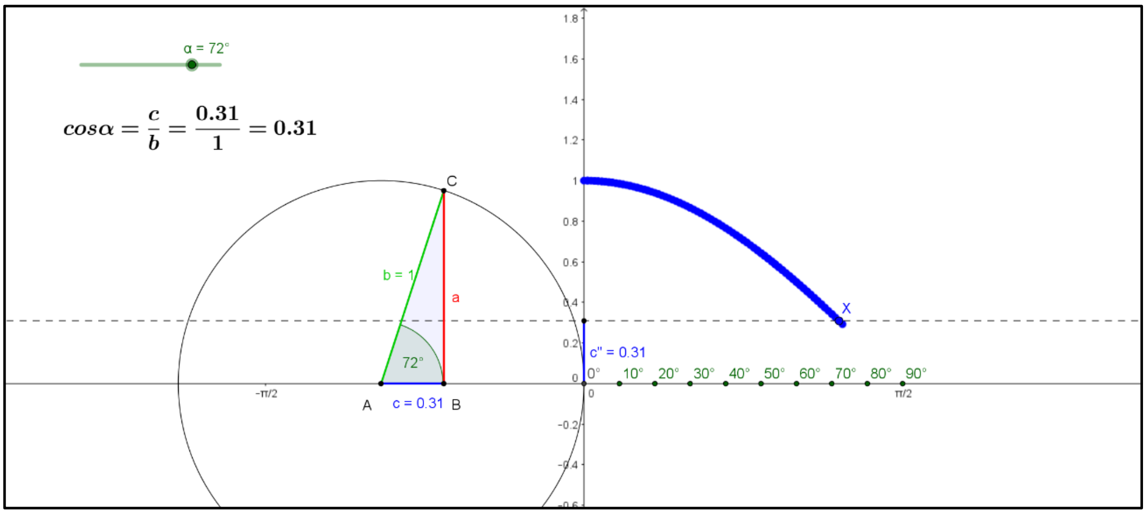
Nakonec vytvoříme bod X, který bude k danému úhlu přiřazovat hodnotu jeho sinu (souřadnice na ose x bude vyjadřovat velikost daného úhlu, souřadnice na ose y bude vyjadřovat velikost sinu daného úhlu). Do vstupního pole napíšeme $X = (\alpha, sin(\alpha))$. Na vzniklý bod X klikneme pravým tlačítkem myši a zvolíme možnost *Stopa zapnuta*. Dále ještě nástrojem *Rovnoběžka* vytvoříme rovnoběžku s osou x, která bude procházet bodem X.



Obr. 19: Konstrukce grafu sin α

Konstrukce grafu funkce kosinus bude mít téměř stejný postup jako předchozí konstrukce, pouze s několika změnami. Straně a nastavíme zobrazení pouze názvu a straně c zobrazení názvu a hodnoty. Dvojitým kliknutím levého tlačítka myši na bod X otevřeme okno *Předdefinovat* a změníme souřadnice na $[\alpha, \cos\alpha]$. Poté nástrojem *Kolmice* vytvoříme přímku y_1 kolmou na osu x, která bude procházet bodem A. Dále nástrojem *Průsečík* sestrojíme průsečíky přímky y_1 s kružnicí k. Průsečík nad bodem A nazveme P, druhý průsečík skryjeme. Nástrojem *Osa úhlu* vytvoříme osu úhlu $\sphericalangle X_1AP$ a přes tuto osu pomocí nástroje *Osová souměrnost* sestrojíme obraz strany c, stranu c', s počátkem v bodu A. Následovně použijeme nástroj *Posunutí*, nejprve označíme stranu

c', poté označíme bod A a bod X_1. Tímto vznikne strana c'', obraz strany c posunutý na osu y, kde bude zobrazovat hodnotu $\cos\alpha$. Strana c'' bude mít krajní body A'' a B''. Přímku y_1, osu úhlu $\sphericalangle X_1AP$, stranu c', body P, A', A'', B' a vektor u skryjeme. Bodu B'' skryjeme popis. Nástrojem *Rovnoběžka* vytvoříme přímku rovnoběžnou s osou x a procházející bodem X. Nakonec upravíme pomocný text do tvaru $\cos\alpha = c/b = [c]/[b] = [c]$ (místo $[b]$, $[c]$ vybereme objekty b, c).



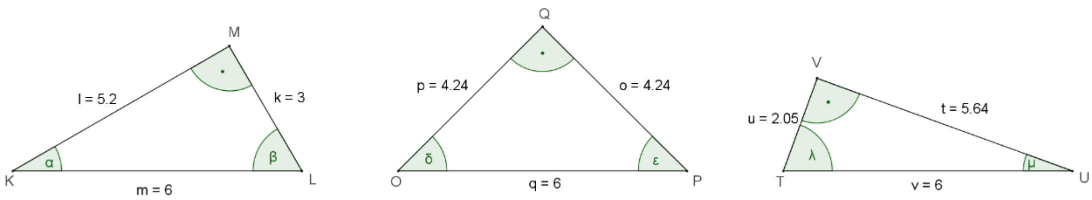
Obr. 20: Konstrukce grafu $\cos\alpha$

2.9 Řešené příklady na procvičení sinu ostrého úhlu

Příklad 1

Jsou dány pravoúhlé trojúhelníky KLM, OPQ a TUV a jejich vnitřní úhly.

a) Určete předpis sinus pro jejich úhly.
b) Vypočítejte pro každý úhel hodnotu, kterou má jeho sinus.
c) Seřaďte siny úhlů dle velikosti od největšího.
d) Zjistěte velikost daných úhlů



Obr. 21: Zadání k příkladu 1

Řešení:

a)

$\sin\alpha = \frac{k}{m}$ $\sin\delta = \frac{o}{q}$ $\sin\lambda = \frac{t}{v}$

$\sin\beta = \frac{l}{m}$ $\sin\varepsilon = \frac{p}{q}$ $\sin\mu = \frac{u}{v}$

b)

$\sin\alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\sin\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}707$ $\sin\lambda \doteq 0{,}940$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}866$ $\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}707$ $\sin\mu \doteq 0{,}342$

c)

1. $\sin\lambda$
2. $\sin\beta$
3. $\sin\delta = \sin\varepsilon$
4. $\sin\alpha$
5. $\sin\mu$

d)

$\alpha = 30°$ $\delta = 45°$ $\varepsilon = 70°$

$\delta = 45°$ $\lambda = 70°$ $\mu = 20°$

Příklad 2

Určete, který úhel bude mít větší hodnotu sinus.

$\sin 15°$	$\sin 35°$	$\sin 90°$	$\sin 0°$
$\sin 62°$	$\sin 50°$	$\sin 46°$	$\sin 42°$
$\sin 21°$	$\sin 28°$	$\sin 77°$	$\sin 59°$
$\sin 89°$	$\sin 18°$	$\sin 30°$	$\sin 31°$

Řešení:

$\sin 15°$	$<$	$\sin 35°$	$\sin 90°$	$>$	$\sin 0°$
$\sin 62°$	$>$	$\sin 50°$	$\sin 46°$	$>$	$\sin 42°$
$\sin 21°$	$<$	$\sin 28°$	$\sin 77°$	$>$	$\sin 59°$
$\sin 89°$	$>$	$\sin 18°$	$\sin 30°$	$<$	$\sin 31°$

Příklad 3

Určete, zda platí:

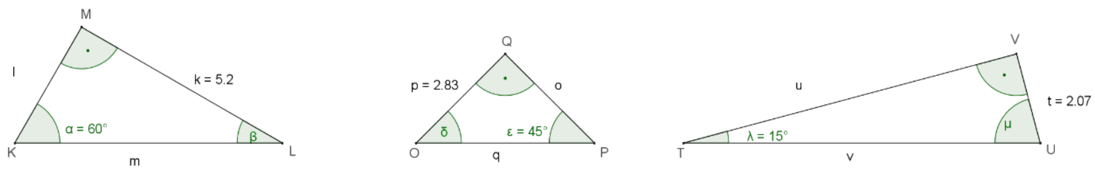
$\sin 20° > 0{,}5$	ANO – NE	$\sin 55° < 0{,}7$	ANO – NE
$\sin 36° > 0{,}5$	ANO – NE	$\sin 49° > 0{,}6$	ANO – NE
$\sin 75° < 0{,}9$	ANO – NE	$\sin 63° > 0{,}8$	ANO – NE
$\sin 12° < 0{,}1$	ANO – NE	$\sin 32° < 0{,}5$	ANO – NE
$\sin 85° > 0{,}95$	ANO – NE	$\sin 27° > 0{,}3$	ANO – NE

Řešení:

$\sin 20° > 0{,}5$	ANO – **NE**	$\sin 55° < 0{,}7$	ANO – **NE**
$\sin 36° > 0{,}5$	**ANO** – NE	$\sin 49° > 0{,}6$	**ANO** – NE
$\sin 75° < 0{,}9$	ANO – **NE**	$\sin 63° > 0{,}8$	**ANO** – NE
$\sin 12° < 0{,}1$	ANO – **NE**	$\sin 32° < 0{,}5$	ANO – **NE**
$\sin 85° > 0{,}95$	**ANO** – NE	$\sin 27° > 0{,}3$	ANO – **NE**

Příklad 4

U trojúhelníků KLM, OPQ a TUV známe jeden z jejich úhlů a délku protilehlé odvěsny. Vypočítejte velikost přepony. Výsledky zaokrouhlete na celá čísla, délky jsou uvedené v cm.



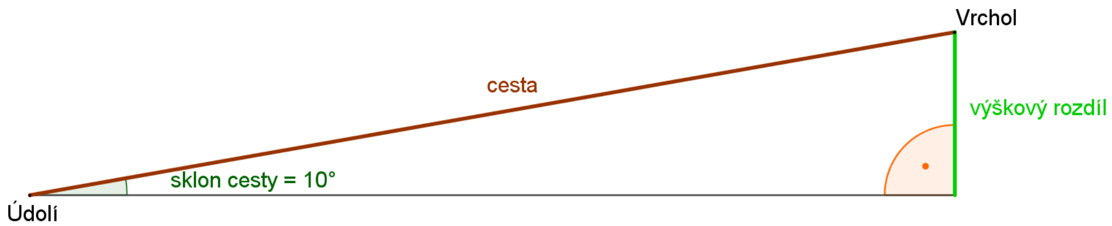
Obr. 22: Zadání k příkladu 4

Řešení:

$\varDelta KLM$	$\varDelta OPQ$	$\varDelta TUV$
$\sin\alpha = \frac{k}{m}$	$\sin\varepsilon = \frac{o}{q}$	$\sin\lambda = \frac{t}{v}$
$m = \frac{k}{\sin\alpha}$	$q = \frac{o}{\sin\alpha}$	$v = \frac{t}{\sin\lambda}$
$m = \frac{5{,}2}{\sin 60°}$	$q = \frac{2{,}83}{\sin 45°}$	$m = \frac{2{,}07}{\sin 15°}$
$\underline{\underline{m = 6\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{q = 4\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{m = 8\ \text{cm}}}$

Příklad 5

Výškový rozdíl mezi údolím a vrcholem hory je 500 m. Průměrný sklon rovné cesty z údolí na vrchol je 10°. Jak je dlouhá cesta z údolí na vrchol hory? Výsledek uveďte v km, zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obr. 23: Nákres k příkladu 5

Řešení:

Sklon cesty = α, výškový rozdíl = v, délka cesty = d

$$\sin\alpha = \frac{v}{d}$$

$$d = \frac{v}{\sin\alpha}$$

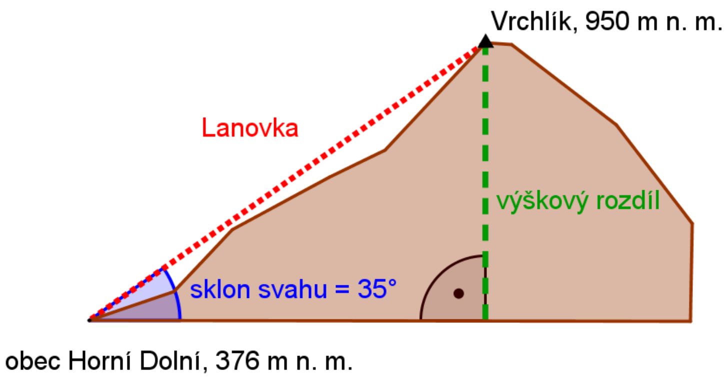
$$d = \frac{500}{\sin 10°}$$

$$\underline{\underline{d \doteq 2{,}9\ \text{km}}}$$

Délka cesty z údolí na vrchol je 2,9 km.

Příklad 6

Kopec Vrchlík má nadmořskou výšku 950 m nad mořem a svah s průměrným sklonem 35°. Na úpatí tohoto kopce leží obec Horní Dolní, která má nadmořskou výšku 376 m nad mořem. Jak dlouhá by musela být lanovka, aby vedla z Horní dolní až na vrchol Vrchlíku? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 24: Nákres k příkladu 6

Řešení:

Sklon svahu = α, výškový rozdíl = v, délka lanovky = d

$$\sin \alpha = \frac{v}{d}$$

$$d = \frac{v}{\sin \alpha}$$

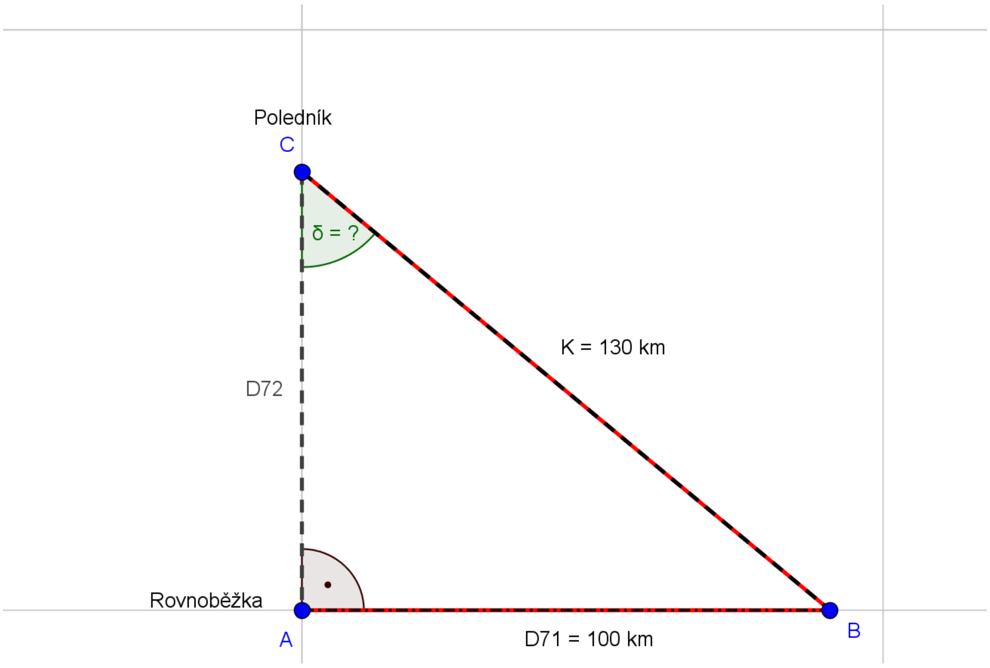
$$d = \frac{574}{\sin 35°}$$

$$\underline{\underline{d \doteq 1000 \text{ m}}}$$

Lanovka by musela být dlouhá 1000 m.

Příklad 7

Město A a město B leží na stejné rovnoběžce. Mezi nimi vede rovná dálnice D71 o délce 100 km ($|\mathrm{D71}| = 100$ km). Město C leží na stejném poledníku jako město A. Z města C vede rovný železniční koridor K do města B, který je dlouhý 130 km ($|\mathrm{K}| = 130$ km). Z města C dále vede dálnice D72 do města A. Zjistěte, jaký úhel svírá dálnice D72 se železnicí K. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 25: Nákres k příkladu 7

Řešení:

$$\sin\delta = \frac{|\mathrm{K}|}{|\mathrm{D71}|}$$

$$\sin\delta = \frac{100}{130}$$

$$\sin\delta \doteq 0{,}769$$

$$\underline{\underline{\delta \doteq 50°}}$$

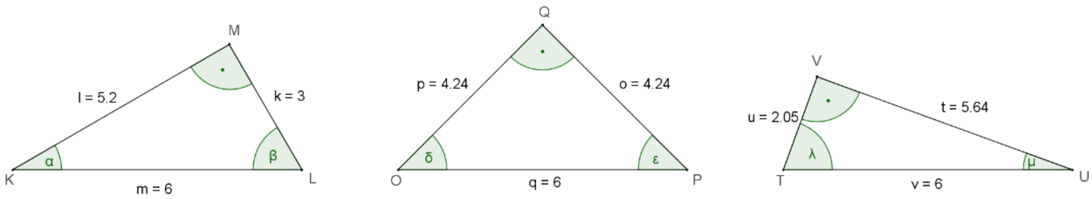
Dálnice D72 svírá se železnicí K úhel 50°.

2.10 Řešené příklady na procvičení kosinu ostrého úhlu

Příklad 1

Jsou dány pravoúhlé trojúhelníky KLM, OPQ a TUV a jejich vnitřní úhly.

a) Určete předpis kosinus pro jejich úhly.
b) Vypočítejte pro každý úhel hodnotu, kterou má jeho kosinus. Výsledek zaokrouhlete na čtyři desetinná místa
c) Seřaďte kosiny úhlů dle velikosti od největšího.
d) Zjistěte velikost daných úhlů: $\cos\gamma = 0{,}1736$, $\cos\kappa = 0{,}9848$, $\cos\sigma = 0{,}6428$, $\cos\tau = 0{,}5592$, $\cos\varphi = 0{,}9063$, $\cos\psi = 0{,}0175$



Obr. 26: Zadání k příkladu 1

Řešení:

a)

$$\cos\alpha = \frac{l}{m} \qquad \cos\delta = \frac{p}{q} \qquad \cos\lambda = \frac{u}{v}$$

$$\cos\beta = \frac{k}{m} \qquad \cos\varepsilon = \frac{o}{q} \qquad \cos\mu = \frac{t}{v}$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}8660 \qquad \cos\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}7071 \qquad \cos\lambda \doteq 0{,}3420$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \cos\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}7071 \qquad \cos\mu \doteq 0{,}9397$$

c)

1. $\cos\mu$
2. $\cos\alpha$
3. $\cos\delta = \cos\varepsilon$
4. $\cos\beta$
5. $\cos\lambda$

d)

$\gamma \doteq 80°$	$\sigma \doteq 50°$	$\varphi \doteq 25°$
$\kappa \doteq 10°$	$\tau \doteq 56°$	$\psi \doteq 80°$

Příklad 2

Určete, který úhel bude mít větší hodnotu kosinus.

$\cos 15°$	$\cos 35°$	$\cos 90°$	$\cos 0°$
$\cos 62°$	$\cos 50°$	$\cos 46°$	$\cos 42°$
$\cos 21°$	$\cos 28°$	$\cos 77°$	$\cos 59°$
$\cos 89°$	$\cos 18°$	$\cos 30°$	$\cos 31°$

Řešení:

$\cos 15°$	$>$	$\cos 35°$	$\cos 90°$	$<$	$\cos 0°$
$\cos 62°$	$<$	$\cos 50°$	$\cos 46°$	$<$	$\cos 42°$
$\cos 21°$	$>$	$\cos 28°$	$\cos 77°$	$<$	$\cos 59°$
$\cos 89°$	$<$	$\cos 18°$	$\cos 30°$	$>$	$\cos 31°$

Příklad 3

Určete, zda platí:

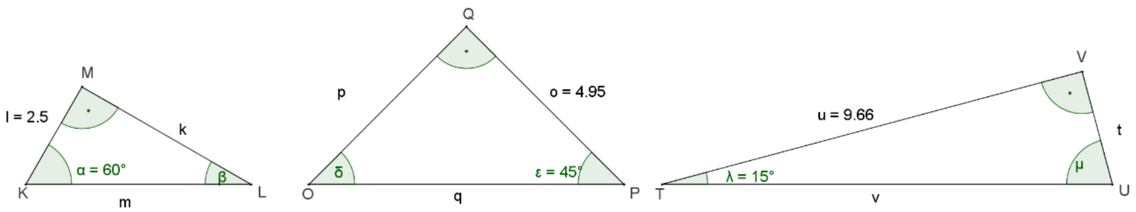
$\cos 20° > 0{,}5$	ANO – NE	$\cos 55° < 0{,}7$	ANO – NE
$\cos 36° > 0{,}5$	ANO – NE	$\cos 49° > 0{,}6$	ANO – NE
$\cos 75° < 0{,}9$	ANO – NE	$\cos 63° > 0{,}8$	ANO – NE
$\cos 12° < 0{,}1$	ANO – NE	$\cos 32° < 0{,}5$	ANO – NE
$\cos 85° > 0{,}95$	ANO – NE	$\cos 27° > 0{,}3$	ANO – NE

Řešení:

$\cos 20° > 0{,}5$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\cos 55° < 0{,}7$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE
$\cos 36° > 0{,}5$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\cos 49° > 0{,}6$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\cos 75° < 0{,}9$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\cos 63° > 0{,}8$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\cos 12° < 0{,}1$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\cos 32° < 0{,}5$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE
$\cos 85° > 0{,}95$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\cos 27° > 0{,}3$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE

Příklad 4

U trojúhelníků KLM, OPQ a TUV známe jeden z jejich úhlů a délku protilehlé odvěsny. Vypočítejte velikost přepony. Výsledky zaokrouhlete na celá čísla, délky jsou uvedené v cm.



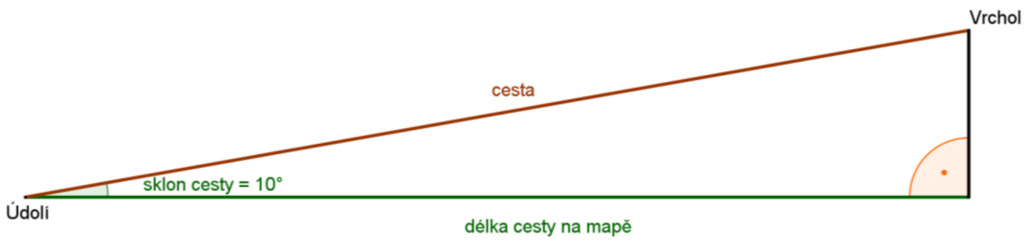
Obr. 27: Zadání k příkladu 4

Řešení:

$\triangle KLM$	$\triangle OPQ$	$\triangle TUV$
$\cos\alpha = \dfrac{l}{m}$	$\cos\varepsilon = \dfrac{o}{q}$	$\cos\lambda = \dfrac{u}{v}$
$m = \dfrac{l}{\cos\alpha}$	$q = \dfrac{o}{\cos\alpha}$	$v = \dfrac{u}{\cos\lambda}$
$m = \dfrac{2{,}5}{\cos 60°}$	$q = \dfrac{4{,}95}{\cos 45°}$	$m = \dfrac{9{,}66}{\cos 15°}$
$\underline{\underline{m = 5\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{q \doteq 7\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{m \doteq 10\ \text{cm}}}$

Příklad 5

Podle turistické mapy je cesta mezi údolím a vrcholem hory dlouhá 2500 m. Průměrný sklon rovné cesty z údolí na vrchol je 10°. Jaká je reálná délka cesty z údolí na vrchol hory? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 28: Nákres k příkladu 5

Řešení:

Sklon cesty = α, délka cesty na mapě = m, délka cesty = d

$$\cos\alpha = \frac{m}{d}$$

$$d = \frac{m}{\cos\alpha}$$

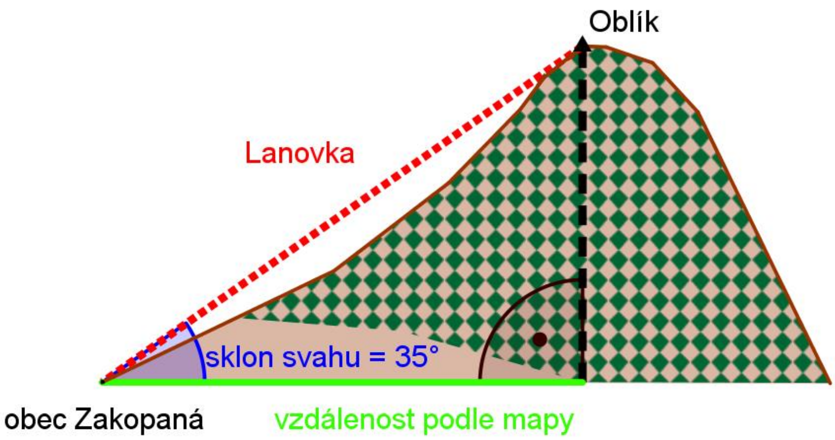
$$d = \frac{2500}{\cos 10°}$$

$$d \doteq 2539 \text{ m}$$

Reálná délka cesty 2539 m.

Příklad 6

Kopec Oblík má svah s průměrným sklonem 35°. Na úpatí tohoto kopce leží obec Zakopaná. Podle mapy je vzdálenost z okraje obce na vrchol kopce 820 m. Jak dlouhá by musela být lanovka, aby vedla ze Zakopané až na vrchol Oblíku? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 29: Nákres k příkladu 6

Řešení:

Sklon svahu = α, délka cesty na mapě = m, délka lanovky = d

$$\cos\alpha = \frac{m}{d}$$

$$d = \frac{m}{\cos\alpha}$$

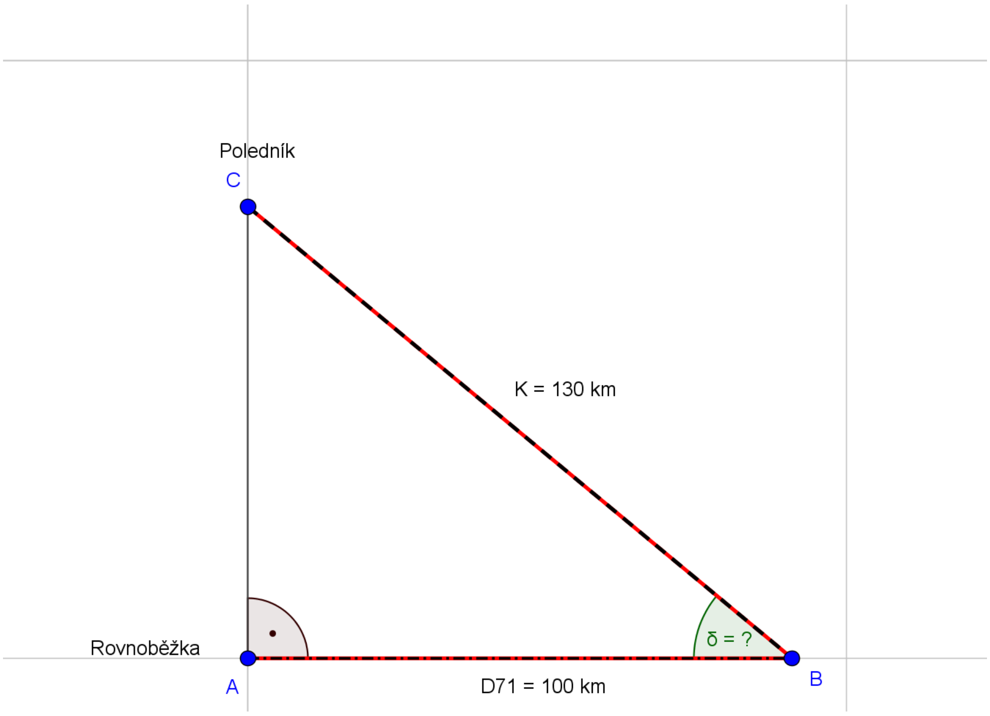
$$d = \frac{820}{\cos 35°}$$

$$\underline{\underline{d \doteq 1001\ \mathrm{m}}}$$

Lanovka by musela být dlouhá 1001 m.

Příklad 7

Město A a město B leží na stejné rovnoběžce. Mezi nimi vede rovná dálnice D71 o délce 100 km ($|D71| = 100$ km). Město C leží na stejném poledníku jako město A. Z města C vede rovný železniční koridor K do města B, který je dlouhý 130 km ($|K| = 130$ km). Zjistěte, jaký úhel svírá dálnice D71 se železnicí K. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 30: Nákres k příkladu 7

Řešení:

$$\cos\delta = \frac{|K|}{|D71|}$$

$$\cos\delta = \frac{100}{130}$$

$$\cos\delta \doteq 0{,}769\,2$$

$$\underline{\underline{\delta \doteq 40°}}$$

Dálnice D71 svírá se železnicí K úhel 40°.

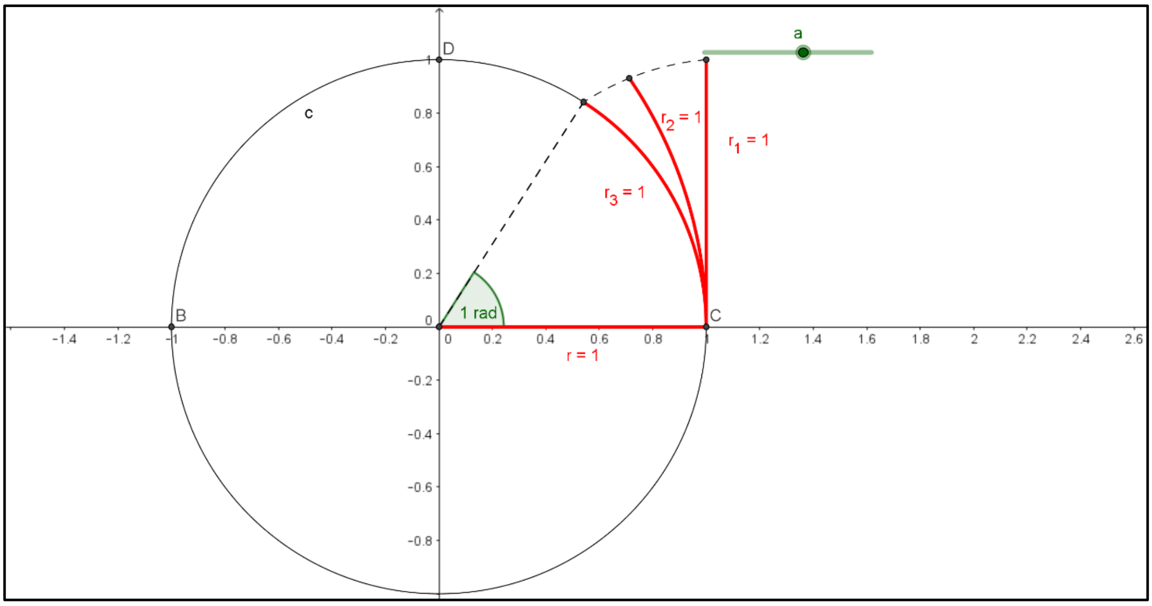
3 Rozšíření funkce sinus a kosinus pro libovolně velký úhel

Z předchozích konstrukcí už víme, co to je sinus a kosinus úhlu a jak vypadají na intervalu $(0°;\ 90°)$. Nyní jejich interval rozšíříme na $(-\infty;\ \infty)$. Hodnotu $\sin\alpha$ označíme y_C (souřadnice y bodu C na kružnici o poloměru 1), hodnotu $\cos\alpha$ označíme x_C (souřadnice x bodu C na kružnici o poloměru 1). Sinus nazveme funkcí sinus x ($y = \sin x$), která každému x z definičního oboru přiřazuje hodnotu y_C, náležící do oboru hodnot. Kosinus nazveme funkcí kosinus x ($y = \cos x$), která každému x z definičního oboru přiřazuje hodnotu x_C, náležící do oboru hodnot.

3.1 Oblouková míra

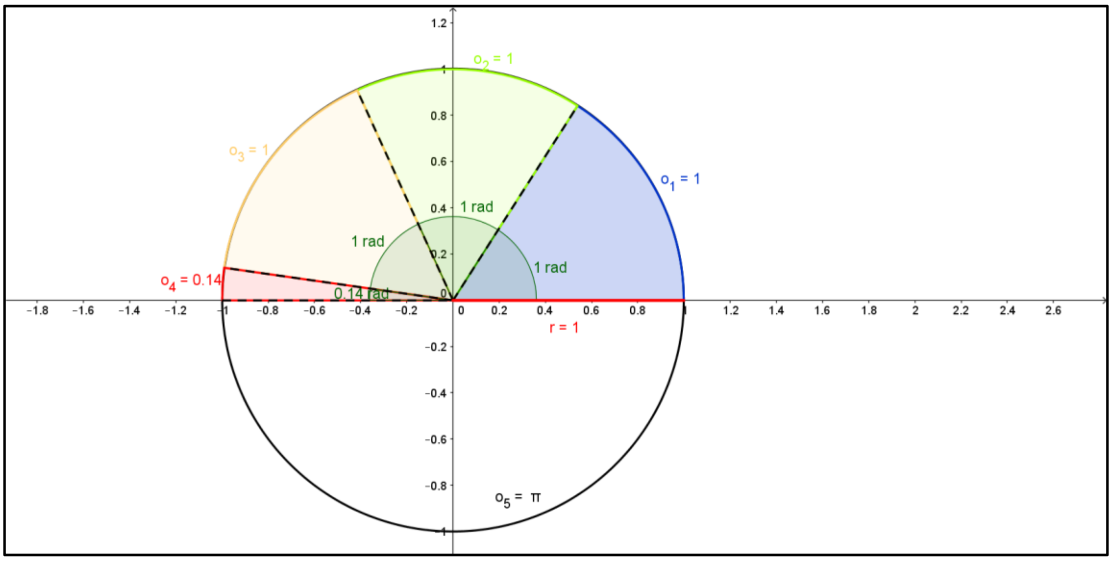
Velikost úhlu lze vyjádřit dvěma způsoby, úhlem nebo velikosti oblouku kružnice o poloměru 1, který daný úhel vymezuje. Už v konstrukci Převedení velikosti osy úhlu si můžeme všimnout, že každému úhlu odpovídá určitý oblouk kružnice. Základní jednotkou velikosti obloukové míry je radián.

Radián vymezuje úhel, pro který platí, že délka oblouku vymezeného tím úhlem je stejná jako poloměr kružnice, na které oblouk leží (Obr. 31).



Obr. 31: Demonstrace vztahu velikosti radiánu a poloměru

Plný úhel, který je zobrazen celou kružnicí obsahuje 2π radiánů, protože obvod kružnice má vzorec $2\pi r$ a velikost oblouku vymezeným radiánem je rovna poloměru r. Polovina kružnice vyjadřující úhel $180°$ obsahuje π radiánů (Obr. 32).



Obr. 32: Počet radiánů v polokružnici.

Velikost radiánu lze snadno odvodit ze vzorce pro obvod kružnice:

Plný úhel je $360°$, tomu odpovídá celá kružnice s obvodem $2\pi r$.

$$360° \approx 2\pi r$$

Jelikož poloměr r odpovídá velikosti oblouku vymezeným radiánem, můžeme napsat

$$360° = 2\pi rad$$

$$\frac{360°}{2\pi} = rad$$

$$\frac{180°}{\pi} = rad$$

$$rad = 57{,}296°$$

K převedení 1° na radiány stačí pouze výsledný vzorec převrátit.

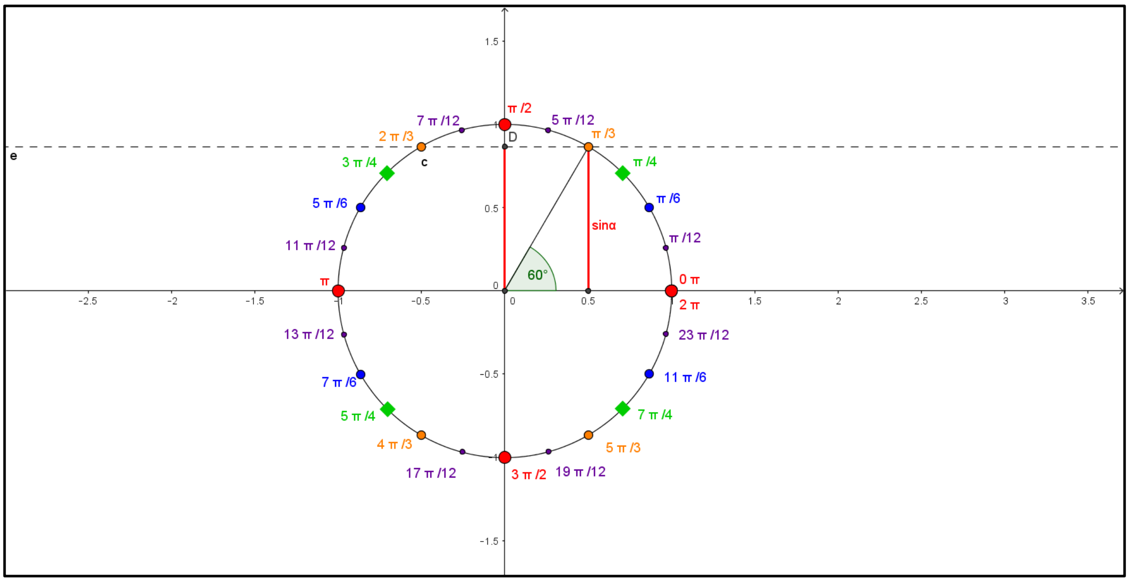
$$1° = \frac{\pi}{180} rad$$

Tab. 2: Tabulka často užívaných úhlů vyjádřených ve stupních a radiánech

Stupně	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Stupně		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radiány		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

3.2 Jednotková kružnice

K určování velikosti sinu úhlu lze využít jednotkové kružnice (kružnice o poloměru 1). Pokud jsou na ní vyneseny hodnoty základních úhlů v radiánech, lze také velice dobře využít ke znázornění vztahu stupeň – radián (Obr. 33).



Obr. 33: Jednotková kružnice s vyznačenými hodnotami radiánu

Z jednotkové kružnice lze zjistit nejenom hodnotu sinu a kosinu úhlu ale také některé vlastnosti, které mají funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$. Například že v intervalu (0; 2π) existují dva úhlu, $\alpha, \pi - \alpha$, které mají stejnou hodnotu $\sin\alpha$ a $\alpha, -\alpha$, které mají stejnou hodnotu $\cos\alpha$. Dále můžeme zjistit, že když se úhel α zvětší o 2π, bude mít stále stejnou hodnotu sinu i kosinu. To platí, i když ho zvětšíme o $4\pi, 6\pi, 8\pi$, z toho odvodíme, že platí:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}, \mathrm{x} \in \mathbb{R}$$

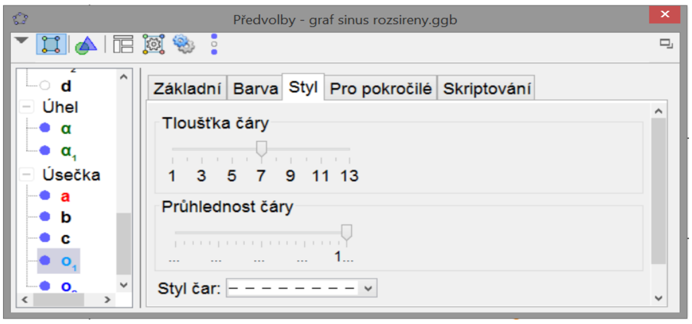
$$\cos x = \cos(x + 2k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}, \mathrm{x} \in \mathbb{R}$$

Tab. 3: Hodnota $\sin x$ a $\cos x$ vybraných úhlů

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

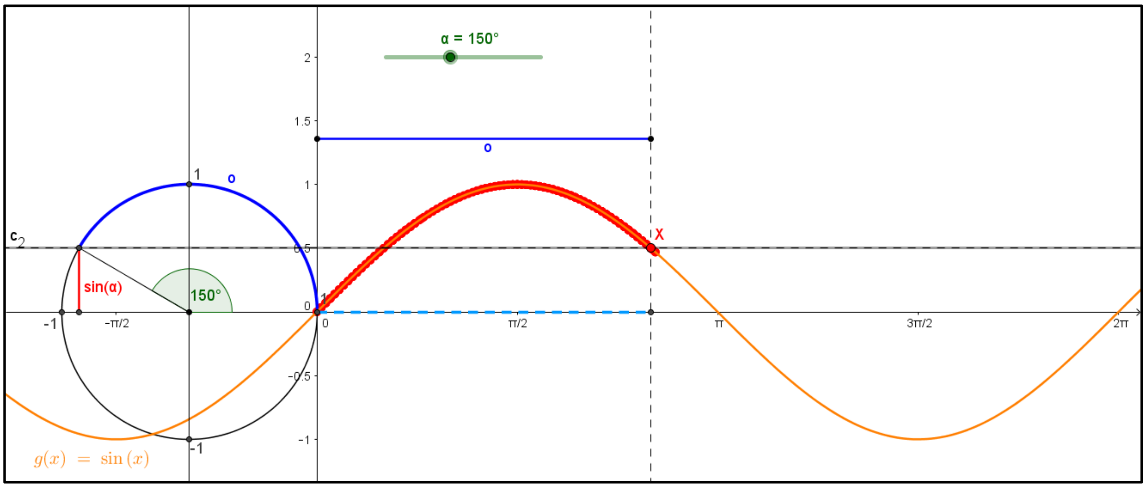
3.3 Dynamické grafy funkcí sinus a kosinus s jednotkovou kružnicí

Nejprve vytvoříme bod A o souřadnicích $[-1;\ 0]$. Poté použijeme nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem* a sestrojíme kružnici k se středem v bodu A s poloměrem 1. Nástrojem *Průsečík* vytvoříme průsečíky kružnice k a osy x. Pravý průsečík nazveme P_1 (P_1) a levý P_3 (P_3). Pomocí nástroje *Kolmice* vytvoříme přímku a_1, která bude kolmá na osu x a bude procházet bodem A. Poté sestrojíme průsečíky přímky a_1 s kružnicí k, horní průsečík nazveme P_2 a dolní P_4. Nyní po kliknutí pravým tlačítkem na jeden z bodů vybereme možnost *Vlastnosti* a u všech u položky *Zobrazit popis* zvolíme možnost *Popisek*. Do kolonky *Popisek* napíšeme 1 u bodů P_1, P_2 a -1 u bodů P_3 a P_4. Použitím nástroje *Posuvník* vytvoříme posuvník α, v jeho nastavení zvolíme možnost *Úhel*, interval necháme přednastavených 0°až 360°. Dále vytvoříme u bodu A úhel α_1 o velikosti hodnoty posuvníku α tak, že vybereme nástroj *Úhel dané velikosti*, klikneme nejprve na bod P_1, poté na bod A, do nově otevřeného okna napíšeme α. S vytvořeným úhlem vznikne bod P_1‘, který leží na kružnici k, protože je to bod P_1 otočený o úhel α_1. Tento bod přejmenuje na bod C a nástrojem *Úsečka* povedeme úsečku z bodu A do C, nazveme ji úsečka b. Nyní vytvoříme kolmici d k ose x procházející bodem C a její průsečík s osou x, který nazveme bod B. Poté kolmici d můžeme skrýt kliknutím na modrý kruh v algebraickém okně vedle zápisu přímky d. Dále vytvoříme úsečky $|BC|$ (úsečka a) a $|AB|$ (úsečka c) a bod X, který bude mít souřadnice $[\alpha;\ sin\alpha]$. Pro vytvoření bodu X napíšeme do vstupního pole $X = (\alpha, sin(\alpha))$. Bodem X povedeme přímku a_2 kolmou k ose x a přímku c_2 kolmou k přímce a_2. Vidíme, že přímka c_2 prochází i bodem C a je rovnoběžná s osou x. Dále vytvoříme průsečík přímky a_2 s osou x, bod D. Sestrojíme úsečku P_1D a nazveme ji o_1, pomocí nástroje *Kruhový oblouk* vytvoříme kliknutím na bod A, poté na bod P_1 a nakonec na bod C, oblouk mezi body P_1 a C, nazveme ho o. Nyní vytvoříme graf funkce sinus x, do vstupního pole napíšeme $f(x) = sin(x)$. Poté pro větší názornost sestrojíme pomocí nástroje *Úsečka s pevnou délkou* přímku o_2, která bude mít počáteční bod na ose y, nejlépe v oblasti nad hodnotou $y = 1$, a velikost oblouku o (do kolonky *Délka* v okně *Úsečka s pevnou délkou napíšeme* pouze o). Ještě také upravíme popisky osy x. Po kliknutí pravým tlačítkem do nákresny vybereme možnost *Nákresna*, otevře se okno *Předvolby* a v záložce *OsaX* zaškrtneme pole *Vzdálenost* a zvolíme vzdálenost $\pi/2$. Popisky osy x se změní z čísel na násobky $\pi/2$.



Obr. 34: Nastavení stylu čar

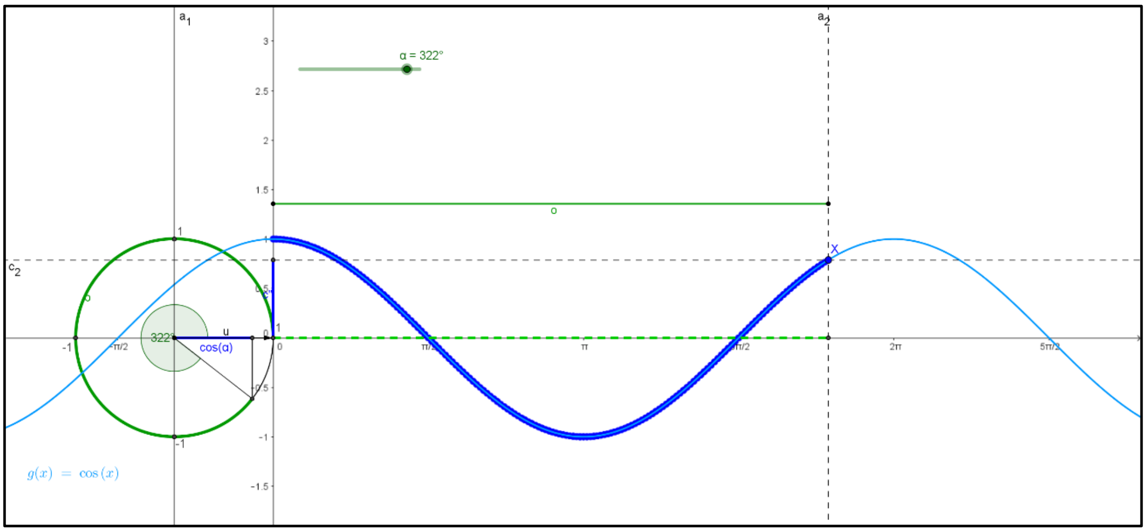
Nakonec konstrukci pro větší přehlednost barevně upravíme. Ve vlastnostech v záložce *Barva* nastavíme pro kruhový oblouk o a úsečku o_2 např. modrou barvu, pro úsečku a, bod X červenou barvu, pro úsečku o_1 světle m modrou barvu a pro funkci $f(x)$ barvu oranžovou. Můžeme nastavit i jiné barvy, ale o a o_2 by měli mít stejnou barvu, o_1, a, $f(x)$ by měli mít každý jinou barvu, ostatním objektům nastavíme černou barvu. Ve vlastnostech všech barevných objektů se podíváme do záložky *Styl* a nastavíme tloušťku čáry na vyšší číslo, u přímek a_2, c_2 a úsečky o_1 vybereme styl čar čárkovaný (Obr. 34). Dále v záložce Základní u většiny objektů odznačíme pole Zobrazit popis, označené ho necháme pouze u objektů P_1, P_2, P_3, P_4, X, o, α_1, $f(x)$, a, o_2. U úhlu α_1 změníme popis na možnost *Hodnota*, u funkce $f(x)$ na *Název a hodnota*. Pro úsečky a, o_2 vybereme možnost *Popisek*, do kolonky popisek napíšeme $sin(\alpha)$ u úsečky a, jelikož ze vztahu $\sin\alpha = \dfrac{a}{b}$, pro $b = 1$, vyplývá, že $sin\ \alpha\ =\ a$. Úsečce o_2 zvolíme popisek o, aby bylo patrné, že její velikost je stejná jako oblouku o.



Obr. 35: Dynamická konstrukce grafu funkce $\sin x$

Konstrukce grafu funkce $\cos x$ bude mít opět základ v konstrukci pro sinus. Bude třeba pouze několika úprav předchozí konstrukce. Straně a skryjeme popis a nastavíme jí černou barvu, straně c napíšeme popisek $\cos\alpha$, tento popisek zobrazíme a nastavíme jí barvu jinou než černou. Bodu X změníme souřadnice na $[\alpha, \cos\alpha]$. Pomocí nástroje *Osa úhlu* vytvoříme osu úhlu $\sphericalangle P_1AP_2$ a přes tuto osu sestrojíme obraz strany c, stranu c', s počátkem v bodu A. Následovně použijeme nástroj *Posunutí*, nejprve označíme stranu c', poté označíme bod A a bod P_1. Tímto vznikne strana c'', obraz strany c posunutý na osu y, kde bude zobrazovat hodnotu $\cos\alpha$. Strana c'' bude mít krajní body A'' a B''. Osu úhlu $\sphericalangle X_1AP$, stranu c', body A', A'', B' a vektor u skryjeme. Bodu B'' skryjeme popis.

Nástrojem *Rovnoběžka* vytvoříme přímku c_2 rovnoběžnou s osou x a procházející bodem X.



Obr. 36: Dynamická konstrukce grafu funkce $\cos x$

3.4 Vlastnosti funkce $y = \sin x$

Z předchozí konstrukce a z jednotkové kružnice můžeme určit vlastnosti funkce $y = \sin x$.

1) Definiční obor

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, $D_f = \mathbb{R}$

2) Omezenost funkce

Funkce je shora i zdola omezená, $|\sin x| \leq 1$.

3) Obor hodnot

Oborem hodnot je $H_f = \langle -1; 1 \rangle$

4) Periodicita funkce

Funkce je periodická s periodou 2π.

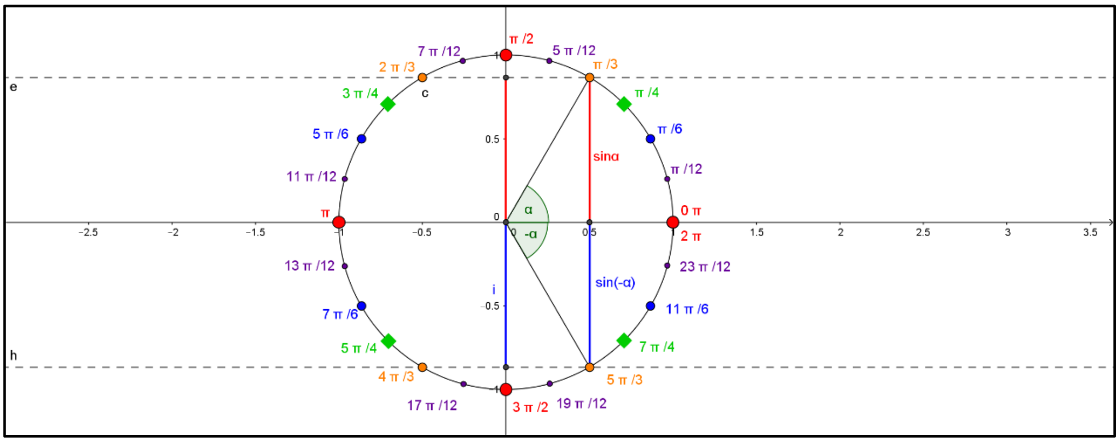
5) Sudost/lichost funkce

Funkce $y = \cos x$ je lichá, protože platí:

a) $\forall x \in D_f \; existuje - x \in D_f$

b) $\forall x \in D_f \; platí \; f(-x) = -f(x)$

Vztah a) určující lichost je dobře patrný z grafu $y = \sin x$, b) je zase lépe znatelný z jednotkové kružnice (Obr. 37).



Obr. 37: Ukázka lichosti funkce $\sin x$

6) Minimum a maximum funkce

Na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ snadno určíme maximum i minimum funkce z jednotkové kružnice. Nejvyšší možné hodnoty nabývá $\sin x$ v $\frac{\pi}{2}$, naopak nejmenší hodnoty v $\frac{3\pi}{2}$.

Z toho vyplývá, že v tomto intervalu bude mít maximum v $\frac{\pi}{2}$ a minimum v bodě $\frac{3\pi}{2}$.

Jelikož víme, že je funkce periodická, můžeme tedy napsat, že v celém D_f je:

$$\text{Maximum v bodu } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

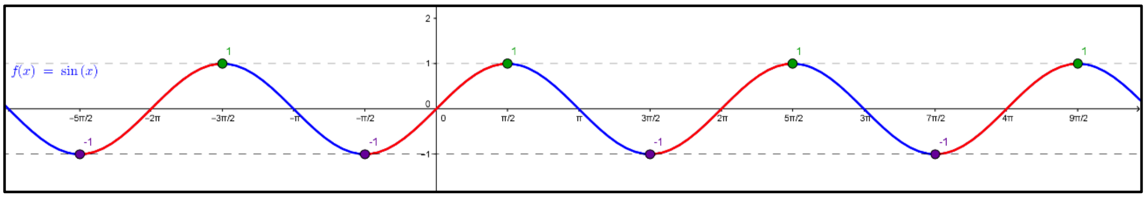
$$\text{Minimum v bodu } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

7) Průběh funkce – rostoucí, klesající

Z grafu i jednotkové kružnice je patrné, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ bude průběh funkce následovný:

Tab. 4: Průběh funkce $y = \sin x$

$\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$	$\langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$	$\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \rangle$	$\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \rangle$
rostoucí	klesající	klesající	rostoucí



Obr. 38: Graf funkce $\sin x$ s vyznačenými intervaly kdy je funkce rostoucí

V celém definičním oboru můžeme rostoucí i klesající části funkce vymezit minimy a maximy funkce (Obr. 38). Průběh funkce pro celý D_f bude:

$$\text{Rostoucí v intervalech } \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

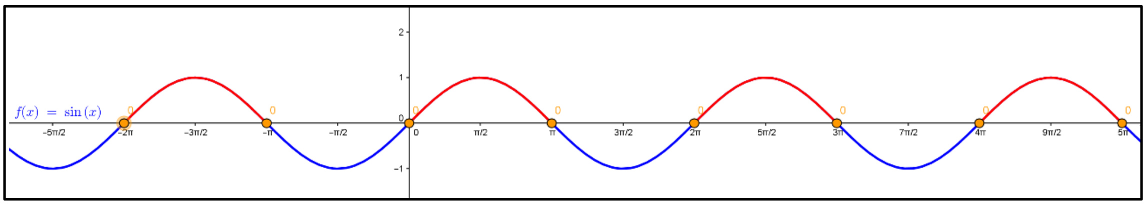
$$\text{Klesající v intervalech } \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

8) Průběh funkce – kladné, záporné hodnoty, nulové body

Funkce $y = \sin x$ nabývá nulové hodnoty v bodech $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kladných hodnot nabývá v intervalech $(2k\pi;\ \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

Záporné hodnoty má na intervalech $(\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$



Obr. 39: Graf funkce $\sin x$ s vyznačenými intervaly, kdy má funkce kladné hodnoty

3.5 Vlastnosti funkce $y = \cos x$

1) Definiční obor

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, $D_f = \mathbb{R}$

2) Omezenost funkce

Funkce je shora i zdola omezená, $|\cos x| \leq 1$.

3) Obor hodnot

Oborem hodnot je $H_f = \langle -1; 1 \rangle$

4) Periodicita funkce

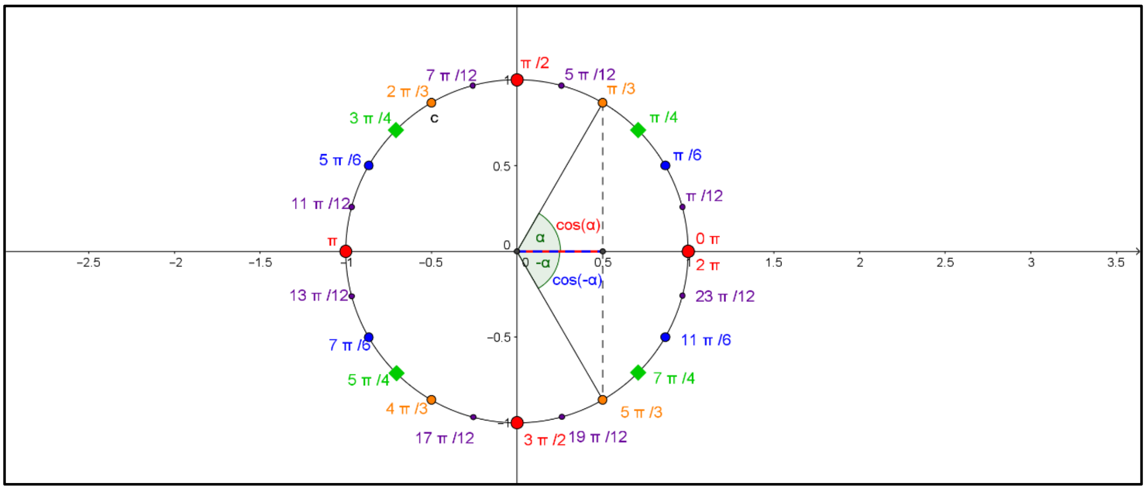
Funkce je periodická s periodou 2π.

5) Sudost/lichost funkce

Funkce $y = \cos x$ je sudá, protože platí:

c) $\forall x \in D_f$ *existuje* $-x \in D_f$

d) $\forall x \in D_f$ *platí* $f(-x) = f(x)$



Obr. 40: Ukázka sudosti funkce $\cos x$

6) Minimum a maximum funkce

Na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ snadno určíme maximum i minimum funkce z jednotkové kružnice. Nejvyšší možné hodnoty nabývá $\cos x$ v 0, naopak nejmenší hodnoty vπ. Z toho vyplívá, že v tomto intervalu bude mít maximum v 0 a minimum v bodě π.

Jelikož víme, že je funkce periodická, můžeme tedy napsat, že v celém D_f je:

Maximum v bodu $x = 2k\pi, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

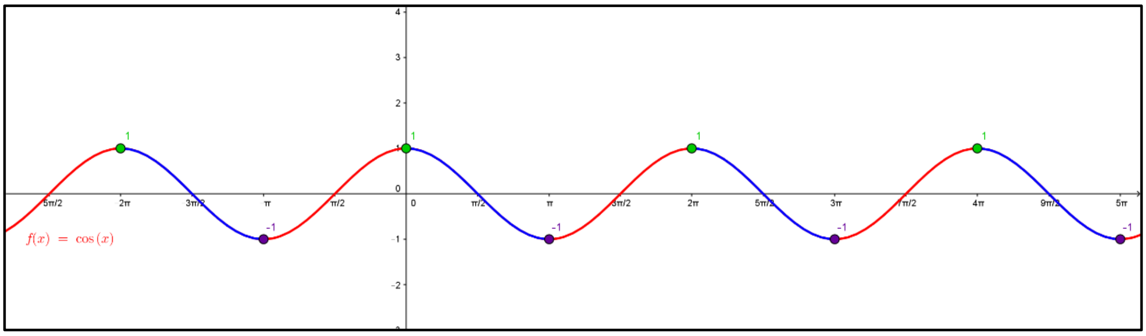
Minimum v bodu $x = \pi + 2k\pi, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

7) Průběh funkce – rostoucí, klesající

Z grafu i jednotkové kružnice je patrné, že v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ bude průběh funkce následovný:

Tab. 5: Průběh funkce $y = \cos x$

$\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$	$\langle \frac{\pi}{2}; \pi\rangle$	$\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\rangle$	$\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\rangle$
klesající	klesající	rostoucí	rostoucí



Obr. 41: Graf funkce $\cos x$ s vyznačenými intervaly kdy je funkce rostoucí

V celém definičním oboru můžeme rostoucí i klesající části funkce vymezit minimy a maximy funkce (Obr. 31). Průběh funkce pro celý D_f bude:

Rostoucí v intervalech $\langle -\pi + 2k\pi; 2k\pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$

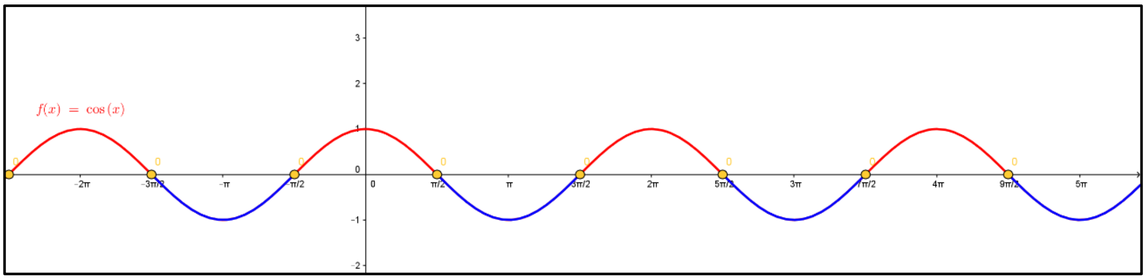
Klesající v intervalech $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$

9) Průběh funkce – kladné, záporné hodnoty, nulové body

Funkce $y = \cos x$ nabývá nulové hodnoty v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kladných hodnot nabývá v intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Záporné hodnoty má na intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



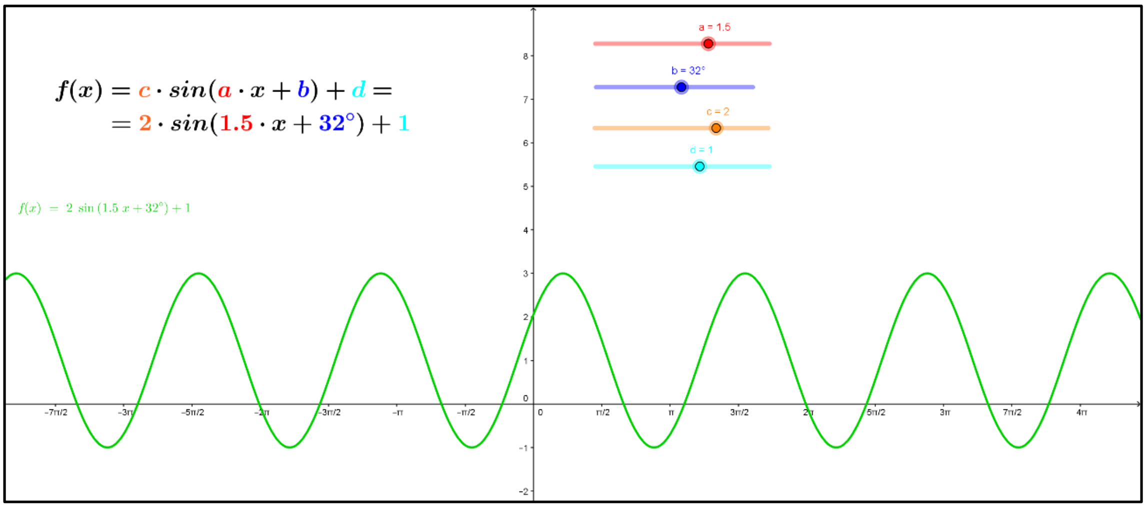
Obr. 42: Graf funkce sin x s vyznačenými intervaly kdy má funkce kladné hodnoty

Podle uvedených vlastností můžeme určit, že graf funkce kosinus je stejný jako graf funkce sinus posunutý o $\frac{\pi}{2}$ po ose x v záporném směru (posunutý doleva).

3.6 Dynamická konstrukce vlivu parametrů na graf funkce sinus a kosinus

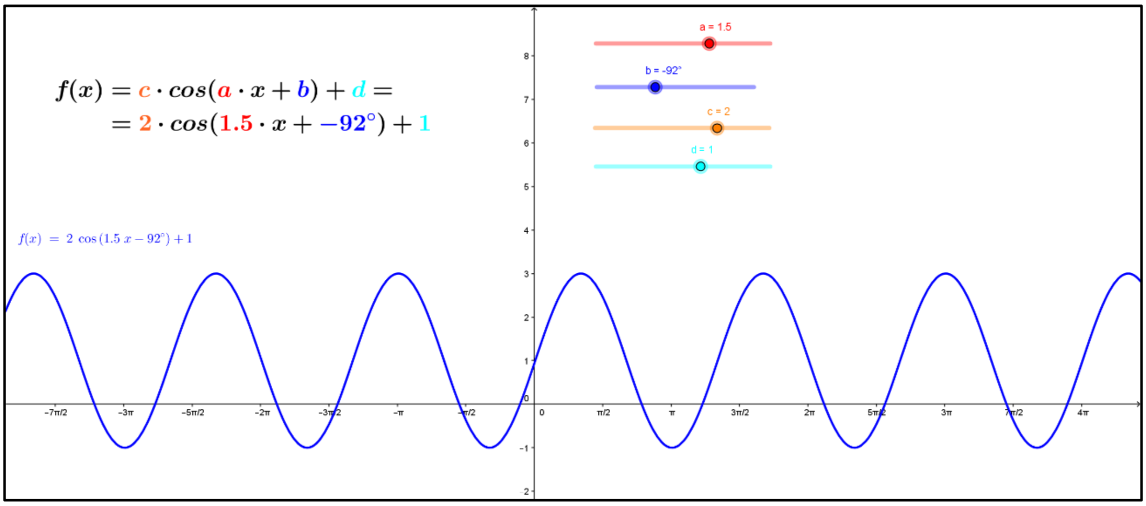
Nejprve nástrojem *Posuvník* vytvoříme čtyři posuvníky, a, b, c, d. Posuvníky a, c, d budou číselné s přednastaveným intervalem -5 až 5. V nastavení posuvníku b zvolíme možnost *Úhel* a interval od $-360°$ do $360°$. Poté vygenerujeme funkci $sin(x)$ tak, že do vstupního pole napíšeme $f(x) = c * sin(a * x + b) + d$. Dále klikneme pravým tlačítkem do nákresny, otevřeme možnost *Vlastnosti* a v záložce *Barvy* nastavíme každému posuvníku jinou barvu. Aby byl více zřetelný předpis vytvořené funkce, napíšeme ho pomocí nástroje *Text*. Do okna tohoto nástroje napíšeme $f(x) = c \cdot sin(a \cdot x + b) + d = [c] \cdot sin([a] \cdot x + [b]) + [d]$ (místo písmen v hranatých závorkách vybereme příslušné objekty z položky *Objekty*, např. místo $[a]$ vybereme objekt a). Pokud bychom chtěli mít parametry v předpisu rovnice stejně barevné jako posuvníky, označíme v okně *Text* pole *LaTeX vzorec* a napíšeme $f(x) =\backslash textcolor\{\cdots\}c\backslash cdot \sin(\backslash textcolor\{\cdots\}a\backslash cdot\ x + \backslash textcolor\{\cdots\}b) + \backslash$

$textcolor\{\cdots\}d = \backslash textcolor\ \{\cdots\}\{[c]\}\backslash cdot\ \sin(\backslash textcolor\{\cdots\}\{[a]\}\backslash cdot\ x + \backslash$ $textcolor\{\cdots\}\{[b]\}) + \backslash textcolor\{\cdots\}\{[d]\}$ (místo teček ve složených závorkách doplníme anglický název barvy, kterou má daný posuvník, např. je-li posuvník a červený, napíšeme do závorky před $\{a\}$, $\{[a]\}$ red).



Obr. 43: Dynamický graf demonstrující vliv parametrů na $\sin x$

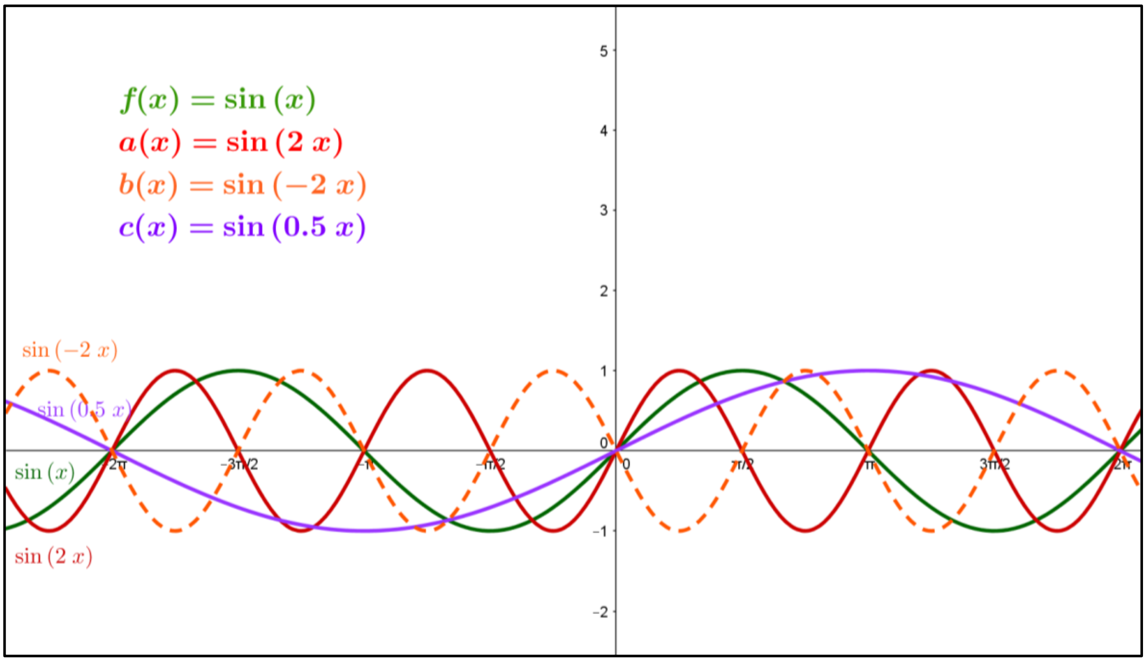
Konstrukce dynamické grafu funkce kosinus bude opět téměř stejná jako konstrukce pro funkci sinus. Změna bude pouze v předpisu funkce, který bude $f(x) = c \cdot sin(a \cdot x + b) + d$. Předpis funkce vytvořený nástrojem *Text* bude mít podobu $f(x) = c \cdot sin(a \cdot x + b) + d = [c] \cdot sin([a] \cdot x + [b]) + [d]$ (místo písmen v hranatých závorkách vybereme příslušné objekty).



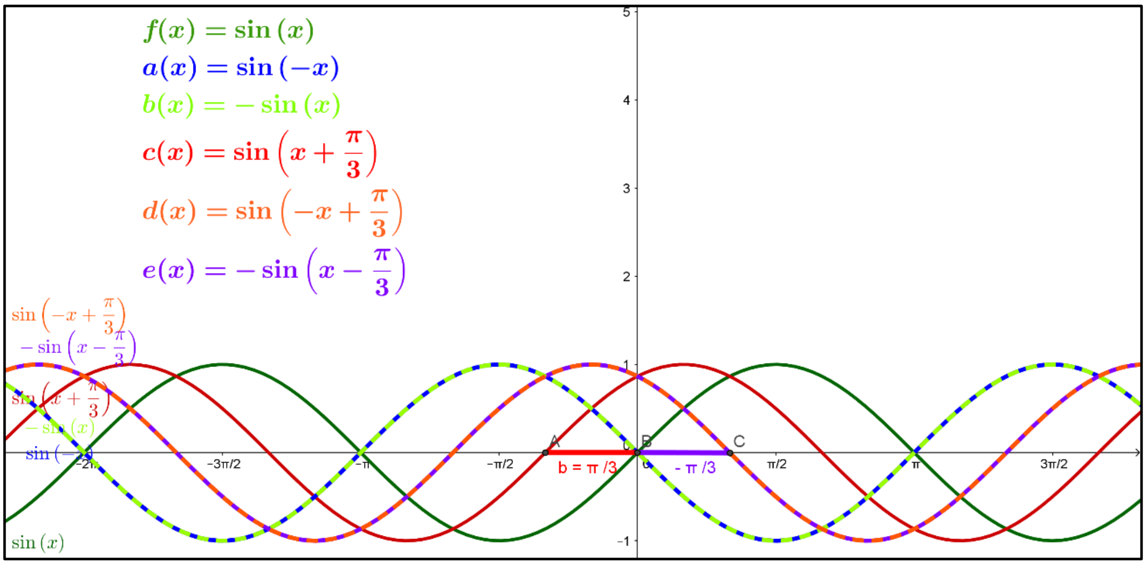
Obr. 44: Dynamický graf demonstrující vliv parametrů na $\cos x$

3.7 Vliv parametrů na graf funkce sinus a kosinus

Hodnota parametru a má vliv na velikost periody funkce. Pokud je $|a| < 1$, perioda funkce se zvětšuje, to znamená, že minima a maxima funkce se od sebe budou vzdalovat. Když je $|a| > 1$, perioda funkce se zmenšuje a extrémy funkce se k sobě přibližují. Velikost periody funkce bude $2\pi/|a|$. (Obr. 45) Pokud je parametr a záporný, bude graf funkce překlopený podle $osy\ y$. Pokud je parametr $a < 1$ a parametr $b = 0$, bude se překlopení grafu podle $osy\ x$ jevit stejně jako překlopení podle $osy\ y$, je-li $b \neq 0$, pak bude překlopení okolo $osy\ y$ stejné jako překlopení okolo $osy\ x$ posunuté o hodnotu $-b$ (Obr. 46).

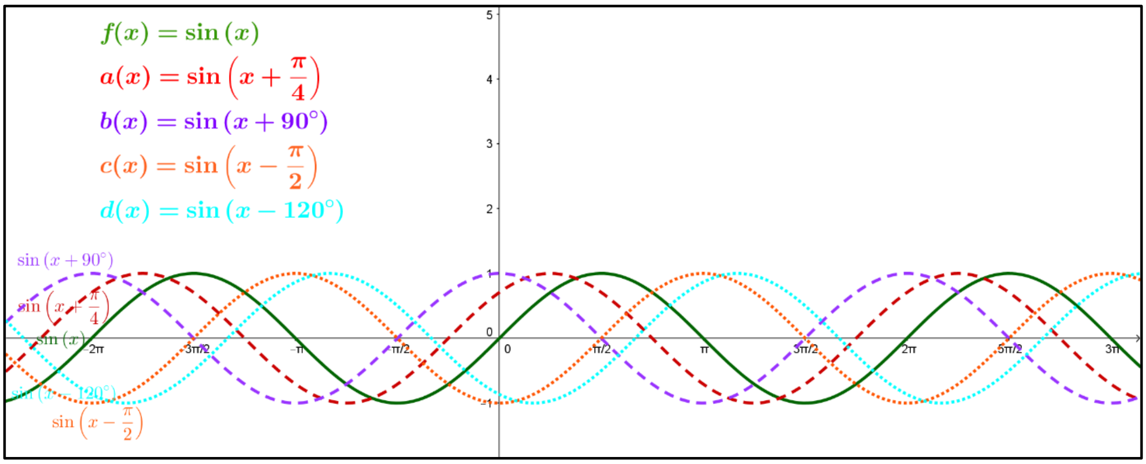


Obr. 45: Vliv parametru a



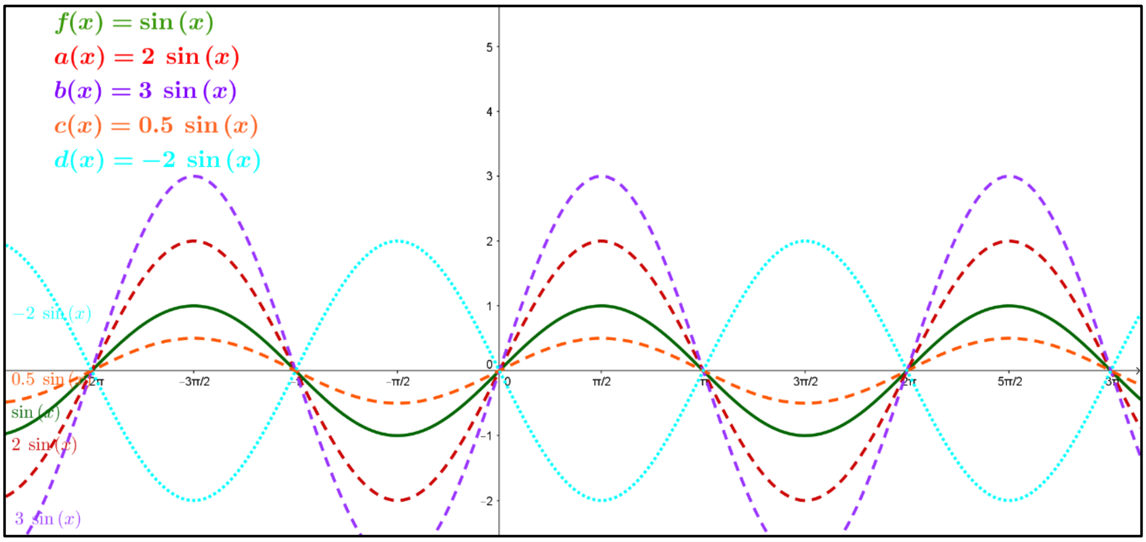
Obr. 46: Vliv záporného parametru a

Parametr b ovlivňuje posunutí grafu funkce po *ose x*. Je-li $b > 0$, graf funkce se posune o hodnotu b ve směru záporné poloosy x (doleva), pokud $b < 0$, graf se posune opačným směrem. Když je parametr $a = 1$, posouvá se graf o hodnotu $|b|$, pokud se parametr $a \neq 1$, graf se posune o $\frac{|b|}{a}$.



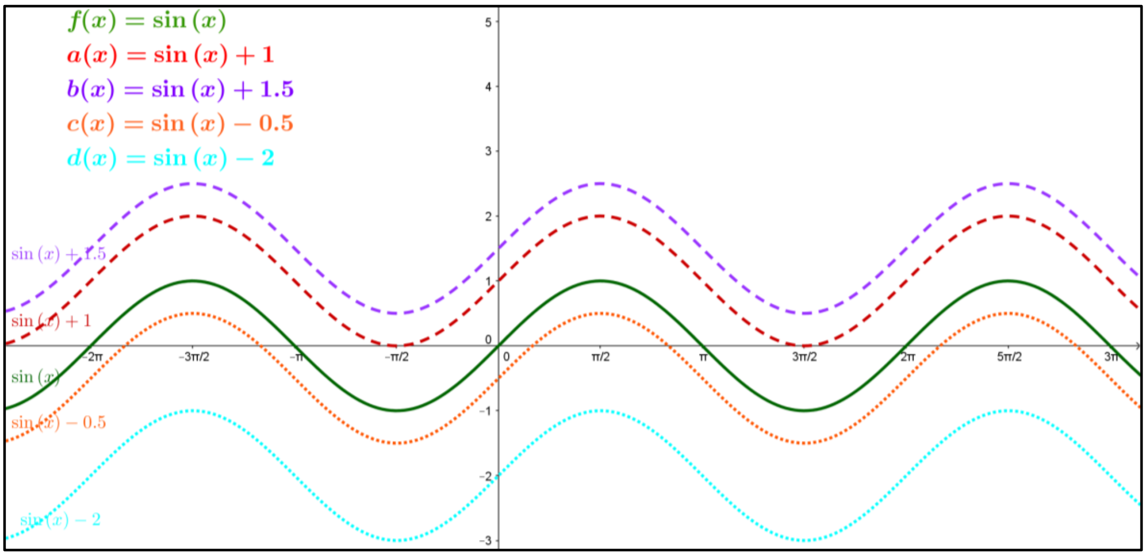
Obr. 47: Vliv parametru b

Velikost parametru c určuje obor hodnot funkce a výškovou vzdálenost maxima a minima funkce (vzdálenost mezi ypsilonovými souřadnicemi extrémů). Se zvětšující se absolutní hodnotou parametru c se zvětšuje obor hodnot, zvyšuje se rozdíl mezi jeho krajními body. Pokud je $c < 0$, graf funkce bude překlopený podle *osy x*.



Obr. 48: Vliv parametru c

Parametr d posouvá graf funkce po *ose* y. Když je $d > 0$, graf bude posunutý ve směru kladné poloosy y (nahoru od osy x) o hodnotu d (ypsilonové souřadnice všech bodů grafu budou o d větší), je-li $d < 0$, graf bude posunutý o $|d|$ opačně.



Obr. 49: Vliv parametru d

Stejný vliv jako na graf funkce sinus mají parametry i na graf funkce kosinus, protože graf funkce kosinus je stejný jako graf funkce sinus posunutý o $\frac{\pi}{2}$ po ose x v záporném směru (posunutý doleva).

3.8 Řešené příklady na procvičení funkce sinus a kosinus pro libovolně velký úhel

Příklad 1

Převeďte dané úhly na radiány a výsledky znázorněte na jednotkové kružnici.

a) $\alpha = 30°$

b) $\beta = 120°$

c) $\gamma = 810°$

d) $\delta = 315°$

e) $\varepsilon = 180°$

f) $\kappa = 210°$

g) $\lambda = 75°$

h) $\mu = 270°$

i) $\sigma = 510°$

j) $\varphi = 300°$

Řešení:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\beta = \frac{2\pi}{3}$

c) $\gamma = \frac{9\pi}{2}$

d) $\delta = \frac{7\pi}{4}$

e) $\varepsilon = \pi$

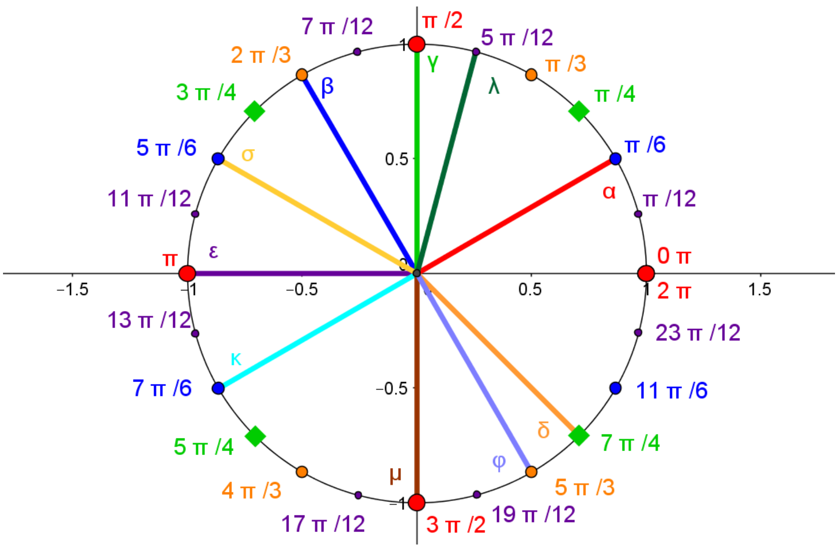
f) $\kappa = \frac{7\pi}{6}$

g) $\lambda = \frac{5\pi}{12}$

h) $\mu = \frac{3\pi}{2}$

i) $\sigma = \frac{17\pi}{6}$

j) $\varphi = \frac{11\pi}{4}$



Obr. 50: Vyznačení velikosti úhlů na jednotkové kružnici

Příklad 2

Vypočítejte hodnotu sinus a kosinus daných úhlů, výsledky uveďte ve zlomku.

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\beta = \frac{2\pi}{3}$

c) $\gamma = \frac{9\pi}{2}$

d) $\delta = \frac{7\pi}{4}$

e) $\varepsilon = \pi$

f) $\kappa = \frac{7\pi}{6}$

g) $\lambda = \frac{10\pi}{3}$

h) $\mu = \frac{3\pi}{2}$

i) $\sigma = \frac{17\pi}{6}$

f) $\varphi = \frac{11\pi}{4}$

Řešení:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\beta = -\frac{1}{2}$

c) $\sin\gamma = 1$ $\quad \cos\gamma = 0$

d) $\sin\delta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin\varepsilon = 0$ $\quad \cos\varepsilon = -1$

f) $\sin\kappa = -\frac{1}{2}$ $\quad \cos\kappa = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\sin\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\lambda = -\frac{1}{2}$

h) $\sin\mu = -1$ $\quad \cos\mu = 0$

i) $\sin\sigma = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\sigma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad 3

Určete, zda uvedené nerovnosti platí.

$\sin 1000° < \sin 370°$	ANO – NE	$\cos 270° > \cos 540°$	ANO – NE
$\sin 750° > \sin 100°$	ANO – NE	$\cos 930° < \cos 330°$	ANO – NE
$\sin 3680° < \sin 720°$	ANO – NE	$\cos 1° > \cos 358°$	ANO – NE
$\sin 1081° > \sin 150°$	ANO – NE	$\cos 250° < \cos 870°$	ANO – NE

Řešení:

$\sin 1000° < \sin 370°$	<u>ANO</u> – NE	$\cos 270° > \cos 540°$	<u>ANO</u> – NE
$\sin 750° > \sin 100°$	ANO – <u>NE</u>	$\cos 930° < \cos 330°$	<u>ANO</u> – NE
$\sin 3680° < \sin 720°$	ANO – <u>NE</u>	$\cos 1° > \cos 358°$	<u>ANO</u> – NE
$\sin 1081° > \sin 150°$	ANO – <u>NE</u>	$\cos 250° < \cos 870°$	ANO – <u>NE</u>

Příklad 4

Zjistěte, jaké číslo bude na místě otazníku.

$\sin\frac{15\pi}{4} =$	$\downarrow$			$-\cos\frac{13\pi}{3} =$	$\downarrow$	**?**	
		$+\cos\frac{9\pi}{4} =$	$\uparrow$			$+\sin\frac{21\pi}{2} =$	$\uparrow$
$+\cos\frac{16\pi}{3} =$	$\downarrow$			$-\sin\frac{35\pi}{6} =$	$\downarrow$		
		$+\sin\frac{37\pi}{2} =$	$\uparrow$			$-\cos\frac{61\pi}{3} =$	$\uparrow$
$-\sin\frac{5\pi}{2} =$	$\rightarrow$			$-\cos\frac{27\pi}{6} =$	$\rightarrow$		

Řešení:

$\sin\frac{15\pi}{4} =$	$\downarrow$	$-\frac{1}{2}$		$-\cos\frac{13\pi}{3} =$	$\downarrow$	0	
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\cos\frac{9\pi}{4} =$	$\uparrow$	-1		$+\sin\frac{21\pi}{2} =$	$\uparrow$
$+\cos\frac{16\pi}{3} =$	$\downarrow$	$-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$		$-\sin\frac{35\pi}{6} =$	$\downarrow$	-1	
$-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$		$+\sin\frac{37\pi}{2} =$	$\uparrow$	$-\frac{1}{2}$		$-\cos\frac{61\pi}{3} =$	$\uparrow$
$-\sin\frac{5\pi}{2} =$	$\rightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}+3}{2}$		$-\cos\frac{27\pi}{6} =$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}$	

Příklad 5

Načrtněte graf funkcí a určete jejich periodu.

a) $g_1: y = \sin 2x$

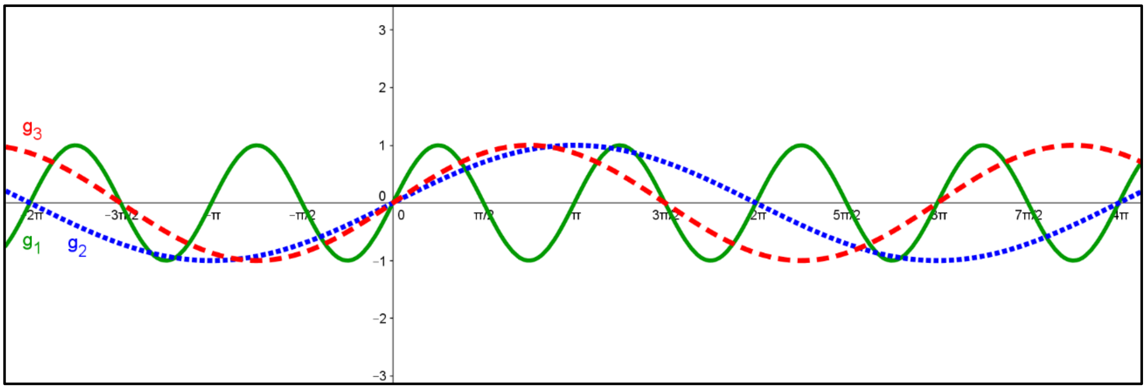
b) $g_2: y = \sin \frac{x}{2}$

c) $g_3: y = \sin \frac{2x}{3}$

Řešení:

Periodu funkce $\sin ax$ či $\cos ax$ zjistíme, když periodu $\sin x$ vydělíme absolutní hodnotou parametru a.

	Perioda
a) $g_1: y = \sin 2x$	π
b) $g_2: y = \sin \frac{x}{2}$	4π
c) $g_3: y = \sin \frac{2x}{3}$	3π



Obr. 51: Grafy funkcí g_1, g_2, g_3

Příklad 6

Načrtněte graf funkcí a určete jejich obor hodnot.

a) $h_1: y = 3\sin x$

b) $h_2: y = \frac{1}{2}\sin x$

c) $h_3: y = \frac{6}{5}\sin x$

Řešení:

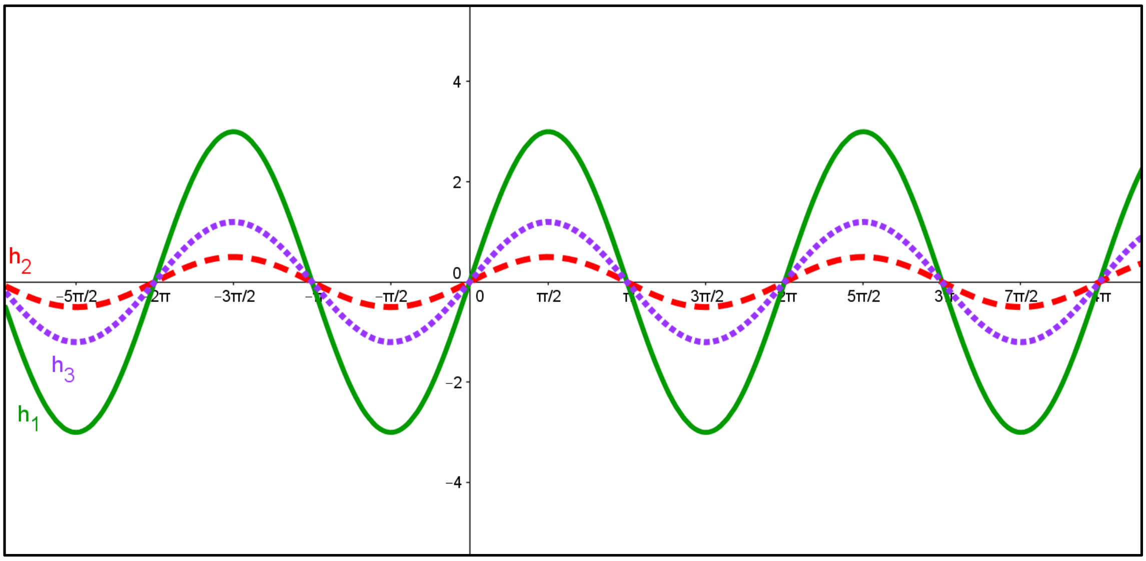
Obor hodnot funkce $c \cdot \sin x$ či $c \cdot \cos x$ zjistíme, když krajní body oboru hodnot $\sin x$ vynásobíme absolutní hodnotou parametru c.

Obor hodnot

a) $h_1: y = 3\sin x$ $\quad H_f = \langle -3; 3 \rangle$

b) $h_2: y = \frac{1}{2}\sin x$ $\quad H_f = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$

c) $h_3: y = \frac{6}{5}\sin x$ $\quad H_f = \langle -\frac{6}{5}; \frac{6}{5} \rangle$



Obr. 52: Grafy funkcí h_1, h_2, h_3

Příklad 7

Načrtněte graf funkcí.

a) $f_1: y = \sin x$

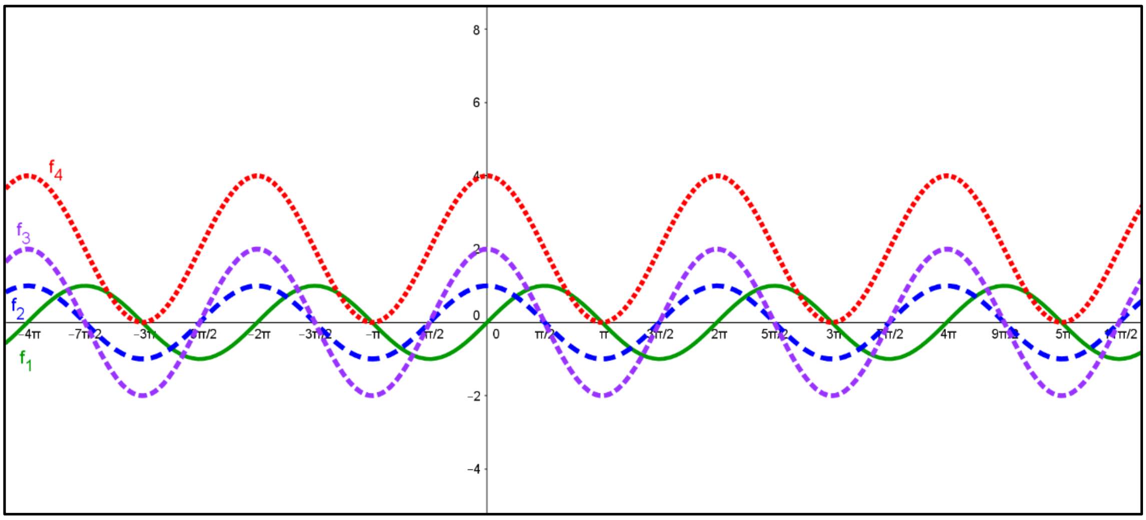
b) $f_2: y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f_3: y = 2 \cdot \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

d) $f_4: y = 2 \cdot \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

Řešení:

Ze zadání je patrné, že jednotlivé funkce vychází z funkce předchozí. Nejprve načrtneme f_1, ta poté bude v podobě f_2 posunutá o $\frac{\pi}{2}$ doleva po ose x. Funkce f_3 bude nabývat dvojnásobných hodnot oproti f_2 a funkci f_4 vytvoříme posunutím f_3 o hodnotu 2 nahoru po ose y.



Obr. 53: Grafy funkcí f_1, f_2, f_3, f_4

Příklad 8

Načrtněte graf funkce.

$$f: y = -3\sin\frac{x}{2} + 1$$

Řešení:

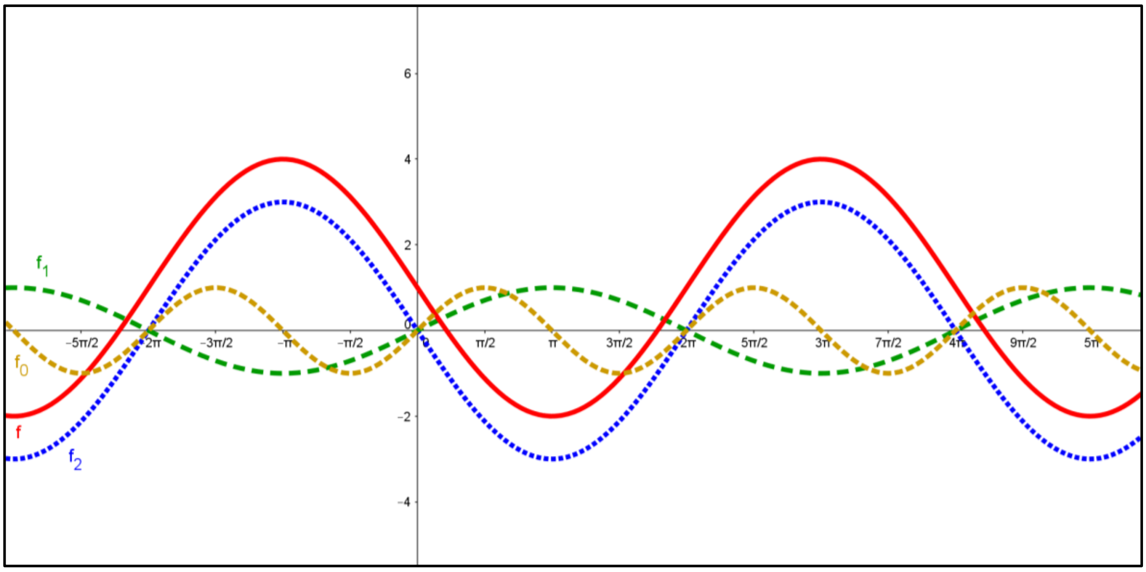
K funkci vytvoříme tři funkce, které budou výsledné funkci předcházet. Funkce na sebe budou navazovat jako v přechozím příkladu.

$$f_0: y = \sin x$$

$$f_1: y = \sin\frac{x}{2}$$

$$f_2: y = -3\sin\frac{x}{2}$$

Nejprve načrtneme základní graf funkce sinus, (graf funkce f_0). Následovně se zaměříme na vnitřní část funkce f, kde je proměnná ovlivněna parametrem a, načrtneme tedy graf funkce f_1. Poté se budeme zabývat parametrem, který násobením ovlivňuje výslednou hodnotu funkce sinus. Načrtneme graf funkce f_2, který bude vycházet z grafu funkce f_1, ale bude nabývat trojnásobných a zároveň opačných hodnot. Tento krok můžeme ještě rozdělit na dvě části, vytvoření grafu s trojnásobnými hodnotami oproti f_2 a překlopení grafu kolem osy x (vytvoření grafu opačných hodnot). Nakonec se zaměříme na parametr d a graf funkce f_2 posuneme o 1 nahoru po ose y.



Obr. 54: Graf funkce f

Příklad 9

Načrtněte graf funkce.

$$g: y = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi) - 3$$

Řešení:

$$g_0: y = \cos x$$

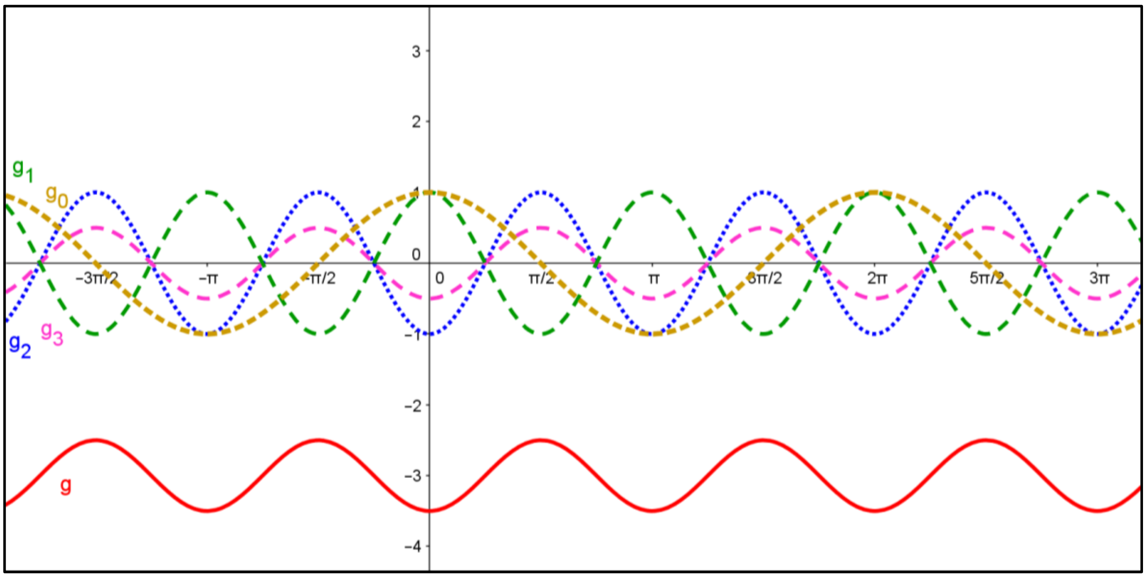
$$g_1: y = \cos 2x$$

$$g_2: y = \cos(2x + \pi) = \cos\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$g_3: y = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)$

$g_4: y = \frac{1}{2}\cos(2x + \pi) - 3$

Postupovat budeme, stejně jako v přechozím příkladu, postupným vytvářením grafů funkcí g_0 až g_4. U funkce g_2 musíme dát pozor, o kolik funkci posouváme, protože je parametr a různý od nuly. Proto si vytknutím parametru a upravíme funkci g_2 do tvaru $\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, ze kterého vidíme, že se funkce posouvá o hodnotu $\left|\frac{b}{a}\right|$, tedy o $\frac{\pi}{2}$.



Obr. 55: Graf funkce g

Příklad 10

Načrtněte graf funkce.

$h: y = 2\cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

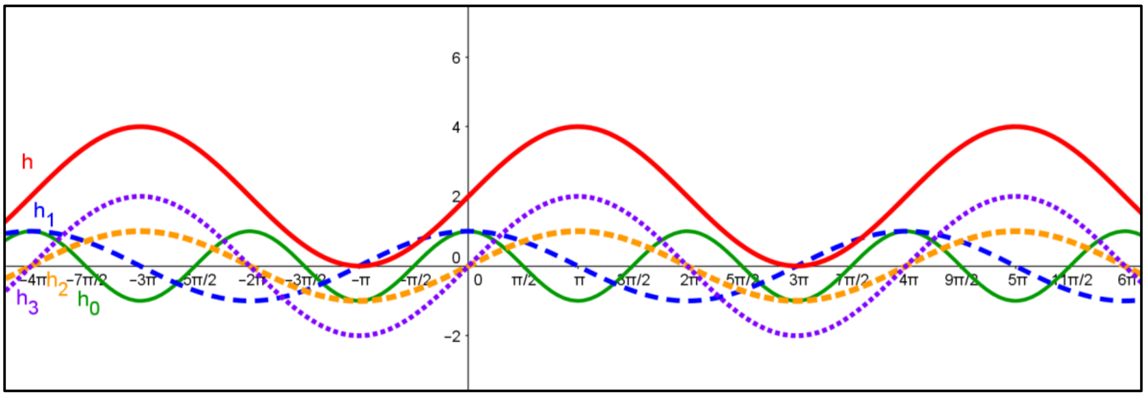
Řešení:

$h_0: y = \cos x$

$h_1: y = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$

$$h_2\colon y = \cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{1}{2}(x - \pi)\right)$$

$$h_3\colon y = 2\cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$



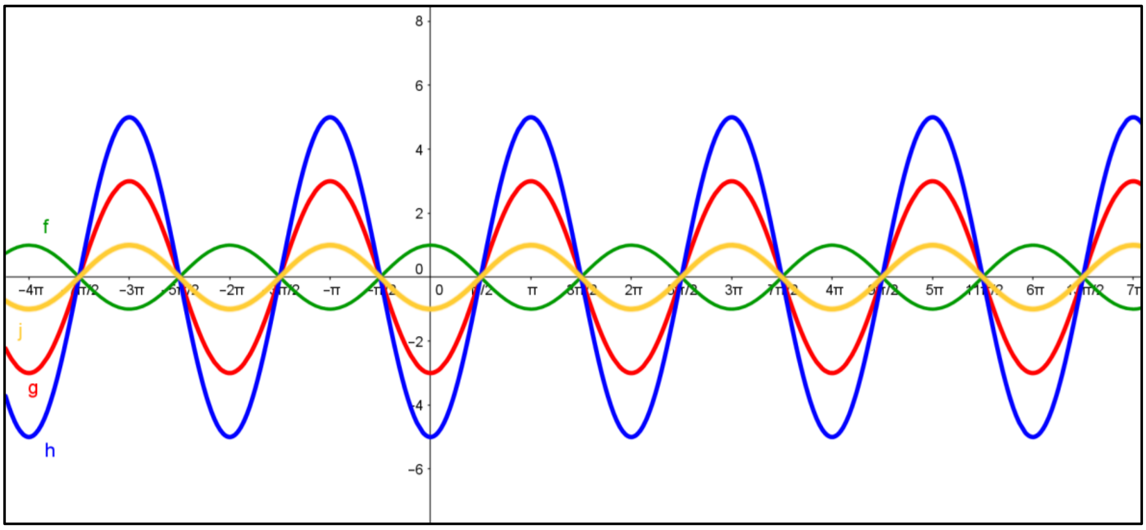
Obr. 56: Graf funkce h

Příklad 11

Načrtněte grafy funkcí.

$$f\colon y = \cos x\,,\ g\colon y = -3\cos x\,,\ h\colon y = -5\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ j\colon y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Řešení:



Obr. 57: Graf funkcí f, g, h, j

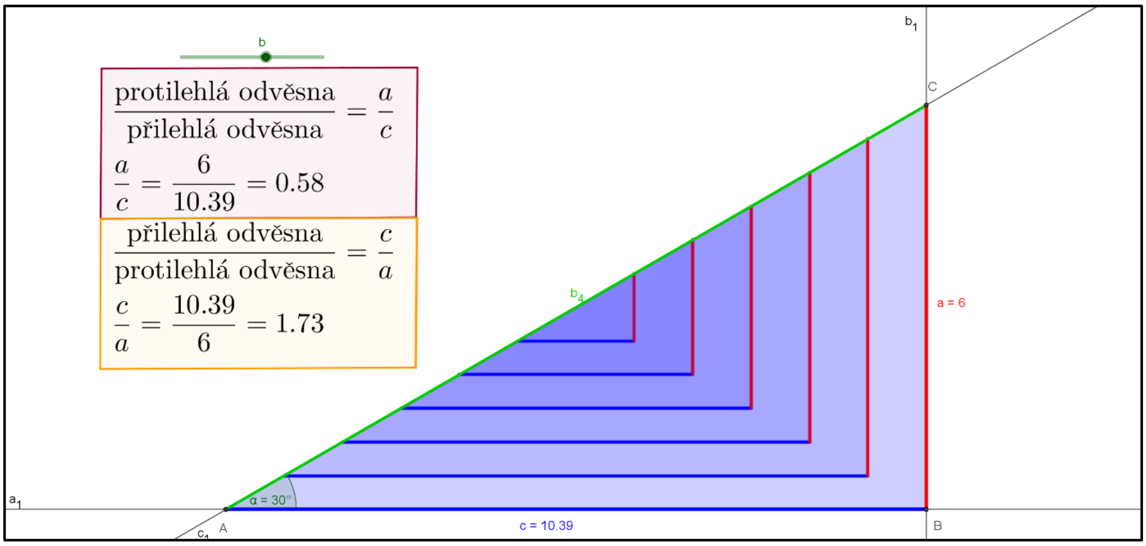
4 Funkce tangens a kotangens pro ostrý úhel

4.1 Dynamická konstrukce poměru délek odvěsen

V popisu postupu tvorby této konstrukce i konstrukcí dalších již vynechám popis využitých nástrojů a jejich způsobu použití, protože budou využity stejné nástroje jako v konstrukcích předchozích. Pokud bude třeba použít nástroje, které se v předchozích konstrukcích neobjevily, budou náležitě popsány.

Nejprve vytvoříme bod S, kterým poté povedeme přímku c_3, rovnoběžnou s osou x. Dále vytvoříme posuvník b o intervalu 0 až 10 a kružnici k se středem v bodě S a poloměrem o čísle (posuvníku) b. Kružnice k bude mít s přímkou c_3 dva průsečíky. Průsečík na pravé straně nazveme A_1, ten na straně levé C_1. Poté vytvoříme u bodu A_1 úhel α_1 o velikosti 30°, s orientací ve směru hodin, můžeme ho také nazvat $\sphericalangle C_1 A_1 P_1$, protože úhlem α vznikne nový bod, který nazveme P_1. Body A_1 a P_1 povedeme přímku a_3, jejíž průsečík s kružnicí k nazveme B_1. Poté zkonstruujeme přímku b_3, která povede body C_1, B_1. V dalším kroku vytvoříme trojúhelník $A_1B_1C_1$. Nyní použijeme nástroj *Otočení o úhel*, označíme trojúhelník, poté klikneme levým tlačítkem myši na bod S a do nově otevřeného okna napíšeme $150°$ (úhel, o který potřebujeme trojúhelník otočit, aby byl trojúhelník ve stejné poloze jako v předchozích konstrukcích podílů stran) a zvolíme možnost Ve směru hodin. Po tomto kroku vznikne otočený obraz, trojúhelník $A_1'B_1'C_1'$. Totéž uděláme i s přímkami a_3, b_3, c_3. Poté skryjeme kružnici k, bod S, trojúhelník $A_1B_1C_1$ a přímky a_3, b_3, c_3. Vrcholy nově vzniklého trojúhelníku přejmenujeme na body A, B, C, odpovídající strany na a, b, c. U vrcholu A vytvoříme úhel α, orientovaný proti směru hodin. U stran trojúhelníku zobrazíme velikosti stran a, b a úhlu α. Přímky můžeme také přejmenovat. Strany trojúhelníku můžeme také barevně upravit.

Nakonec vytvoříme čísla u, v, která budou mít tvar $u = a/c$, $v = c/a$. Pomocný text bude vyjadřovat, jaká odvěsna bude v čitateli, jaká ve jmenovateli podílu a hodnotu, které se podíl rovná. Bude vhodné, když se nezaměříme pouze na poměr délek protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně, ale i na poměr délek přilehlé odvěsny ku protilehlé odvěsně.



Obr. 58: Konstrukce podílu protilehlé odvěsny a přilehlé odvěsny

4.2 Zavedení funkcí tangens α a kotangens α

Z předchozí konstrukce je patrné, že poměr délek mezi protilehlou a přilehlou odvěsnou bude ve všech podobných trojúhelnících stejný. Tento poměr tedy označíme tangens úhlu α a zapisujeme jako tg α a můžeme ho vyjádřit následujícím způsobem:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$

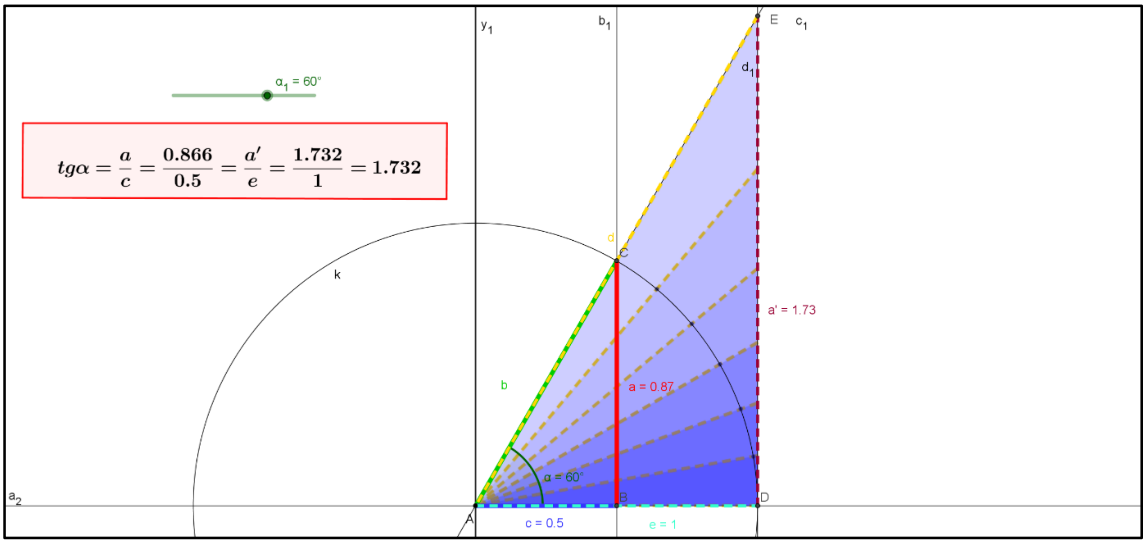
Poměr délek mezi přilehlou odvěsnou a protilehlou odvěsnou je také ve všech podobných trojúhelnících stejný, ale pro stejný úhel má jinou hodnotu než tangens úhlu. Tento poměr nazveme kotangens úhlu α, zapisujeme cotg α. Kotangens úhlu vyjádříme takto:

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$$

4.3 Dynamická konstrukce změny velikosti tangentu a kotangentu úhlu

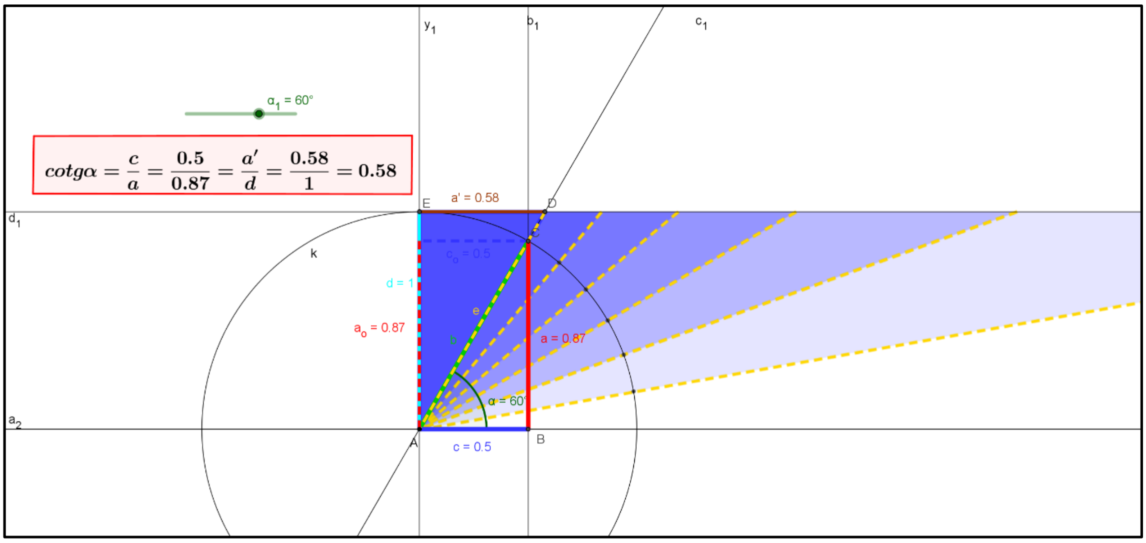
Nejprve vytvoříme dynamickou konstrukci pro tangens úhlu. Pro kotangens úhlu potom nebudeme muset dělat novou konstrukci od začátku, ale upravíme konstrukci pro tangens. Tvorbu konstrukce začneme bodem A, tímto bodem povedeme přímku a_2, která bude rovnoběžná nebo totožná s osou x, kolmici y_1 k přímce a_2. Následně vytvoříme kružnici k se středem v bodě A a poloměrem 1 a její průsečíky s přímkou a_2, pravý průsečík nazveme bod D a levý skryjeme. Dále vytvoříme posuvník α_1 s intervalem 0° až 90°. Poté u bodu A sestrojíme úhel α o velikosti α_1, orientovaný proti směru hodin. V dalším kroku vytvoříme přímku c_1 procházející bodem A a svírající s přímkou a_2 úhel α. Horní průsečík nově vzniklé přímky s kružnicí k nazveme bod C, druhý průsečík skryjeme. Bodem C povedeme kolmici b_1 k přímce a_2 a jejich průsečík nazveme bod B. Vytvoříme trojúhelník ABC a jeho strany můžeme pro lepší přehlednost barevně upravit. U stran a, c zobrazíme jejich název a velikost, u strany b stačí pouze název. Poté bodem d povedeme kolmici d_1 k přímce a_2 a její průsečík s přímkou c_2 pojmenujeme bod E. Poté vytvoříme trojúhelník ADE, stranu naproti bodu A nazveme a'. Strany také můžeme barevně upravit, v případě překrývajících se stran nastavíme jedné z nich přerušovaný (čárkovaný) styl. U stran a', e zobrazíme jejich název a velikost, u strany d stačí pouze název. Nakonec vytvoříme číslo u ve tvaru $u = a/c$ a pomocný text, který bude vyjadřovat číselnou hodnotu mezi odvěsnami pro různé úhly. Pomocný text může být například ve tvaru:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{objekt } a}{\text{objekt } c} = \frac{a'}{e} = \frac{\text{objekt } a'}{\text{objekt } e} = \text{objekt } u$$



Obr. 59: Dynamická konstrukce změny velikosti tangens úhlu

Pro kotangens úhlu upravíme předchozí konstrukci. Vymažeme trojúhelník ADE a bod D. V konstrukci zbydou přímky a_2, y_1, b_1, c_1, kružnice k, úhel α a trojúhelník ABC. Poté sestrojíme průsečíky přímky y_1 s kružnicí k, horní průsečík nazveme bod E, dolní průsečík skryjeme. Dále vytvoříme kolmici d_1 k přímce y_1 procházející bodem E a její průsečík s přímkou c_1. Nyní můžeme sestrojit trojúhelník ADE. Strany trojúhelníku opět pro větší přehlednost barevně upravíme. Stranu ED označíme jako stranu a', protože označení a_1 je určené pro jinou stranu v další konstrukci, kde budou obě strany. U stran a', d zobrazíme jejich název a velikost, u strany e stačí pouze název. Pro lepší názornost použijeme nástroj Posunutí a vytvoříme obrazy stran a, c. Vybereme nástroj, označíme stranu c, poté klikneme nejprve na bod D, pak na bod C a vytvoří se strana c', obraz strany c posunutý do bodu C. Vzniklý obraz přejmenujeme na c_o. To samé uděláme se stranou a, s tím rozdílem, že ji posuneme z bodu B do bodu A, a tak vznikne strana a_1', kterou přejmenujeme na a_o. Úprava pomocného textu bude spočívat v tom, že místo tgα napíšeme cotg α, prohodíme čitatele a jmenovatele u zlomku se stranami a, c, ve druhém zlomku nahradíme stranu a objekt d, ve jmenovateli, stranou a objektem e, a číslu u změníme předpis na $u = c/a$.



Obr. 60: Dynamická konstrukce změny velikosti kotangens úhlu

4.4 Vysvětlení významu konstrukce

Nejprve by bylo vhodné vysvětlit důvod dané velikost poloměru kružnice k a poté geometrickou interpretaci hodnoty tg α.

Poloměr kružnice k má velikost 1, přepona trojúhelníku ABC má stejnou velikost. Tato velikost je zvolena záměrně, protože pokud přepona $b = 1$, tak sin $\alpha = a$, cos $\alpha = c$. Výhoda této velikosti přepony je, že lze geometricky znázornit velikost poměru mezi stranami.

Geometrické znázornění hodnoty $\mathrm{tg}\,\alpha$ využívá shodnosti trojúhelníků. Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem ADE, a proto i poměr mezi odvěsnami jednoho trojúhelníku musí být stejný jako poměr mezi odvěsnami v druhém trojúhelníku, a proto platí:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AD|}$$

Jelikož mají tyto dva trojúhelníky společný úhel α, tak strany trojúhelníku ADE svírající společný úhel leží na stejných přímkách jako strany trojúhelníku ABC svírající tentýž úhel. Strany těchto trojúhelníků ležící proti společnému úhlu budou rovnoběžné. Strana DE, která vyjadřuje velikost $\mathrm{tg}\,\alpha$ by tedy mohla ležet na kterékoli přímce rovnoběžné se stranou BC. Avšak leží na přímce, která je od bodu A ve vzdálenosti 1, a jedině v této poloze bude velikost strany DE správně geometricky interpretovat velikost $\mathrm{tg}\,\alpha$, protože $|AD| = 1$, platí:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{1} = |DE| = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Další výhodou je možnost názorněji upravit výraz pro tangens úhlu do tvaru podílu sinu a kosinu úhlu. Po dosazení $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = c$ do výrazu určujícího tangens úhlu získáme:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{protilehlá strana}}{\text{přilehlá strana}} = \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Výsledný výraz lze použít i v případě, kdy je velikost přepony různá od jedné, protože platí:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}$$

Jelikož se strana b vyskytuje v čitateli i jmenovateli, tak se vykrátí a zbyde výsledný výraz:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Výraz lze také vyjádřit následovně:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}\cdot\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Pro kotangens úhlu platí stejná úprava výrazu jako pro tangents úhlu. Po úpravě dostaneme:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Vztah mezi tangens a kotangens úhlu můžeme určit vyjádřením sinus nebo kosinus z jednoho výrazu a dosazením do druhého výrazu, například:

$$\operatorname{cotg}\alpha\cdot\sin\alpha = \cos\alpha$$

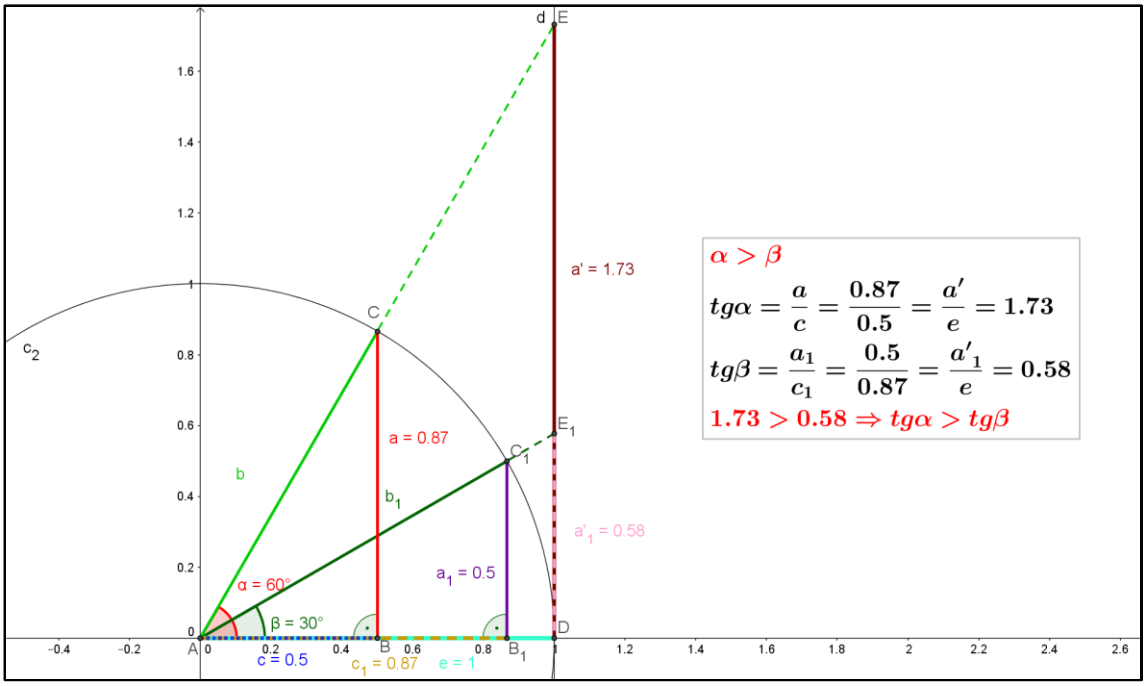
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

4.5 Změna velikosti a vlastnosti tangens α pro úhel v pravoúhlém trojúhelníku

Pro každý úhel α, $0° \le \alpha < 90°$, má tangens α jinou hodnotu. S rostoucí velikostí úhlu α se zvětšuje hodnota $\operatorname{tg}\alpha$. To je způsobeno tím, že se koncový bod přepony vzdaluje od základny trojúhelníku, protilehlá odvěsna tedy zvětšuje svou velikost a při zachování stejné délky přepony se zmenšuje velikost přilehlé odvěsny. Protože platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Jako odůvodnění lze tedy uvést, že zvětšující se hodnota $\operatorname{tg}\alpha$ s rostoucí velikostí úhlu α je způsobena zvětšující se hodnotou $\sin\alpha$ a zmenšující se hodnotou $\cos\alpha$ s rostoucí velikostí úhlu α.



Obr. 61: Změna velikosti tg α

Tangens α nabývá pro úhel $0° < \alpha < 90°$ hodnoty od 0 do ∞. Nejvyšší hodnoty nabývá, když se úhel α blíží k velikosti 90°. Takto vysokou nejvyšší hodnotu má tangens α proto, že když se sinα blíží k hodnotě 1, tak cosα dosahuje velice malých hodnot blížících se k nule.

Při velikosti úhlu $\alpha < 45°$ je tg $\alpha < 1$, protože $\sin\alpha < \cos\alpha$. Pokud je úhel $\alpha = 45°$, tg$\alpha = 1$, protože $\sin\alpha = \cos\alpha$. Když je úhel $\alpha > 45°$, tg $\alpha > 1$, jelikož $\sin\alpha > \cos\alpha$.

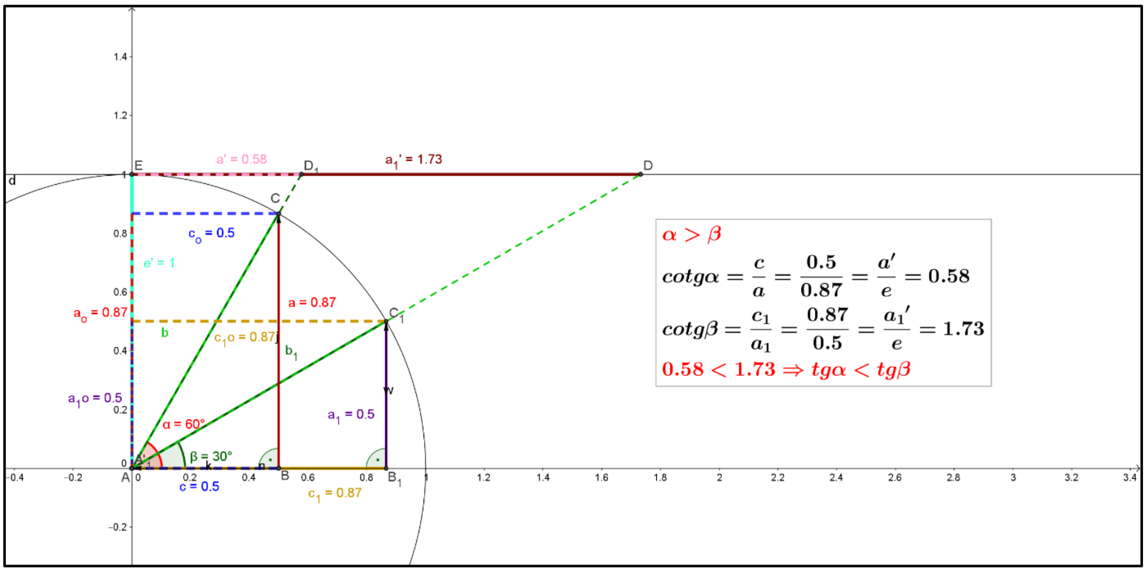
V úhlu $\alpha = 90°$, tangens α neexistuje, jelikož při této velikosti úhlu α je $\cos\alpha = 0$ a pro tuto hodnotu kosinu nemá výraz určující hodnotu tangens smysl.

Pokud úhel $\alpha = 0°$, je tg $\alpha = 0$, protože $\sin\alpha = 0$ platí tedy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0}{\cos\alpha} = 0$$

Kotangens úhlu α, $0° < \alpha \leq 90°$, má obrácený průběh změny velikosti oproti tangens úhlu α. Je to způsobeno převrácením, výměnou čitatele a jmenovatele, výrazu, určujícím tangens úhlu.

S rostoucí velikostí úhlu α se zmenšuje hodnota cotg α, protože hodnota cos α, který je v čitateli, se zmenšuje a hodnota sin α, který je ve jmenovateli, se zvětšuje.



Obr. 62: Změna velikosti cotg α

Kotangens α nabývá pro úhel $0° < \alpha < 90°$ stejných hodnot jako tangens α, od 0 do ∞. Nejvyšší hodnoty nabývá, když se úhel α blíží k velikosti 0°. Takto vysokou nejvyšší hodnotu má kotangens α proto, že když se $\cos\alpha$ blíží k hodnotě 1, tak $\sin\alpha$ dosahuje velice malých hodnot blížících se k nule.

Při velikosti úhlu $\alpha < 45°$ je $\operatorname{cotg}\alpha > 1$, protože $\cos\alpha > \sin\alpha$. Pokud je úhel $\alpha = 45°$, $\operatorname{cotg}\alpha = 1$, protože $\cos\alpha = \sin\alpha$. Když je úhel $\alpha > 45°$, $\operatorname{cotg}\alpha < 1$, jelikož $\cos\alpha < \sin\alpha$.

V úhlu $\alpha = 90°$, cotg $\alpha = 0$, jelikož při této velikosti úhlu α je $\cos\alpha = 0$ a platí:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{0}{\sin\alpha} = 0$$

Pokud úhel $\alpha = 0°$, cotg α neexistujte, protože $\sin\alpha = 0$ a tudíž výraz vyjadřující hodnotu kotangens nemá smysl.

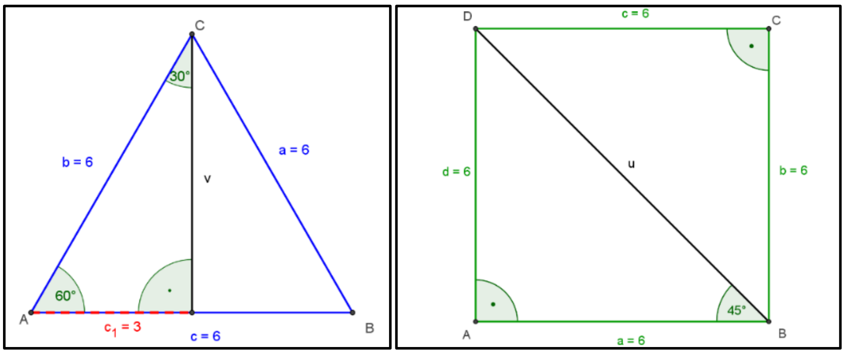
4.6 Vyjádření velikostí tg α a cotg α některých úhlů pomocí zlomku nebo odmocniny

Protože tangens i kotangens úhlu vycházejí z poměru sin α a cos α, tak stejně jako hodnoty sin α a cos α pro určité velikosti úhlu α lze vyjádřit zlomkem, můžeme i hodnoty tg α a cotg α pro ty samé velikosti úhlu α vyjádřit zlomkem či odmocninou.

Tab. 6: Tabulka hodnot tg α a cotg α vybraných úhlů

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Velikost hodnot tg α a cotg α pro $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$ byla vysvětlena v předchozí kapitole, velikost hodnot pro $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$ lze spočítat z výrazu určujícího tg α a cotg α následovně:



Obr. 63: Rovnostranný trojúhelník a čtverec pro odvození hodnot tangens a kotangens pro úhel $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, $\alpha = 60°$

$$\alpha = 30°, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 45°, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

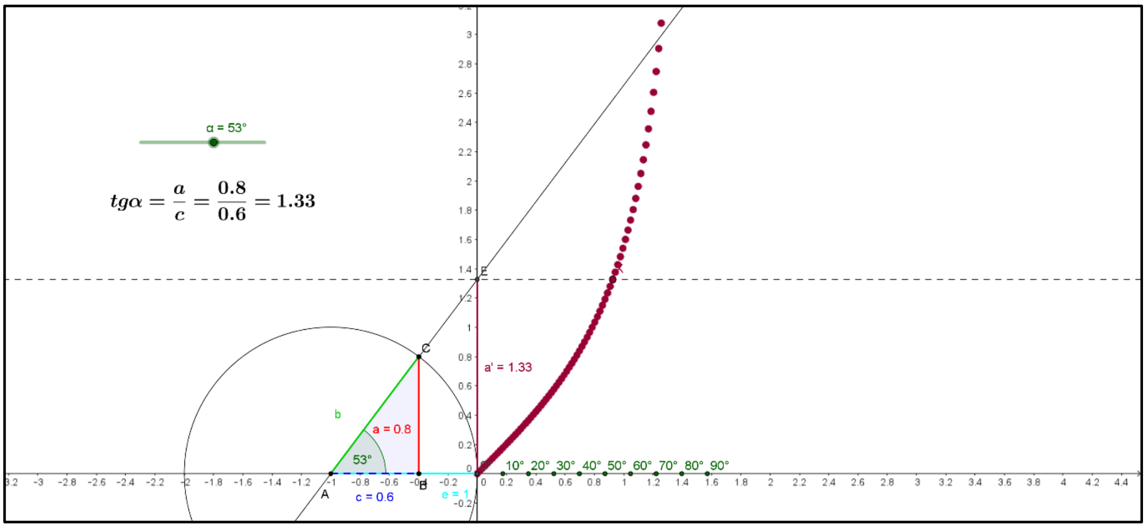
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\alpha = 60°, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

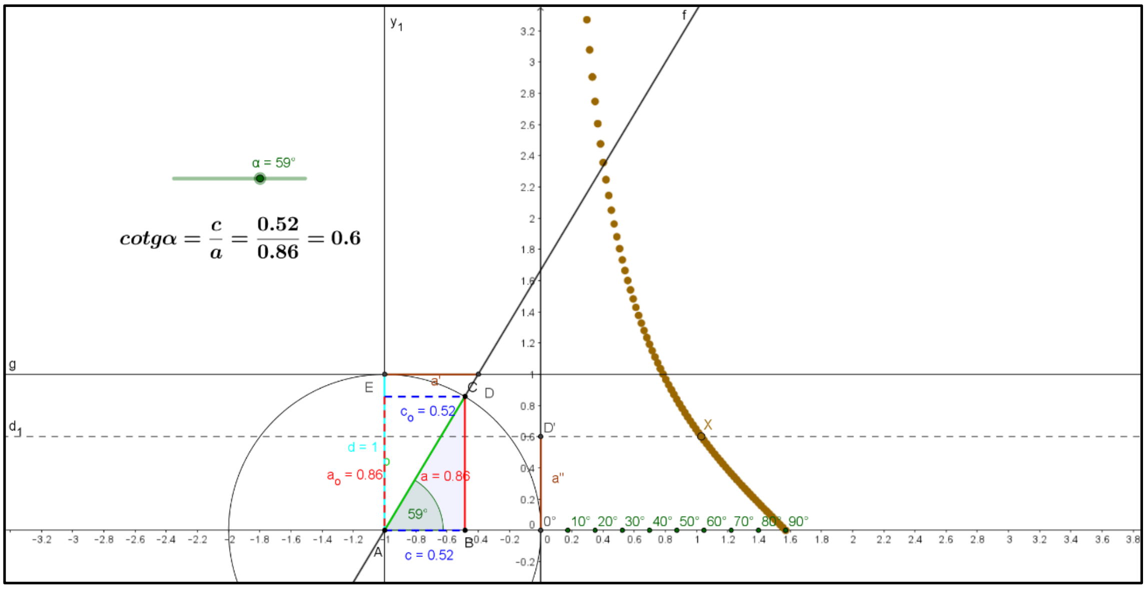
4.7 Graf funkce tangens a kotangens

Jako základ konstrukce dynamického grafu tangens α použijeme dynamickou konstrukci změny velikosti tangentu úhlu a provedeme několik úprav. Nejprve bodu A zvolíme souřadnice $[-1; 0]$, skryjeme přímky b_1 a y_1 a můžeme skrýt i stranu d. Dále na ose x vyznačíme stupnici hodnot pro velikost úhlu od 10° do 90°. Tyto hodnoty zobrazíme na ose x pomocí bodů. Těmto bodům nastavíme zobrazení popisků a za popisky zvolíme velikost úhlu, který představují. Poté vytvoříme bod X, který bude mít souřadnice $[\alpha; \operatorname{tg} \alpha]$. Nakonec bodem E povedeme přímku rovnoběžnou s osou x. Tato přímka bude protínat i bod X.



Obr. 64: Konstrukce grafu tg α

Pro konstrukci grafu kotangens α použijeme dynamickou konstrukci změny velikosti kotangentu úhlu. Většina úprav bude podobná jako v předchozí konstrukci, s rozdílem, že přímku y_1 necháme zobrazenou a souřadnice bodu X zvolíme $[\alpha; \text{cotg}\ \alpha]$. Dále stranu DE překlopíme pomocí osové souměrnosti kolem osy úhlu BAE, tím vznikne obraz strany DE, který bude převádět její velikost (velikost cotg α) na osu y. Poté obrazem bodu D, bodem D', povedeme přímku rovnoběžnou s osou x, která bude procházet i bodem X.



Obr. 65: Konstrukce grafu cotg α

4.8 Řešené příklady na procvičení tangens a kotangens

Příklad 1

Jsou dány pravoúhlé trojúhelníky KLM, OPQ a TUV a jejich vnitřní úhly.

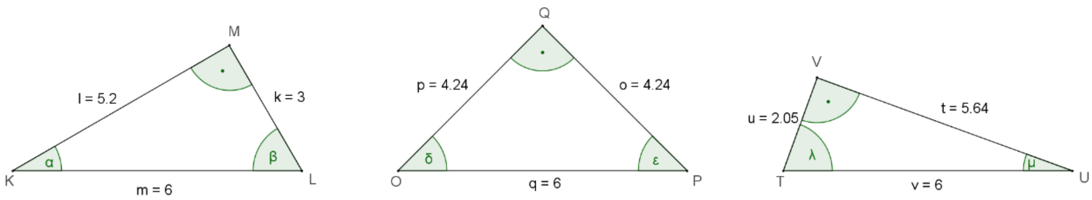
a) Určete předpis tangens pro jejich úhly.

b) Určete předpis kotangens pro jejich úhly.

c) Vypočítejte pro každý úhel hodnotu, kterou má jeho tangens a kotangens. Výsledek zaokrouhlete na čtyři desetinná místa.

d) Seřaďte zvlášť tangens a kotangens úhlů dle velikosti od největšího.

e) Zjistěte velikost daných úhlů: $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}2679$, $\operatorname{tg}\kappa = 1{,}0355$, $\operatorname{tg}\sigma = 57{,}2900$, $\operatorname{cotg}\tau = 19{,}0811$, $\operatorname{cotg}\varphi = 0{,}7002$, $\operatorname{cotg}\psi = 0{,}3057$



Obr. 66: Zadání k příkladu 1

Řešení:

a)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{l} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{o}{p} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{t}{u}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{l}{k} \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{p}{o} \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{u}{t}$$

b)

$$\cot\alpha = \frac{l}{k} \qquad \cot\delta = \frac{p}{o} \qquad \cot\lambda = \frac{u}{t}$$

$$\cot\beta = \frac{k}{l} \qquad \cot\varepsilon = \frac{o}{p} \qquad \cot\mu = \frac{t}{u}$$

c)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774 \qquad \operatorname{tg}\delta = 1 \qquad \operatorname{tg}\lambda \doteq 2{,}7475$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3} \doteq 1{,}7321 \qquad \operatorname{tg}\delta = 1 \qquad \operatorname{cotg}\lambda \doteq 0{,}3640$$

$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3} \doteq 1{,}7321$ $\quad$ $\operatorname{tg}\varepsilon = 1$ $\quad$ $\operatorname{tg}\mu \doteq 0{,}3640$

$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0{,}5774$ $\quad$ $\operatorname{tg}\varepsilon = 1$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\mu \doteq 2{,}7475$

d)

1.	$\operatorname{tg}\lambda$	1.	$\cot\mu$
2.	$\operatorname{tg}\beta$	2.	$\cot\alpha$
3.	$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon$	3.	$\cot\delta = \cot\varepsilon$
4.	$\operatorname{tg}\alpha$	4.	$\cot\beta$
5.	$\operatorname{tg}\mu$	5.	$\cot\lambda$

e)

$\gamma \doteq 15°$ $\quad$ $\sigma \doteq 89°$ $\quad$ $\varphi \doteq 55°$

$\kappa \doteq 46°$ $\quad$ $\tau \doteq 3°$ $\quad$ $\psi \doteq 73°$

Příklad 2

Určete, který úhel bude mít větší hodnotu kosinus.

$\operatorname{tg} 15°$	$\operatorname{tg} 35°$	$\cot 85°$	$\cot 5°$
$\operatorname{tg} 62°$	$\operatorname{tg} 50°$	$\cot 46°$	$\cot 42°$
$\operatorname{tg} 21°$	$\operatorname{tg} 28°$	$\cot 35°$	$\cot 59°$
$\operatorname{tg} 89°$	$\operatorname{tg} 18°$	$\cot 30°$	$\cot 31°$

Řešení:

$\operatorname{tg} 15°$	$<$	$\operatorname{tg} 35°$	$\cot 85°$	$<$	$\cot 5°$
$\operatorname{tg} 62°$	$>$	$\operatorname{tg} 50°$	$\cot 46°$	$<$	$\cot 42°$
$\operatorname{tg} 21°$	$<$	$\operatorname{tg} 28°$	$\cot 35°$	$>$	$\cot 59°$
$\operatorname{tg} 89°$	$>$	$\operatorname{tg} 18°$	$\cot 30°$	$>$	$\cot 31°$

Příklad 3

Určete, zda platí:

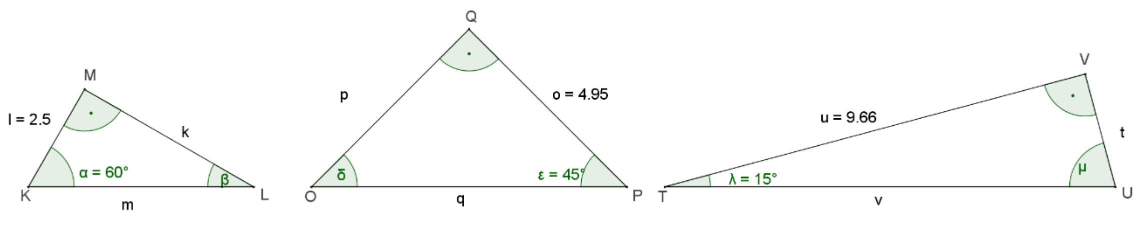
$\operatorname{tg} 20° > 0{,}5$	ANO – NE	$\cot 70° < 0{,}7$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 36° > 0{,}5$	ANO – NE	$\cot 49° > 0{,}6$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 75° < 0{,}9$	ANO – NE	$\cot 63° > 0{,}8$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 12° < 0{,}1$	ANO – NE	$\cot 32° < 0{,}5$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 85° > 10{,}9$	ANO – NE	$\cot 27° > 1{,}3$	ANO – NE

Řešení:

$\operatorname{tg} 20° > 0{,}5$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\cot 70° < 0{,}7$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE
$\operatorname{tg} 36° > 0{,}5$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\cot 49° > 0{,}6$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE
$\operatorname{tg} 75° < 0{,}9$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\cot 63° > 0{,}8$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\operatorname{tg} 12° < 0{,}1$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\cot 32° < 0{,}5$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\operatorname{tg} 85° > 10{,}9$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\cot 27° > 1{,}3$	ANO – NE

Příklad 4

U trojúhelníků KLM, OPQ a TUV známe jeden z jejich úhlů a délku jedné z odvěsen. Vypočítejte velikost druhé odvěsny. U dvou trojúhelníků využijte tangens, u jednoho kotangens. Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné číslo, délky jsou uvedené v cm.



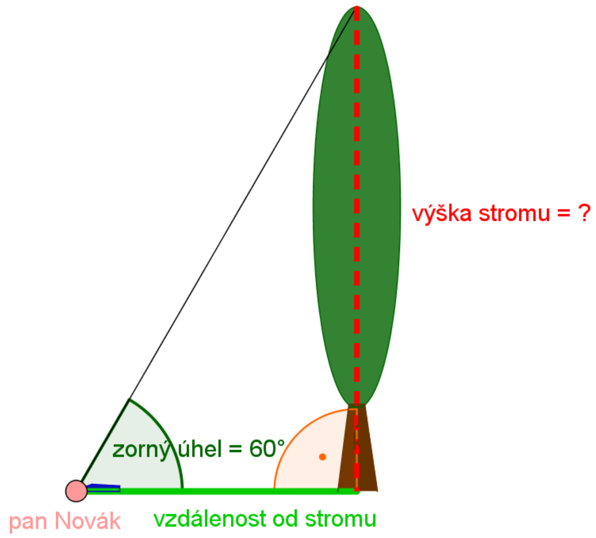
Obr. 67: Zadání k příkladu 4

Řešení:

$\triangle KLM$	$\triangle OPQ$	$\triangle TUV$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{l}$	$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{p}{o}$	$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{u}{t}$
$l \cdot \operatorname{tg}\alpha = k$	$q \cdot \operatorname{tg}\varepsilon = p$	$t = \frac{u}{\operatorname{cotg}\lambda}$
$k = 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 60°$	$q = 4{,}95 \cdot \operatorname{tg} 45°$	$m = \frac{9{,}66}{\operatorname{cotg} 15°}$
$\underline{\underline{m \doteq 4{,}3\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{q \doteq 5\ \text{cm}}}$	$\underline{\underline{m \doteq 2{,}6\ \text{cm}}}$

Příklad 5

Pan Novák si lehl pod strom a vidí naproti sobě vysoký topol. Od topolu je vzdálen 15 metrů a vidí ho pod úhlem 60°. Jak vysoký je protější topol? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 68: Nákres k příkladu 5

Řešení:

Zorný úhel $= \alpha$, vzdálenost od stromu $= d$, výška stromu $= v$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{d}$$

$$v = tg\ \alpha \cdot d$$

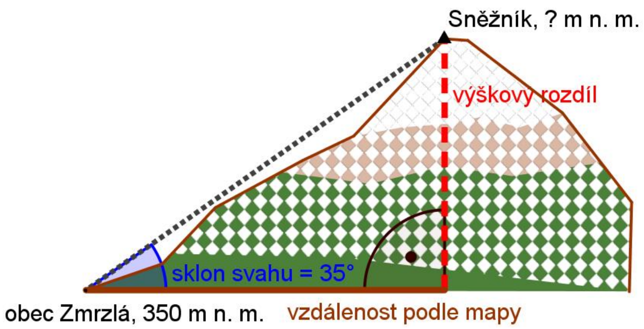
$$v = tg\ 60° \cdot 15$$

$$d \doteq 26 \text{ m}$$

Topol stojící naproti panu Novákovi je vysoký 26 m.

Příklad 6.

Vrch Sněžník má svah s průměrným sklonem 35°. Na úpatí tohoto vrchu leží obec Zmrzlá s nadmořskou výškou 350 m nad mořem. Podle mapy je vzdálenost z okraje obce na vrchol Sněžníku 1000 m. Jakou nadmořskou výšku má Sněžník? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 69: Nákres k příkladu 6

Řešení:

Sklon svahu = α, délka cesty na mapě = m, výškový rozdíl = v

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v}{m}$$

$$m \cdot tg\ \alpha = v$$

$$v = 1000 * 0{,}7002$$

$$\underline{\underline{v \doteq 700 \text{ m}}}$$

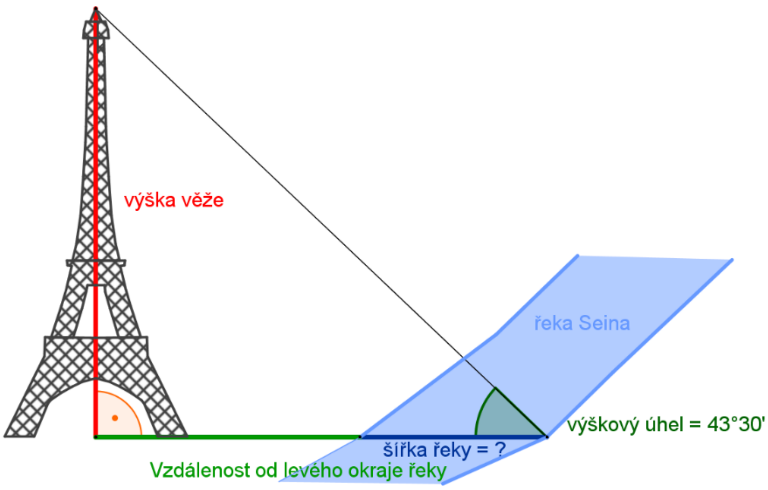
nadmořská výška Sněžníku = n. v. obce + výškový rozdíl =

= 350 + 700 = 1050 m n. m.

Sněžník má nadmořskou výšku 1050 m nad mořem.

Příklad 7.

Eiffelova věž je vysoká 300 m. Nachází se na levém břehu řeky Seiny a je vzdálená 185 m od levého okraje řeky. Jak je řeka v tomto místě široká, pokud z okraje pravého břehu vidíme vrchol věže pod úhlem 43°30′ Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obr. 70: Nákres k příkladu 7

Řešení:

Výškový úhel $= \alpha$, vzdálenost od levého kraje řeky $= d$, šířka řeky $= s$, výška věže$= v$

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{d+s}{v}$$

$$\operatorname{cotg} \delta \cdot v - d = \mathrm{s}$$

$$s = \operatorname{cotg} 43°30' \cdot 300 - 185$$

$$s \doteq 316 - 185$$

$$\underline{\underline{s \doteq 131\ \mathrm{m}}}$$

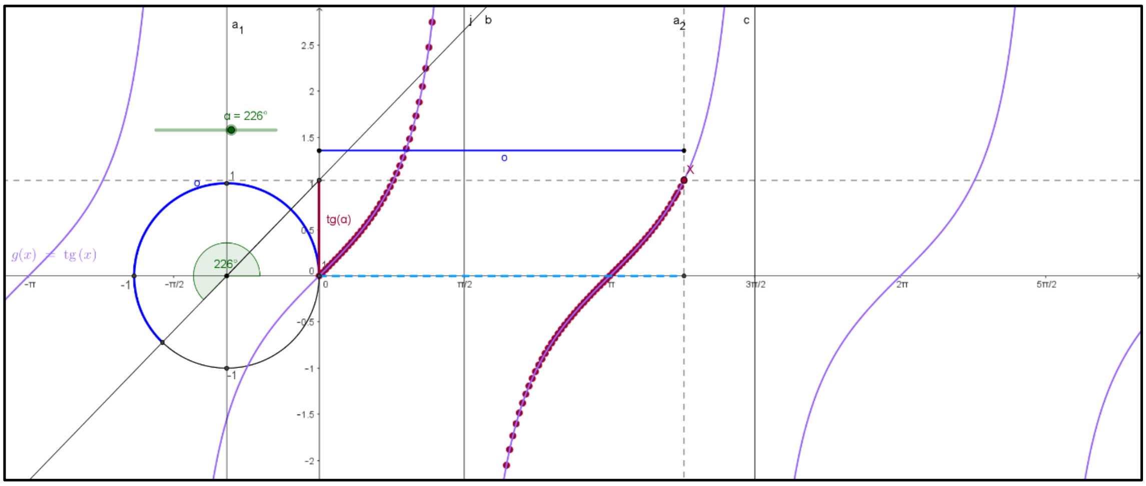
Řeka je v tomto místě široká 131 m.

5 Rozšíření funkce tangens a kotangens pro libovolně velký úhel

5.1 Dynamické grafy funkcí tangens a kotangens s jednotkovou kružnicí

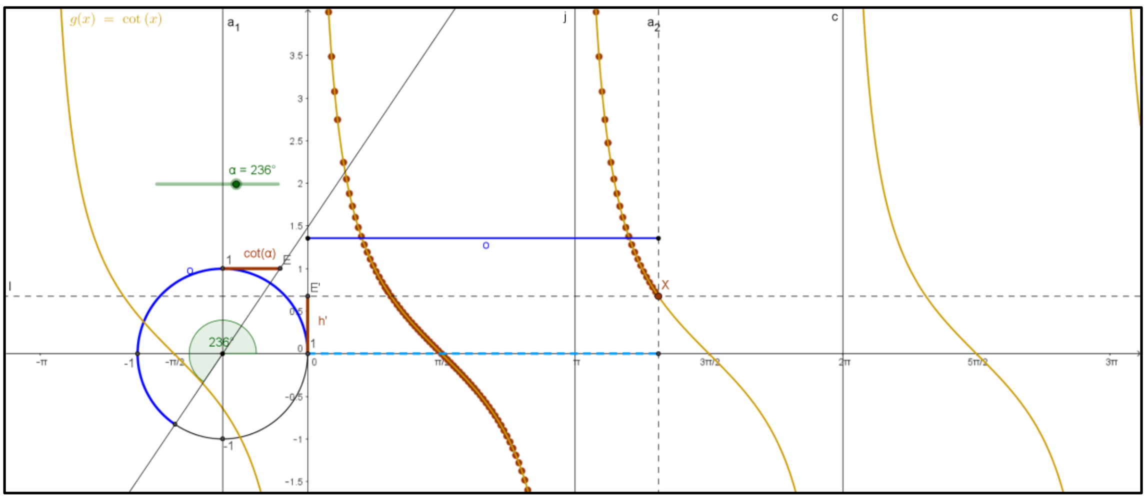
V první části konstrukce vytvoříme bod A o souřadnicích $[-1; 0]$, kružnici k se středem v bodu A s poloměrem 1, přímku a_1 kolmou na osu x, procházející bodem A, a průsečíky kružnice k s osou x a s přímkou a_1. Průsečíky kružnice k s osou x pojmenujeme P_1 (napravo od bodu A), P_3 (nalevo od bodu A) a průsečíky s přímkou $a_1$pojmenujeme P_2 (nahoře od bodu A) a P_4. Dále bodům P_1 a P_2 nastavíme popisek 1, bodům P_3 a P_4 popisek -1. Poté vytvoříme posuvník úhlových hodnot s intervalem 0° až $360°$ a názvem α. Následuje sestrojení úhlu α_1 u vrcholu A o velikosti posuvníku α, s čímž se automaticky vytvoří bod $P_1{}'$, úhel tedy můžeme také nazvat $\sphericalangle P_1 A P_1{}'$. Bodem $P_1{}'$ povedeme přímku c_1 svírající s osou x úhel α procházející bodem A. V dalším kroku vytvoříme oblouk o, který povede z bodu P_1 do bodu $P_1{}'$, a zvolíme mu libovolnou barvu, jinou než je barva kružnice k.

V druhé části vytvoříme průsečík přímky c_1 s osou y, pojmenujeme ho bod E (popis tohoto bodu můžeme později skrýt). Poté sestrojíme úsečku P_1E, která bude znázorňovat velikost hodnoty $\operatorname{tg}\alpha$, a barevně ji upravíme. Dále sestrojíme bod X o souřadnicích $[\alpha; \operatorname{tg}\alpha]$, přímku a, procházející boby E, X, přímku a_2 kolmou na osu x, procházející bodem X, a její průsečík s osou x, bod X_1. Následovně vytvoříme úsečku P_1X_1, ta znázorňuje délku oblouku o. Můžeme také sestrojit úsečku s pevnou délkou o délce o, jenž bude mít počátek na ose y. Nakonec vytvoříme graf funkce $\operatorname{tg} x$.



Obr. 71: Dynamická konstrukce grafu funkce tg x

Konstrukce grafu funkce kotangens bude mít první část stejnou jako u grafu funkce tangens. Druhou část začneme sestrojením přímky a_3 procházející bodem P_3, která bude rovnoběžná s osou x. Pote vytvoříme průsečík přímky c_1 s přímkou a_3, pojmenujeme ho bod E (popis tohoto bodu opět můžeme později skrýt), a úsečku P_2E, která bude znázorňovat velikost hodnoty $\operatorname{cotg} \alpha$, a barevně ji upravíme. Následovně úsečku P_2E překlopíme pomocí osové souměrnosti kolem osy úhlu P_1AP_2, tím vznikne obraz P_1E' úsečky P_2E, který bude převádět její velikost (velikost $\operatorname{cotg} \alpha$) na osu y. Dále sestrojíme bod X o souřadnicích $[\alpha; \operatorname{cotg} \alpha]$, kterým bude procházet přímka a_2 kolmá na osu x, její průsečík s osou x bude bod X_1. Úsečku P_1X_1 obarvíme a opět můžeme sestrojit úsečku s pevnou délkou o délce o s počátkem na ose y. Body X a E' povedeme přímku a. Nakonec vytvoříme graf funkce cotg x.



Obr. 72: Dynamická konstrukce grafu funkce cotg x

5.2 Vlastnosti funkce tangens

Vlastnosti funkce tangens můžeme určit z jednotkové kružnice a jejího grafu

1) Definiční obor

$$Df = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

2) Omezenost funkce

Funkce není omezená

3) Obor hodnot

$$Hf = (-\infty; \infty)$$

4) Periodicita funkce

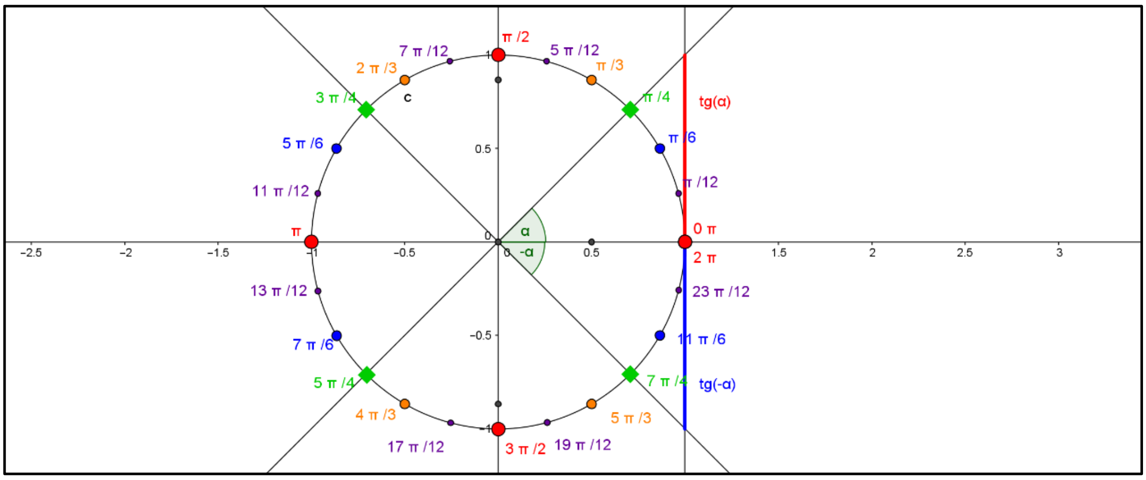
Funkce je periodická s periodou π.

5) Sudost/lichost funkce

Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je lichá, protože platí:

a) $\forall x \in Df\ existuje\ -x \in Df$

b) $\forall x \in Df\ plat\acute{i}\ f(-x) = -f(x)$



Obr. 73: Ukázka lichosti funkce tg x

6) Minimum a maximum funkce

Funkce nemá minimum ani maximum, protože není omezená

7) Průběh funkce – rostoucí, klesající

Funkce je rostoucí v každém intervalu definičního oboru, tedy v intervalech:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

8) Průběh funkce – kladné, záporné hodnoty, nulové body

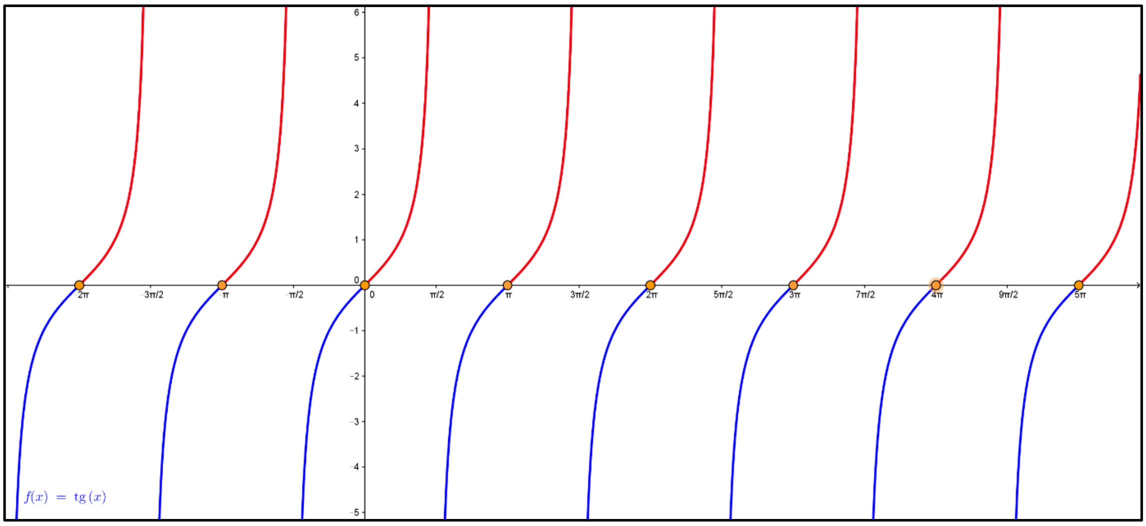
Funkce $y = \operatorname{tg} x$ nabývá nulové hodnoty v bodech $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kladných hodnot nabývá v intervalech:

$$(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Záporné hodnoty má na intervalech:

$$(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi), k \in \mathbb{Z}$$



Obr. 74: Graf funkce tg x s vyznačenými intervaly, kdy má funkce kladné hodnoty

5.3 Vlastnosti funkce kotangens

Vlastnosti funkce tangens můžeme určit z jednotkové kružnice a jejího grafu

1) Definiční obor

$$Df = \mathbb{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

2) Omezenost funkce

Funkce není omezená

3) Obor hodnot

$$Hf = (-\infty; \infty)$$

4) Periodicita funkce

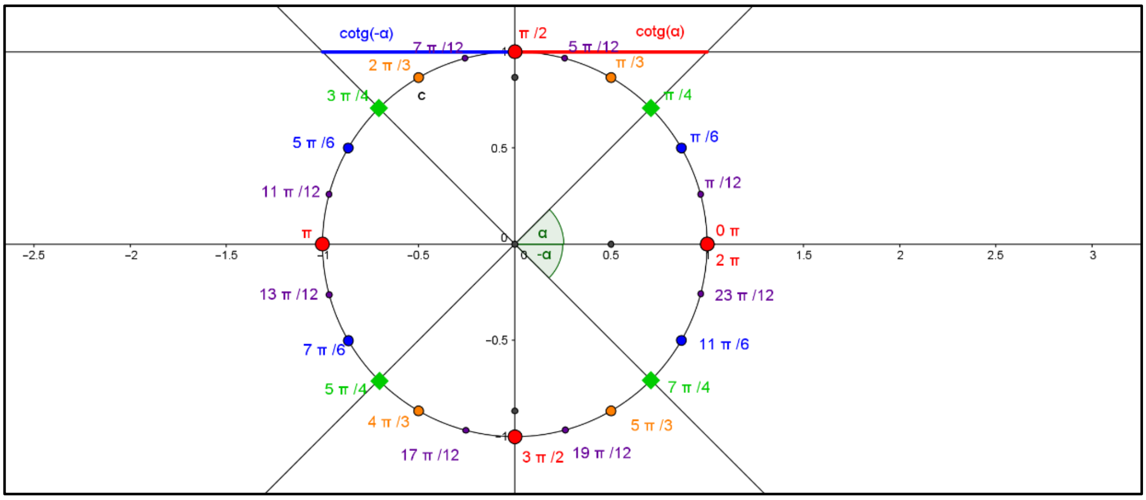
Funkce je periodická s periodou π.

5) Sudost/lichost funkce

Funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je lichá, protože platí:

c) $\forall x \in Df\ existuje - x \in Df$

d) $\forall x \in Df\ platí\ f(-x) = -f(x)$



Obr. 75: Ukázka lichosti funkce cotg α

6) Minimum a maximum funkce

Funkce nemá minimum ani maximu, protože není omezená

7) Průběh funkce – rostoucí, klesající

Funkce je klesající v každém intervalu definičního oboru, tedy v intervalech $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

8) Průběh funkce – kladné, záporné hodnoty, nulové body

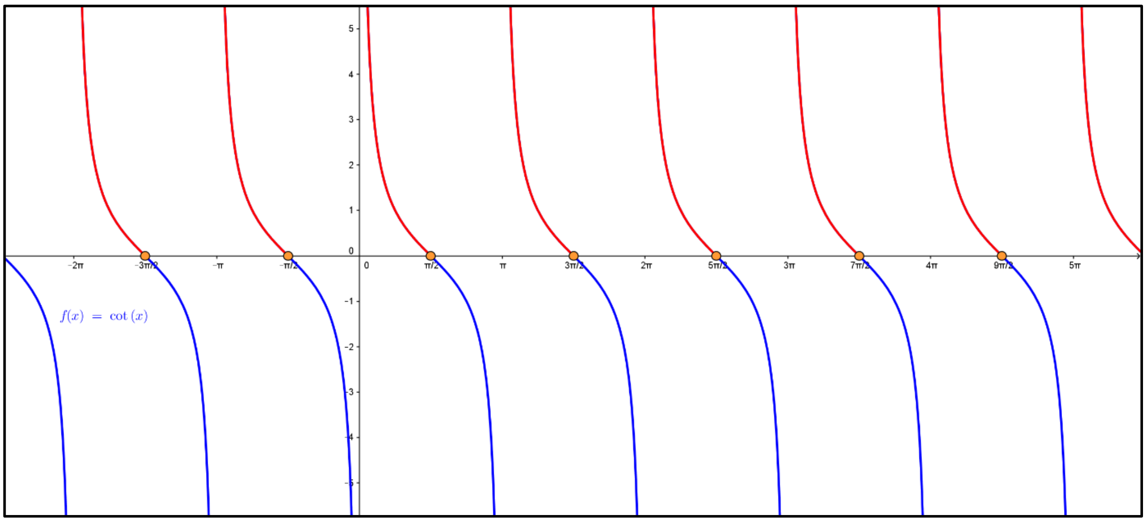
Funkce $y = \text{cotg}\, x$ nabývá nulové hodnoty v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kladných hodnot nabývá v intervalech:

$$(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Záporné hodnoty má na intervalech:

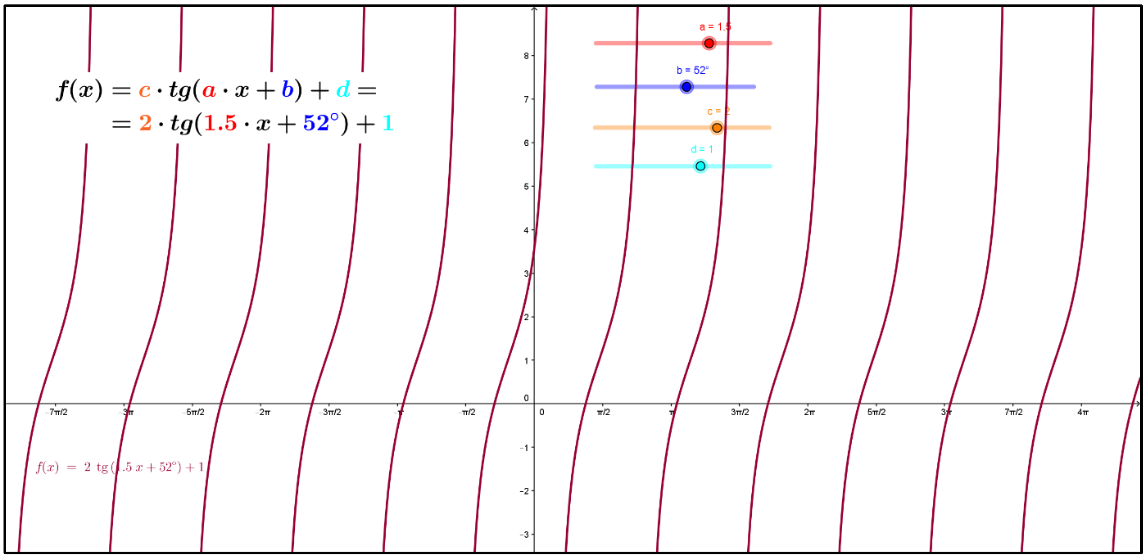
$$(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$



Obr. 76: Graf funkce cotg x s vyznačenými intervaly, kdy má funkce kladné hodnoty

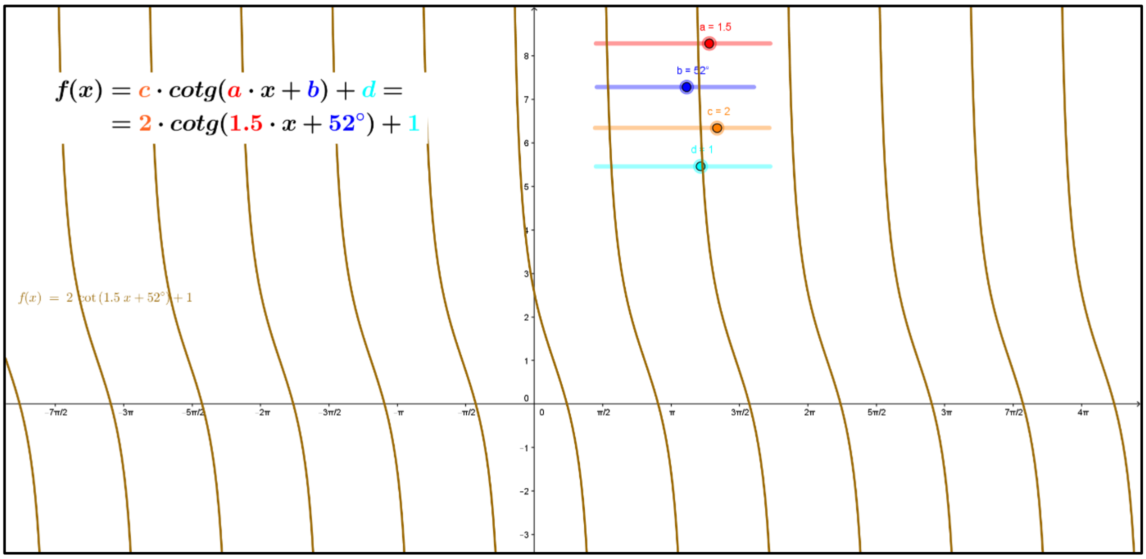
5.4 Dynamická konstrukce vlivu parametrů na graf funkce tangens a kotangens

Konstrukci započneme vytvořením posuvníků a, b, c, d. Posuvníky a,c,d budou číselné s přednastaveným intervalem -5 až 5. V nastavení posuvníku b zvolíme možnost *Úhel* a interval od $-360°$ do $360°$. Dále vytvoříme funkci $\operatorname{tg} x$ s předpisem $f(x) = c \cdot \operatorname{tg}(a \cdot x + b) + d$, Pro lepší přehlednost napíšeme předpis funkce i jako pomocný text. Jednotlivé parametry vybereme do textu z položky Objekty. Parametry v textovém předpisu funkce lze obarvit stejně jako posuvníky, které tyto parametry znázorňují. V okně Text označíme volbu *LaTeX vzorec* a napíšeme $f(x) =\backslash textcolor\{\cdots\}c\backslash cdottg(\backslash textcolor\{\cdots\}a\backslash cdot\ x +\backslash textcolor\{\cdots\}b) +\backslash textcolor\{\cdots\}d =\backslash textcolor\{\cdots\}\{[c]\}\backslash cdottg(\backslash textcolor\{\cdots\}\{[a]\}\backslash cdot\ x + \backslash textcolor\{\cdots\}\{[b]\}) +\backslash textcolor\{\cdots\}\{[d]\}$ (místo teček ve složených závorkách doplníme anglický název barvy, kterou má daný posuvník, písmena v hranatých závorkách značí objekty).



Obr. 77: Dynamický graf demonstrující vliv parametrů na $\operatorname{tg} x$

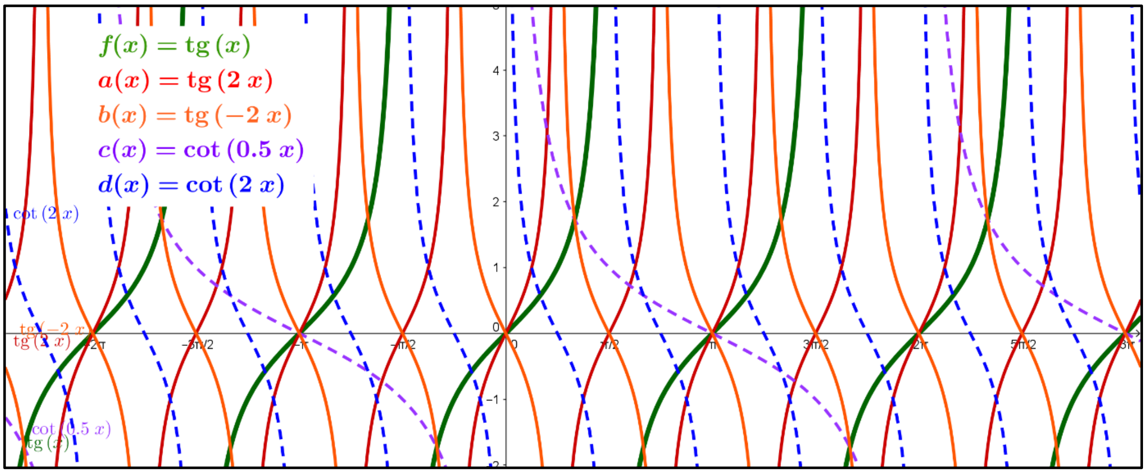
Konstrukci vlivu parametru na graf funkce kotangens vytvoříme stejným způsobem jako konstrukci pro tangens. Malá změna bude pouze v předpisu funkce $f(x) = c \cdot \operatorname{cotg}(a \cdot x + b) + d$ a z ní vyplývající změna v pomocném textu.



Obr. 78: Dynamický graf demonstrující vliv parametrů na cotg x

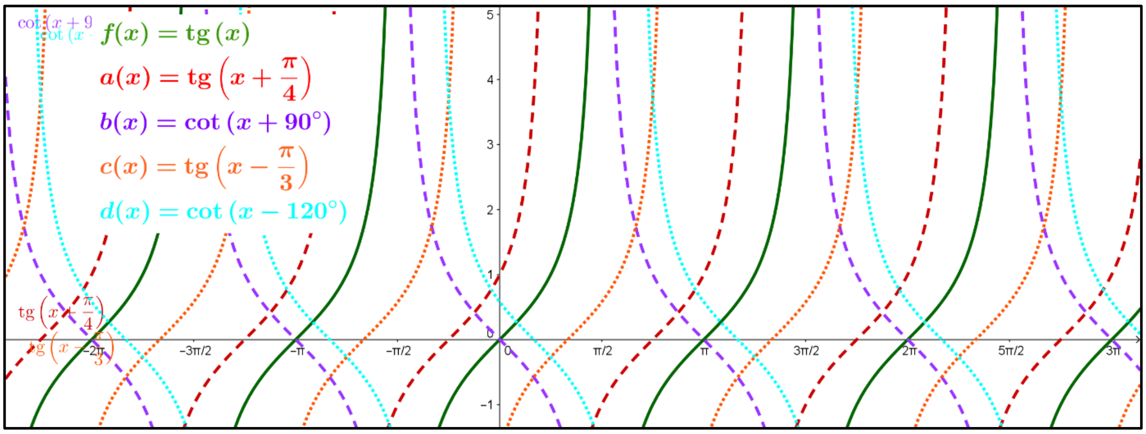
5.5 Vliv parametrů na graf funkce tangens a kotangens

Jednotlivé parametry mají funkce tangens a kotangens stejný vliv jako na funkce sinus a kosinus. Hodnota parametru a mění velikost intervalů funkce. Pokud je $|a| < 1$, intervaly funkce se zvětšují, to znamená, že body, ve kterých funkce není definována, se od sebe budou vzdalovat. Když je $|a| > 1$, perioda funkce se zmenšuje a extrémy funkce se k sobě přibližují. Velikost periody funkce bude $2\pi/|a|$. (Obr. 79) Pokud je parametr a záporný, bude graf funkce překlopený podle osy y.



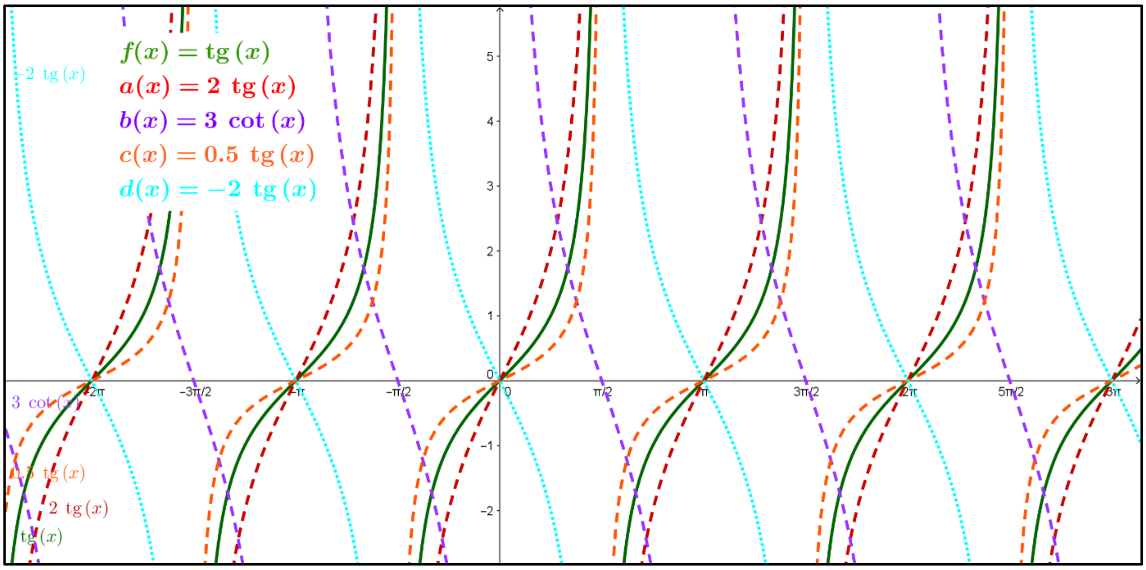
Obr. 79: Vliv parametru a

Parametr b posunuje graf funkce po ose x. Pokud je $b > 0$, graf funkce se posune o hodnotu b ve směru záporné poloosy x (doleva), pokud $b < 0$, graf se posune ve směru kladné poloosy x (doprava). Když je parametr $a = 1$, posouvá se graf o hodnotu $|b|$, pokud se parametr $a \neq 1$, graf se posune o $\frac{|b|}{a}$.



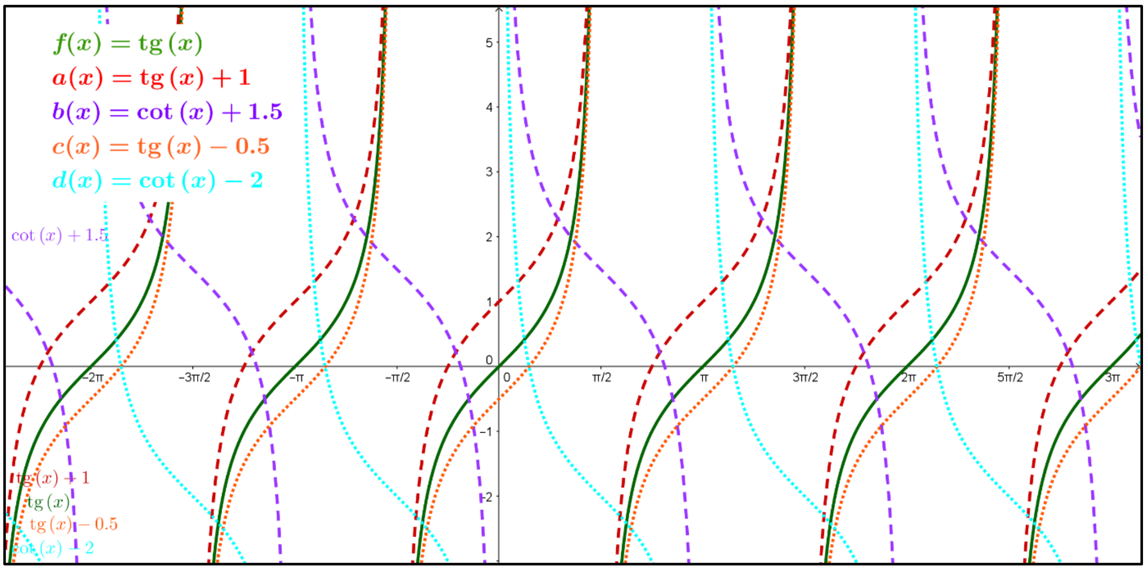
Obr. 80: Vliv parametru b

Parametr c ovlivňuje vzdálenost funkce (jejích bodů) od osy x. Je-li $c < 1$, funkce se přimyká k ose x, když je $c > 1$, body funkce se od osy x vzdalují. V případě záporného parametru c se funkce překlápí podle osy x.



Obr. 81: Vliv parametru c

Parametr d posouvá graf funkce po ose y. Pokud je kladný, graf funkce se posune o hodnotu d ve směru kladné poloosy y (nahoru od osy x), pokud je záporný, posouvá se graf funkce opačným směrem.



Obr. 82: Vliv parametru d

5.6 Řešené příklady na procvičení funkce tangens a kotangens pro libovolně velký úhel

Příklad 1

Vypočítejte hodnotu tangens a kotangens daných úhlů, výsledky uveďte ve zlomku.

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\beta = \frac{2\pi}{3}$

c) $\gamma = \frac{9\pi}{2}$

d) $\delta = \frac{7\pi}{4}$

e) $\varepsilon = \pi$

f) $\kappa = \frac{7\pi}{6}$

g) $\lambda = \frac{10\pi}{3}$

h) $\mu = \frac{3\pi}{2}$

i) $\sigma = \frac{17\pi}{6}$

j) $\varphi = \frac{11\pi}{4}$

Řešení:

a)	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3}$	f)	$\operatorname{tg}\kappa = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{cotg}\kappa = \sqrt{3}$
b)	$\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$	$\operatorname{cotg}\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	g)	$\operatorname{tg}\lambda = \sqrt{3}$	$\operatorname{cotg}\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$
c)	$f(x)$ není definována	$\operatorname{cotg}\gamma = 0$	h)	$f(x)$ není definována	$\operatorname{cotg}\mu = 0$
d)	$\operatorname{tg}\delta = -1$	$\operatorname{cotg}\delta = -1$	i)	$\operatorname{tg}\sigma = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{cotg}\sigma = -\sqrt{3}$
e)	$\operatorname{tg}\varepsilon = 0$	$f(x)$ není definována	j)	$\operatorname{tg}\varphi = -1$	$\operatorname{cotg}\varphi = 1$

Příklad 2

Určete, zda uvedené nerovnosti platí.

$\operatorname{tg} 1000° < \operatorname{tg} 370°$	ANO – NE	$\operatorname{cotg} 270° > \operatorname{cotg} 560°$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 750° > \operatorname{tg} 100°$	ANO – NE	$\operatorname{cotg} 930° < \operatorname{cotg} 330°$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 3680° < \operatorname{tg} 720°$	ANO – NE	$\operatorname{cotg} 1° > \operatorname{cotg} 358°$	ANO – NE
$\operatorname{tg} 1081° > \operatorname{tg} 150°$	ANO – NE	$\operatorname{cotg} 250° < \operatorname{cotg} 870°$	ANO – NE

Řešení:

$\operatorname{tg} 1000° < \operatorname{tg} 370°$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\operatorname{cotg} 270° > \operatorname{cotg} 560°$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\operatorname{tg} 750° > \operatorname{tg} 100°$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\operatorname{cotg} 930° < \operatorname{cotg} 330°$	ANO – $\underline{\text{NE}}$
$\operatorname{tg} 3680° < \operatorname{tg} 720°$	ANO – $\underline{\text{NE}}$	$\operatorname{cotg} 1° > \operatorname{cotg} 358°$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE
$\operatorname{tg} 1081° > \operatorname{tg} 150°$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE	$\operatorname{cotg} 250° > \operatorname{cotg} 870°$	$\underline{\text{ANO}}$ – NE

Příklad 3

Zjistěte, jaké číslo bude na místě otazníku.

$\mathrm{tg}\,\frac{19\pi}{6} =$	$\downarrow$			$-\,\mathrm{cotg}\,\frac{17\pi}{6} =$	$\downarrow$	**?**	
		$+\,\mathrm{tg}\,\frac{31\pi}{6} =$	$\uparrow$			$+\,\mathrm{tg}\,\frac{32\pi}{3} =$	$\uparrow$
$+\,\mathrm{cotg}\,\frac{25\pi}{4} =$	$\downarrow$			$-\mathrm{cotg}\,\frac{23\pi}{3} =$	$\downarrow$		
		$+\,\mathrm{cotg}\,\frac{39\pi}{4} =$	$\uparrow$			$-\,\mathrm{cotg}\,\frac{53\pi}{2} =$	$\uparrow$
$-\mathrm{tg}\,\frac{10\pi}{3} =$	$\rightarrow$			$+\,\mathrm{tg}\,\frac{17\pi}{4} =$	$\rightarrow$		

Řešení:

$\mathrm{tg}\,\frac{19\pi}{6} =$	$\downarrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		$-\,\mathrm{cotg}\,\frac{17\pi}{6} =$	$\downarrow$	1	
$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\,\mathrm{tg}\,\frac{31\pi}{6} =$	$\uparrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\,\mathrm{tg}\,\frac{32\pi}{3} =$	$\uparrow$
$+\,\mathrm{cotg}\,\frac{25\pi}{4} =$	$\downarrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		$-\mathrm{cotg}\,\frac{23\pi}{3} =$	$\downarrow$	$\sqrt{3}+1$	
$\frac{\sqrt{3}+3}{3}$		$+\,\mathrm{cotg}\,\frac{39\pi}{4} =$	$\uparrow$	$\sqrt{3}$		$-\,\mathrm{cotg}\,\frac{53\pi}{2} =$	$\uparrow$
$-\mathrm{tg}\,\frac{10\pi}{3} =$	$\rightarrow$	$\frac{-2\sqrt{3}+3}{3}$		$+\,\mathrm{tg}\,\frac{17\pi}{4} =$	$\rightarrow$	$\sqrt{3}+1$	

Příklad 4

Načrtněte graf funkcí, určete jejich periodu a definiční obor.

a) $g_1 \colon y = \operatorname{tg} 3x$

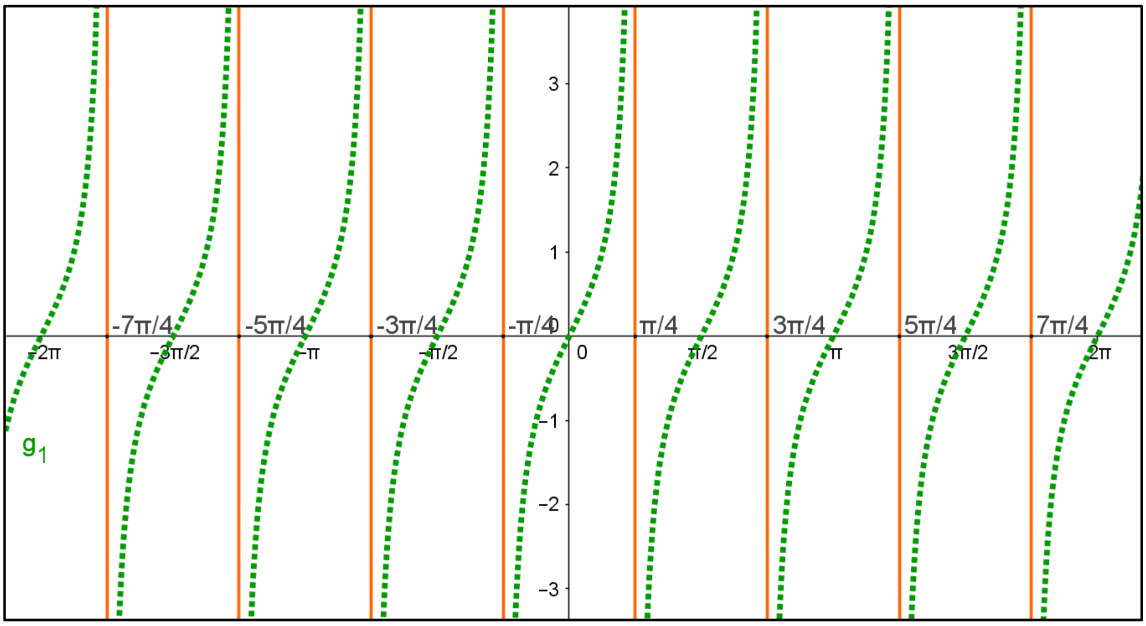
b) $g_2 \colon y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{5}$

c) $g_3 \colon y = \operatorname{tg} \dfrac{2x}{3}$

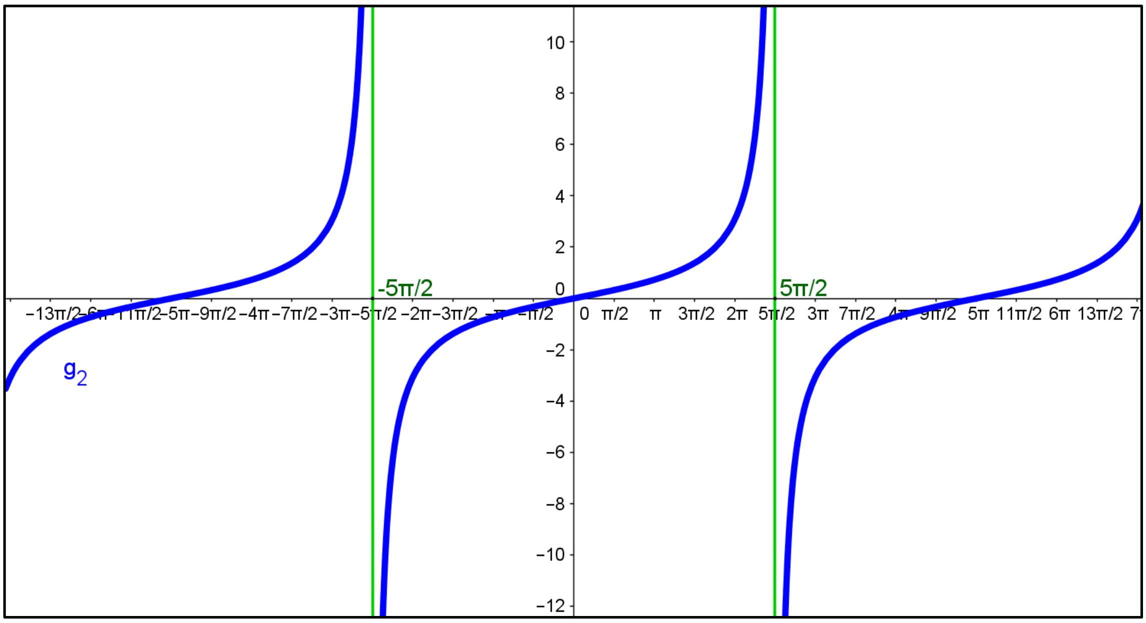
Řešení:

Periodu funkce $\operatorname{tg} ax$ či $\operatorname{cotg} ax$ zjistíme, když periodu $\operatorname{tg} x$ vydělíme absolutní hodnotou parametru a.

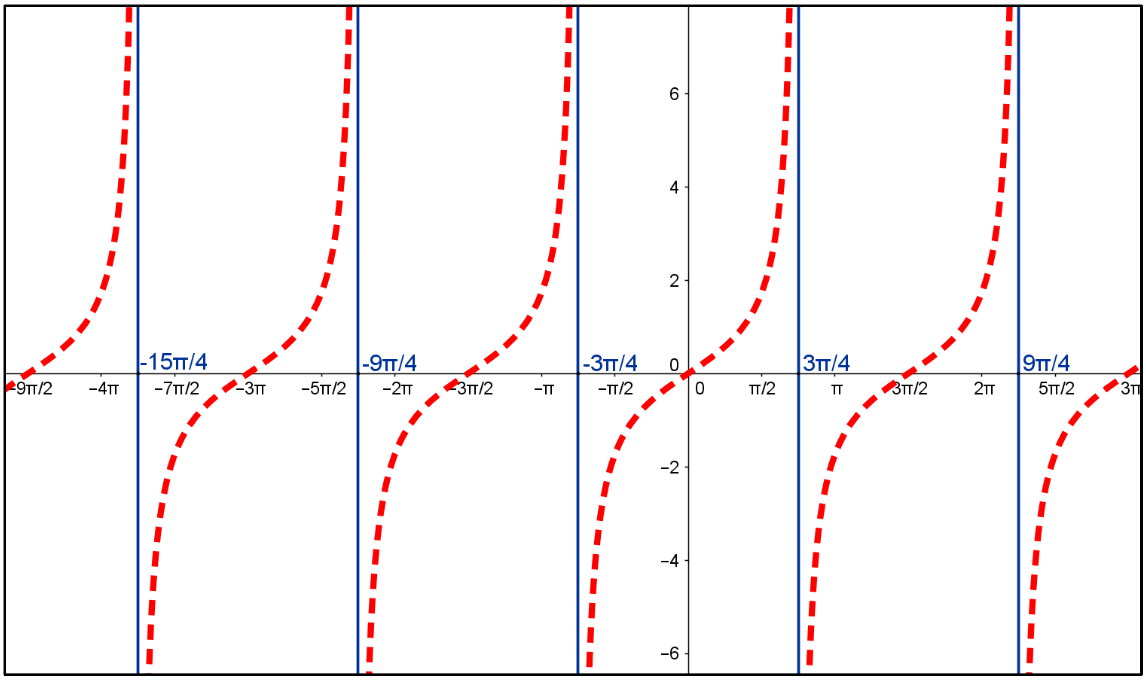
	Perioda	Definiční obor
a) $g_1 \colon y = \operatorname{tg} 2x$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k}{2}\pi\right\}$
b) $g_2 \colon y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{5}$	5π	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2\pi}{2} + 5k\pi\right\}$
c) $g_3 \colon y = \operatorname{tg} \dfrac{2x}{3}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3k}{2}\pi\right\}$



Obr. 83: Grafy funkcí g_1

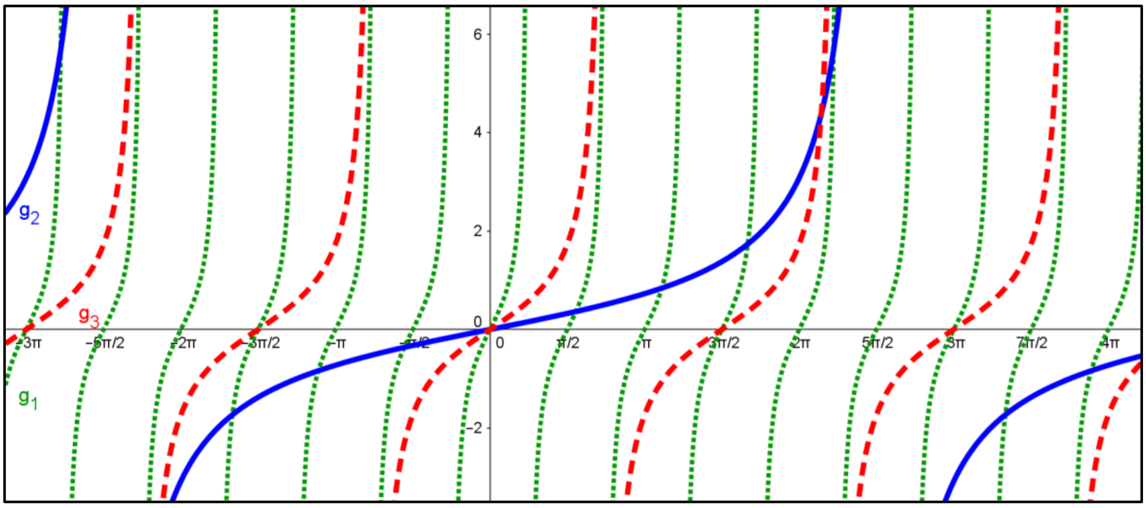


Obr. 84: Grafy funkcí g_2



Obr. 85: Grafy funkcí g_3

Z jednotlivých grafů je patrné, že největší periodu má funkce g_2 a nejmenší g_1. Pro přímé srovnání můžeme vytvořit grafy těchto funkcí do jednoho náčrtu.



Obr. 86: Srovnání grafů funkcí g_1, g_2, g_3

Příklad 5

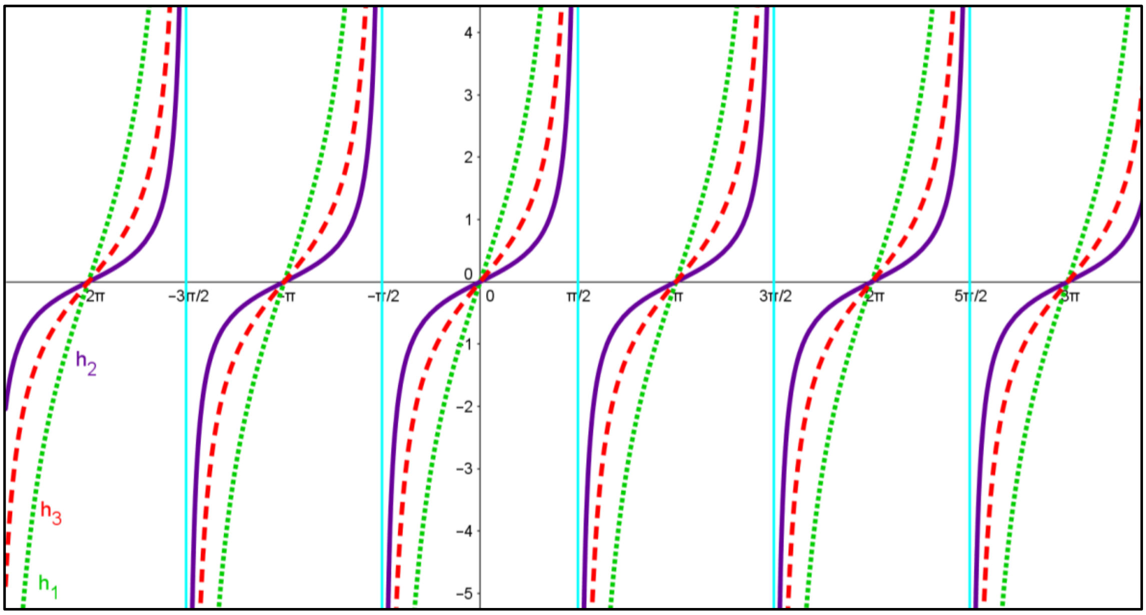
Načrtněte graf funkcí.

a) $h_1: y = 3\text{tg}\, x$

b) $h_2: y = \dfrac{1}{2}\text{tg}\, x$

c) $h_3: y = \dfrac{6}{5}\text{tg}\, x$

Řešení:



Obr. 87: Grafy funkcí h_1, h_2, h_3

Příklad 6

Načrtněte grafy funkcí.

a) $f_1: y = \text{tg}\, x$

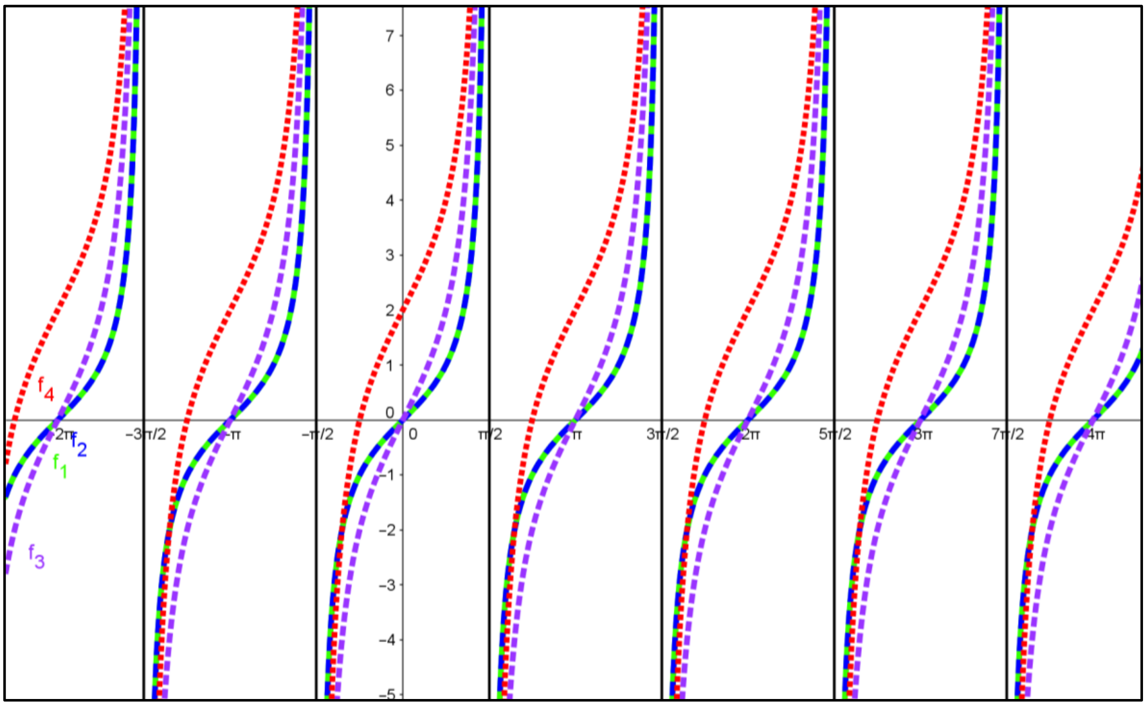
b) $f_2: y = \text{tg}(x + \pi)$

c) $f_3: y = 2 \cdot (\text{tg}(x + \pi))$

d) $f_4: y = 2 \cdot (\text{tg}(x + \pi)) + 2$

Řešení:

Ze zadání můžeme vyvodit, že jednotlivé funkce vychází z funkce předchozí. Nejprve načrtneme f_1, ta poté bude v podobě f_2 posunutá o π ve směru záporné poloosy osy x (doleva po ose x). Funkce f_3 bude nabývat dvojnásobných hodnot oproti f_2 a funkci f_4 vytvoříme posunutím f_3 o hodnotu 2 ve směru kladné poloosy osy y (nahoru po ose y).



Obr. 88: Grafy funkcí f_1, f_2, f_3, f_4

Z grafu funkcí je patrné, že grafy funkcí f_1, f_2 jsou stejné. Je to proto, že perioda funkce f_1 je π, funkce f_2 je funkce f_1 posunutá o π, tedy o její periodu.

Příklad 7

Načrtněte graf funkce.

$f\colon y = -\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

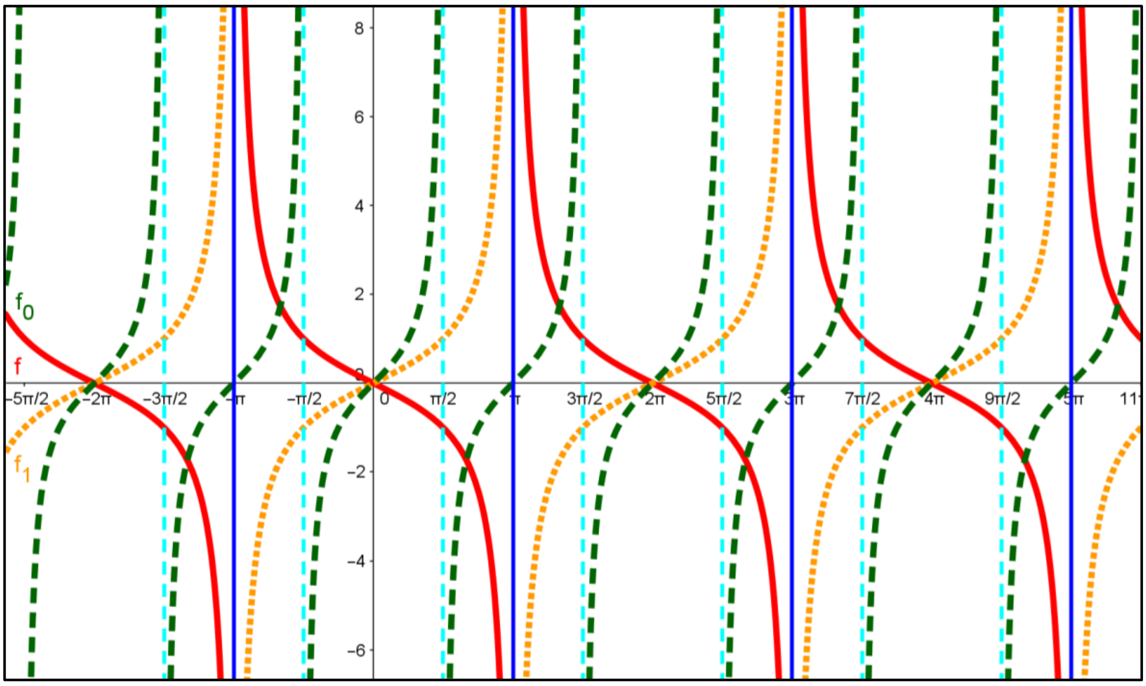
Řešení:

K funkci vytvoříme tři funkce, které budou výsledné funkci předcházet. Funkce na sebe budou navazovat jako v přechozím příkladu.

$f_0\colon y = \operatorname{tg} x$

$f_1\colon y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

Nejprve načrtneme základní graf funkce tangens, (graf funkce f_0). Následovně se zaměříme na vnitřní část funkce f, kde je proměnná ovlivněna parametrem a, načrtneme tedy graf funkce f_1. Poté se budeme zabývat parametrem, který násobením ovlivňuje výslednou hodnotu funkce tangens. Načrtneme graf funkce f_2, který bude vycházet z grafu funkce f_1, ale bude nabývat opačných hodnot (bude překlopený přes osu x).



Obr. 89: Graf funkce f

Příklad 8

Načrtněte graf funkce.

$$g: y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

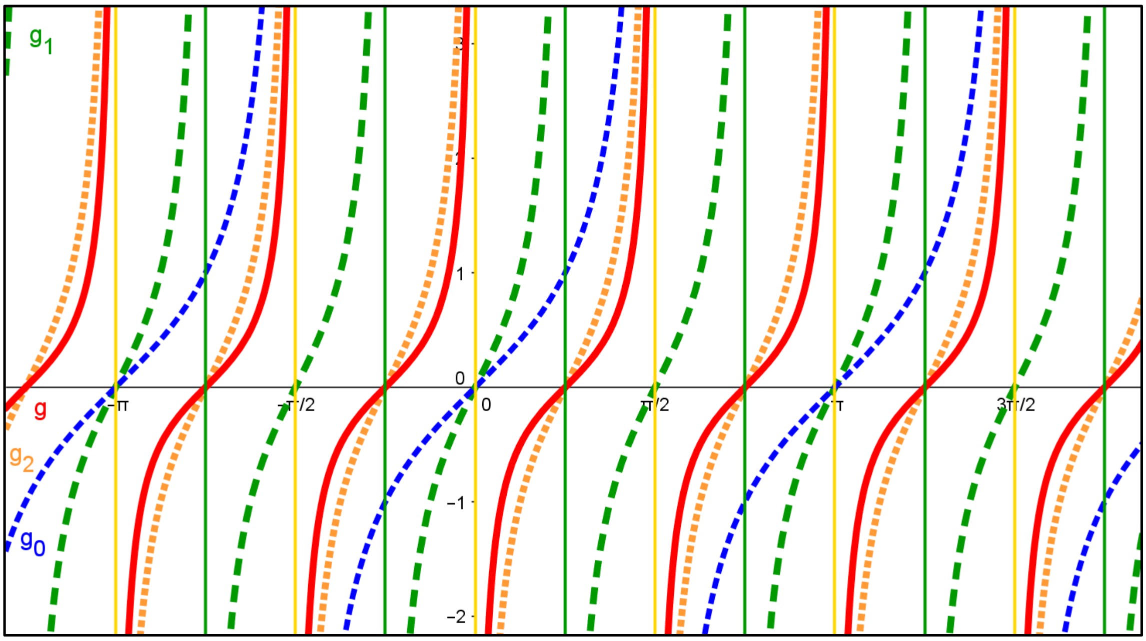
Řešení:

$$g_0: y = \operatorname{tg} x$$

$$g_1: y = \operatorname{tg} 2x$$

$$g_2: y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Postupovat budeme stejně jako v přechozím příkladu postupným vytvářením grafů funkcí g_0 až g_2. U funkce g_2 musíme dát pozor, o kolik funkci posouváme, protože je parametr a různý od nuly. Proto si vytknutím parametru a upravíme funkci g_2 do tvaru $\operatorname{tg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, ze kterého vidíme, že se funkce posouvá o hodnotu $\left|\frac{b}{a}\right|$, tedy o $\frac{\pi}{4}$.



Obr. 90: Graf funkce g

Příklad 9

Načrtněte graf funkce.

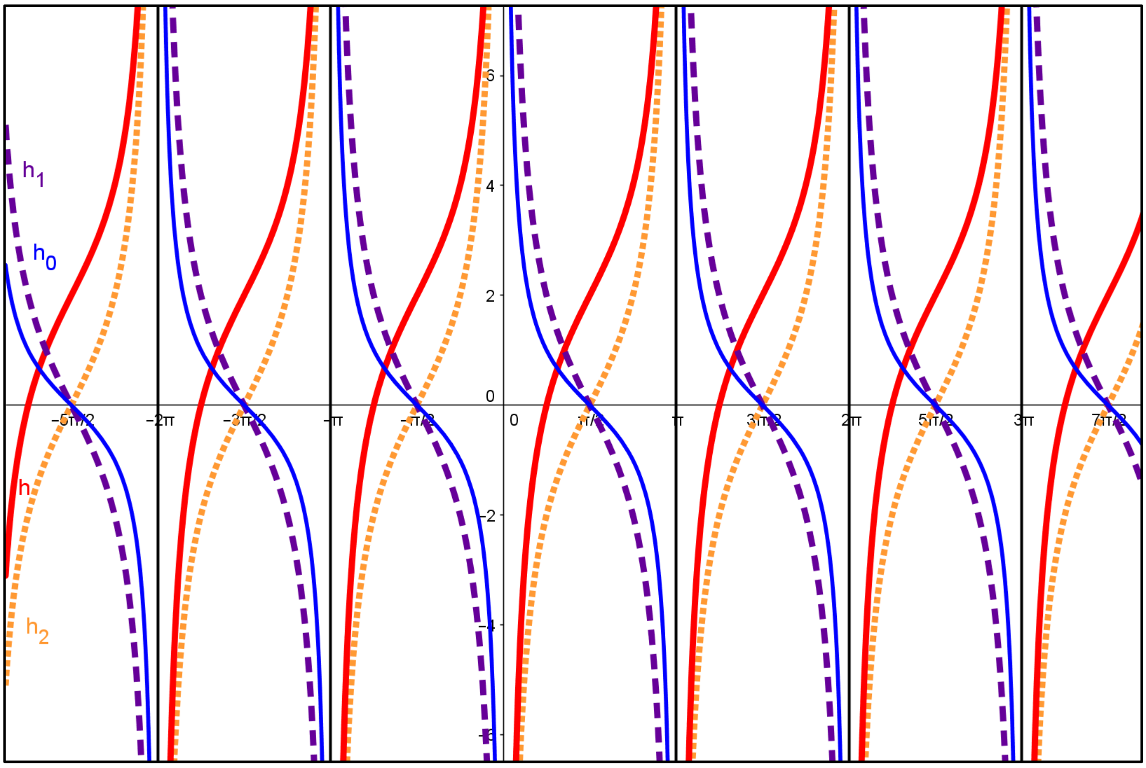
$h: y = -2\,\text{cotg}\,x + 2$

Řešení:

$h_0: y = \text{cotg}\,x$

$h_1: y = 2\text{cotg}\,x$

$h_2: y = -2\text{cotg}\,x$



Obr. 91: Graf funkce h

Příklad 10

Načrtněte grafy funkcí.

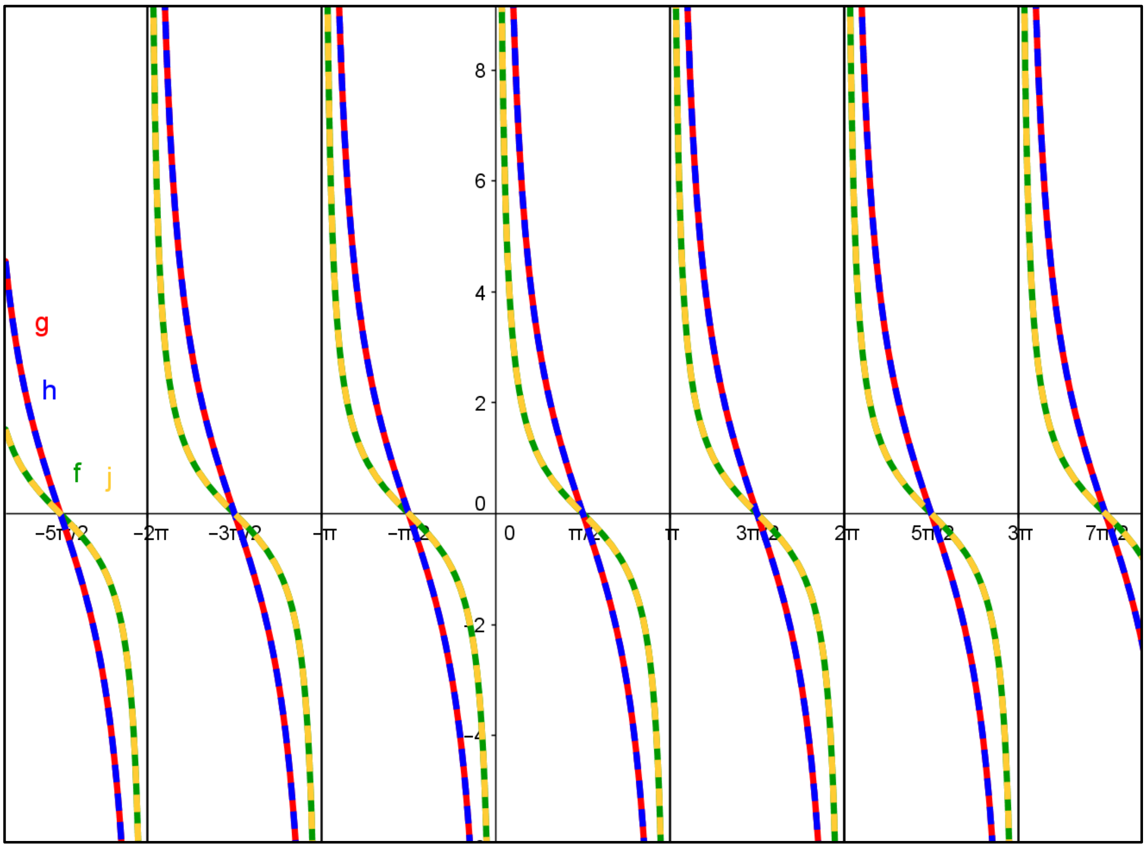
$f: y = \operatorname{cotg} x$

$g: y = 3 \operatorname{cotg} x$

$h: y = -5 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$j: y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Řešení:



Obr. 92: Graf funkcí f, g, h, j

6 Závěr

Informační technologie mají pro výuku značný význam, jelikož vhodným použitím mohou pomoci učiteli při vysvětlování dané tematiky a žákům usnadní její pochopení. Program GeoGebra je díky výhodám popsaným v úvodu pro výuku matematiky jedinečný. Možnost tvorby dynamických konstrukcí v tomto programu je velkým přínosem, protože jsou interaktivní, žáci mohou pozorovat změny konstrukcí za různých situací. Při výkladu goniometrických funkcí je program využitelný na základní i střední škole. Pro převážnou část tématu lze vytvořit dynamické konstrukce, které názorně zobrazují danou problematiku.

Literatura

[1] BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-104-3.

[2] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia - geometrie*. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-691-8.

[3] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-441-4.

[4] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-203-1.

[5] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.

[6] GeoGebra Help Official Manual 3.2 [online]. [cit. 2016-06-21]. Dostupné z WWW:< https://app.geogebra.org/help/docuen.pdf>

Přílohy

Dynamické konstrukce

Dynamicka_konstrukce_pomeru_protilehlé_odvesny_uhlu_a_prepony.ggb

Dynamicka_konstrukce_pomeru_prilehlé_odvesny_uhlu_a_prepony.ggb

Dynamicka_konstrukce_zmeny_velikosti_sinu.ggb

Dynamicka_konstrukce_zmeny_velikosti_kosinu.ggb

Prevedeni_velikosti_uhlu_na_osu_x.ggb

Dynamicky_graf_funkce_sinus_pro_ostrý_úhel.ggb

Dynamicky_graf_funkce_kosinus_pro_ostrý_úhel.ggb

Dynamicky_graf_funkce_sinus_s_jednotkovou_kruznici.ggb

Dynamicky_graf_funkce_kosinus_s_jednotkovou_kruznici.ggb

Dynamicka_konstrukce_vlivu_parametru_na_graf_funkce_sinus.ggb

Dynamicka_konstrukce_vlivu_parametru_na_graf_funkce_kosinus.ggb

Dynamicka_konstrukce_pomeru_delek_odvesen.ggb

Dynamicka_konstrukce_zmeny_velikosti_tangens.ggb

Dynamicka_konstrukce_zmeny_velikosti_kotangens.ggb

Dynamicky_graf_funkce_tangens_pro_ostrý_úhel.ggb

Dynamicky_graf_funkce_kotangens_pro_ostrý_úhel.ggb

Dynamicky_graf_funkce_tangens_s_jednotkovou_kruznici.ggb

Dynamicky_graf_funkce_kotangens_s_jednotkovou_kruznici.ggb

Dynamicka_konstrukce_vlivu_parametru_na_graf_funkce_tangens.ggb

Dynamicka_konstrukce_vlivu_parametru_na_graf_funkce_kotangens.ggb

Pracovní listy

Pracovní list 1

Pracovní list 2

Pracovní list 3

Pracovní list 4

Pracovní list 5

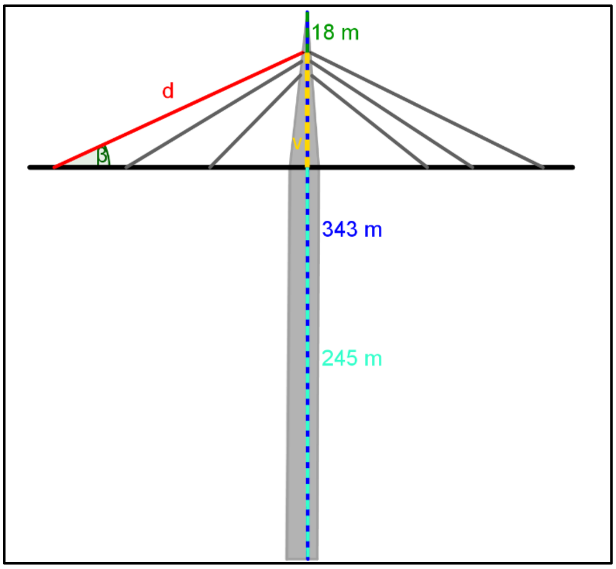
Pracovní list 1

Téma: Sinus ostrého úhlu

Příklad 1

Most Millau je nejvyšší most na světě a je zavěšený na sedmi betonových pilířích. Nejvyšší pilíř má výšku 343 m, most je v této části 245 m nad zemí, a na tomto pilíři je zavěšen na jedenácti ocelových lanech. Jak dlouhé bude lano dosahující pilíře 18 m od jeho vrcholu, které svírá s mostovkou úhel 30°? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:



Řešení:

Odpověď:

Příklad 2

Při stavbě pyramid využívali staří Egypťané rampy, po kterých dostávali velké kamenné kvádry do větších výšek. Jak dlouhá musela být rampa o sklonu 5°, aby dosáhla do výšky 60 m? Udělejte nákres. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:

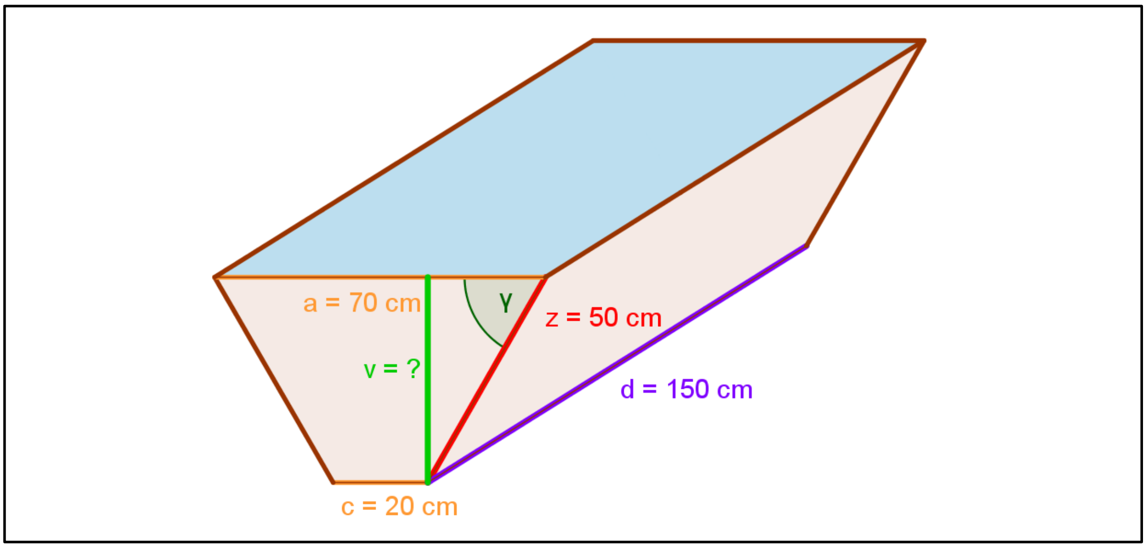
Řešení:

Odpověď:

Příklad 3

Dřevěné necky, ve kterých se kdysi pralo na valše, mají tvar kvádru s podstavou ve tvaru lichoběžníku a délku 150 cm. Spodní strana je široká 20 cm a horní 70 cm. Jejich zkosená strana má délku 50 cm. Hladina vody svírá se skosenou stranou úhel 60°. Kolik litrů vody bude v neckách, pokud hladina bude dosahovat až po okraj? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:



Řešení:

Odpověď:

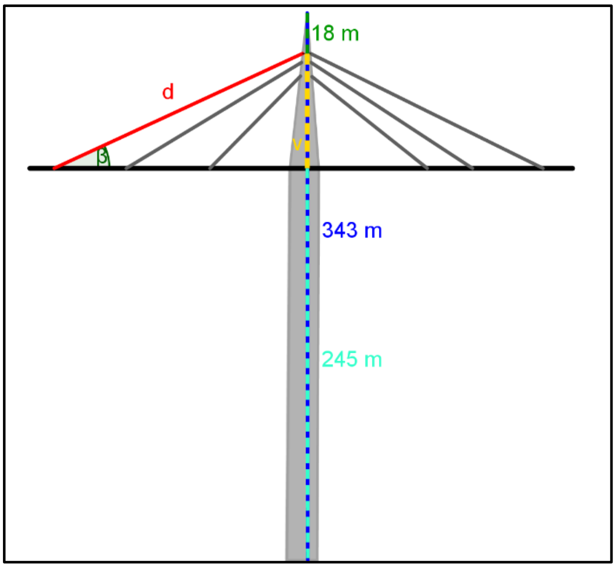
Pracovní list 1 - řešení

Téma: Sinus ostrého úhlu

Příklad 1

Most Millau je nejvyšší most na světě a je zavěšený na sedmi betonových pilířích. Nejvyšší pilíř má výšku 343 m, most je v této části 245 m nad zemí, a na tomto pilíři je zavěšen na jedenácti ocelových lanech. Jak dlouhé bude lano dosahující pilíře 18 m od jeho vrcholu, které svírá s mostovkou úhel 30°? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:



Řešení:

Úhel mezi lanem a mostovkou $= \beta$, Výška lana nad mostovkou$= v$, délka lana $= d$

$$v = 343 - 245 - 18 = 80\ m$$

$$\sin \alpha = \frac{v}{d}$$

$$d = \frac{v}{\sin \beta}$$

$$d = \frac{80}{\sin 30°}$$

$$\underline{\underline{d \doteq 160 \text{ m}}}$$

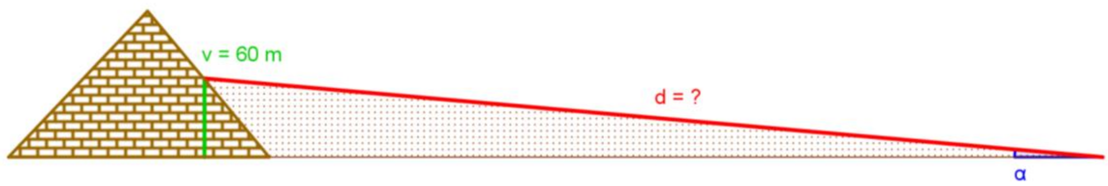
Odpověď:

Ocelové lano je dlouhé 160 m.

Příklad 2

Při stavbě pyramid využívali staří Egypťané rampy, po kterých dostávali velké kamenné kvádry do větších výšek. Jak dlouhá musela být rampa o sklonu 5°, aby dosáhla do výšky 60 m? Udělejte nákres. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:



Řešení:

Výška $= v$, délka $= d$, sklon rampy $= \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{v}{d}$$

$$d = \frac{v}{\sin\alpha}$$

$$d = \frac{60}{\sin 5°}$$

$$\underline{\underline{d \doteq 688 \text{ m}}}$$

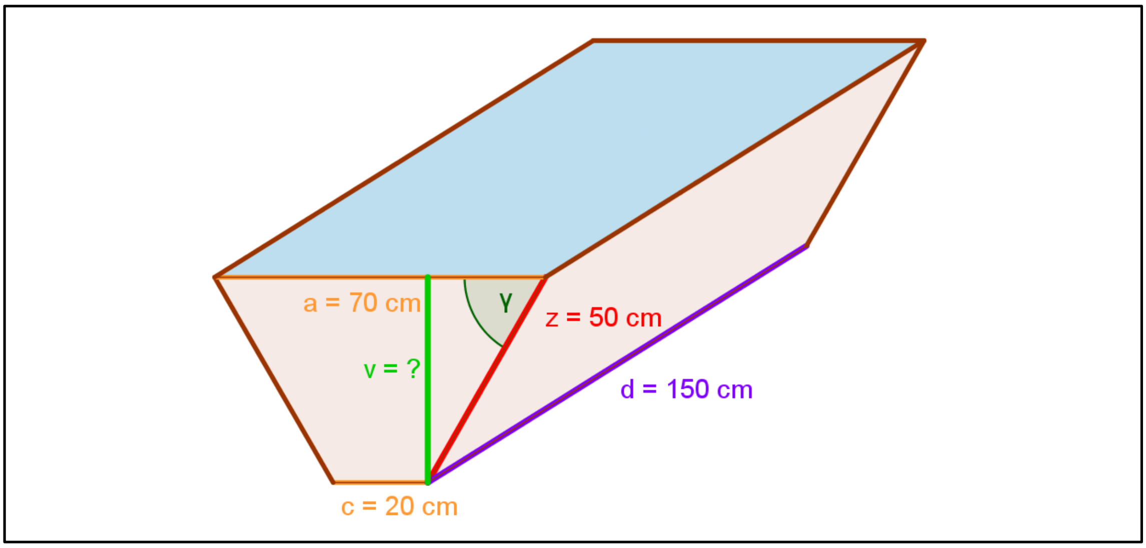
Odpověď:

Rampa by musela být dlouhá 688 m.

Příklad 3

Dřevěné necky, ve kterých se kdysi pralo na valše, mají tvar kvádru s podstavou ve tvaru lichoběžníku a délku 150 cm. Spodní strana je široká 20 cm a horní 70 cm. Jejich zkosená strana má délku 50 cm. Hladina vody svírá se skosenou stranou úhel 60°. Kolik litrů vody bude v neckách, pokud hladina bude dosahovat až po okraj? Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Nákres:



Řešení:

Úhel mezi hladinou vody a zkosenou stranu $= \gamma$, délka $= d$, zkosená strana $= z$, výška $= v$, šířka spodní strany $= c$, šířka horní strany $= a$

Nejprve spočítáme výšku necek

$$\sin \gamma = \frac{v}{z}$$

$$\sin \gamma \cdot z = v$$

$$v = 50 \cdot \sin 60°$$

$$v \doteq 43 \text{ cm}$$

Poté spočítáme obsah lichoběžníkové podstavy a nakonec objem necek

$$\mathrm{S} = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

$$\mathrm{S} = \frac{90}{2} \cdot 43$$

$$\mathrm{S} = 1935\ \mathrm{cm}^2$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{S} \cdot d$$

$$\mathrm{V} = 1935 \cdot 150$$

$$\underline{\underline{\mathrm{V} = 290250\ \mathrm{cm}^3 \doteq 290\ \mathrm{l}}}$$

Odpověď:

Hladina vody bude v neckách sahat po okraj, pokud v nich bude 290 l vody.

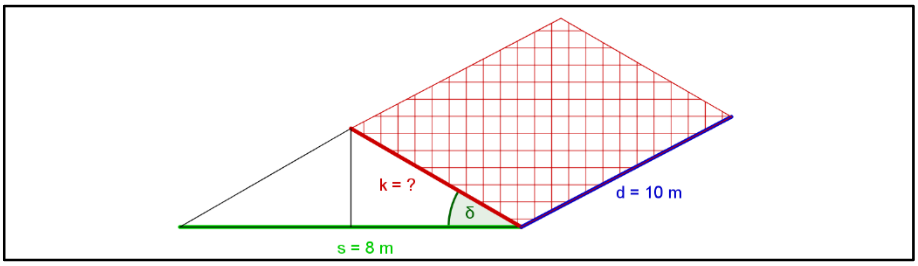
Pracovní list 2

Téma: Kosinus ostrého úhlu

Příklad 1

Doporučený sklon střechy pro pálené tašky je 30°. Dům, na jehož střechu má být použita tato krytina, má délku 10 m a šířku 8 m. Jaká bude délka krovu (k) a kolik m^2 této krytiny bude potřeba na pokrytí střechy, pokud štít střechy má mít tvar rovnoramenného trojúhelníku? Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

Nákres:



Řešení:

Odpověď:

Příklad 2

Vysoké televizní vysílače bývají ukotveny ocelovými lany. Lano dlouhé 350 m svírá se zemí úhel 60°. V jaké vzdálenosti od vysílače bude ukotvení lana? Udělejte nákres.

Nákres:

Řešení:

Odpověď:

Příklad 3

Rovná silnice vedoucí z Hlubočan do Vrchotína je podle autoatlasu dlouhá 31 km. Jakou vzdálenost ujedeme ve skutečnosti, pokud je průměrný sklon silnice 10°? Výsledek uveďte v celých metrech. Načrtněte nákres.

Nákres:

Řešení:

Odpověď:

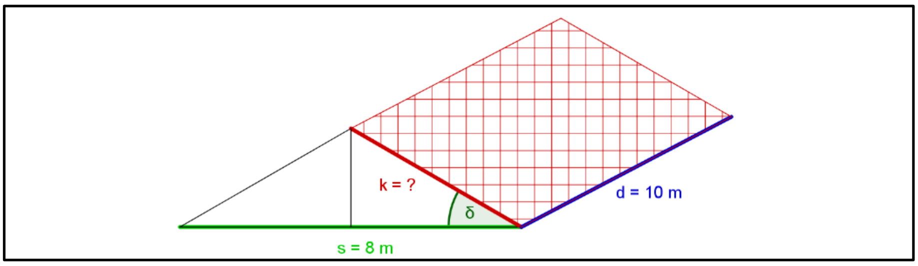
Pracovní list 2 - řešení

Téma: Kosinus ostrého úhlu

Příklad 1

Doporučený sklon střechy pro pálené tašky je 30°. Dům, na jehož střechu má být použita tato krytina, má délku 10 m a šířku 8 m. Jaká bude délka krovu (k) a kolik m^2 této krytiny bude potřeba na pokrytí střechy, pokud štít střechy má mít tvar rovnoramenného trojúhelníku? Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

Nákres:



Řešení:

Sklon střechy $= \delta$, šířka domu $= s$, délka domu $= d$, délka krovu $= k$

$$\cos\delta = \frac{\frac{1}{2}s}{k}$$

$$k = \frac{\frac{1}{2}s}{\cos\delta}$$

$$k = \frac{4}{\cos 30°}$$

$$k \doteq 4{,}6 \text{ m}$$

$$S = 2 \cdot k \cdot d$$

$$S = 2 \cdot 4{,}6 \cdot 10$$

$$\underline{\underline{S = 92 \text{ m}^2}}$$

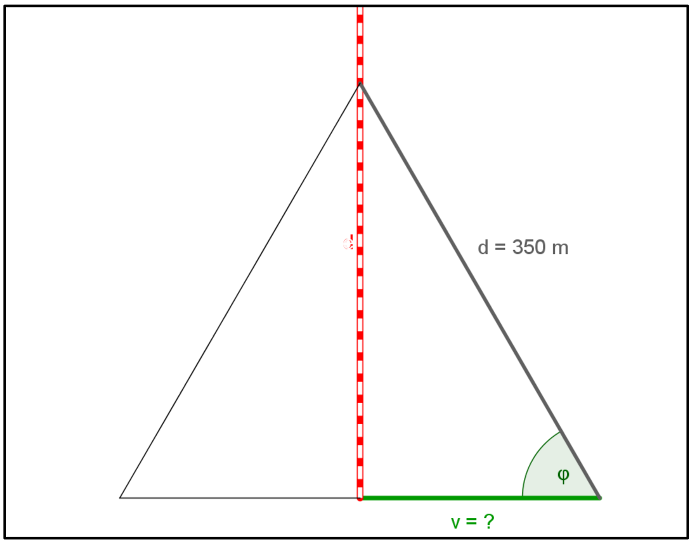
Odpověď:

Délka krovu bude 4,6 m a na pokrytí střechy bude potřeba 92 m^2 tašek.

Příklad 2

Vysoké televizní vysílače bývají ukotveny ocelovými lany. Lano dlouhé 350 m svírá se zemí úhel 60°. V jaké vzdálenosti od vysílače bude ukotvení lana? Udělejte nákres.

Nákres:



Řešení:

Úhel mezi lanem a zemí $= \varphi$, délka lana $= d$, vzdálenost ukotvení $= v$

$$\cos\varphi = \frac{v}{d}$$

$$v = \cos\varphi \cdot d$$

$$v = \cos 60° \cdot 350$$

$$\underline{\underline{v = 175\ \mathrm{m}}}$$

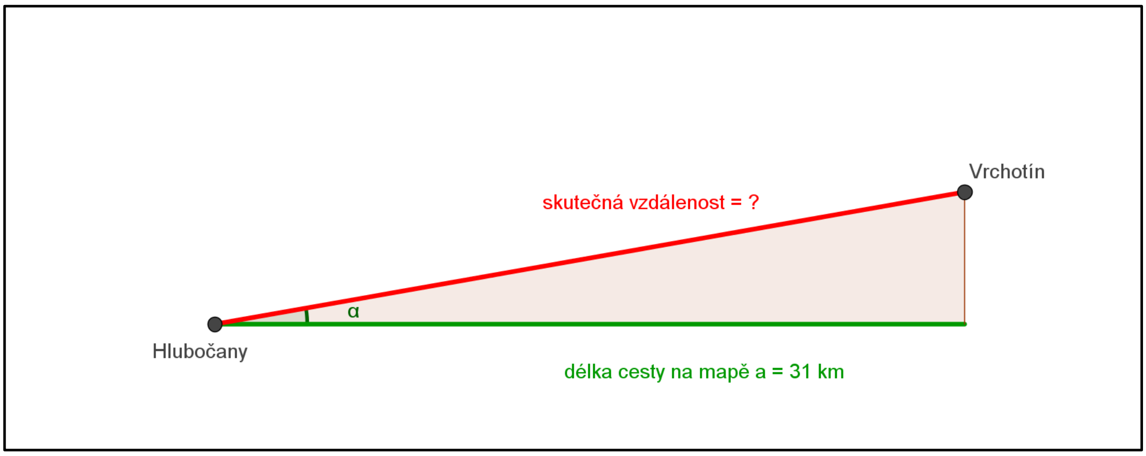
Odpověď:

Ukotvení lana bude vzdáleno 175 m od vysílače.

Příklad 3

Rovná silnice vedoucí z Hlubočan do Vrchotína je podle autoatlasu dlouhá 31 km. Jakou vzdálenost ujedeme ve skutečnosti, pokud je průměrný sklon silnice 10°? Výsledek uveďte v celých metrech. Načrtněte nákres.

Nákres:



Řešení:

Délka cesty dle autoatlasu $= a$, sklon silnice $= \alpha$, skutečná vzdálenost $= v$

$$\cos\alpha = \frac{a}{v}$$

$$v = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$v = \frac{31000}{\cos 10°}$$

$$\underline{v \doteq 31478\ \mathrm{m}}$$

Odpověď:

Ve skutečnosti ujedeme po této cestě 31 478 m.

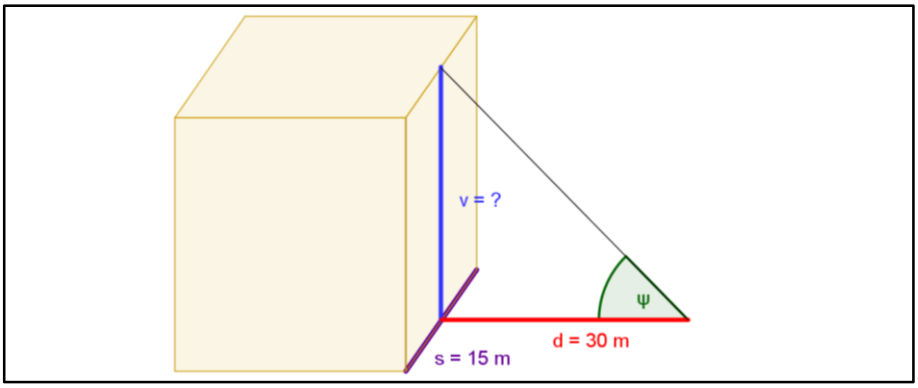
Pracovní list 3

Téma: Tangens a kotangens ostrého úhlu

Příklad 1

Panelový dům potřebuje zateplit boční stěnu. Jeho šířka je 15 m. Pokud od domu stojíme 30 m, vidíme okraj jeho střechy pod výškovým úhlem 45°. Kolik m^2 izolace bude potřeba, když je boční stěna bez oken?

Nákres:



Řešení:

Odpověď:

Příklad 2

Strom vrhá stín dlouhý 10 m. Jak je strom vysoký, pokud je slunce ve výšce 70° nad obzorem? Využijte funkci kotangens a výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo. Načrtněte nákres.

Nákres:

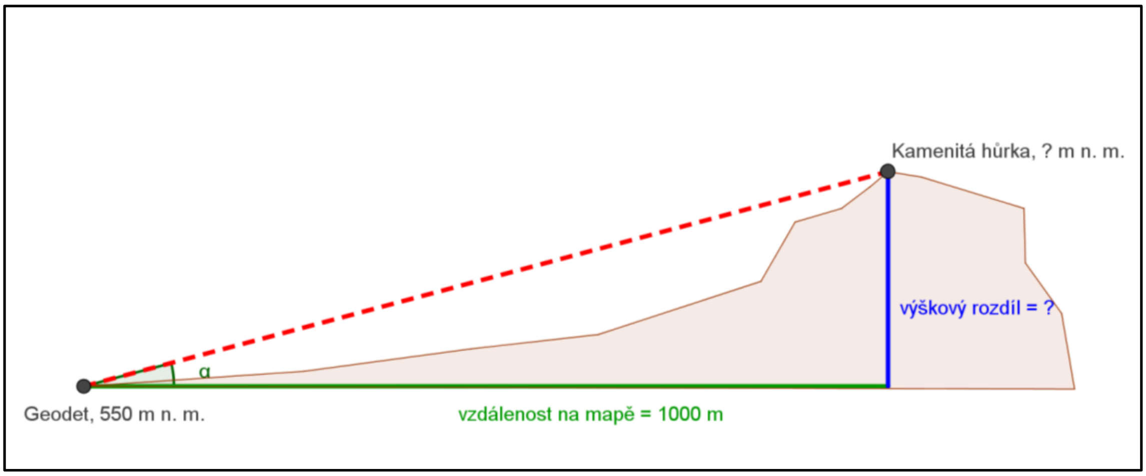
Řešení:

Odpověď:

Příklad 3

Geodet přeměřuje nadmořskou výšku kopce Kamenitá hůrka. Nachází se v místě s nadmořskou výškou 550 m n. m., které je dle mapy vzdáleno 1000 m od vrcholu kopce. Jakou nadmořskou výšku má Kamenitá hůrka, pokud geodet vidí její vrchol pod výškovým úhlem 15°?

Nákres:



Řešení:

Odpověď:

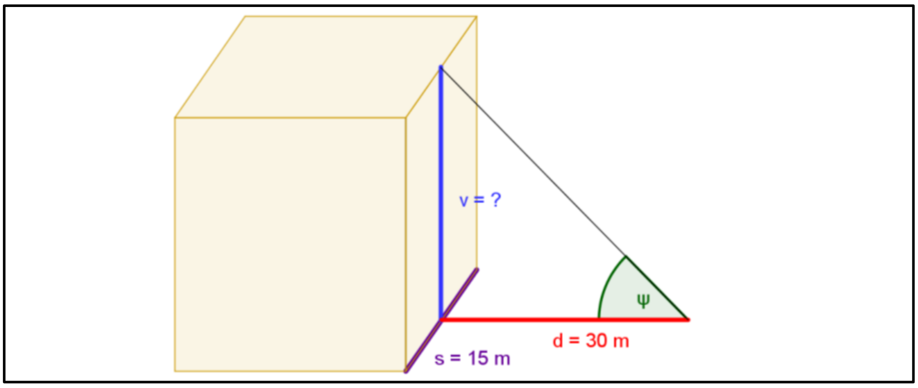
Pracovní list 3 - řešení

Téma: Tangens a kotangens ostrého úhlu

Příklad 1

Panelový dům potřebuje zateplit boční stěnu. Jeho šířka je 15 m. Pokud od domu stojíme 30 m, vidíme okraj jeho střechy pod výškovým úhlem 45°. Kolik m^2 izolace bude potřeba, když je boční stěna bez oken?

Nákres:



Řešení:

Výškový úhel $= \psi$, šířka domu $= s$, výška domu $= v$, vzdálenost od domu $= d$

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{v}{d}$$

$$v = \mathrm{tg}\,\psi \cdot d$$

$$v = \mathrm{tg}\,45 \cdot 30$$

$$v = 30\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{S} = s \cdot v = 15 \cdot 30$$

$$\underline{\underline{\mathrm{S} = 450\ \mathrm{m}^2}}$$

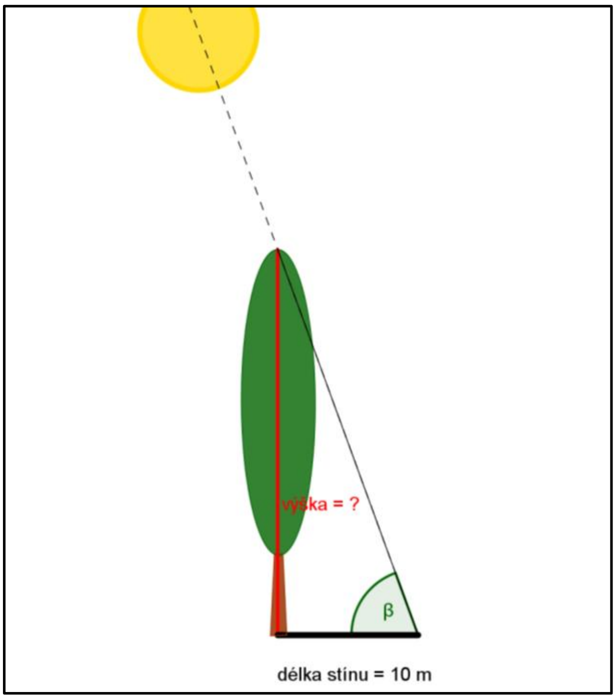
Odpověď:

Na zateplení boční strany domu bude třeba 450 m^2 izolace.

Příklad 2

Strom vrhá stín dlouhý 10 m. Jak je strom vysoký, pokud je slunce ve výšce 70° nad obzorem? Využijte funkci kotangens a výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo. Načrtněte nákres.

Nákres:



Řešení:

Úhel svírající sluneční paprsky se zemí $= \beta$, délka stínu $= d$, výška stromu $= v$

$$cotg\ \beta = \frac{d}{v}$$

$$v = \frac{d}{\text{cotg}\ \beta}$$

$$v = \frac{10}{\text{cotg}\ 70°}$$

$$\underline{\underline{v \doteq 28{,}5\ \text{m}}}$$

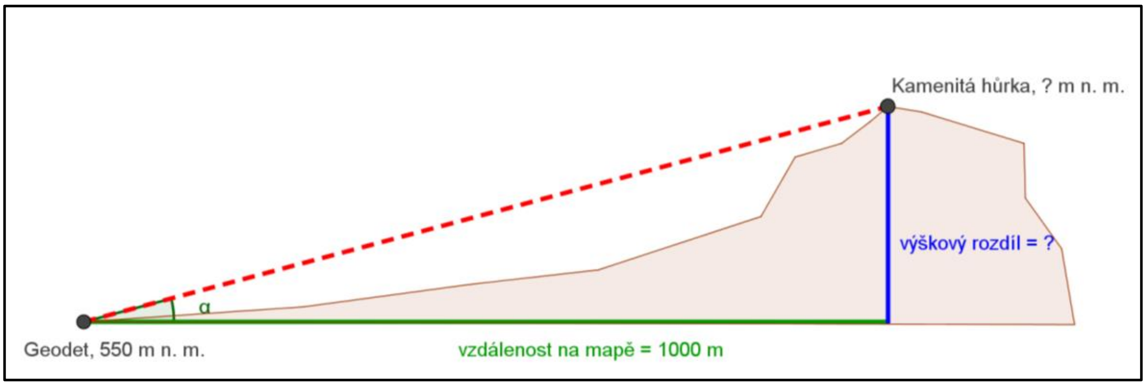
Odpověď:

Strom je vysoký 28,5 m.

Příklad 3

Geodet přeměřuje nadmořskou výšku kopce Kamenitá hůrka. Nachází se v místě s nadmořskou výškou 550 m n. m., které je dle mapy vzdáleno 1000 m od vrcholu kopce. Jakou nadmořskou výšku má Kamenitá hůrka, pokud geodet vidí její vrchol pod výškovým úhlem 15°?

Nákres:



Řešení:

Výškový úhel$=\alpha$, vzdálenost vrcholu na mapě $= d$, výškový rozdíl $= v$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot d = v$$

$$v = \operatorname{tg} 15° \cdot 1000$$

$$\underline{v \doteq 268\ \mathrm{m}}$$

Nadmořská výška kopce $= 550$ m n. m. $+\ v = 818$ m n. m.

Odpověď:

Kamenitá hůrka má nadmořskou výšku 818 m nad mořem.

Pracovní list 4

Téma: Grafy funkcí sinus a kosinus

Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí do jednoho nákresu.

$f: y = \cos x$

$g: y = \cos 2x$

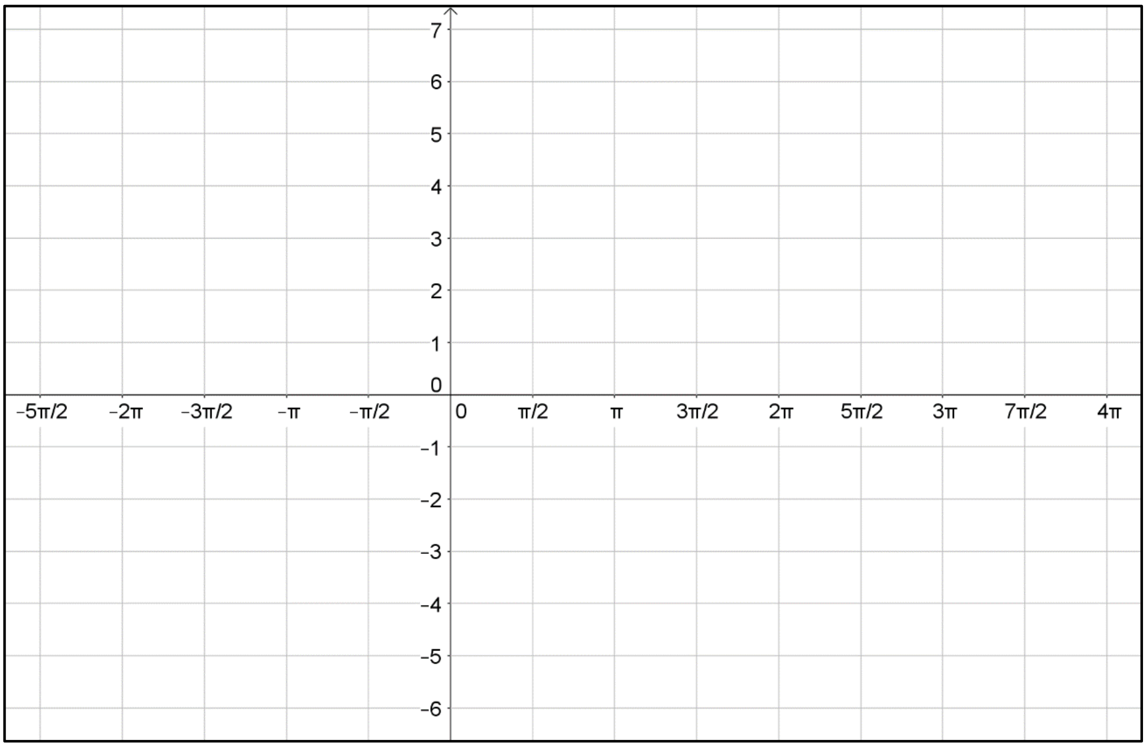
$h: y = \cos(2x + \pi)$

$i: y = 3\cos(2x + \pi)$

$j: y = 3\cos(2x + \pi) - 1$

Nápověda: Funkci h upravte do tvaru $h: y = \cos\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$

Řešení:



Příklad 2

Načrtněte graf funkce.

$$f: y = 2\sin\frac{x}{4} + 3$$

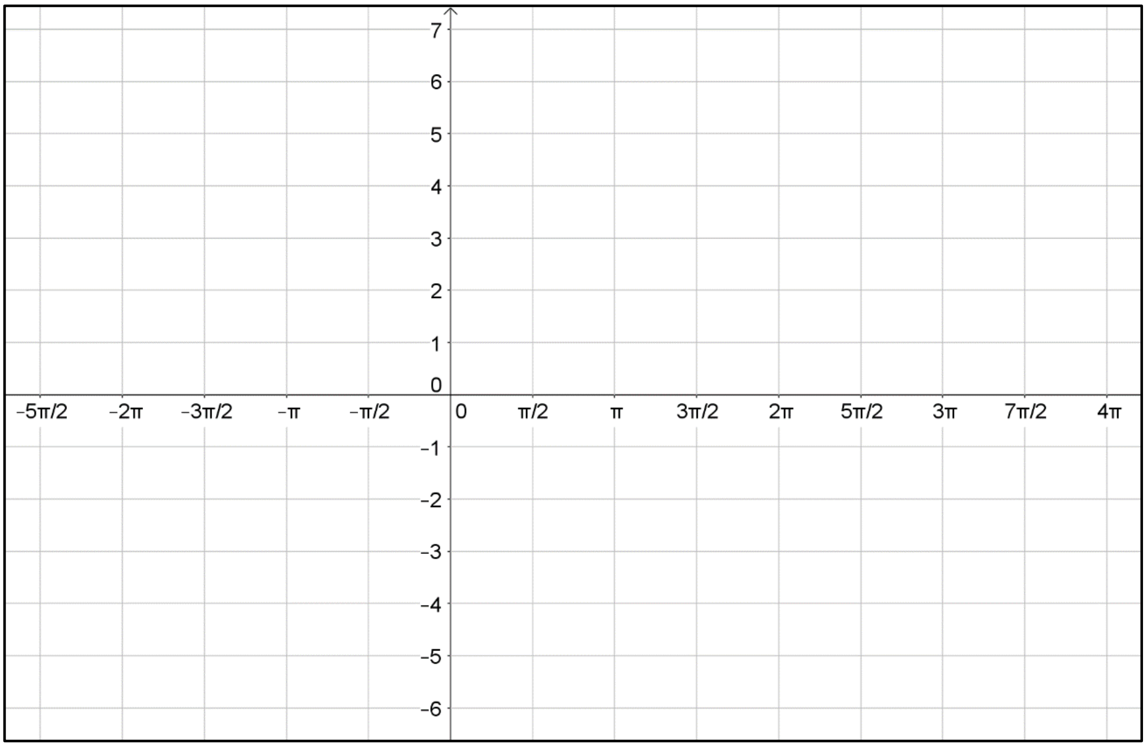
Nápověda: vytvořte funkce, ze kterých bude postupně funkce f vycházet

Řešení:

$f_0: y =$

$f_1: y =$

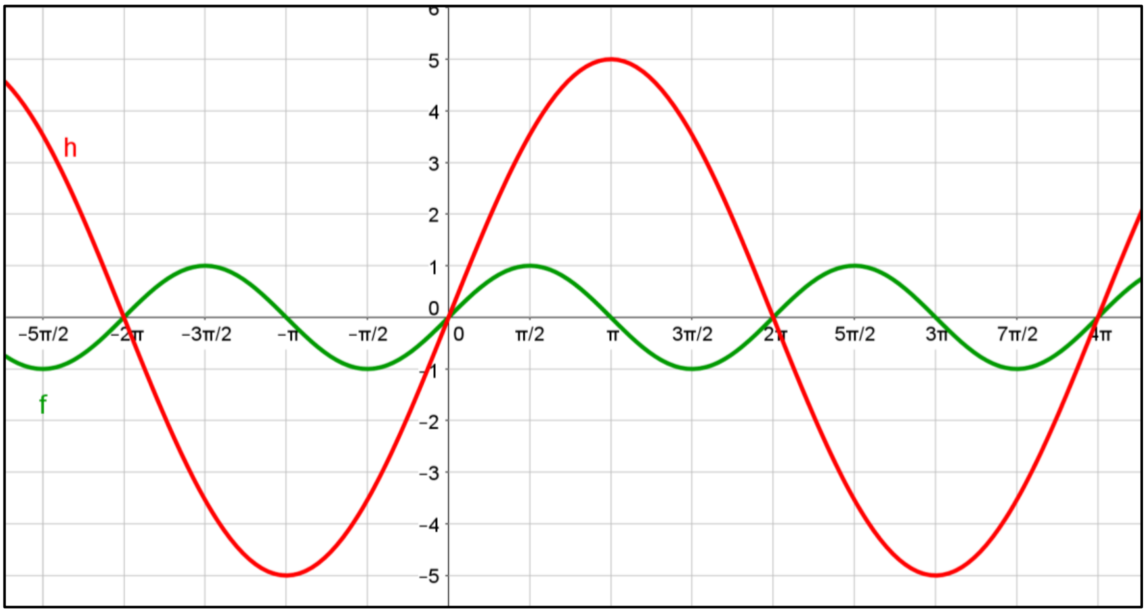
$f_2: y =$



Příklad 3

Určete předpis funkce h. Zaměřte se na variantu, kdy má funkce základ $\sin x$, parametry a, c mají kladnou hodnotu.

Nápověda: $h: y = c\sin(ax + b) + d$, bude třeba zjistit parametry funkce



Řešení:

Funkce h má obecný předpis:

a) Parametr a

b) Parametr b

c) Parametr c

d) Parametr d

Předpis funkce $h \colon y =$

Pracovní list 4 - řešení

Téma: Grafy funkcí sinus a kosinus

Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí do jednoho nákresu.

$f: y = \cos x$

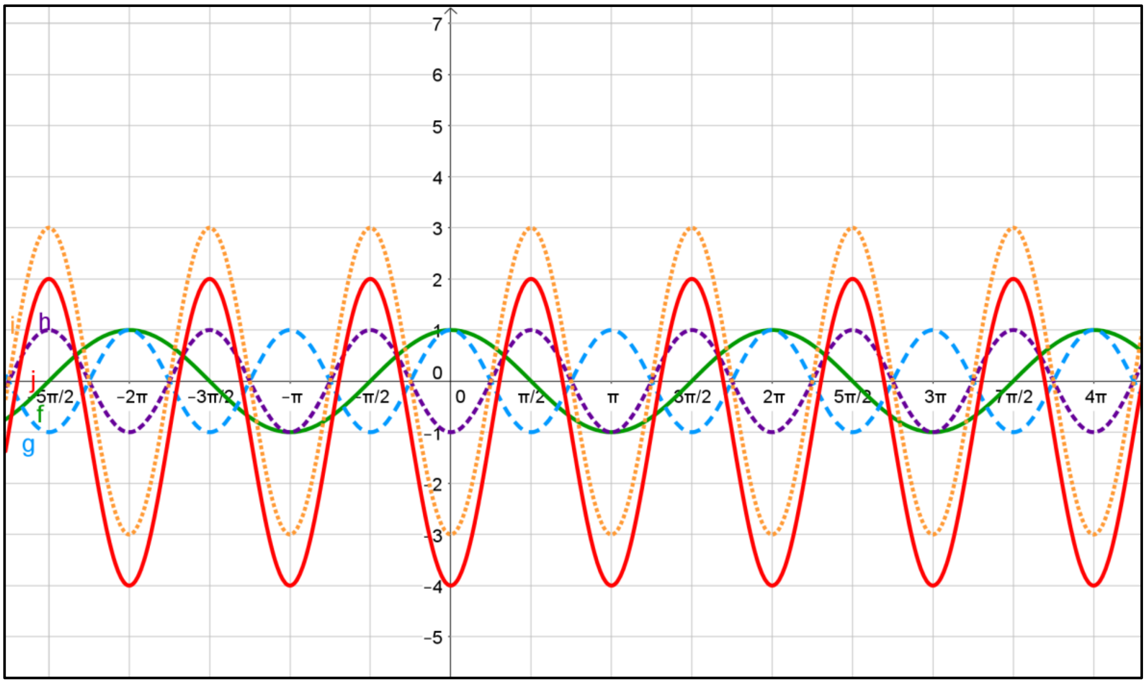
$g: y = \cos 2x$

$h: y = \cos(2x + \pi)$

$i: y = 3\cos(2x + \pi)$

$j: y = 3\cos(2x + \pi) - 1$

Řešení:



Z předpisu jednotlivých funkcí vidíme, že každá vychází z té předchozí, jen je doplněna o jeden parametr. Nová funkce tedy vznikne úpravou funkce předchozí dle nově získaného parametru. První funkce je nezměněný předpis funkce kosinus. Druhá funkce vychází z té první, je však doplněna o parametr a, třetí funkce vychází z druhé, je navíc doplněna o parametr b. Funkce i, je má předpis funkce h doplněný o parametr c. Poslední funkce obsahuje stejné parametry o stejných hodnotách, jako funkce předchozí, navíc obsahuje i parametr d. U funkce h musíme dát pozor, o jakou hodnotu bude posunutá, a proto jí upravíme vytknutím parametru a ze závorky. Po úpravě uvidíme, že funkce h bude oproti funkci g posunutá o $\frac{|b|}{|a|}$.

$$h: y = \cos(2x + \pi) = \cos 2(x + \frac{\pi}{2})$$

Příklad 2

Načrtněte graf funkce.

$$f: y = 2\sin\frac{x}{4} + 3$$

Nápověda: vytvořte funkce, ze kterých bude postupně funkce f vycházet

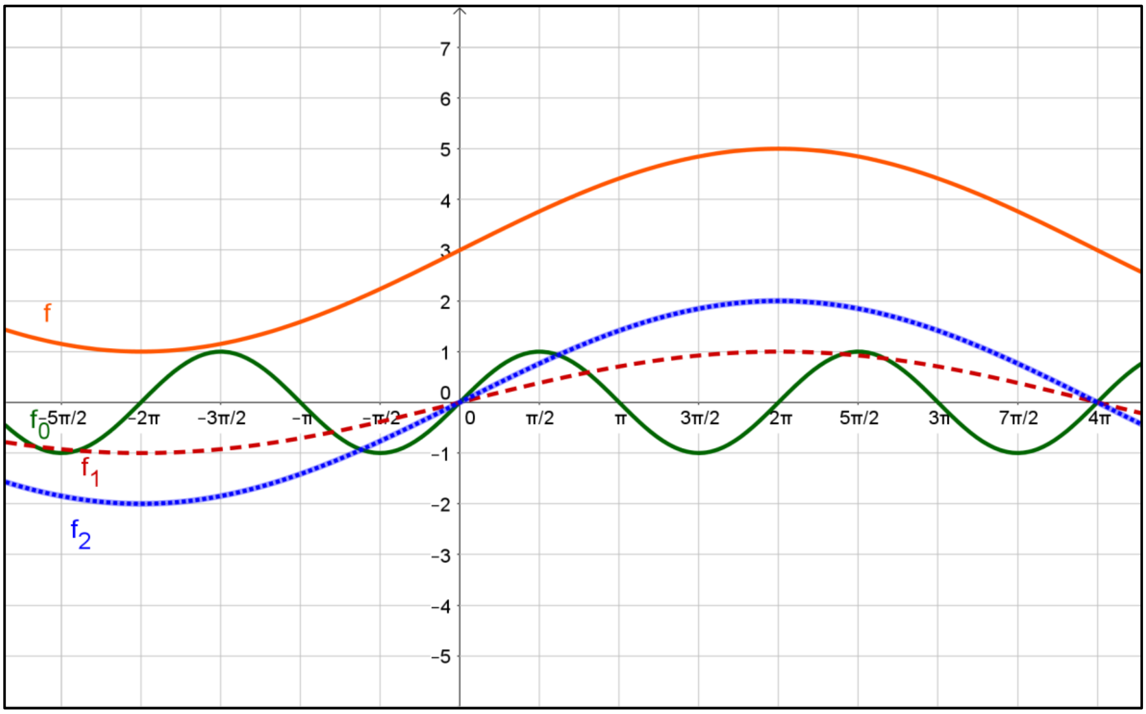
Řešení:

$$f_0: y = \sin x$$

$$f_1: y = \sin\frac{x}{4}$$

$$f_2: y = 2\sin\frac{x}{4}$$

K funkci vytvoříme tři funkce, ze kterých bude výsledná funkce vycházet. Stejně jako v předchozím příkladu začneme funkcí se základním předpisem, funkci f_0, postupně této funkci budeme přidávat parametry z výsledné funkce. Funkce f_1 vznikne přidáním parametru a k funkci f_0, funkce f_2 vznikne rozšířením f_1 o parametr c.

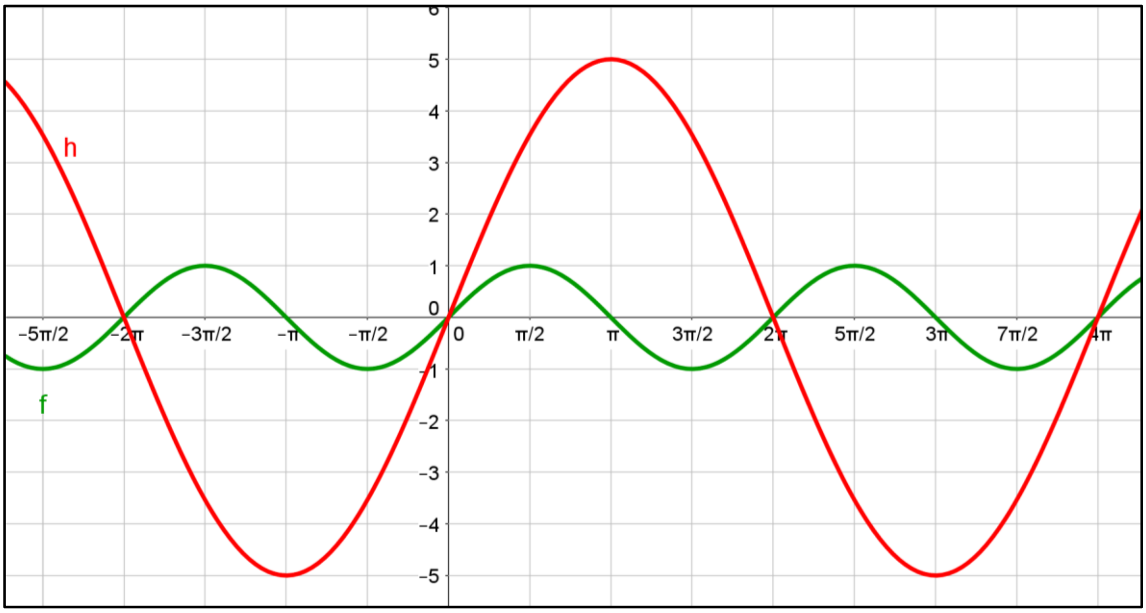


Příklad 3

Určete předpis funkce h. Zaměřte se na variantu, kdy má funkce základ $\sin x$, parametry a, c mají kladnou hodnotu.

Nápověda: $h: y = c \sin(ax + b) + d$, bude třeba zjistit parametry funkce

Řešení:



Na zjištění hodnoty parametrů se zaměříme postupně.

a) Parametr a

Z nákresu je patrné, že funkce h má periodu 4π. Velikost periody můžeme určit jako $p = \frac{2\pi}{|a|}$, (2π je perioda funkcí sinus a kosinus)

Parametr a tedy určíme jako $|a| = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

V zadání je dáno, že parametr a má být kladný, tedy $a = \frac{1}{2}$

b) Parametr b

Z nákresu vidíme, funkce $h(0) = 0$, absolutní hodnota maxima a minima rovná, funkce má v intervalu $\left(0; \frac{p}{4}\right)$ stejný průběh jako její základ, funkce $\sin x$ v intervalu $\left(0; \frac{p}{4}\right)$, dále víme, že parametr c má být kladný, můžeme tedy určit, že $b = 0$

c) Parametr c

Parametr c určíme jako aritmetický průměr součtu absolutních hodnot maxima a minima

$$|c| = \frac{|y_{max}| + |y_{min}|}{2}, c = \frac{|5| + |-5|}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

d) Parametr d

Parametr d určíme jako rozdíl absolutních hodnot maxima a minima

$$d = |y_{max}| - |y_{min}| = |5| - |-5| = 5 - 5 = 0$$

Předpis funkce $h\colon y = 5\sin\frac{x}{2}$

Pracovní list 5

Téma: Grafy funkcí tangens a kotangens

Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí do jednoho nákresu.

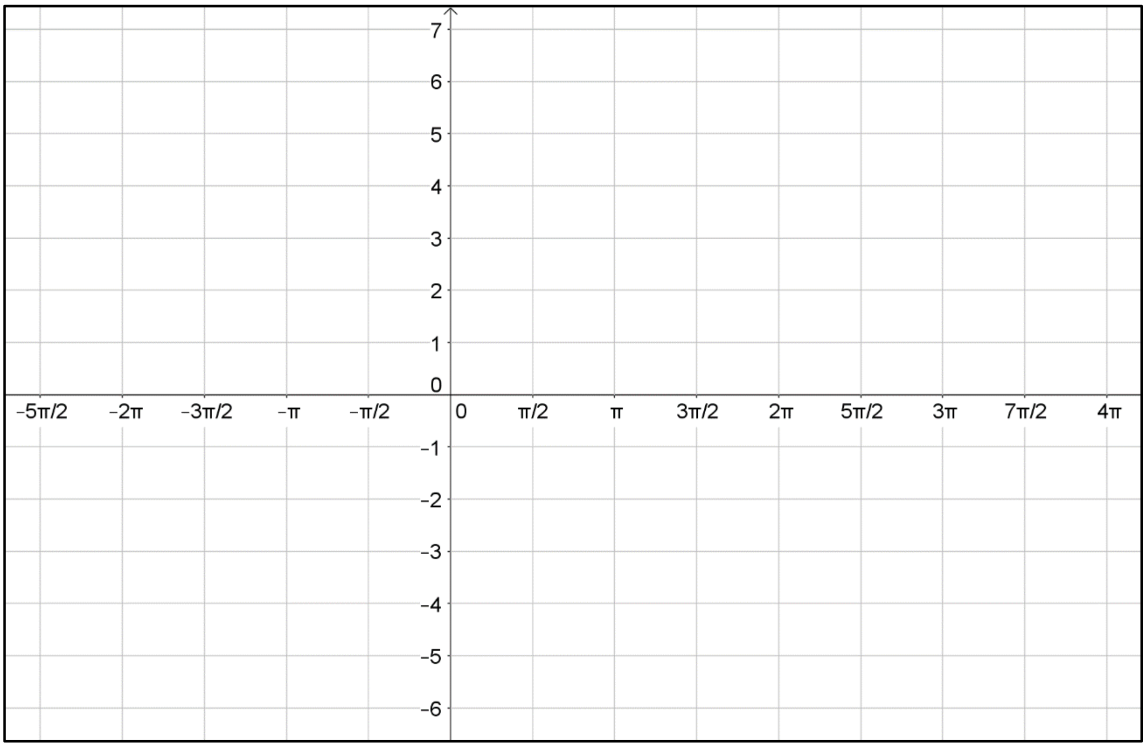
$f: y = \operatorname{tg} x$

$g: y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

$h: y = -\operatorname{tg} \frac{x}{3}$

$i: y = h: y = -\operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2$

Řešení:



Příklad 2

Načrtněte graf funkce.

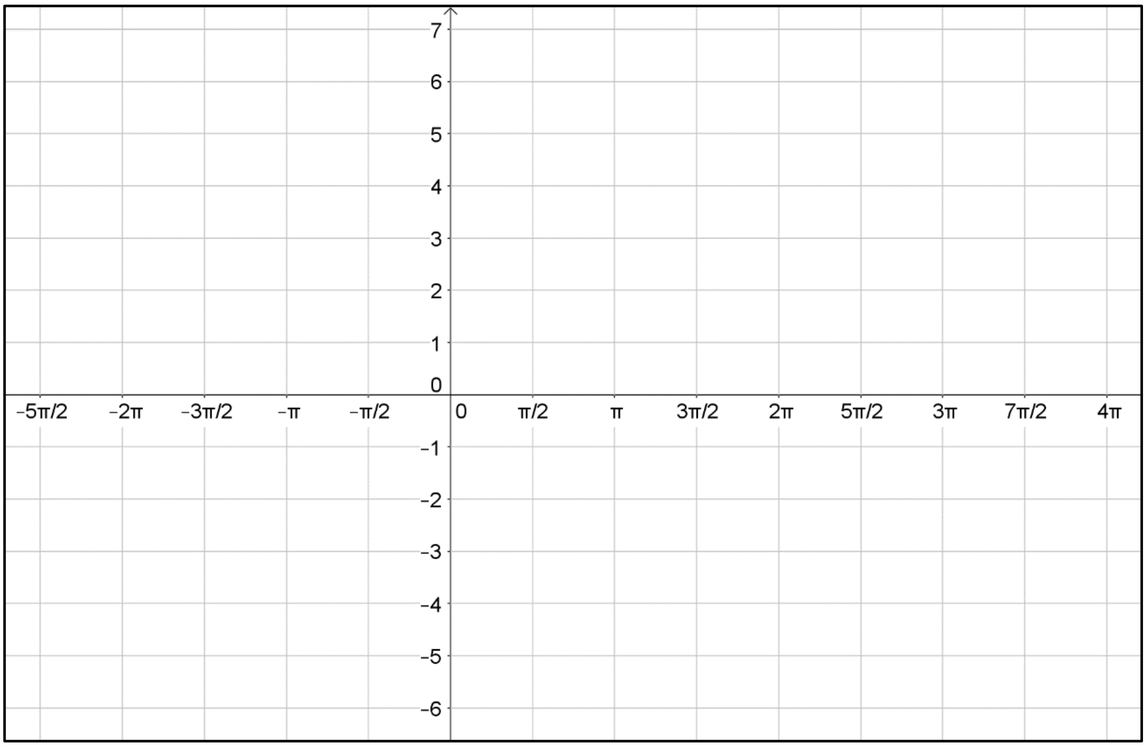
$f: y = \frac{1}{2}\cot x - 3$

Nápověda: Vytvořte funkce, ze kterých bude postupně funkce f vycházet.

Řešení:

$f_0: y =$

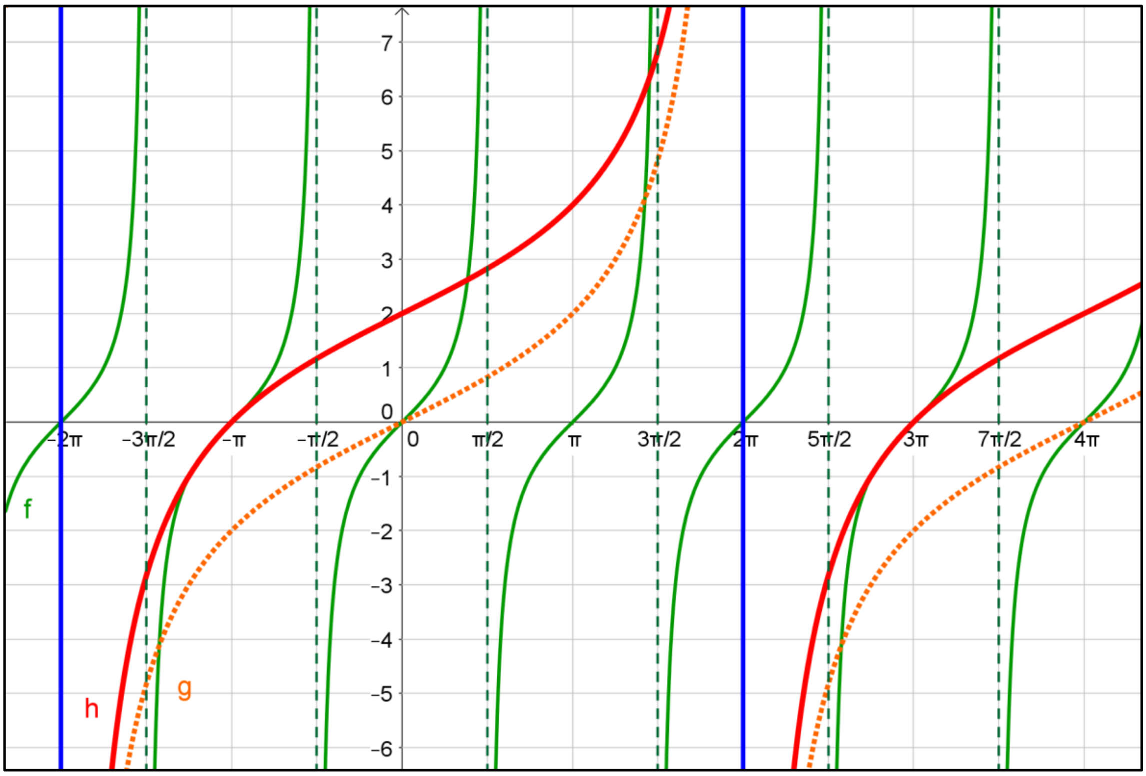
$f_1: y =$



Příklad 3

Určete předpis funkce h. Zaměřte se na interval $(-2\pi; 2\pi)$ a na variantu, kdy má funkce základ $\mathrm{tg}\, x$, parametry a, c mají kladnou hodnotu.

Nápověda: $h: y = c\,\mathrm{tg}(ax + b) + d$, bude třeba zjistit parametry funkce



Řešení:

Na zjištění hodnoty parametrů se zaměříme postupně.

a) Parametr a

b) Parametr b

c) Parametr c

d) Parametr d

Předpis funkce $h: y =$

Pracovní list 5 - řešení

Téma: Grafy funkcí tangens a kotangens

Příklad 1

Načrtněte grafy funkcí do jednoho nákresu.

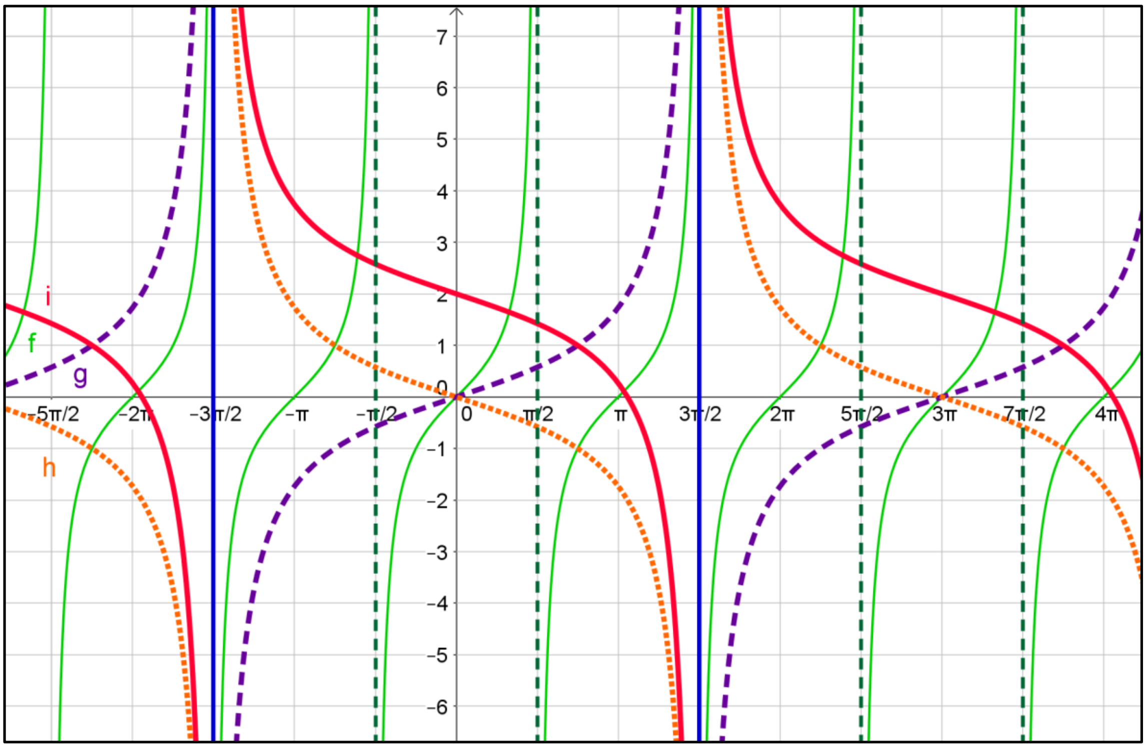
$f: y = \operatorname{tg} x$

$g: y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

$h: y = -\operatorname{tg} \frac{x}{3}$

$i: y = h: y = -\operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2$

Řešení:



Příklad 2

Načrtněte graf funkce.

$$f: y = \frac{1}{2}\cot x - 3$$

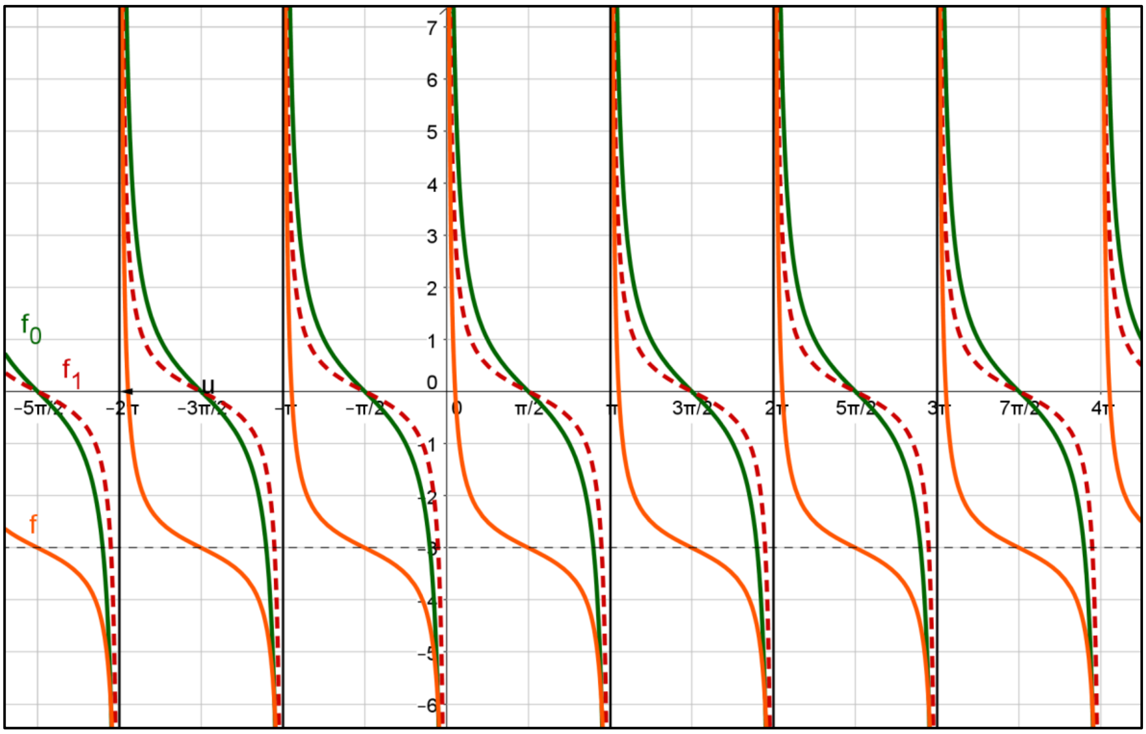
Nápověda: Vytvořte funkce, ze kterých bude postupně funkce f vycházet.

Řešení:

$$f_0: y = \cot x$$

$$f_1: y = \frac{1}{2}\cot x$$

K funkci vytvoříme tři funkce, ze kterých bude výsledná funkce vycházet. Stejně jako v předchozím příkladu začneme funkcí se základním předpisem, funkci f_0, postupně této funkci budeme přidávat parametry z výsledné funkce. Funkce f_1 vznikne přidáním parametru c k funkci f_0. Funkce f je f_1 posunutá o parametr d.



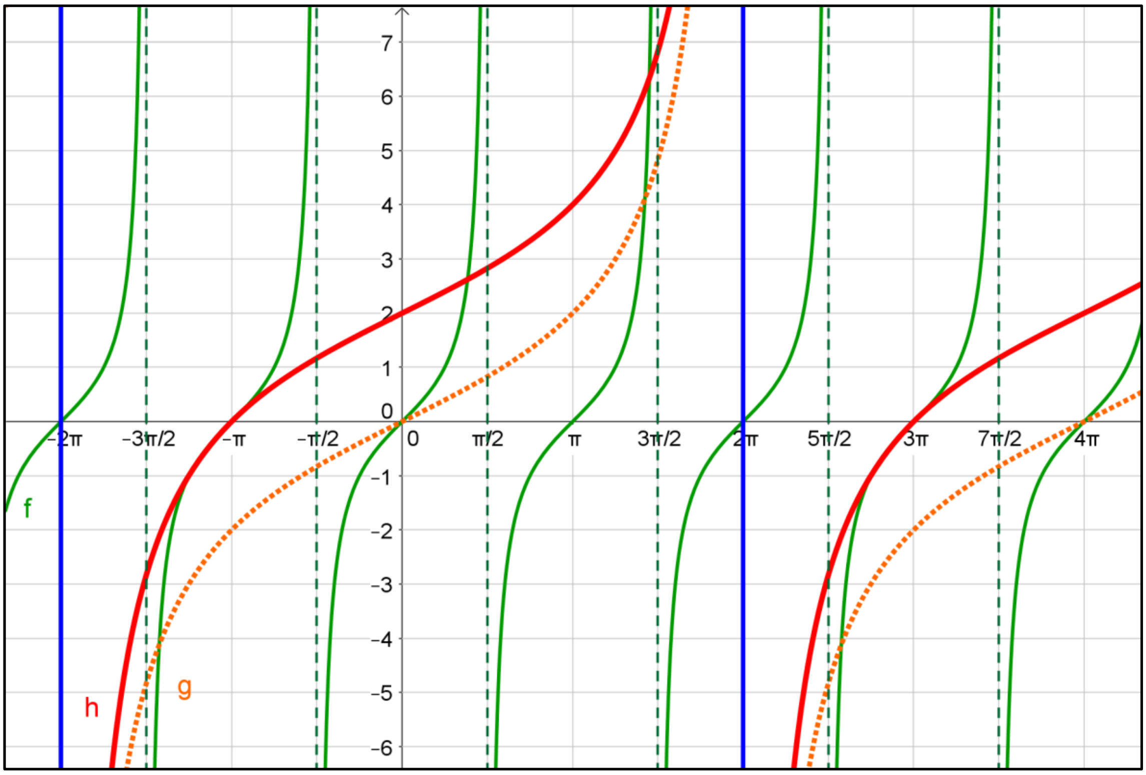
Příklad 3

Určete předpis funkce h. Zaměřte se na interval $(-2\pi; 2\pi)$ a na variantu, kdy má funkce základ $\operatorname{tg} x$, parametry a, c mají kladnou hodnotu.

Nápověda: $h: y = c \operatorname{tg}(ax + b) + d$, bude třeba zjistit parametry funkce

Řešení:

Funkce h má obecný předpis:



Na zjištění hodnoty parametrů se zaměříme postupně.

a) Parametr a

Z nákresu je patrné, že funkce h má periodu 4π. Velikost periody můžeme určit jako $p = \frac{\pi}{|a|}$, (π je perioda funkcí tangens a kotangens)

Parametr a tedy určíme jako $|a| = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$

V zadání je dáno, že parametr a má být kladný, tedy $a = \frac{1}{4}$

b) Parametr b

Pokud středy intervalů funkce tangens leží v bodech $x = \left(\frac{1}{a}k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, potom $b = 0$. Z nákresu vidíme, že střed intervalu tuto podmínku splňuje. Pozorovaný interval $(-2\pi; 2\pi)$ podmínku splňuje, protože jeho střed leží v bodu $x_s = 0$, pokud zvolíme $k = 0$, potom $x = 0$, můžeme tedy určit, že $b = 0$.

c) Parametr c

Hodnota parametru c je rozdíl hodnoty, kterou má funkce tangens v bodu $x_i = \left(\frac{1}{a}\frac{\pi}{4} + b\right)$ a parametru d.

Dle grafu funkce h, bod $x_i = \pi$

$c = h(x_i) - d = h(\pi) - 2 = 4 - 2 = 2$

d) Parametr d

Parametr d má hodnotu o velikosti hodnoty funkce v bodech, ve středu intervalů funkce. Pro zjištění parametru funkce si tedy vybereme jeden interval, na kterém určíme střed x_s, a poté zjistíme funkční hodnotu v tomto bodu.

$d = h(x_s) = 2$

Předpis funkce h: $y = 2\sin\frac{x}{4} + 2$