Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Aplikační příklady na Riemannův integrál

Vypracovala: Pavla Wegenkittlová
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Aplikační příklady na Riemannův integrál jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 11. dubna 2017 Pavla Wegenkittlová

Poděkování

Mé první a největší dík patří vedoucí bakalářské práce Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za její čas, ochotu a cenné rady. Další dík patří mým nejbližším za pochopení, že přes psaní této práce jsem se jim nemohla věnovat tak, jak by si v některých okamžicích zasloužili.

Anotace

Hlavním cílem předkládané bakalářské práce na téma „Aplikační příklady na Riemannův integrál“ je vytvořit přehled užití Riemannova integrálu nejen v matematice, ale i ve fyzice. Práce se dělí do tří kapitol. V první kapitole je zaveden Riemannův integrál, druhá obsahuje jeho užití v matematice (k výpočtu obsahu některých rovinných ploch, objemu některých rotačních těles, délky křivky a obsahu rotační plochy) a ve třetí nalezneme jeho užití ve fyzice (k výpočtu dráhy nerovnoměrného pohybu, práce, momentu setrvačnosti a polohy těžiště). V obou aplikačních kapitolách jsou uvedeny příklady včetně řešení.

Annotation

The primary aim of this Bachelor thesis dealing with “Application examples on the Riemann integral” is to create an overview of the use of Riemann integral in mathematics as well as in physics. The thesis is divided into three chapters. In the first one Riemann integral is introduced. The second one deals with the use of Riemann integral in mathematics (to calculate the area of some flat areas, the volume of some solids of revolution, the length of plane curve and the area of surface of revolution) and the third one is concerned with its use in physics (to calculate the travel of uneven motion, the work, the moment of inertia and the centre of gravity position). Both application chapters include examples with solutions.

Obsah

Úvod

V hodinách Matematické analýzy II. mě zaujal Riemannův integrál a jeho užití v matematice. Ihned se mi to propojilo s přednáškami Matematiky pro fyziky I., kde jsme také probírali Riemannův integrál a jeho využití, ale tentokráte ve fyzice.

Napadlo mě tedy sestavit o tomto tématu práci, která by propojila mé aprobační obory matematiku a fyziku, a i ostatním studentům ukázala, že Riemannův integrál se nepoužívá pouze v matematice, ale má i mnohé uplatnění ve fyzice.

První kapitola se zabývá definicí Riemannova integrálu. Tyto definice a věty jsou upravené a převzaté z přednášek Matematické analýzy II. doc. RNDr. Vladimíry Petráškové, Ph.D., která čerpala z knihy Vojtěcha Jarníka Integrální počet II.

Druhá kapitola ukazuje uplatnění Riemannova integrálu v matematice a dělí se do čtyř podkapitol. Každá podkapitola pojednává o jednotlivém uplatnění Riemannova integrálu v matematice, a to k výpočtu obsahu některých rovinných ploch, objemu některých rotačních těles, délky křivky a obsahu rotační plochy. Vzorce používané k výpočtům jsou převzaté z přednášek doc. RNDr. Vladimíry Petráškové, Ph.D. Řešené příklady jsou obohacené o náčrty pro lepší pochopení zadané úlohy. Ke kontrole správnosti počítání je u každé podkapitoly uvedena tabulka s hodnotami převzatými z Matematických, fyzikálních a chemických tabulek.

Poslední třetí kapitola ukazuje užití Riemannova integrálu ve fyzice. Tato kapitola se dělí také do čtyř podkapitol. V každé je uvedeno jedno užití, a to k výpočtu dráhy nerovnoměrného pohybu, práce, momentu setrvačnosti a polohy těžiště. Každé užití je doplněno řešenými příklady. Vzorce použité k těmto výpočtům jsou převzaté z přednášek doc. PaedDr. Jiří Tesař, Ph.D.

Kapitola 1

Riemannův určitý integrál

1.1 Definice Riemannova určitého integrálu

Jak bylo uvedeno v úvodu, tato práce se zabývá aplikačními příklady na Riemannův integrál, takže abychom mohli Riemannův integrál používat, musíme zavést jeho definici.

Definice 1: Dělením intervalu $\langle a, b\rangle$; $a < b; a, b \in R$; nazveme rostoucí posloupnost čísel $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ takovou, že $x_0 = a, x_n = b$.

Definice 2: Dělení D^* nazveme zjemněním dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže $D \subseteq D^*$.

Definice 3: Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$; $a, b \in R^*$. Číslo $s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} inf\, f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$ nazveme dolním součtem příslušný funkci f definované a omezené na $\langle a, b\rangle$ dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo $S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} sup\, f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$ nazveme horním součtem příslušný funkci f a dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Vlastnosti dolních a horních součtů:

Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Potom platí:

1) Je-li D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, potom $s(D, f) \leq S(D, f)$.
2) Je-li D^* zjemněním dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, potom platí $s(D, f) \leq s(D^*, f) \leq S(D^*, f) \leq S(D, f)$.
3) Jsou-li D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, potom platí $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$.

Definice 4: Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$; $a, b \in R$. Horním Riemannovým integrálem (resp. dolním Riemannovým integrálem) nazveme infimum (resp. supremum) množiny všech horních součtů $\{S(D, f)\}$ příslušné dělení D a funkci f (resp. množiny všech dolních součtů $\{s(D, f)\}$). Značíme $\inf\{S(D, f)\} = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$; $\sup\{s(D, f)\} = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$.

Věta 1: Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$; $a,b \in R$. Potom platí: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \ \leq \ \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Definice 5: Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$; $a,b \in R$. Říkáme, že existuje Riemannův integrál (resp. že funkce f je riemannovsky integrovatelná přes $\langle a,b\rangle$), jestliže platí $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ a značíme $\int_a^b f(x)dx$.

Nutná podmínka pro existenci Riemannova integrálu na intervalu $\langle a,b\rangle$ je omezenost funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Věta 2: (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu na intervalu $\langle a,b\rangle$)

1) Nechť funkce f je omezená a monotónní na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existuje $\int_a^b f(x)dx$.

nebo 2) Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ s výjimkou konečně mnoha bodů a nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existuje $\int_a^b f(x)dx$.

nebo 3) Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom existuje $\int_a^b f(x)dx$.

Věta 3: (Vztah Riemannova integrálu a primitivní funkce)

Nechť existuje $\int_a^b f(x)dx$ a nechť existuje primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) (označíme $F, F' = f$). Potom platí $\int_a^b f(x)dx = B - A$, kde $\lim\limits_{x\to b_-} F(x) = B$ a $\lim\limits_{x\to a_+} F(x) = A$.

1.2 Vlastnosti Riemannova určitého integrálu

Některé vlastnosti Riemannova určitého integrálu v aplikacích nepoužijeme, a tak následuje souhrn těch vlastností, které jsou dále v práci použity.

Věta 4: Nechť existuje $\int_a^b f_1(x)dx$ a $\int_a^b f_2(x)dx$. Potom existuje $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.

Věta 5: Nechť existuje $\int_a^b f(x)dx, c \in R$. Potom existuje $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.

1.3 Výpočet Riemannova určitého integrálu

Pro výpočet Riemannova určitého integrálu zpravidla používáme Leibniz-Newtonovu formuli: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje primitivní funkce k funkci f (značíme F) na tomto intervalu. Potom platí $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Při výpočtu primitivní funkce F můžeme využít některou integrační metodu např. per partes nebo substituci v Riemannově integrálu. V následujících větách si tyto metody připomeneme.

Věta 6: (Metoda per partes)

Nechť funkce f, g mají spojité derivace f', g' na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$ a platí $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$.

Věta 7: (O substituci v Riemannově integrálu)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť funkce g má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a zobrazuje $\langle \alpha, \beta\rangle$ do $\langle a, b\rangle$. Potom existuje $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$.

Pro aplikaci Riemannova určitého integrálu budeme také potřebovat přehled základních integrálů. Protože se pohybujeme na poli určitého integrálu, dovolím si v tomto přehledu vynechat integrační konstantu c.

$$\int dx = x \tag{1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1};\ n \in N, x \in R \tag{2}$$

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1};\ \alpha \in R, x \in R, \alpha \neq -1 \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|\,;\ x \in R \setminus \{0\} \tag{4}$$

$$\int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x;\ x \in R \tag{5}$$

$$\int \mathrm{a}^x\, dx = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}};\ x \in R, a \in (0,\infty) \tag{6}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x\,;\ x \in R \tag{7}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x\,;\ x \in R \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x\,;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x\,;\ x \neq k\pi \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x\,;\ x \in R \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x = -\arccos x\,;\ x \in (-1{,}1) \tag{12}$$

Kapitola 2

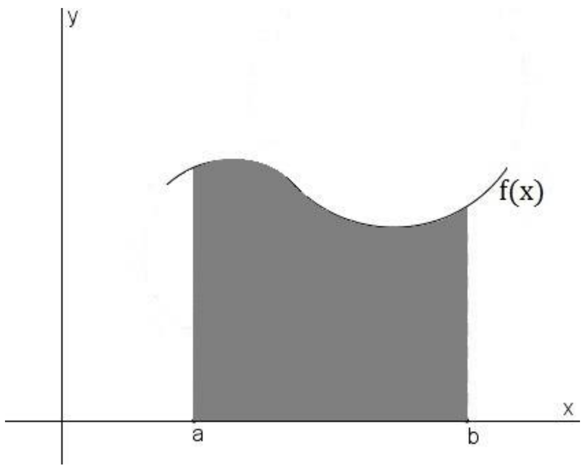
Užití v matematice

2.1 Výpočet obsahu některých rovinných ploch

Pro výpočet obsahu rovinných ploch vzniklých ohraničením z jedné strany křivkou a z druhé osou x používáme vzorec

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Tento vzorec vyplývá z definice určitého integrálu – je to obsah plochy pod křivkou.

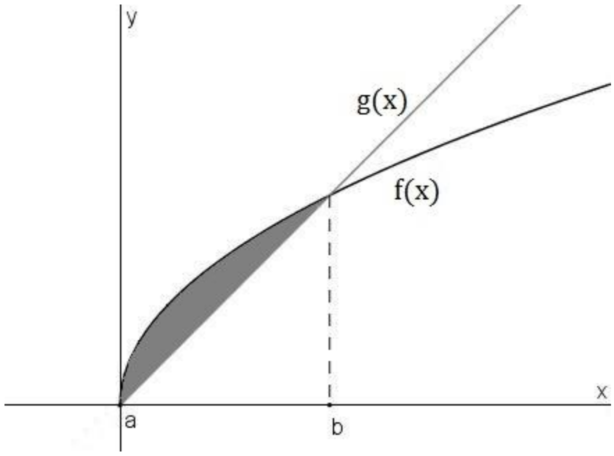


Obrázek 1:Určitý integrál jako plocha pod křivkou

Je-li plocha ohraničená z obou dvou stran křivkami, používáme vzorec

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx, \tag{2.2}$$

kde $f(x)$ je funkce křivky, která je v grafu výše, $g(x)$ je funkce té křivky níže a body a, b jsou jejich průsečíky (viz. obrázek 2).



Obrázek 2: Obsah plochy ohraničené dvěma křivkami

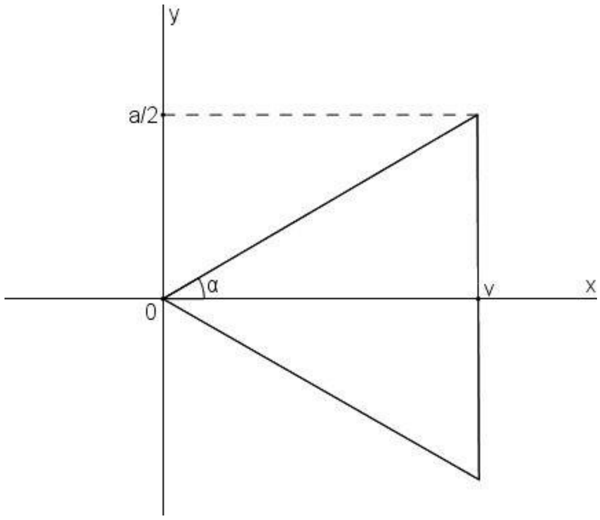
Pomocí vzorce (2.1) můžeme odvodit vzorce pro výpočet obsahů rovinných obrazců – to také bude hlavním úkolem této podkapitoly. Pro možnost kontroly výsledků je zde uvedena tabulka obsahů těch rovinných obrazců, které budeme odvozovat.

Rovnostranný trojúhelník	$S = \frac{a \cdot v}{2}$
Rovnoramenný trojúhelník	$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$
Čtverec	$S = a^2$
Kružnice	$S = \pi r^2$
Elipsa	$S = \pi ab$

Tabulka 1: Obsahy rovinných obrazců [1]

Příklad 1: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku se stranami velikosti a a výškou v.

<u>Řešení:</u> Nejprve si uděláme náčrt. Jeden vrchol trojúhelníku si umístíme do počátku soustavy souřadnic a zbylé nalevo od osy y.



Obrázek 3: Náčrt rovnostranného trojúhelníku

V náčrtu můžeme vypozorovat, jako by se nám trojúhelník rozdělil osou x na dvě poloviny. Toho využijeme při integraci – vypočteme integrál jen jedné poloviny a výsledný obsah bude jeho dvojnásobkem.

Dále musíme určit křivku, kterou budeme integrovat, aneb křivku, pod kterou budeme počítat obsah. Je to vlastně přímka, kterou lze obecně vyjádřit předpisem $y = kx$. V našem případě $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{a}{2v}$ a $y = \frac{a}{2v}x$.

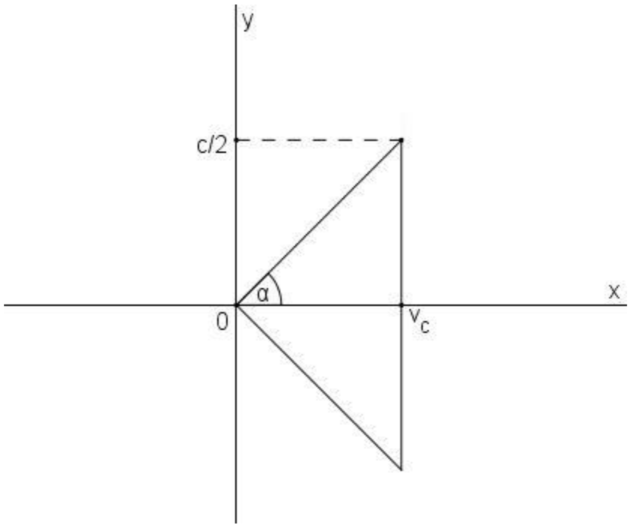
K dalšímu výpočtu použijeme vzorec (2.1) a jako meze integrace interval $\langle 0, v \rangle$.

$$S = 2\int_0^v \frac{a}{2v} x \, dx = 2\frac{a}{2v}\int_0^v x \, dx = \frac{a}{v}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v = \frac{a}{v}\left(\frac{v^2}{2} - 0\right) = \frac{a \cdot v}{2}$$

Odpověď: Obsah rovnostranného trojúhelníku nám vyšel $S = \frac{a \cdot v}{2}$. Tento vzorec se shoduje se vzorcem uvedeným v *Tabulce 1*, takže jsme počítali správně.

Příklad 2: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu rovnoramenného trojúhelníku.

Řešení: Budeme postupovat totožně jako u rovnostranného trojúhelníku, jen s tím rozdílem, že přeponu si nazveme c a výšku na ni v_c.



Obrázek 4: Náčrt rovnoramenného trojúhelníku

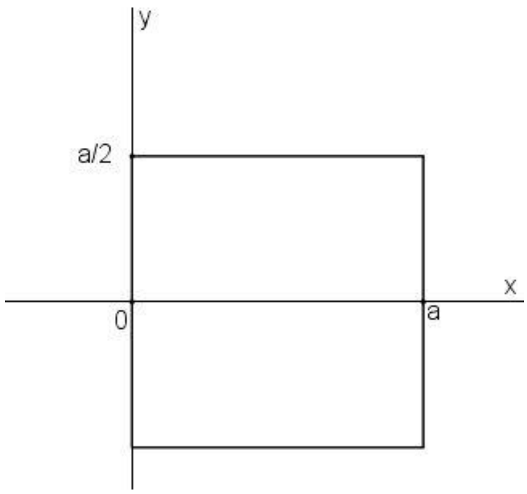
I dále postupujeme totožně jako u rovnostranného trojúhelníku. Přímka je tvaru $y = \frac{c}{2v_c}x$, interval integrace $\langle 0, v_c \rangle$ a obsah rovnoramenného trojúhelníku je podle vzorce (2.1) roven

$$S = 2\int_0^{v_c} \frac{c}{2v_c}x\,dx = 2\frac{c}{2v_c}\int_0^{v_c} x\,dx = \frac{c}{v_c}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{v_c} = \frac{c}{v_c}\left(\frac{{v_c}^2}{2} - 0\right) = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

Odpověď: Obsah nám vyšel stejně jako uvádí *Tabulka 1* a to $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Příklad 3: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu čtverce o straně a.

Řešení: Uděláme si nejvhodnější náčrt, ze kterého určíme křivku, která se bude nejjednodušeji integrovat. Nejjednodušší funkce pro integraci je funkce konstantní a s tou zde také budeme počítat.



Obrázek 5: Náčrt čtverce

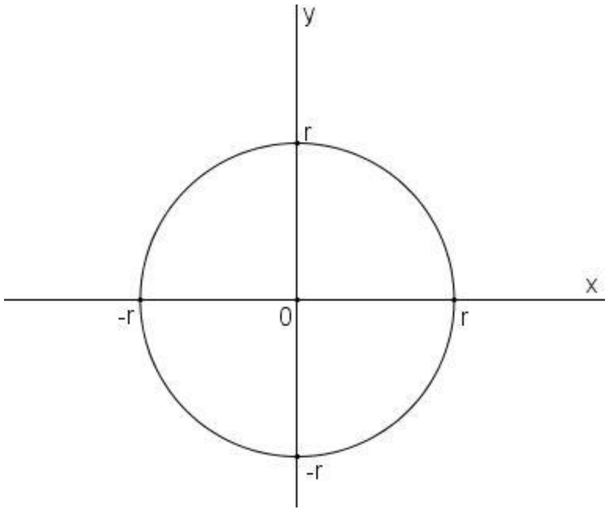
I v tomto příkladu využijeme rozdělení čtverce osou x na dvě poloviny. Budeme tedy integrovat křivku $y = \frac{a}{2}$ v mezích 0 a a. Obsah čtverce je dvojnásobkem výsledku této integrace. Pro výpočet použijeme vzorec (2.1).

$$S = 2\int_0^a \frac{a}{2}dx = 2\frac{a}{2}\int_0^a dx = a[x]_0^a = a(a-0) = a^2$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet obsahu čtverce nám vyšel $S = a^2$, který je totožný se vzorcem v *Tabulce 1*.

Příklad 4: Určete obsah kružnice s poloměrem r.

<u>Řešení:</u> Nejprve si uděláme náčrt. Pro integraci bude nejjednodušší, dát střed kružnice do počátku soustavy souřadnic.



Obrázek 6: Náčrt kružnice

Dále musíme určit předpis křivky, pro kterou počítáme obsah. Ten určíme ze vzorce pro kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ tím, že vyjádříme y.

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

K výpočtu využijeme vzorec (2.1). Nebudeme však počítat integrál z celé křivky, ale využijeme souměrnosti kružnice. Stačí tedy vypočítat integrál z jedné čtvrtiny kružnice a výsledný obsah kružnice bude poté jeho čtyřnásobkem. V našem případě budeme počítat čtvrtinu ohraničenou mezemi 0 a r, tudíž obsah bude roven

$$S = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Tento vzorec nás navádí na využití substituce: $x = r \sin t$, pak

$$\frac{x}{r} = \sin t,$$

$$\arcsin \frac{x}{r} = t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$dx = r \cos t \, dt.$$

Při použití substituce musíme změnit meze:

$$x = 0\colon\ \arcsin 0 = 0,$$

$$x = r\colon\ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Celý výpočet obsahu kružnice pak vypadá takto:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t \, dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2(1-\sin^2 t)} \cdot \cos t \, dt =$$

$$= 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 \cos^2 t} \cdot \cos t \, dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t \cdot \cos t \, dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$$

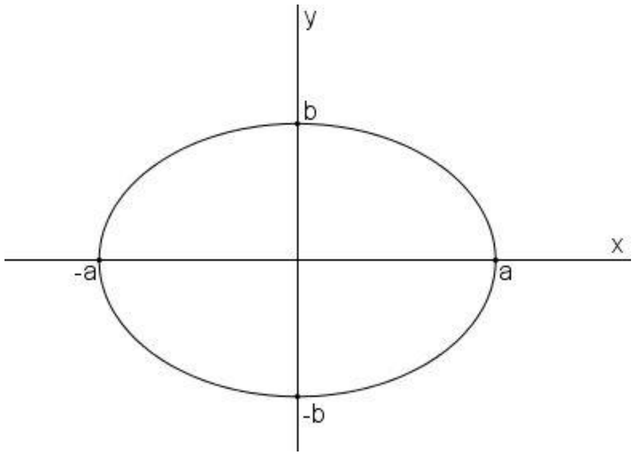
$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 t}{2} dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\,t}{2}\right) dt = 4r^2 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4r^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 - 0)\right] = 4r^2 \frac{\pi}{4} = \pi r^2.$$

Odpověď: Obsah kružnice nám vyšel totožný, jako je uvedeno v *Tabulce 1* a to $S = \pi r^2$.

Příklad 5: Určete obsah elipsy s hlavní poloosou délky a a vedlejší délky b.

<u>Řešení:</u> Stejně jako u kružnice i pro elipsu platí, že je výhodné umístit si její střed do počátku soustavy souřadnic.



Obrázek 7: Náčrt elipsy

Křivku, pod kterou počítáme obsah, určíme z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ze které vyjádříme y.

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

A dále budeme postupovat jako u kružnice.

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Využijeme i stejnou substituci jen s tím rozdílem, že zde se bude místo poloměru r vyskytovat délka hlavní poloosy a.

$$x = a \sin t$$

$$\frac{x}{a} = \sin t$$

$$\arcsin \frac{x}{a} = t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$dx = a \cos t \, dt$$

A také musíme změnit meze:

$$x = 0\colon \ \arcsin 0 = 0,$$

$$x = r\colon \ \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cdot \cos t \, dt = 4\frac{b}{a}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \cdot \cos t \, dt =$$

$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cdot \cos t \, dt = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos t \cdot \cos t \, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt =$$

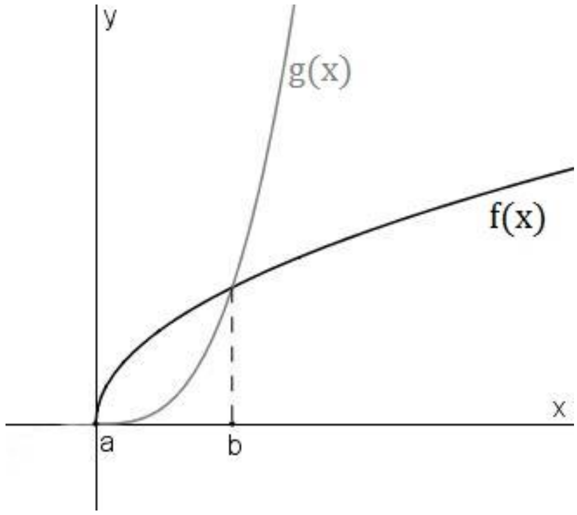
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 t}{2} dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 4ab\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab\left[\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 - 0)\right] = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab$$

Odpověď: Obsah elipsy je $S = \pi ab$, který je také uveden v *Tabulce 1*, takže jsme počítali správně. Zde si můžeme povšimnout, že kdyby měla elipsa obě poloosy stejně dlouhé (řekněme délky r), její obsah by byl totožný s obsahem kružnice, tudíž $S = \pi r^2$.

Příklad 6: Určete obsah plochy ohraničené křivkami $f: y = \sqrt{x}$ a $g: y = x^3$.

<u>Řešení:</u> Uděláme si náčrt těchto dvou funkcí do jednoho grafu (pro přehlednost jen do I. kvadrantu, to je také dáno definičním oborem funkce f).



Obrázek 8: Náčrt dvou funkcí

Pro tento příklad budeme používat vzorec (2.2), ale nejprve musíme určit meze pro integraci. Jak je z grafu patrné, plocha ohraničená těmito křivkami je vymezená jejich průsečíky, takže meze budou totožné s průsečíky funkcí f a g. Průsečíky dvou funkcí počítáme tak, že tyto dvě funkce dáme do rovnosti a dopočítáme kořeny vzniklé rovnice.

$$\sqrt{x} = x^3 \ /^2$$
$$x = x^6$$
$$0 = x^6 - x$$
$$0 = x(x^5 - 1)$$

Získáváme kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$, které jsou pro nás i mezemi integrace. Nyní již můžeme použít vzorec (2.2) a vypočítat obsah plochy ohraničené funkcemi f a g.

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^3\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{2}{3}(1 - 0) - \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} j^2$$

Odpověď: Obsah plochy ohraničené křivkami $f: y = \sqrt{x}$ a $g: y = x^3$ je $S = \frac{5}{12} j^2$.

2.2 Výpočet objemu některých rotačních těles

K výpočtu objemu některých rotačních těles vzniklých rotací křivky na intervalu $\langle a, b\rangle$ kolem osy x používáme vzorec

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Vznikne-li těleso rotací plochy ohraničené dvěma křivkami f a g kolem osy x, používáme vzorec

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx, \tag{2.4}$$

kde f je funkce křivky, která je v grafu výše, g je funkce té křivky níže a body a, b jsou jejich průsečíky.

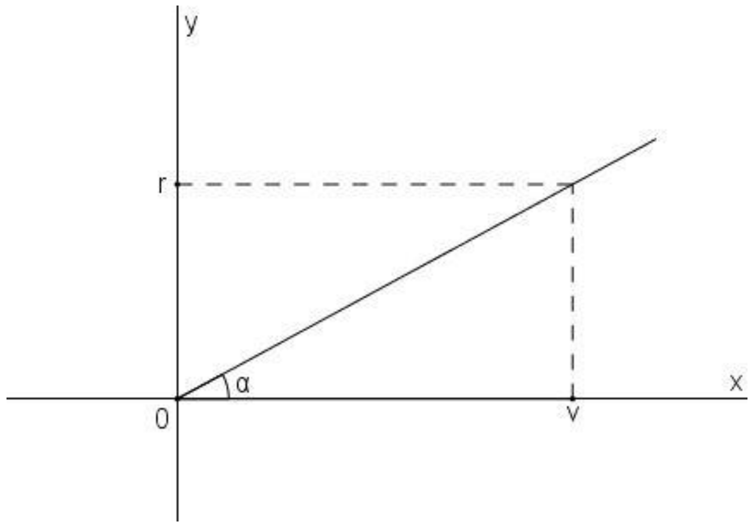
Vzorec (2.3) budeme v této podkapitole využívat pro odvození vzorců objemů rotačních těles. Ke kontrole správnosti našeho počítání je zde uvedena tabulka těch objemů těles, které budeme odvozovat.

Rotační kužel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$
Komolý rotační kužel	$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Rotační válec	$V = \pi r^2 v$
Koule	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Kulová úseč	$V = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$
Kulová vrstva	$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

Tabulka 2: Objemy rotačních těles [1]

Příklad 7: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v.

Řešení: Podle vzorce (2.3) musíme nejprve určit funkční předpis křivky, která rotuje kolem osy x, z níž touto rotací vznikne rotační kužel. Můžeme si představit, jako by osa x tvořila osu symetrie tohoto kužele. Obecný tvar této křivky, vlastně přímky, je $y = kx$, konkrétní tvar pro tuto úlohu odvodíme z náčrtu.



Obrázek 9: Náčrt křivky pro rotační kužel

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{v}$$

$$f\colon y = \frac{r}{v} x$$

Již máme funkční předpis přímky rotující kolem osy x, teď ještě meze Riemannova integrálu. Z grafu je patrné, že dolní mezí bude 0 a horní v. Nyní máme vše pro použití vzorce (2.3) a můžeme začít odvozovat vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele.

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v} x\right)^2 dx = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \left(\frac{v^3}{3} - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

Odpověď: Objem rotačního kužele je dán vzorcem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, který, jak můžeme vyčíst z *Tabulky 2*, je správný.

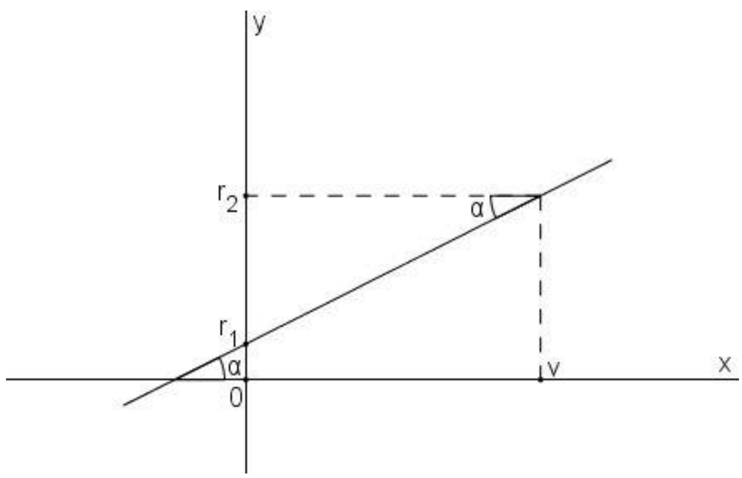
Příklad 8: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu komolého rotačního kužele o výšce v, poloměru horní podstavy r_1 a poloměru dolní podstavy r_2.

Řešení: Budeme postupovat podobně jako u příkladu 7, jen s tím rozdílem, že zde bude rotovat přímka, která má i posunutí. Její obecný tvar je $y = kx + q$. Konkrétně, podle náčrtu

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{r_2 - r_1}{v},$$

$$q = r_1,$$

$$f\colon y = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1.$$



Obrázek 10: Náčrt pro komolý rotační kužel

Pro odvození vzorce pro výpočet objemu použijeme vzorec (2.3). Funkční předpis přímky máme a meze integrace jsou patrné z náčrtu. Pro dolní mez je to 0 a pro horní v.

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1\right)^2 dx = \pi \int_0^v \left(\frac{r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2}{v^2} x^2 + 2\frac{r_2 - r_1}{v} x r_1 + r_1^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[\int_0^v \frac{r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2}{v^2} x^2\, dx + \int_0^v 2\frac{r_2 - r_1}{v} x r_1\, dx + \int_0^v r_1^2\, dx\right] =$$

$$= \pi \left[\frac{r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2}{v^2} \int_0^v x^2\, dx + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \int_0^v x\, dx + r_1^2 \int_0^v dx\right] =$$

$$= \pi \left(\frac{r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v + r_1^2 [x]_0^v\right) =$$

$$= \pi \left[\frac{r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2}{v^2} \left(\frac{v^3}{3} - 0\right) + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \left(\frac{v^2}{2} - 0\right) + r_1^2 (v - 0)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(r_2^2 - 2r_2r_1 + r_1^2)v + \pi(r_2 - r_1)r_1 v + \pi r_1^2 v =$$

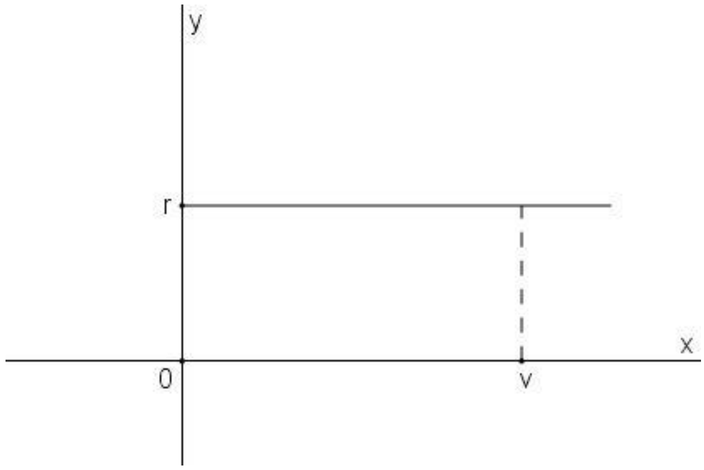
$$= \pi v \left(\frac{1}{3}r_2^2 - \frac{2}{3}r_2r_1 + \frac{1}{3}r_1^2 + r_2r_1 - r_1^2 + r_1^2\right) = \pi v \left(\frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2r_1 + \frac{1}{3}r_1^2\right) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet objemu komolého rotačního kužele nám vyšel totožně, jako je uvedeno v *Tabulce 2* a to $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$.

Příklad 9: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního válce o výšce v a poloměru podstav r.

Řešení: Nejprve si načrtneme křivku, z které po rotaci kolem osy x vznikne rotační válec. Bude to vlastně přímka rovnoběžná s touto osou, tudíž bude mít tvar $y = c$, kde c je konstanta. V našem případě bude konstanta c rovna poloměru podstav válce r.



Obrázek 11: Náčrt křivky pro rotační válec

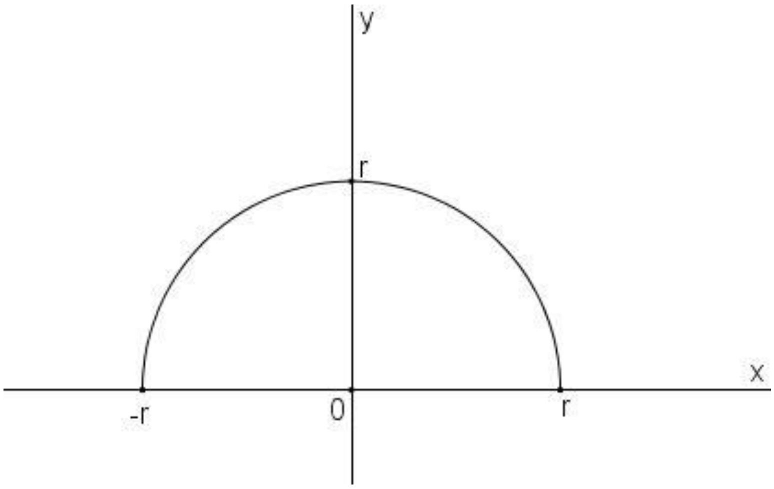
Máme tedy funkční předpis křivky $f: y = r.$ K využití vzorce (2.3) pro výpočet objemu musíme ještě znát meze integrace. Z náčrtu je patrné, že tyto meze jsou 0 a v.

$$V = \pi \int_0^v r^2\, dx = \pi r^2 \int_0^v dx = \pi r^2 [x]_0^v = \pi r^2 (v - 0) = \pi r^2 v$$

Odpověď: Objem rotačního válce je roven $V = \pi r^2 v$. Tento vzorec se shoduje se vzorcem uvedeným v *Tabulce 2*.

Příklad 10: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru r.

<u>Řešení:</u> Využijeme některé kroky z příkladu 4. Místo celé kružnice si načrtneme jen půlkružnici nacházející se nad osou x, která po rotaci vytvoří kouli.



Obrázek 12: Náčrt křivky pro kouli

Funkční předpis této křivky je stejný jako funkční předpis pro kružnici uvedený u příkladu 4.

$$f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

K výpočtu objemu koule pomocí vzorce (2.3) musíme ještě určit meze: $-r, r$.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(\int_{-r}^{r} r^2\, dx - \int_{-r}^{r} x^2\, dx \right) =$$

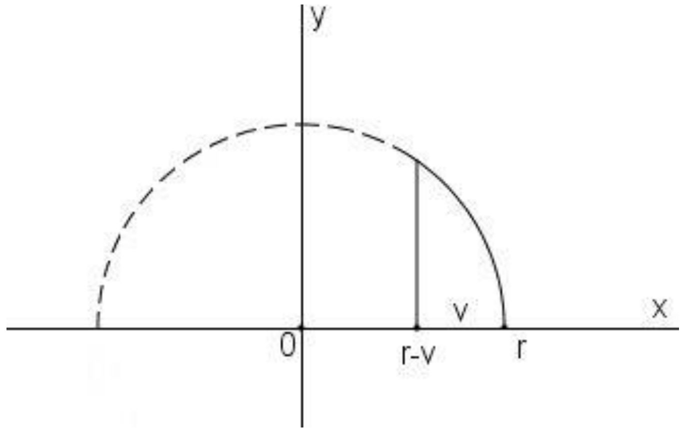
$$= \pi \left(r^2 \int_{-r}^{r} dx - \int_{-r}^{r} x^2\, dx \right) = \pi \left(r^2 [x]_{-r}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \right) = \pi \left[r^2 (r + r) - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Odpověď: Vypočítali jsme objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, který, jak můžeme zkontrolovat v *Tabulce 2*, je správný.

Příklad 11: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kulové úseče o výšce v z koule poloměru r.

<u>Řešení:</u> Kulová úseč nám vznikne rotací stejné křivky, jako z které vznikne koule, jen s rozdílem, že nebudeme integrovat celou křivku nad osou x, ale jen její část ohraničenou mezemi $r - v$ a r, která má výšku v.



Obrázek 13: Náčrt křivky pro kulovou úseč

Tedy z předchozího příkladu vezmeme funkční předpis křivky $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Pro výpočet objemu kulové úseče použijeme vzorec (2.3), kde mezemi budou již zmíněné $r - v$ a r.

$$V = \pi \int_{r-v}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{r-v}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(\int_{r-v}^{r} r^2\, dx - \int_{r-v}^{r} x^2\, dx \right) =$$

$$= \pi \left(r^2 \int_{r-v}^{r} dx - \int_{r-v}^{r} x^2\, dx \right) = \pi \left(r^2 [x]_{r-v}^{r} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} \right) =$$

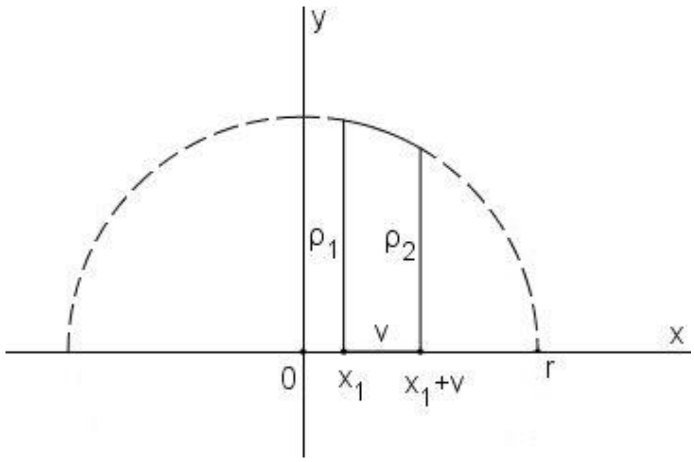
$$= \pi \left[r^2 (r - r + v) - \left(\frac{r^3}{3} - \frac{(r-v)^3}{3} \right) \right] = \pi \left(r^2 v - \frac{r^3}{3} + \frac{r^3 - 3r^2 v + 3rv^2 - v^3}{3} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{3r^2 v}{3} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} - \frac{3r^2 v}{3} + \frac{3rv^2}{3} - \frac{v^3}{3} \right) = \pi \left(rv^2 - \frac{v^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet objemu kulové úseče je $V = \frac{1}{3}\pi v^2 (3r - v)$. Podle *Tabulky 2* je správný.

Příklad 12: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kulové vrstvy s poloměrem horní podstavy ρ_1, dolní ρ_2 a výškou vrstvy v z koule poloměru r.

Řešení: Stejně jako u objemu kulové úseče i zde nám bude rotovat křivka $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$ jen její meze budou jiné. Ty určíme z náčrtu.



Obrázek 14: Náčrt křivky pro kulovou vrstvu

Meze integrace tedy jsou x_1 a $x_1 + v$ a objem kulové vrstvy vypočítáme pomocí vzorce (2.3):

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_1+v} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(\int_{x_1}^{x_1+v} r^2\, dx - \int_{x_1}^{x_1+v} x^2\, dx \right) =$$

$$= \pi \left(r^2 [x]_{x_1}^{x_1+v} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_1+v} \right) = \pi \left[r^2 (x_1 + v - x_1) - \left(\frac{(x_1 + v)^3}{3} - \frac{x_1^3}{3} \right) \right] =$$

$$= \pi \left(r^2 v - \frac{x_1^3 + 3x_1^2 v + 3x_1 v^2 + v^3}{3} + \frac{x_1^3}{3} \right) =$$

$$= \pi \left(r^2 v - \frac{x_1^3}{3} - x_1^2 v - x_1 v^2 - \frac{v^3}{3} + \frac{x_1^3}{3} \right) = \pi v \left(r^2 - x_1^2 - x_1 v - \frac{v^2}{3} \right).$$

Jak ale můžeme vidět v *Tabulce 2*, žádné x_1 ani r^2 se ve vzorci pro výpočet objemu kulové vrstvy nevyskytuje. Místo toho jsou tam ρ_1 a ρ_2. Ty, z náčrtu, jdou vyjádřit pomocí Pythagorovy věty jako

$\rho_1^2 = r^2 - x_1^2$ a $\rho_2^2 = r^2 - (x_1 + v)^2 = r^2 - x_1^2 - 2x_1v - v^2$.

Nyní z obou rovnic vyjádříme r^2, dáme je do rovnosti a z této rovnice vyjádříme x_1.

$r^2 = \rho_1^2 + x_1^2$ a z druhé $r^2 = \rho_2^2 + x_1^2 + 2x_1v + v^2$

$$\rho_1^2 + x_1^2 = \rho_2^2 + x_1^2 + 2x_1v + v^2$$

$$2x_1v = \rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2$$

$$x_1 = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}$$

Jak bylo napsáno výše, ani poloměr koule r se ve vzorci pro objem kulové vrstvy nevyskytuje, vyjádříme si ho tedy z rovnice $r^2 = \rho_1^2 + x_1^2$, do které dosadíme za x_1 $\frac{\rho_1^2-\rho_2^2-v^2}{2v}$.

$$r^2 = \rho_1^2 + \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}\right)^2$$

$$r = \sqrt{\rho_1^2 + \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}\right)^2}$$

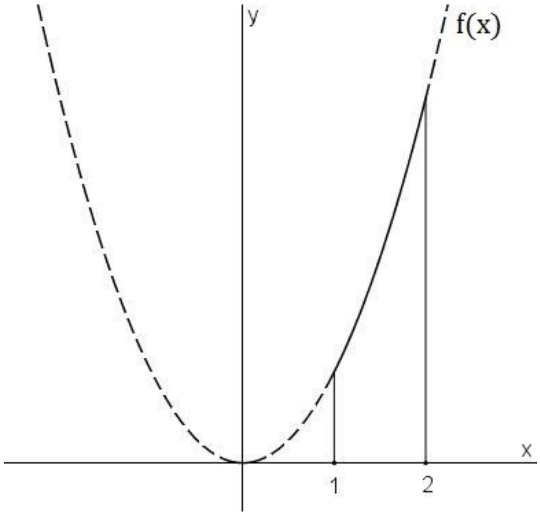
Dosadíme-li takto vyjádřené x_1 a r do již rozpočítaného vzorce pro objem, vyjde nám

$$V = \pi v\left(\rho_1^2 + \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}\right)^2 - \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}\right)^2 - \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}\right)v - \frac{v^2}{3}\right)$$
$$= \pi v\left(\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_2^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{3}\right) = \pi v\left(\frac{\rho_1^2}{z} + \frac{\rho_2^2}{2} + \frac{v^2}{6}\right) = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2).$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet objemu kulové vrstvy je tvaru $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$, který je totožný se vzorcem uvedeným v *Tabulce 2*.

Příklad 13: Určete objem tělesa vzniklého rotací křivky $f: y = x^2$ na intervalu $\langle 1,2 \rangle$.

<u>Řešení:</u> Pro lepší představu, jak bude vzniklé těleso vypadat, si uděláme náčrt funkce f a to hlavně na intervalu $\langle 1,2 \rangle$.



Obrázek 15: Náčrt funkce f(x)

Pro další výpočet máme vše zadáno, a tak můžeme pokračovat podle vzorce (2.3):

$$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_1^2 x^4 \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{31}{5} \pi j^3.$$

Odpověď: Objem tělesa vzniklého rotací křivky $f: y = x^2$ na intervalu $\langle 1,2 \rangle$ je $V = \frac{31}{5} \pi j^3$.

Příklad 14: Určete objem tělesa vzniklého rotací obrazce z příkladu 6.

<u>Řešení:</u> V příkladu 6 byly zadány tyto funkce $f: y = \sqrt{x}$ a $g: y = x^3$. Jejich průsečíky, aneb meze integrace, jsme již počítali. Byly to 0 a 1. Pro výpočet objemu tohoto vzniklého tělesa použijeme vzorec (2.4):

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^3)^2\right] dx = \pi \int_0^1 (x - x^6)\, dx = \pi \left(\int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^6\, dx \right) =$$

$$= \pi \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 \right) = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - 0\right) - \left(\frac{1}{7} - 0\right)\right] = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \frac{5}{14}\pi j^3.$$

Odpověď: Objem tělesa vzniklého rotací obrazce z příkladu 6 je roven $V = \frac{5}{14}\pi j^3$.

2.3 Výpočet délky křivky

Riemannův integrál můžeme také použít pro výpočet délky křivky. K tomu nám poslouží vzorec

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \tag{2.5}$$

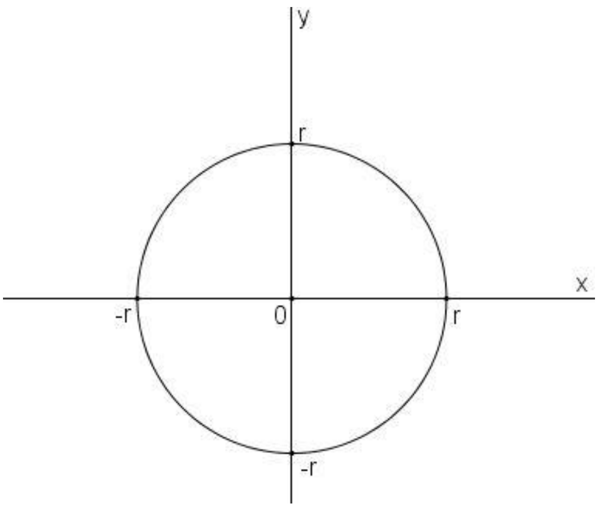
My tímto vzorce budeme odvozovat obvody některých rovinných obrazců. Pro kontrolu správnosti našeho počítání je zde uvedena tabulka se vzorci těch obrazců, které zde budeme odvozovat.

Kružnice	$o = 2\pi r$
Rovnostranný trojúhelník	$o = 3a$
Čtverec	$o = 4a$
Obdélník	$o = 2(a + b)$

Tabulka 3: Obvody rovinných obrazců [1]

Příklad 15: Odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kružnice o poloměru r.

<u>Řešení:</u> Načrtneme si kružnici, jejíž střed umístíme, pro jednodušší integraci, do počátku soustavy souřadnic.



Obrázek 16: Náčrt kružnice

Funkční předpis této křivky jsme už počítali v příkladu 4, vyšel nám $f\colon y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Využijeme ještě jednu věc z příkladu 4 a to souměrnost kružnice. Zase vypočítáme integrál z jedné čtvrtiny kružnice a výsledný obvod bude jeho čtyřnásobkem.

K použití vzorce (2.5) musíme ještě funkci zderivovat a vypočítat její druhou mocninu.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Obvod kružnice je roven

$$o = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{x^2}{r^2}}}\,dx.$$

K dalšímu výpočtu využijeme substituci $\frac{x}{r} = t$, pak

$$\frac{1}{r}dx = dt,$$

$$dx = r\,dt.$$

Při použití substituce se nám mění meze integrace:

$$x = 0\colon \frac{0}{r} = 0,$$

$$x = r\colon \frac{r}{r} = 1.$$

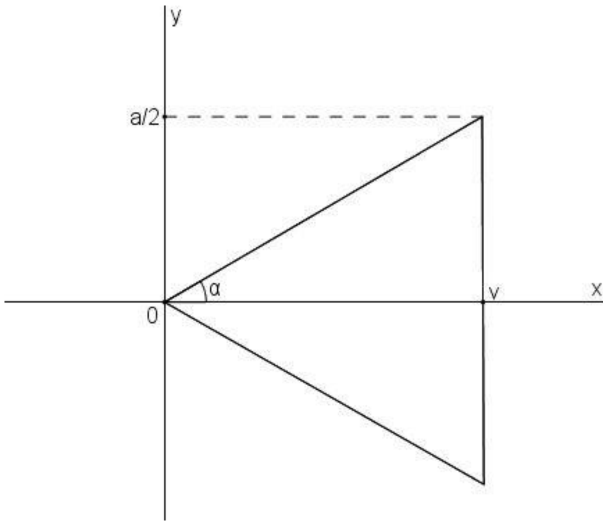
Výsledný obvod kružnice po použití substituce je

$$o = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - t^2}}\,r\,dt = 4r\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - t^2}}\,dt = 4r[\arcsin t]_0^1 = 4r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r.$$

Odpověď: Vzorec pro obvod kružnice je $o = 2\pi r$. Tento vzorec souhlasí se vzorcem uvedeným v *Tabulce 3*.

Příklad 16: Odvoďte vzorec pro výpočet obvodu rovnostranného trojúhelníku o výšce v a stranách délky a.

Řešení: Načrtneme si rovnostranný trojúhelník tak jako v příkladu 1. Z tohoto příkladu také převezmeme funkční předpis křivky, vlastně přímky, tvořící jednu stranu trojúhelníku.



Obrázek 17: Náčrt rovnostranného trojúhelníku

$$f: y = \frac{a}{2v}x$$

Protože se jedná o rovnostranný trojúhelník, výsledný obvod bude trojnásobkem délky jedné strany. Využijeme tedy vzorec (2.5) pro výpočet délky křivky a vynásobíme ho třemi. Mezemi pro nás budou 0 a v.

Nyní ještě musíme zderivovat funkci f a její derivaci umocnit na druhou. Až poté můžeme využít vzorec (2.5) a tak odvodit vzorec pro výpočet obvodu rovnostranného trojúhelníku.

$$f'(x) = \frac{a}{2v}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{a^2}{4v^2}$$

U rovnostranného trojúhelníku platí, že $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, takže si derivaci funkce můžeme přepsat do tvaru $f'(x) = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a její druhou mocninu do tvaru $\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{3}$. Obvod trojúhelníku poté je

$$o = 3\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{1+\frac{1}{3}}dx = 3\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{\frac{4}{3}}dx = 3\sqrt{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} dx = 3\frac{2}{\sqrt{3}}[x]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} =$$

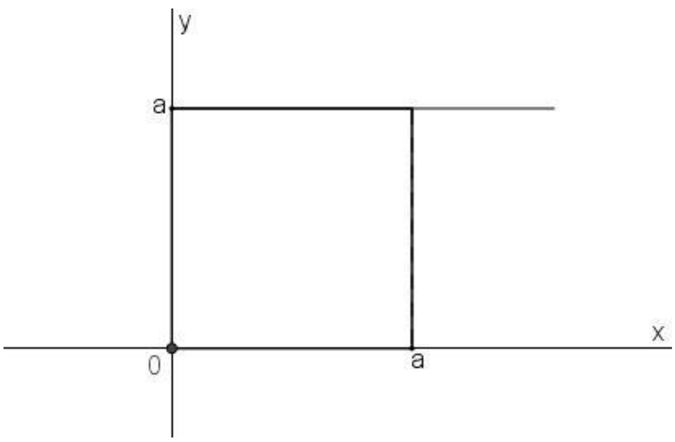
$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - 0\right) = 3a.$$

Odpověď: Obvod rovnostranného trojúhelníku je roven $o = 3a$. Tento vzorec je shodný se vzorcem uvedeným v *Tabulce 3*.

Příklad 17: Odvoďte vzorec pro obvod čtverce o hraně délky a.

<u>Řešení:</u> Máme čtverec o délce jedné hrany a, takže obvod celého čtverce, který má čtyři tyto hrany, je $o = 4a$. Ale i tento vzorec můžeme odvodit pomocí Riemannova integrálu.

Načrtneme si čtverec, jehož jeden vrchol umístíme do počátku soustavy souřadnic.



Obrázek 18: Náčrt čtverce

Hrana, kterou máme v náčrtu protaženou, má funkční předpis $f: y = a$. Pomocí vzorce (2.5) zjistíme její délku a výsledný obvod čtverce bude jejím čtyřnásobkem.

$$f'(x) = 0$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = 0$$

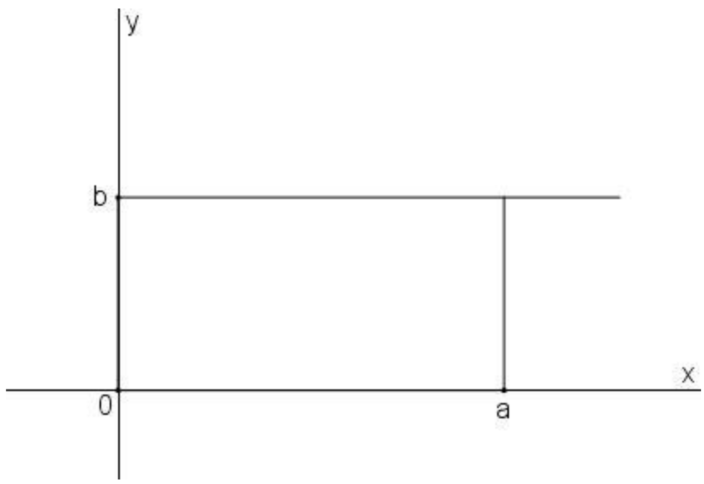
$$o = 4\int_0^a \sqrt{1+0}\,dx = 4\int_0^a 1\,dx = 4\cdot 1\int_0^a dx = 4[x]_0^a = 4(a-0) = 4a$$

Odpověď: Jak můžeme vidět, obvod čtverce nám vyšel $o = 4a$. Tento vzorec se shoduje s naší úvahou na začátku příkladu a také se vzorcem uvedeným v *Tabulce 3*.

Příklad 18: Odvoďte vzorec pro obvod obdélníku o stranách délky a a b.

Řešení: Stejně jako u předchozího příkladu i tady můžeme vzorec odvodit pouhou úvahou. Obdélník se skládá ze čtyř stran, kde každé dvě jsou stejně dlouhé. Víme-li, že jedna dvojice stran má délku a a druhá dvojice délku b, výsledný obvod bude $o = 2a + 2b = 2(a+b)$. I tento vzorec se dá odvodit pomocí Riemannova integrálu a vzorce (2.5).

V prvním kroku si načrtneme obdélník.



Obrázek 19: Náčrt obdélníku

Jak už bylo napsáno výše, obdélník má vždy dvě strany stejně dlouhé. Rozdělíme si tedy výpočet obvodu do dvou kroků. Výsledný obvod obdélníku bude součtem těchto dvou dílčích obvodů.

a) Obvod delších stran délky a – v náčrtu jsme si jednu z delších stran protáhli. Tato strana je rovnoběžná s osou x, tudíž funkční předpis této přímky je obecně roven $y = c$, kde c je konstanta. V našem případě je tato konstanta rovna délce delší strany b.

$$f: y = b$$

Máme tedy funkční předpis jedné z delších stran. Obvod obou delších stran zjistíme podle vzorce (2.5). Nejprve však musíme funkci f zderivovat a výslednou derivaci umocnit na druhou.

$$f'(x) = 0$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = 0$$

$$o_1 = 2\int_0^a \sqrt{1+0}\, dx = 2\int_0^a 1\, dx = 2 \cdot 1 \int_0^a dx = 2[x]_0^a = 2(a-0) = 2a$$

Obvod delších stran je roven $o_1 = 2a$.

b) Obvod kratších stran délky b – budeme postupovat totožně jako u obvodu delších stran. Musíme určit funkční předpis přímky kolmé na osu x, to znamená, že proměnná pro nás bude y. Funkční předpis bude roven $f: x = a$.

Teď už jen doplníme rovnice potřebné pro použití vzorce (2.5) a můžeme dopočítat obvod obou kratších stran.

$$f'(y) = 0$$

$$\left(f'(y)\right)^2 = 0$$

$$o_2 = 2\int_0^b \sqrt{1+0}\,dy = 2\int_0^b 1\,dy = 2\cdot 1\int_0^b dy = 2[y]_0^b = 2(b-0) = 2b$$

Obvod kratších stran je roven $o_2 = 2b$.

Odpověď: Obvod obdélníku je součtem dílčích obvodů, tedy $o = o_1 + o_2 = 2a + 2b = 2(a+b)$. Po kontrole se vzorcem uvedeným v *Tabulce 3* víme, že jsme počítali správně.

Příklad 19: Určete délku křivky zadané přepisem $f: y = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ v intervalu $\langle 1, e\rangle$.

Řešení: Délku křivky vypočítáme pomocí vzorce (2.5). Ze zadání známe funkční předpis této křivky a meze integrace, musíme tedy ještě funkci f zderivovat a tuto derivaci umocnit na druhou.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = \frac{1-x^2}{2x}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1-2x^2+x^4}{4x^2}$$

Nyní již známe vše potřebné pro použití vzorce (2.5) pro výpočet délky křivky a můžeme spočítat délku zadané křivky.

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1-2x^2+x^4}{4x^2}}\,dx = \int_1^e \sqrt{\frac{4x^2+1-2x^2+x^4}{4x^2}}\,dx =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{2x}\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_1^e \frac{1}{2x}\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\,dx =$$

$$= \int_1^e \frac{x^2}{2x} dx + \int_1^e \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + [\ln|x|]_1^e\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + (1-0)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

Odpověď: Délka křivky $f: y = \frac{1}{2} ln\, x - \frac{x^2}{4}$ v intervalu $\langle 1, e\rangle$ je $l = \frac{1}{4}(e^2+1) \doteq 2{,}1j.$

2.4 Výpočet obsahu rotační plochy

Riemannův integrál lze použít i pro výpočet obsahu rotační plochy. K tomu využíváme vzorec

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \tag{2.6}$$

Vzorec (2.6) lze tedy využít i k odvození vzorce pro výpočet obsahu pláště některých rotačních těles. Když k tomuto obsahu přičteme ještě obsah podstavy (případně obsahy podstav) daného tělesa, vznikne nám celkový povrch rotačního tělesa.

Ke kontrole správnosti počítání je zde uvedena tabulka celkových povrchů těch rotačních těles, které budeme v následujících příkladech odvozovat.

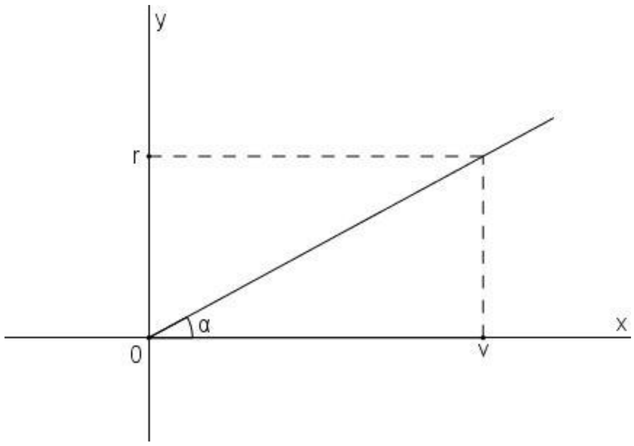
Rotační kužel	$P = \pi r(r+s)$
Komolý rotační kužel	$P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$
Rotační válec	$P = 2\pi r(r+v)$
Koule	$P = 4\pi r^2$
Kulový vrchlík	$P = 2\pi r v$

Kulový pás	$P = 2\pi r v$

Tabulka 4: Povrchy rotačních těles [1]

Příklad 20: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v. Následně dopočtěte celkový povrch rotačního kužele.

Řešení: Nejprve si načrtneme křivku, z které po rotaci kolem osy x vznikne rotační kužel.



Obrázek 20: Náčrt křivky pro rotační kužel

K použití vzorce (2.6) musíme určit funkční předpis této křivky. Tento úkol jsme již řešili v příkladu 7, dovolím si tedy napsat jen konečný tvar.

$$f: y = \frac{r}{v}x$$

Dále musíme určit derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{r}{v}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{r^2}{v^2}$$

Nyní máme vše potřebné k využití vzorce (2.6) a můžeme spočítat obsah pláště rotačního kužele.

$$P = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}}\, dx = 2\pi \frac{r}{v} \int_0^v x \sqrt{\frac{v^2 + r^2}{v^2}}\, dx = 2\pi \frac{r}{v} \frac{\sqrt{v^2 + r^2}}{v} \int_0^v x\, dx =$$

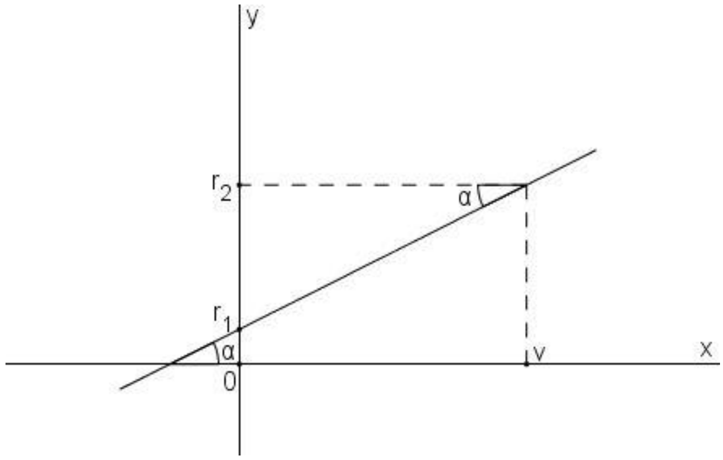
$$= 2\pi \frac{r}{v^2} \sqrt{v^2 + r^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v = 2\pi \frac{r}{v^2} \sqrt{v^2 + r^2} \left(\frac{v^2}{2} - 0\right) = \pi r \sqrt{v^2 + r^2}$$

V náčrtu můžeme rozpoznat pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami r a v. Z Pythagorovy věty víme, že $\sqrt{v^2 + r^2}$ je rovna přeponě tohoto trojúhelníku, která je u rotačního kužele totožná se stranou s. Tím pádem můžeme výsledek přepsat do tvaru $\pi r s$. Když k němu přičteme ještě obsah podstavy (πr^2), získáme celý povrch rotačního kužele $P = \pi r s + \pi r^2 = \pi r(r + s)$.

Odpověď: Obsah pláště rotačního kužele je roven $P = \pi r s$ a celkový povrch rotačního kužele je $P = \pi r s + \pi r^2 = \pi r(r + s)$. Výsledný povrch je totožný se vzorcem uvedeným v *Tabulce 4*.

Příklad 21: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pláště komolého rotačního kužele o poloměru horní podstavy r_1, dolní r_2 a výšce v. Následně dopočtěte celkový povrch komolého rotačního kužele.

Řešení: Načrtneme si křivku, ze které po rotaci kolem osy x vznikne komolý rotační kužel.



Obrázek 21: Náčrt křivky pro komolý rotační kužel

Funkční předpis této křivky jsme již zjišťovali v příkladu 8, dovolím si ho tedy neodvozovat, ale převzít.

$$f: y = \frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1$$

K odvození obsahu pláště komolého rotačního kužele využijeme vzorec (2.6). Musíme tedy ještě určit první derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{r_2 - r_1}{v}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2}$$

Obsah pláště je pak rovný

$$P = 2\pi \int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1\right) \sqrt{1 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v} x \sqrt{\frac{v^2 + (r_2 - r_1)^2}{v^2}} + \sqrt{\frac{v^2 + (r_2 - r_1)^2}{v^2}} r_1 \right) dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} \int_0^v x\, dx + \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} r_1 \int_0^v dx \right) =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v + r_1 [x]_0^v \right) =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} \left[\frac{r_2 - r_1}{v} \left(\frac{v^2}{2} - 0 \right) + r_1 (v - 0) \right] =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} \left(\frac{1}{2} r_2 v - \frac{1}{2} r_1 v + r_1 v \right) =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}}{v} \left(\frac{1}{2} r_1 v + \frac{1}{2} r_2 v \right) = \pi (r_1 + r_2) \sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}.$$

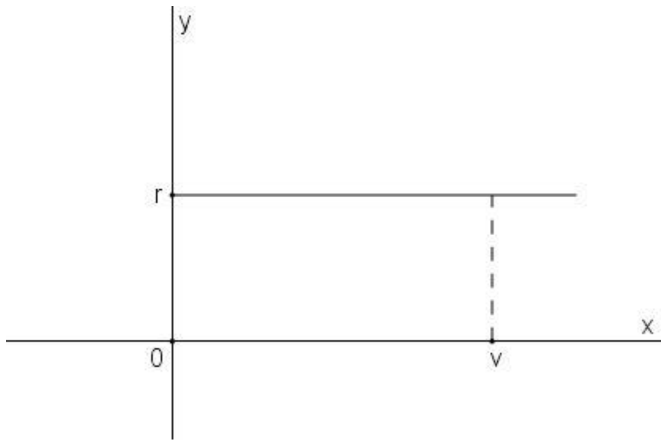
Stejně jako u rotačního kužele i zde můžeme v náčrtu rozpoznat pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $(r_2 - r_1)$ a v. Takže z Pythagorovy věty: $\sqrt{v^2 + (r_2 - r_1)^2}$ je rovna přeponě tohoto trojúhelníku, která je v komolém rotačním kuželi totožná se stranou s. Tak se nám výsledek mění na tvar $\pi(r_1 + r_2)s$. Po přičtení obsahů podstav (πr_1^2 a πr_2^2) získáváme celý povrch kužele $P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$.

Odpověď: Obsah pláště komolého rotačního kužele je $P = \pi(r_1 + r_2)s$ a celkový povrch komolého rotačního kužele je $P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$. Tento povrch je shodný se vzorcem pro výpočet povrchu komolého rotačního kužele uvedeným v *Tabulce 4*.

Příklad 22: Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního válce o poloměru r a výšce v. Poté dopočtěte celkový povrch rotačního válce.

Řešení: Rotační válec jsme již řešili v příkladu 9, když jsme počítali jeho objem. Převezmeme tedy z tohoto příkladu funkční předpis křivky, vlastně přímky (viz. náčrt), z které po rotaci kolem osy x vznikne rotační válec.

$$f: y = r$$



Obrázek 22: Náčrt křivky pro rotační válec

Obsah pláště vypočítáme pomocí vzorce (2.6). K němu však ještě potřebujeme derivaci funkce f a její druhou mocninu.

$$f'(x) = 0$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = 0$$

Pak obsah pláště rotačního válce je

$$P = 2\pi \int_0^v r\sqrt{1+0}\,dx = 2\pi r \int_0^v dx = 2\pi r[x]_0^v = 2\pi r(v-0) = 2\pi rv.$$

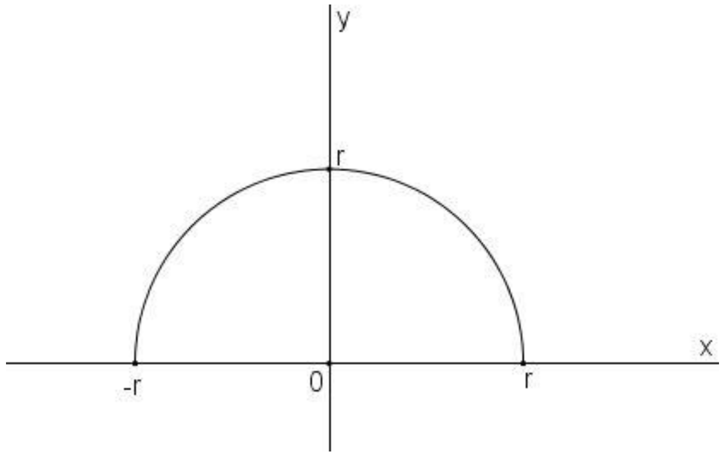
Když k tomuto obsahu pláště přičteme obsah obou podstav $(2 \cdot \pi r^2)$, dostaneme celý povrch rotačního válce, tudíž $P = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+v)$.

Odpověď: Vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního válce je $P = 2\pi rv$. Celkový povrch je pak $P = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + v)$, který je totožný s povrchem uvedeným v *Tabulce 4*.

Příklad 23: Odvoďte vzorec pro povrch koule o poloměru r.

<u>Řešení:</u> Kouli, na rozdíl od předchozích těles, nerozdělujeme na plášť a podstavu. Vzorec (2.6) nám dá rovnou celý povrch koule.

Načrtneme si křivku, která po rotaci kolem osy x vytvoří kouli. Je to vlastně půlkružnice se středem v počátku soustavy souřadnic nacházející se nad osou x.



Obrázek 23: Náčrt křivky pro kouli

Tato křivka bude mít funkční předpis $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (převzato z příkladu 10).

Stejně jako u všech předchozích příkladů, kde vystupovala kružnice či půlkružnice, i zde využijeme její souměrnost. Budeme počítat povrch tělesa vzniklého rotací jen jedné poloviny této křivky (té ohraničené mezemi 0 a r) a celkový povrch koule bude jeho dvojnásobkem.

Abychom mohli využít vzorec (2.6), musíme ještě určit první derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Povrch koule poté bude

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

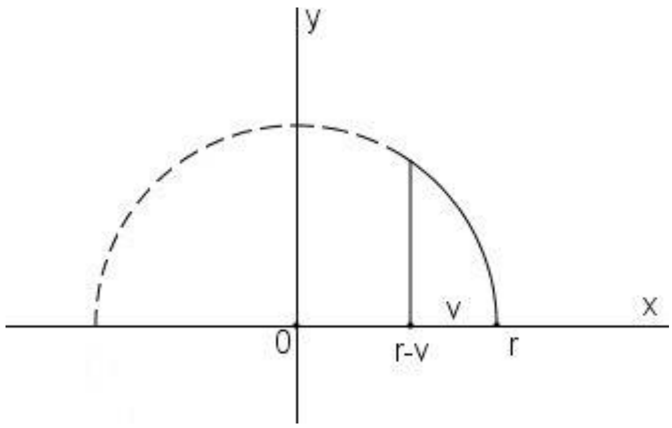
$$= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \int_0^r r\, dx = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r [x]_0^r =$$

$$= 4\pi r(r - 0) = 4\pi r^2.$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet povrchu koule je $P = 4\pi r^2$. Tento vzorec se shoduje se vzorcem uvedeným v *Tabulce 4.*

Příklad 24: Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu kulového vrchlíku výšky v vzniklého z koule poloměru r.

Řešení: Kulový vrchlík vznikne rotací stejné křivky jako koule, jen s tím rozdílem, že to nebude celá půlkružnice, ale jen její část.



Obrázek 24: Náčrt křivky pro kulový vrchlík

Z náčrtu můžeme vyčíst, že tato část je ohraničená mezemi $r - v$ a r. Funkční předpis této křivky je tedy totožný jako předpis křivky u koule, tudíž $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

K výpočtu povrchu kulového vrchlíku použijeme vzorec (2.6). Meze integrálu jsou $r - v$ a r. Ještě je zapotřebí určit derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Povrch kulového vrchlíku je pak

$$P = 2\pi \int_{r-v}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{r-v}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

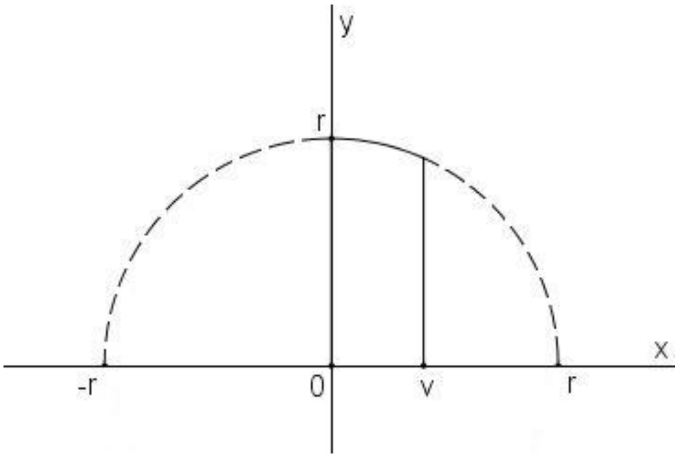
$$= 2\pi \int_{r-v}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{r-v}^{r} r\, dx = 2\pi r \int_{r-v}^{r} dx = 2\pi r [x]_{r-v}^{r} =$$

$$= 2\pi r(r - r + v) = 2\pi r v.$$

Odpověď: Povrch kulového vrchlíku je $P = 2\pi r v$. Tento vzorec je totožný se vzorcem uvedeným v *Tabulce 4*.

Příklad 25: Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu kulového pásu výšky v koule poloměru r.

<u>Řešení:</u> Načrtneme si půlkružnice se středem v počátku soustavy souřadnic situovanou nad osou x. Kulový pás vznikne rotací části této půlkružnice. Pro následné jednodušší integrování si tuto část vymezíme mezemi 0 a v.



Obrázek 25: Náčrt křivky pro kulový pás

K výpočtu povrchu kulového pásu využijeme vzorec (2.6). Funkční předpis této křivky jsme určovali již dříve, je to $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Dále potřebujeme znát derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Výsledný povrch je

$$P = 2\pi \int_0^v \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^v \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^v \sqrt{r^2 - x^2} \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^v r\, dx = 2\pi r \int_0^v dx = 2\pi r [x]_0^v =$$

$$= 2\pi r (v - 0) = 2\pi r v.$$

Odpověď: Vzorec pro výpočet povrchu kulového pásu je $P = 2\pi r v$. Jak můžeme zkontrolovat v *Tabulce 4*, počítali jsme správně.

Příklad 26: Určete obsah rotační plochy vzniklé rotací křivky určené funkčním předpisem $f: y = \sqrt{x}$ na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ kolem osy x.

<u>Řešení:</u> Obsah rotační plochy vypočteme pomocí vzorce (2.6). K tomu ještě potřebujeme znát derivaci funkce f a druhou mocninu této derivace.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{4x}$$

Nyní již známe vše pro využití vzorce (2.6) a můžeme vypočítat obsah rotační plochy

$$P = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x}\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4x+1}\,dx = \pi \left[\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\pi \left[\sqrt{(4x+1)^3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}\right) = \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right) \doteq 3{,}13j^2.$$

Odpověď: Obsah této rotační plochy je $P = \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right) \doteq 3{,}13j^2$.

Kapitola 3

Užití ve fyzice

3.1 Výpočet dráhy nerovnoměrného pohybu

Ve fyzice můžeme Riemannův integrál použít k výpočtu dráhy nerovnoměrného pohybu. Vzorec k tomuto výpočtu odvodíme ze známého vzorce pro výpočet rychlosti $v = \frac{ds}{dt}$. Vyjádříme ds: $ds = v \cdot dt$ a celková dráha nerovnoměrného pohybu s se vypočítá právě Riemannovým integrálem jako

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt, \tag{3.1}$$

kde $\langle t_1, t_2 \rangle$ je časový interval, na kterém určujeme dráhu s.

Příklad 1: Určete dráhu nerovnoměrného pohybu letícího míče, jehož rychlost můžeme vyjádřit $v = 4t - \frac{2}{t^2}$ $[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ v časovém intervalu $t \in \langle 3,6 \rangle [\mathrm{s}]$.

Řešení: V zadání máme funkční předpis pro rychlost i časový interval, který pro nás bude mezemi, tudíž máme vše potřebné k využití vzorce (3.1).

$$s = \int_3^6 \left(4t - \frac{2}{t^2}\right) dt = \int_3^6 4t\,dt - \int_3^6 \frac{2}{t^2} dt = 4\int_3^6 t\,dt - 2\int_3^6 \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^6 - 2\left[-\frac{1}{t}\right]_3^6 = 4\left(\frac{36}{2} - \frac{9}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{27}{2} - 2 \cdot \frac{1}{6} = 54 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{161}{3} \doteq 53{,}67\mathrm{m}$$

Odpověď: Míč letící rychlostí $v = 4t - \frac{2}{t^2}$ urazí v časovém intervalu $t \in \langle 3,6 \rangle$ dráhu $s = \frac{161}{3} \doteq 53{,}67\mathrm{m}$.

3.2 Výpočet práce

Další užití Riemannova integrálu ve fyzice je k výpočtu práce. Nejznámější vzorec pro výpočet práce je $W = F \cdot s$. Ten ale platí jen tehdy, pokud má síla konstantní velikost a směr totožný se směrem posunutí tělesa. Když však toto pro sílu neplatí, používá se obecnější vztah pro práci a to

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \tag{3.2}$$

Dráhy s_1 a s_2 jsou mezemi integrace a také mezemi dráhy, na které koná síla F práci W.

Příklad 2: Vypočtěte velikost práce, kterou musíme vykonat při prodloužení pružiny o 15cm z nenapnutého stavu, jestliže se silou 10N roztáhne o 50cm.

<u>Řešení:</u> K výpočtu velikosti síly potřebné k prodloužení pružiny použijeme vzorec $F = k \cdot x$, kde k je tuhost pružiny a x její prodloužení. Tuhost pružiny můžeme vypočítat z hodnot uvedených v zadání příkladu a převedených do základních jednotek soustavy SI: $k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0,5} = 20$. Potřebná síla je tedy tvaru $F = 20x$.

K využití vzorce (3.2) máme již funkční předpis pro sílu a meze integrace jsou uvedeny v zadání (0 a $15\text{cm} = 0{,}15\text{m}$). Práce je pak

$$W = \int_0^{0,15} 20x\,dx = 20 \int_0^{0,15} x\,dx = 20 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,15} = 20 \left(\frac{0{,}0225}{2} - 0\right) = 0{,}225\text{J}.$$

Odpověď: Velikost práce potřebné k prodloužení pružiny o 15cm z nenapnutého stavu je $W = 0{,}225$J.

3.3 Výpočet momentu setrvačnosti

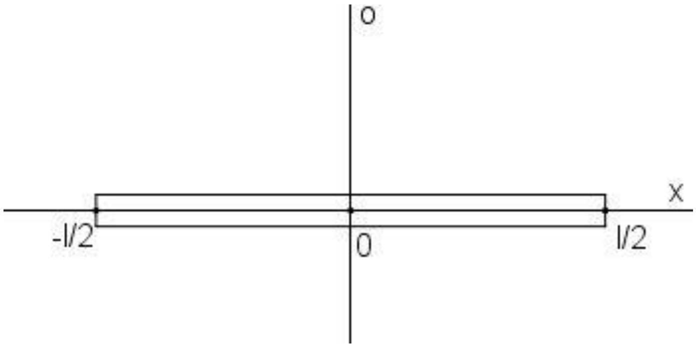
Moment setrvačnosti vyjadřuje ochotu tělesa setrvat v otáčivém pohybu. Velikost momentu setrvačnosti záleží na rozložení hmoty v tělese – čím je větší vzdálenost a hmotnost od osy otáčení, tím je větší moment setrvačnosti.

K výpočtu momentu setrvačnosti používáme vzorec

$$J = \int_{(m)} x^2 \, dm. \tag{3.3}$$

Příklad 3: Určete moment setrvačnosti homogenní tenké tyče o délce l a hmotnosti m, jestliže rotuje kolem osy o, procházející kolmo jejím středem.

<u>Řešení:</u> Uděláme si náčrt tyče s osou rotace.



Obrázek 26: Náčrt tyče s osou rotace v její polovině

Když z této tyče délky l a hmotnosti m vyřízneme nekonečně malý úsek velikosti dx, jeho hmotnost bude dm. Tímto nám vznikla přímá úměra, ze které můžeme vyjádřit dm potřebné k využití vzorce (3.3).

$$\begin{array}{c} l \ldots dx \\ \underline{m \ldots dm} \end{array}$$

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

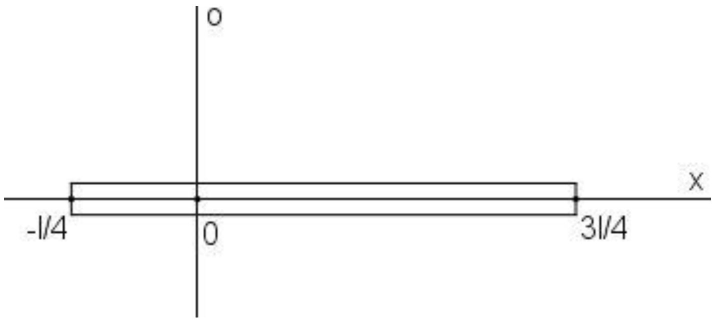
Meze integrace, jak je vidět z náčrtu, budou $-\frac{l}{2}$ a $\frac{l}{2}$. Moment setrvačnosti poté bude

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\, dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{l} \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right) = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}.$$

Odpověď: Moment setrvačnosti homogenní tenké tyče délky l a hmotnosti m rotující kolem osy o, procházející kolmo středem tyče je $J = \frac{ml^2}{12}$.

Příklad 4: Určete moment setrvačnosti homogenní tenké tyče o délce l a hmotnosti m, jestliže rotuje kolem osy o, procházející kolmo její jednou čtvrtinou.

Řešení: Tento příklad je vlastně obměnou příkladu 3. Bude se tedy počítat stejně, jen meze integrace budou jiné.



Obrázek 27: Náčrt tyče s osou rotace v jedné čtvrtině

K výpočtu použijeme vzorec (3.3). Meze integrace budou $-\frac{l}{4}$ a $\frac{3}{4}l$ a integrovaný výraz bude stejný jako u příkladu 3.

$$J = \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{3}{4}l} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{3}{4}l} x^2\, dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{4}}^{\frac{3}{4}l} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{l} \left(\frac{27l^3}{64} + \frac{l^3}{64}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{l} \cdot \frac{7}{16} l^3 = \frac{7}{48} m l^2$$

Odpověď: Moment setrvačnosti homogenní tenké tyče délky l a hmotnosti m rotující kolem osy o, procházející kolmo jednou její čtvrtinou je $J = \frac{7}{48} m l^2$.

Z těchto dvou příkladů jsme potvrdili tvrzení uvedené na začátku této podkapitoly a to, že čím větší je vzdálenost od osy otáčení, tím větší je moment setrvačnosti. Konkrétně, moment setrvačnosti tyče jejíž osa rotace je umístěna v jedné polovině je $J = \frac{1}{12} m l^2$ a té samé tyče, když umístíme osu rotace do jedné čtvrtiny tyče, je $J = \frac{7}{48} m l^2$, a $\frac{1}{12} < \frac{7}{48}$.

3.4 Výpočet polohy těžiště

Poloha těžiště se počítá pomocí vzorce

$$x_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} x \, dm, \tag{3.4}$$

nebo jeho obměn: pro homogenní těleso ($\rho = konst.$)

$$x_T = \frac{1}{V} \int_{(V)} x \, dV \tag{3.5}$$

a pro plošné homogenní těleso (např. list papíru)

$$x_T = \frac{1}{S} \int_{(S)} x \, dS. \tag{3.6}$$

Těžiště je působiště tíhové síly na těleso. Tíhová síla má v tomto místě stejný účinek, jako kdyby působila na celé těleso.

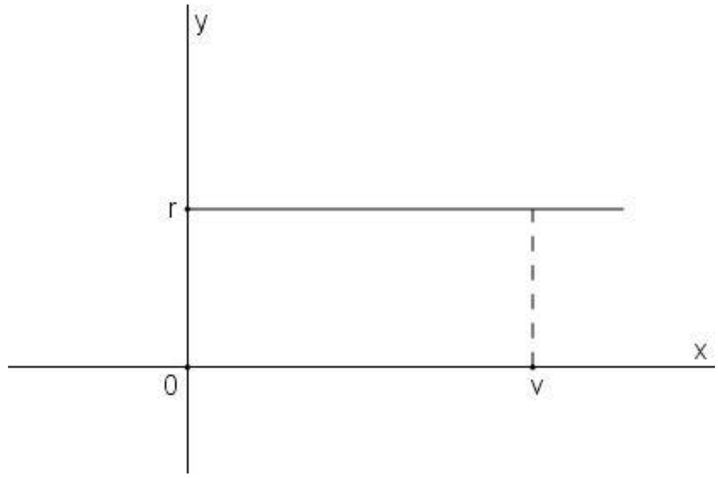
Každý z nás už určitě někdy zkoušel podepřít tužku prstem tak, aby nepřepadávala na jednu stranu a držela se v rovnováze. Hledali jsme vlastně těžiště tužky (nebo spíše jeho svislou složku, protože těžiště je uvnitř tužky).

A hledání polohy těžiště některých rovinných obrazců a těles bude také úkolem této podkapitoly. Budeme k tomu využívat vzorce (3.5) a (3.6). V nich se objevuje vzorec pro objem nebo obsah, který jsme odvozovali v předešlé kapitole. K výpočtům tedy budeme využívat výsledky našeho počítání z minulé kapitoly.

Příklad 5: Určete polohu těžiště homogenní tyče výšky v a poloměru r.

Řešení: To je vlastně příklad již zmiňované tužky. Ze své zkušenosti víme, že těžiště by mělo být v jedné polovině výšky tužky (tedy i tyče).

K výpočtu polohy těžiště použijeme vzorec (3.5). Tyč je z geometrického hlediska válec, jehož objem jsme počítali v příkladu 9 kapitoly 2. Vyšel $V = \pi r^2 v.$ Z tohoto příkladu využijeme i náčrt křivky, z které po rotaci kolem osy x vznikne rotační válec a funkční předpis této křivky.



Obrázek 28: Náčrt křivky pro válec

$$f\colon y = r$$

Z náčrtu vidíme, že kdybychom udělali řez kolmý na osu x a z tyče vyřízli nekonečně malý úsek šířky dx, byl by to vlastně maličký válec, jehož objem by byl $dV = \pi y^2\,dx$, kde $y = r$, tudíž

$$dV = \pi r^2\,dx.$$

Těžiště tyče se tedy nachází

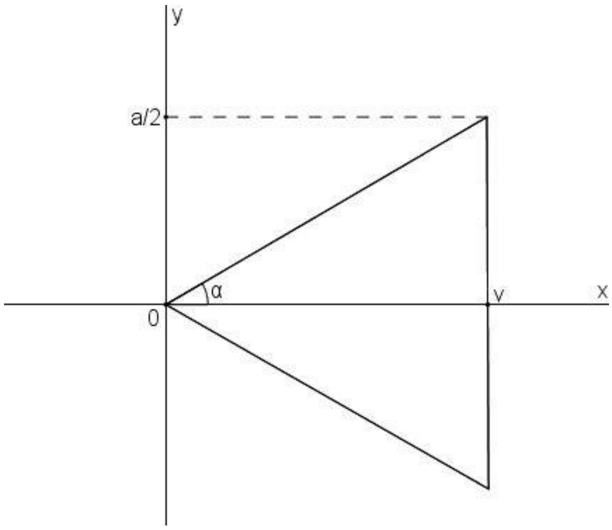
$$x_T = \frac{1}{V}\int_0^v x\pi r^2\,dx = \frac{1}{\pi r^2 v}\pi r^2 \int_0^v x\,dx = \frac{1}{v}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v = \frac{1}{v}\left(\frac{v^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}v.$$

Odpověď: Těžiště homogenní tyče výšky v a poloměru r se nachází, jak jsme předpokládali, v jedné polovině výšky tyče.

Příklad 6: Určete polohu těžiště rovnostranného trojúhelníku o straně délky a a výšce v.

Řešení: Rovnostranný trojúhelník je plošné těleso, proto pro výpočet polohy jeho těžiště využijeme vzorec (3.6). K tomuto vzorci potřebujeme znát vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníku, který převezmeme z příkladu 1 kapitoly 2. Je to $S = \frac{a \cdot v}{2}$.

Dále z příkladu 1 převezmeme i funkční předpis jedné ze stran rovnostranného trojúhelníku a to $f: y = \frac{a}{2v}x$ a náčrt tohoto trojúhelníku.



Obrázek 29: Náčrt rovnostranného trojúhelníku

Kdybychom v náčrtu udělali řez kolmý na osu x a z rovnostranného trojúhelníku vyřízli nekonečně malý úsek široký dx, byly by to vlastně dva totožné obdélníky, jejichž obsah by byl

$$dS = 2y\,dx = 2\frac{a}{2v}x\,dx = \frac{a}{v}x\,dx.$$

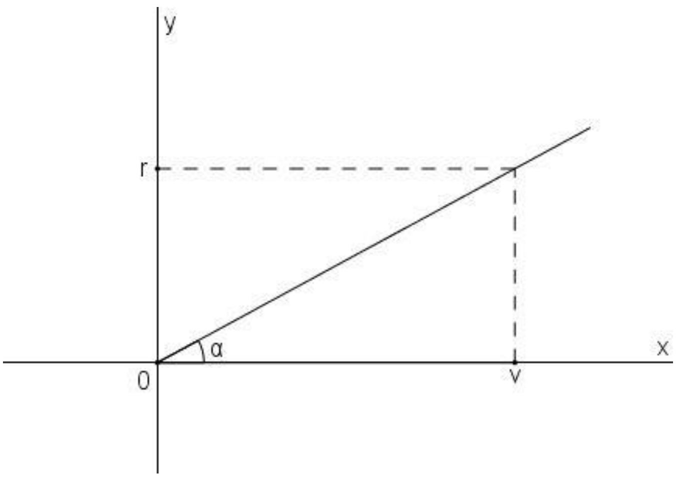
Tento obsah dS dosadíme do vzorce (3.6) a vypočítáme polohu těžiště.

$$x_T = \frac{1}{S}\int_0^v x\frac{a}{v}x\,dx = \frac{1}{\frac{a\cdot v}{2}}\cdot\frac{a}{v}\int_0^v x^2\,dx = \frac{2}{v^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{2}{v^2}\left(\frac{v^3}{3}-0\right) = \frac{2}{3}v$$

Odpověď: Těžiště rovnostranného trojúhelníku o straně délky a a výšce v leží ve $\frac{2}{3}$ výšky tohoto trojúhelníku.

Příklad 7: Určete polohu těžiště rotačního kužele o poloměru r a výšce v.

Řešení: Stejně jako u předchozích příkladů, i nyní využijeme výsledků dosažených v kapitole 2. Konkrétně u příkladu 7.



Obrázek 30: Náčrt křivky pro rotační kužel

Funkční předpis křivky, ze které rotací kolem osy x vznikne rotační kužel, je $f\colon y = \frac{r}{v}x$ a objem rotačního kužele je dán vzorcem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

K použití vzorce (3.5) musíme ještě vyjádřit dV. Jestliže uděláme řez kuželem kolmý na osu x a široký dx, vznikne nám válec, jehož objem je

$$dV = \pi y^2\,dx = \pi \frac{r^2}{v^2} x^2\,dx.$$

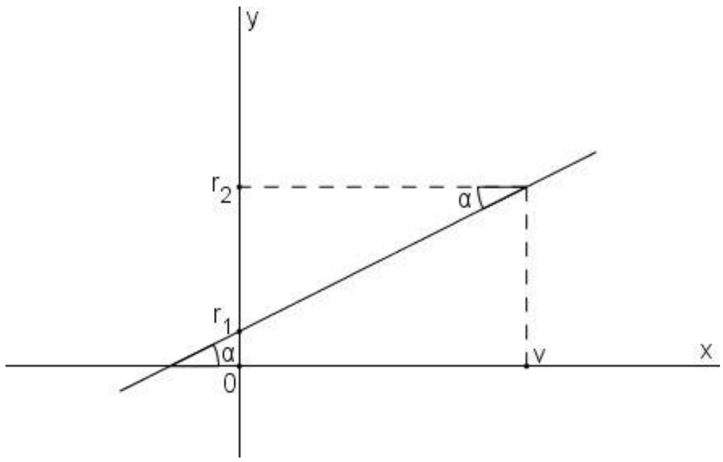
Poloha těžiště rotačního kužele poté je

$$x_T = \frac{1}{\frac{\pi r^2 v}{3}} \int_0^v x\pi \frac{r^2}{v^2} x^2\,dx = \frac{3}{\pi r^2 v} \cdot \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v x^3\,dx = \frac{3}{v^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^v = \frac{3}{v^3}\left(\frac{v^4}{4} - 0\right) = \frac{3}{4} v.$$

Odpověď: Těžiště rotačního kužele s poloměrem r a výškou v leží ve $\frac{3}{4}$ výšky tohoto kužele.

Příklad 8: Určete polohu těžiště komolého rotačního kužele o poloměru horní podstavy r_1, poloměru dolní podstavy r_2 a výšce v.

Řešení: Postup bude stejný jako u rotačního kužele, nyní však budeme používat výsledky z příkladu 8 kapitoly 2. Dovolím si tedy uvést jen výsledky bez podrobného komentáře.



Obrázek 31: Náčrt křivky pro komolý rotační kužel

Funkční předpis křivky, z které vznikne komolý rotační kužel $f: y = \frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1$.

Objem komolého rotačního kužele $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

Z řezu vznikne také válec, jehož objem je

$$dV = \pi y^2\, dx = \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1\right)^2 dx = \pi \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} x^2 + 2\frac{r_2 - r_1}{v} x r_1 + r_1^2\right) dx.$$

Polohu těžiště vypočítáme pomocí vzorce (3.5), bude

$$x_T = \frac{1}{\frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \int_0^v x\pi \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} x^2 + 2\frac{r_2 - r_1}{v} x r_1 + r_1^2\right) dx =$$

$$= \frac{3}{\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \cdot \pi \int_0^v x \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} x^2 + 2\frac{r_2 - r_1}{v} x r_1 + r_1^2\right) dx =$$

$$= \frac{3}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \left[\int_0^v \frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} x^3\, dx + \int_0^v 2\frac{r_2 - r_1}{v} x^2 r_1\, dx + \int_0^v r_1^2 x\, dx\right] =$$

$$= \frac{3}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \int_0^v x^3\, dx + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \int_0^v x^2\, dx + r_1^2 \int_0^v x\, dx\right] =$$

$$= \frac{3}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^v + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v + r_1^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v\right) =$$

$$= \frac{3}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \left(\frac{v^4}{4} - 0\right) + 2\frac{r_2 - r_1}{v} r_1 \left(\frac{v^3}{3} - 0\right) + r_1^2 \left(\frac{v^2}{2} - 0\right)\right]$$

$$= \frac{3}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \left[\frac{1}{4}(r_2 - r_1)^2 v^2 + \frac{2}{3}(r_2 - r_1) r_1 v^2 + \frac{1}{2} r_1^2 v^2\right] =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}(r_2 - r_1)^2 v^2 + 2(r_2 - r_1) r_1 v^2 + \frac{3}{2} r_1^2 v^2}{v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} =$$

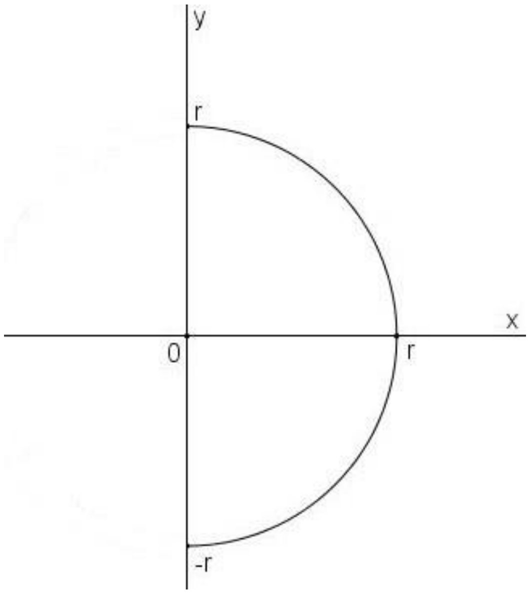
$$= \frac{\frac{3}{4}(r_2^2 - 2r_2 r_1 + r_1^2) + 2(r_2 r_1 - r_1^2) + \frac{3}{2} r_1^2}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \cdot v = \frac{\frac{3}{4} r_2^2 + \frac{1}{2} r_2 r_1 + \frac{1}{4} r_1^2}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} \cdot v =$$

$$= \frac{v}{4} \cdot \frac{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}.$$

Odpověď: Polohu těžiště komolého rotačního kuželu o poloměru horní podstavy r_1, poloměru dolní podstavy r_2 a výšce v zjistíme pomocí vzorce $x_T = \frac{v}{4} \cdot \frac{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$.

Příklad 9: Určete polohu těžiště polokoule o poloměru r.

Řešení: Načrtneme si polokouli napravo od osy y.



Obrázek 32: Náčrt křivky pro polokouli

Tato polokoule vznikla rotací křivky $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$ v intervalu $\langle 0, r\rangle$. Funkční předpis křivky je totožný s funkčním předpisem pro kouli odvozeným v příkladu 4 kapitoly 2. Z tohoto příkladu můžeme vzít i objem koule, protože objem polokoule je jeho polovinou. Objem polokoule tedy je $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$.

K výpočtu polohy těžiště polokoule použijeme vzorec (3.5). K němu je ještě nutné vyjádřit dV – uděláme-li řez polokoulí kolmý na osu x a široký dx, vznikne válec, jehož objem je $dV = \pi y^2 \, dx = \pi (r^2 - x^2) \, dx$.

Nyní již máme vše potřebné k využití vzorce (3.5) a můžeme určit polohu těžiště polokoule.

$$x_T = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi r^3} \int_0^r x\pi (r^2 - x^2) \, dx = \frac{3}{2\pi r^3} \pi \left(\int_0^r x r^2 \, dx - \int_0^r x^3 \, dx \right) =$$

$$= \frac{3}{2r^3} \left(r^2 \int_0^r x \, dx - \int_0^r x^3 \, dx \right) = \frac{3}{2r^3} \left(r^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^r - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \right) =$$

$$= \frac{3}{2r^3} \left[r^2 \left(\frac{r^2}{2} - 0 \right) - \left(\frac{r^4}{4} - 0 \right) \right] = \frac{3}{2r^3} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{3}{2r^3} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{3}{8} r$$

Odpověď: Těžiště polokoule o poloměru r se nachází ve $\frac{3}{8}$ jejího poloměru ve směru osy x.

Závěr

Předkládaná bakalářská práce pojednává o využití Riemannova integrálu v přírodních vědách, konkrétně pak v matematice a ve fyzice. Záměrem této práce bylo sestavit přehled aplikačních příkladů včetně řešení s kontrolou v matematicko-fyzikálních tabulkách. Součástí řešení příkladů je náčrt, který slouží k lepší představivosti řešení.

Překvapilo mě, kolik vzorců k výpočtu objemů a obsahů se dá odvodit pomocí Riemannova integrálu, a tudíž si je není třeba pamatovat.

Byla bych potěšena, kdyby tato práce byla přínosem nejen pro studenty, kteří si chtějí procvičit výpočet Riemannova integrálu, ale i pedagogickým pracovníkům, kteří z této práce mohou čerpat úlohy pro svá cvičení.

Literatura

[1] KOTLÍK, B., LANK, V., aj. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Fragment, 2011. ISBN 978-80-253-1227-8

[2] PETRÁŠKOVÁ, V. *Matematická analýza II*. (přednáška) České Budějovice: PF JCU, LS 2014/2015

[3] TESAŘ, J. *Matematika pro fyziky I.* (přednáška) České Budějovice: PF JCU, ZS 2014/2015