Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Latinské čtverce

Vypracoval: Štěpánka Slabová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Latinské čtverce jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ……………… ………………………

Poděkování

Touto cestou bych chtěla poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení, ochotu a cenné rady.

Anotace

Tato bakalářská práce se zabývá latinskými a magickými čtverci. Cílem práce je seznámit čtenáře se základními poznatky, které se týkají latinských a magických čtverců včetně pohledu do historie. Závěrečná část práce se věnuje hře sudoku, jejíž každé výsledné postavení je latinským čtvercem. V práci jsou uvedeny různé varianty hry, základní strategie řešení a využití hry sudoku ve výuce matematiky.

Annotation

This bachelor thesis focuses on Latin and magic squares. The main goal is to introduce the topic to a reader of this thesis. Author would like to provide basic information about Latin and magic squares including its history. The last part of the thesis focuses on a game called Sudoku, which final form can be ranked as a Latin square. In the thesis you can find different variants of the game and basic solution strategies. You can also find out, how to use Sudoku in mathematics lessons.

OBSAH

1 ÚVOD

Latinské a magické čtverce nikdy nepatřily mezi ty matematické pojmy, které by nějak významně přispěly k rozvoji matematiky. Přesto jimi byli lidé fascinováni v průběhu celé historie. Původně byly tyto čtverce, a především čtverce magické, sestavovány pro konkrétní účely jako talismany nebo se používaly při věštění. Přitahovaly nejrůznější typy lidí, od méně vzdělaných až po představitele elity své doby, jakým byl např. Benjamin Franklin. Při pohledu na historii latinských a magických čtverců lze pozorovat vztahy matematiky a filosofie. Můžeme si také u lidí všimnout vnímání magických sil matematických objektů, které jim byly připisovány díky jejich zvláštním vlastnostem. Latinské a magické čtverce jsou velmi oblíbené i dnes, a to v podobě populární hry sudoku. Najdeme ji téměř v každých novinách a slouží jako relax či ke krácení dlouhé chvíle např. při cestování. Hra sudoku je vřele doporučována i didaktiky matematiky, protože rozvíjí logické myšlení. To je také jeden z důvodů, proč tuto hru zařazují učitelé matematiky do svých hodin.

Cílem práce je poskytnout čtenáři základní informace o latinských a magických čtvercích, včetně pohledu do historie, a tak přiblížit, proč jimi byli lidé odedávna fascinováni. Významnou část práce budou tvořit aplikace latinských čtverců ve hře sudoku, její varianty a strategie řešení.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. Ve druhé kapitole bude čtenář seznámen s pojmem latinského čtverce a jeho historií. V další podkapitole se budu věnovat aplikacím latinských čtverců. Na závěr uvedu několik příkladů jejich užití v umění.

Ve třetí kapitole budou popsány základní informace a vlastnosti magických čtverců. Dále zmíním jejich historický vývoj v různých částech světa. Následovat bude část věnována metodám konstrukcí latinských čtverců, kde popíši způsoby, jakými lze vytvořit lichý a sudý magický čtverec. Součástí kapitoly budou také příklady speciálních magických čtverců.

Závěrečná kapitola bude věnována hře sudoku. V úvodu kapitoly bude čtenář seznámen s pravidly této hry a její historií. Dále uvedu některé její varianty a každou z nich doplním vzorovým hlavolamem. Důležitou součástí budou strategie řešení, kde popíši základní strategie, které budou doplněny názornými obrázky pro lepší pochopení. Kapitolu završím tím, jak je možné využít hru sudoku v hodinách matematiky.

2 LATINSKÉ ČTVERCE

2.1 Úvod do latinských čtverců

Pojem latinského čtverce zavedl Leonhard Euler roku 1782. Definoval ho následovně: *„Latinský čtverec řádu n je schéma o n řádcích a n sloupcích, kde v každém řádku a v každém sloupci se každý prvek nějakého souboru mohutnosti n objevuje právě jednou.“* ([4], s. 117)

Latinským čtvercem můžeme nazvat např. toto schéma:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Obr. 1 - Schéma tvořící latinský čtverec

Svůj název dostaly latinské čtverce podle toho, že jejich prvky jsou označené písmeny latinské abecedy. Je však důležité zmínit, že používání latinských písmen není podstatné. Situace by se nijak nezměnila, kdybychom místo nich do čtverečků napsali číslice či jiné symboly. Čtverečky můžeme také vybarvit různými barvami odpovídající latinským písmenům. Za prvky latinských čtverců lze zvolit i různé objekty, např. hrací karty, šachové figurky či osoby. Velmi často se však používají přirozená čísla.

Latinský čtverec není potřebné znázorňovat jako čtverec a čtverečky, na které je rozdělený. Je možné tuto čtvercovou síť vynechat a pouze okraje čtverce označit hranatými závorkami.

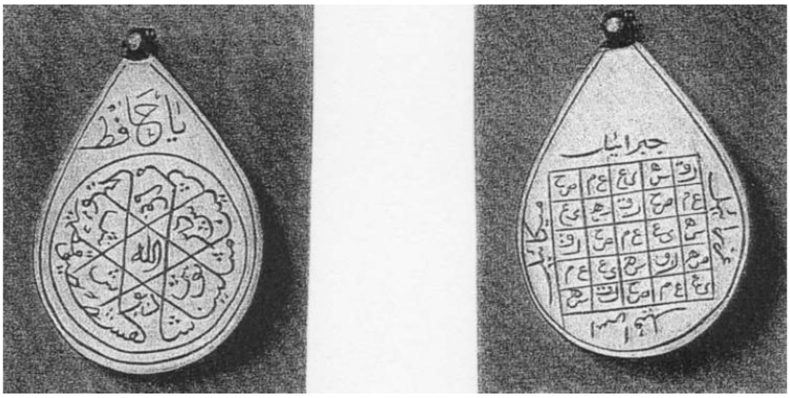
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obr. 2 - Další možné zobrazení latinského čtverce

2.2 Historie

2.2.1 Počátky latinských čtverců

První zmínky o latinských čtvercích pocházejí z roku 1000 n. l., kdy je arabská a indická civilizace používala na amulety a různé obřady. Amulet s rytinou latinského čtverce měl jeho nositele ochránit od zlých duchů, měl ukázat úctu k bohům a oslavovat Slunce a planety. Na následujícím obrázku můžeme vidět amulet, který má na jedné straně latinský čtverec a na straně druhé magický kruh, kde jsou zobrazena jména sedmi spáčů, kteří podle legendy spali v jeskyni od roku 250 do 450. Tento amulet měl mít moc vymítat démony [9].



Obr. 3 - Stříbrný amulet z Damašku ([9], s. 3)

V islámském Orientu věřili, že čísla 2, 4, 6 a 8 mají magickou sílu, pokud se vyskytují pohromadě [9].

Jednu z prvních knih obsahující latinské čtverce napsal arabský súfí Ahmad ibn ‘Ali ibn Yusuf al-Buni, který zemřel v roce 1225. Nazval ji Shams al-Ma’arif al-Kubra (v překladu do angličtiny The sun of knowledge). Kniha obsahuje mnoho latinských a magických čtverců a popis talismanu obsahující sedm latinských čtverců. Každý z těchto sedmi latinských čtverců je spojený s jedním dnem v týdnu a s jednou planetou. Čtverec spřízněný se čtvrtkem a Jupiterem je zobrazen na obrázku 4 [9].

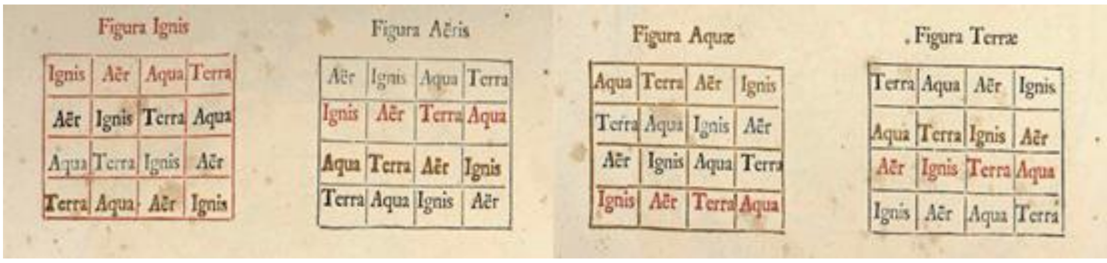
ظ	ث	ج	ف	خ	ش	ظ
ج	ف	خ	ش	ظ	ز	ث
خ	ش	ظ	ز	ث	ج	ف
ظ	ز	ث	ج	ف	خ	ش
ث	ج	ف	خ	ش	ظ	ز
ف	خ	ش	ظ	ز	ث	ج
ش	ظ	ز	ث	ج	ف	خ

Obr. 4 - Jeden ze sedmi čtverců talismanu z knihy al-Buni ([9], s. 4)

Latinské čtverce podle al-Buni slouží k dvěma účelům. Zaprvé mají určitou magickou sílu a zadruhé jsou důležité při konstrukci magických čtverců. V roce 1356 vyšla v Indii jiná kniha, obsahující latinské čtverce se zaměřením na jejich použití při konstrukcích čtverců magických [9].

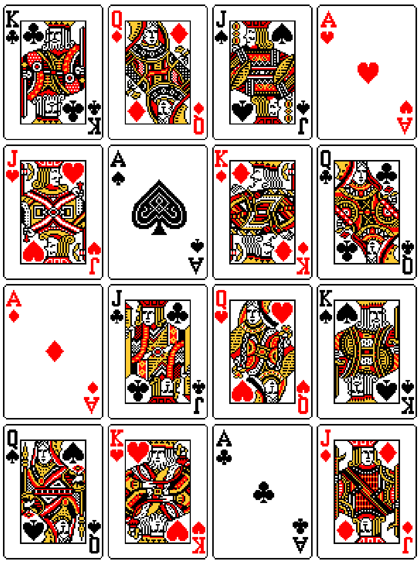
2.2.2 Vývoj latinských čtverců v Evropě

V Evropě se latinskými čtverci zabýval ve 13. století španělský filosof a logik Ramon Llull. Ve svém nákresu přiřadil každému ze čtyř živlů jeho vlastní latinský čtverec [9].



Obr. 5 - Kresba Ramona Llulla [18]

Mnoho úloh týkajících se latinských čtverců souvisí s hazardními hrami. Příkladem je úloha předložená Jacquesem Ozanamem v roce 1694. Úkolem bylo seřadit šestnáct žolíkových karet tak, aby se v každém řádku a v každém sloupci nacházela právě jedna z hodností (A, K, Q, J) a zároveň právě jedna z barev (srdce, kára, piky, kříže). Jedno možné řešení úlohy se nachází na obrázku 6 [4].



Obr. 6 - Řešení úlohy s 16 kartami [10]

Francouzský zemědělský výzkumník Francois Cretté de Palluel předložil Královské zemědělské společnosti v Paříži 31. července 1788 svůj nápad s krmením ovcí. Jeho cílem bylo ukázat, že ovce se dají po celou zimu krmit kořenovou zeleninou. Vysvětloval, že je to levnější a jednodušší než jejich běžná strava, která se skládala z kukuřice a sena. F. C. de Palluel popsal experiment, kdy krmil šestnáct ovcí různou stravou a porovnával jejich nárůst váhy. Tento jeho nápad můžeme převést na latinský čtverec 4 × 4 se čtyřmi druhy ovcí jako řádky, čtyřmi rozdílnými krmivy jako sloupci a prvky latinského čtverce jsou časy jednotlivých porážek [9].

2.2.2.1 Leonhard Euler a ortogonalita

Leonhard Euler dal latinským čtvercům jejich název. U zrodu latinských čtverců stála proslulá úloha o 36 důstojnících. Tu Euler zformuloval roku 1779 a následně v roce 1782 publikoval.

Úloha zní ([4], s. 177): *„Seřaďte 36 důstojníků šesti různých hodností ze šesti různých pluků do čtvercového útvaru složeného ze 6 řad po 6 důstojnících tak, aby v každé řadě a v každém zástupu byly zastoupeny všechny hodnosti a všechny pluky.“*

Euler se úlohou zaobíral, ale došel k závěru, že je neřešitelná. Své tvrzení ovšem neuměl dokázat. To se povedlo až po 118 letech francouzskému matematikovi Gastonu Tarrymu, který v roce 1900 dokázal, že úloha opravdu nemá řešení [4].

Situace by se však podstatně změnila, kdybychom ubrali jednu hodnost a jeden pluk. Pokud jednotlivé hodnosti označíme latinskými písmeny (plukovník – a, podplukovník – b, major – c, nadporučík – d, poručík – e) a pluky označíme řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, nástup by vypadal takto [1]:

$$\begin{bmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta & e\varepsilon \\ b\varepsilon & c\alpha & d\beta & e\gamma & a\delta \\ c\delta & d\varepsilon & e\alpha & a\beta & b\gamma \\ d\gamma & e\delta & a\varepsilon & b\alpha & c\beta \\ e\beta & a\gamma & b\delta & c\varepsilon & d\alpha \end{bmatrix}$$

Obr. 7 - Nástup důstojníků

Toto schéma se nazývá řecko-latinský čtverec pátého řádu. Jedná se o matici, jejíž členy jsou dvojice písmen – jedno latinské a jedno řecké. Místo této jedné matice, můžeme napsat i matice dvě (Obr. 8). Tyto matice jsou latinské čtverce, které nazýváme ortogonální.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha \end{bmatrix}$$

Obr. 8 - Ortogonální latinské čtverce

Katrnoška ([4], s. 177) definuje ortogonální čtverce takto: *„Nechť jsou dány dva latinské čtverce L_1 a L_2, kde $L_1 = (a_{ij})$, $L_2 = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Pak L_1 a L_2*

nazýváme ortogonální, jestliže jsou všechny dvojice (a_{ij}, b_{ij}), $i, j = 1,2, \dots, n$, *navzájem různé."*

Pojem ortogonalita byl zaveden v souvislosti s Eulerovou úlohou o 36 důstojnících. K vyřešení této úlohy bylo potřeba najít dva vzájemně ortogonální latinské čtverce šestého řádu. Pokud jsou totiž latinské čtverce $L_1 = (a_{ij})$ a $L_2 = (b_{ij})$ ortogonální, pak v množině dvojic $E = (a_{ij}, b_{ij})$ se každá tato dvojice vyskytne právě jednou. Takový čtverec se nazývá Eulerův čtverec [4].

H. B. Mann v roce 1942 dokázal, že k danému latinskému čtverci nemusí existovat latinský čtverec ortogonální. Roku 1960 dokázali R. Bose, S. S. Shrikhande a E. T. Parker, že ortogonální latinské čtverce existují pro všechna přirozená čísla n, kromě případů $n = 2$ a $n = 6$ [4].

2.3 Aplikace latinských čtverců

S aplikacemi latinských čtverců se lze setkat v různých odvětvích. Latinské čtverce se používají při plánování experimentů v operačním výzkumu, při organizaci golfových, bridgeových či tenisových turnajů. Příklad latinského čtverce řádu 9 je také každé výsledné postavení hry sudoku.

V následující části jsou podrobněji představeny další možné aplikace latinských čtverců zmíněné v knize J. Bosáka [1].

2.3.1 Využití v zemědělství

Představme si situaci, kdy dostaneme za úkol na poli ve tvaru čtverce vyzkoušet sedm druhů pšenice a určit, který druh bude mít největší úrodu. Při experimentu můžeme zvolit postup, kdy nejdříve rozdělíme pole na 7 řádků a 7 sloupců, celkově tedy na 49 čtverečků. Položme si za úkol zasít sedm druhů pšenice tak, aby se v každém řádku a sloupci vyskytovaly všechny druhy. Toho můžeme docílit tak, že si označíme sedm druhů pšenice písmeny *a, b, c, d, e, f,* g a z těchto prvků vytvoříme latinský čtverec. Jeden takový možný latinský čtverec je znázorněný na obrázku 9.

f	b	g	a	d	e	c
a	c	f	e	g	d	b
e	g	d	f	c	b	a
b	a	c	g	e	f	d
g	f	a	d	b	c	e
c	d	e	b	f	a	g
d	e	b	c	a	g	f

Obr. 9 - Plán osevu

Až pšenice vyroste, zjistíme úrodu na každém čtverečku a spočítáme úrodu každého ze sedmi druhů pšenice. K vyhodnocení experimentu lze použít i hlubší statistické metody.

Podobným způsobem, jako experiment se pšenicí, je možné udělat pokus, kdy máme jen jeden druh rostliny a máme vyhodnotit vliv sedmi různých druhů hnojiva.

Dalším případem, v němž nám pomohou k řešení latinské čtverce, je zjišťování vlivu sedmi způsobů krmení na dojivost krav. Krávy rozdělíme do sedmi stejně velkých stád, které budou odpovídat sloupcům latinského čtverce. Dále pokus rozdělíme do sedmi období odpovídajícím řádkům latinského čtverce. Prvky latinského čtverce jsou způsoby krmení, které si můžeme označit písmeny latinské abecedy (*a, b, c, d, e, f, g*). Experiment pak může vypadat například tak, že v prvním období dostane první stádo krmivo *f*, druhé stádo krmivo *a*, třetí stádo krmivo *e* atd.

2.3.2 Aplikace v oblasti kódování

V některých situacích je potřeba dopravit z jednoho místa na druhé zprávu, která však nesmí být ve svém původním stavu, ale musí být zakódována. Důvodem může být potřeba utajení či schopnost vysílat jen omezený počet znaků. Z tohoto důvodu nahradíme každé písmeno zprávy jeho kódem. Tyto kódy je možné utvořit mnoha způsoby. Jedním z nich je za použití latinského čtverce.

Ukažme si to na příkladu, ve kterém k zakódování použijeme tento latinský čtverec:

1	2	5	3	4
2	5	1	4	3
5	4	3	2	1
4	3	2	1	5
3	1	4	5	2

Obr. 10 - Latinský čtverec použitý k zakódování

Kódy vytvoříme z latinského čtverce tak, že před každý jeho člen napíšeme pořadové číslo řádku a sloupce. Kódy jsou tyto:

a = 111	b = 122	c = 135	d = 143	e = 154
f = 212	g = 225	h = 231	i = 244	j = 253
k = 315	l = 324	m = 333	n = 342	o = 351
p = 414	q = 423	r = 432	s = 441	t = 455
u = 513	v = 521	x = 534	y = 545	z = 552

S použitím tohoto kódování slovo „matematika“ zašifrujeme takto:

333 111 455 154 333 111 455 244 315 111

Tento kód má jednu velmi důležitou výhodu, sám dokáže objevit chybu. Zmýlíme-li se v některém zašifrovaném slově, v našem případě kdybychom například místo 333 napsali 433, hned zjistíme, že je tam chyba, neboť 433 není kód žádného písmene.

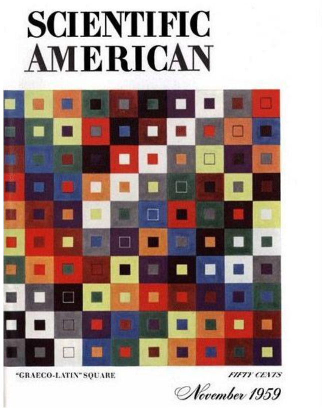
Pokud k zakódování použijeme latinský čtverec většího řádu, můžeme zakódovat větší počet písmen nebo jiných znaků a symbolů.

Existují i takové kódy, které chybu nejen dokážou najít, ale lze díky nim určit, jak vypadalo původní šifrované slovo, a tím dokáže kód chybu i opravit.

2.4 Latinské čtverce v umění

Latinskými čtverci se nechali inspirovat umělci v průběhu historie. Na stříbrném amuletu vyobrazeném na obrázku 3 (str. 8) má latinský čtverec dekorativní funkci.

Když byly objeveny dva ortogonální latinské čtverce řádu 10, dal časopis Scientific American v listopadu 1959 na obálku reprodukci malby svého zaměstnance a výtvarníka Emi Kasai, který čtverce zobrazil pomocí barev. V roce 1960 pak paní Karl Wihtol vyrobila podle malby koberec [9].



Obr. 11 - Obálka časopisu Scientific American [26]

V Caius College v Cambridge se nachází vitrážové okno připomínající Ronalda Aylmera Fishera. Vitráží je barevný 7 × 7 latinský čtverec vytvořený umělkyní Mariou McClafferty (Obr. 12) [9].

Obr. 12 - Vitrážové okno v Caius College [14]

Latinskými čtverci se nechali inspirovat i básníci. Příklad můžeme najít na mosazné desce v kostele sv. Mawgana v Anglii, kde je napsaná báseň oslavující Hanniballa Bassetta, který zemřel v roce 1709 [9].

Shall wee all dye
Wee shall dye all
All dye shall wee
Dye all wee shall

Obr. 13 - Báseň oslavující Hanniballa Bassetta [9]

3 MAGICKÉ ČTVERCE

3.1 Základní informace o magických čtvercích

Pojem „magický čtverec“ se podle Oxfordského anglického slovníku poprvé objevil v roce 1704 v jednom technickém lexikonu [5].

Katrnoška a kol. ([5], s. 113) definuje magické čtverce takto: *„Magickým čtvercem řádu n rozumíme čtvercovou matici $M = (m_{ij})$ řádu n, která obsahuje pouze celá čísla, a součet čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na obou úhlopříčkách je týž.“*

Součet čísel v libovolném řádku, sloupci i na obou úhlopříčkách se nazývá konstanta magického čtverce nebo též charakteristické číslo magického čtverce a značíme S_n .

Jsou-li ve čtverci přirozená čísla od 1 do n^2, konstantu S_n magického čtverce $n \times n$ můžeme vypočítat podle vzorce:

$$S_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Pokud se v magickém čtverci vyskytují všechny prvky stejné, nazývá se konstantní. Magický čtverec, který obsahuje čísla 1, 2,..., n^2 se nazývá normální či klasický. Normální magický čtverec řádu n existuje pro každé n, kromě $n = 2$. Příklad takového čtverce můžeme vidět na obrázku 14.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

1	**8**	**13**	**12**
14	**11**	**2**	**7**
4	**5**	**16**	**9**
15	**10**	**3**	**6**

Obr. 14 - Dva normální magické čtverce

Magické čtverce mají tyto vlastnosti:

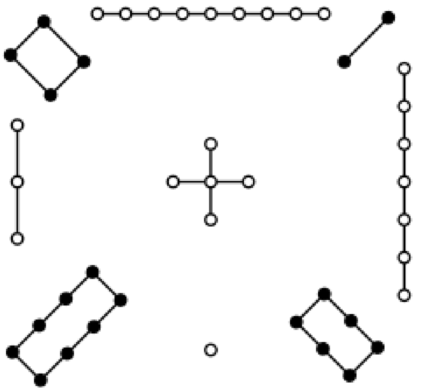
- Počet normálních magických čtverců řádu $n > 1$ je shora ohraničen číslem
$$\frac{(n^2)!}{8(2n+1)!}$$
- Součet dvou magických čtverců stejného řádu je magický čtverec. Pokud vynásobíme magický čtverec celým číslem, dostaneme opět magický čtverec.
- Pro libovolné $n \geq 3$ existuje magický čtverec řádu n obsahující pouze prvočísla.
- Je-li magický čtverec řádu 3 a k liché přirozené číslo, pak M^k je také magický čtverec.

3.2 Historický vývoj

3.2.1 Čína

První zmínky o magickém čtverci pochází z Číny asi kolem roku 2900 př. n. l. Jeho název je odvozen od místa nálezu. Příběh vypráví o mladíkovi jménem Wu Sia, který se snažil vybudovat na Žluté řece Chuang-Che hráze proti častým záplavám, které ničily úrodné planiny. Při práci na řece Wu se svými lidmi objevil obrovskou želvu. V té době to pokládali za dobré znamení, neboť lidé věřili, že v želvích krunýřích a v buvolích rozích žijí bohové. Želva byla také považována za znamení dlouhého života a štěstí. Wu objevil na krunýři podivné značky a povolal všechny moudré muže, aby je prozkoumali. Z jejich zkoumání vzešla kniha nejvyšší pravdy I-ťing, feng šuej, čínská astrologie a numerologie. Částečně i díky tomuto objevu se stal Wu Sia prvním čínským císařem. Wu v kresbě na želvím krunýři rozeznal tvar, který připomínal dokonalý magický čtverec. Tento čtverec se nazývá Obraz z řeky neboli Lo Šu. Wu považoval čtverec za poselství Boží, které mu pomůže vládnout v zemi tak, aby byli všichni šťastní a těšili se dlouhému a plodnému životu [7].

Kresba na posvátné želvě tvoří dokonalý magický čtverec o 3 × 3 polích. Součet ve všech řádcích, sloupcích i na obou diagonálách je 15. Znaky na želvím krunýři byly černobílé. Lichá čísla byla zobrazena bíle uvnitř magického čtverce, sudá čísla černě v rozích čtverce. Později byla černá barva přiřazena principu jin a bílá barva principu jang [7].



Obr. 15 - Lo Šu [13]

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Obr. 16 - Číselný přepis Lo Šu

3.2.2 Východ

Magický čtverec Lo Šu se rychle rozšířil po celém světě. Pro tento čtverec se také užívá název Saturn, ten však Číňané nikdy nepoužívali. Pojmenování Saturn pochází z jednoho z velkých center Mezopotámie, z města Harránu. Na tomto území žili Chaldejci, původně semitští kočovníci, později vládnoucí dynastie v novobabylonské říši. Po ovládnutí Mezopotámie Peršany se původní význam slova Chaldejci začal vytrácet a tímto pojmenováním byli označováni astronomové, astrologové, mágové a alchymisté [2].

Chaldejci znali všechny planety viditelné pouhým okem – Merkur, Venuše, Mars, Jupiter, Saturn. V Harránu tyto planety včetně Slunce a Měsíce považovali za božstva a stavěli jim chrámy. Bylo tedy postaveno sedm chrámů, každý zasvěcen jednomu božstvu. V každém chrámu byl trůn, k němuž vedl určitý počet stupňů. Každému z božstva byl také přiřazen jeden kov, ze kterého byla zhotovena jeho socha. Tento systém je popsán v tabulce (Obr. 17) na následující straně [2].

Planeta, které je zasvěcen chrám	Kov, z něhož je podoba božstva	Počet stupňů k trůnu
Saturn	olovo	9
Jupiter	cín	8
Mars	železo	7
Slunce	zlato	6
Venuše	měď	5
Merkur	rtuť	4
Měsíc	stříbro	3

Obr. 17 - Systém I [2]

Každé z planet tedy bylo přiřazeno číslo a kov. V průběhu staletí však došlo k jedné změně. V tabulce (Obr. 17), dnes označované jako systém I, došlo k opačnému přehození pořadí čísel. Saturnu bylo přiděleno číslo 3, Jupiteru číslo 4 atd. Tímto způsobem vznikl systém II, který se hojně používal ve středověku, kdy byly magické čtverce velmi populární. Počet řádků či sloupců odpovídal hodnotě příslušné určité planetě a kovu. Čtverec Lo Šu tak především v Evropě získal název Saturn [2].

Dříve než se magické čtverce objevily v Evropě, byly studovány v arabské literatuře a v Indii. V arabských textech se magické čtverce poprvé vyskytují pravděpodobně ve druhé polovině 10. století v tzv. Traktátech Bratří Čistoty [2].

Indové byli vždy mimořádnými počtáři. Aritmetika v Indii po celou dobu převyšovala geometrii. Je tedy zajímavé, že magické čtverce se v indické matematice vyskytovaly jen zřídka. Zřejmě nejstarším indickým magickým čtvercem je čtverec čtvrtého řádu (Obr. 18), který byl vyřezaný do rámu dveří svatyně Chotá Surang pravděpodobně v 1. polovině 11. století [2].

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Obr. 18 - Magický čtverec vyřezaný do rámu dveří svatyně Chotá Surang [2]

V Indii vznikly i tzv. jantry, které jsou oblíbené až do dnešní doby. V publikaci od Webstera [7] je jantra definována jako zvláštní druh magického čtverce, sestrojeného pro určité konkrétní účely jako talismany nebo pro věštění. Jelikož mají magické čtverce zvláštní vlastnosti, používají se po tisíce let jako amulety pro štěstí či jako talismany. Jantrou je magický čtverec tehdy, pokud při jeho vytvoření použijeme data narození nějakého člověka, protože tím se bude k němu vztahovat. Existují různé typy janter, např. k přivolání lásky, peněz, štěstí, apod.

Dalším typem jsou tzv. astrologické jantry. Ty se používají, pokud je zapotřebí energie všech devíti planet. Především je to tehdy, pokud je v horoskopu narození některá planeta poškozena. Lidé věří, že nošením konkrétní jantry lze tento defekt neutralizovat, nebo alespoň minimalizovat. Řád magického čtverce konkrétní planety udává výše zmíněné schéma II (Saturn – 3, Jupiter – 4, atp.) [7].

3.2.3 Evropa

Evropská věda hojně využívala a čerpala z arabských poznatků. Z tohoto důvodu vděčíme s největší pravděpodobností za znalost magických čtverců v Evropě právě arabským pramenům. Prvním evropským matematikem, který se magickým čtvercům věnoval, byl Luca Pacioli. Kolem roku 1500 vydal práci o magických čtvercích třetího až devátého řádu jako o objektech „rekreační“ matematiky. Samotné čtverce ovšem v práci nebyly uvedeny [2].

Konstrukcemi magických čtverců se z evropských matematiků zabývali Adam Ries (1492–1559) a Michael Stifel (1487–1567). Oba popsali některé originální konstrukce magických čtverců [2].

Magickými čtverci se zabýval i jeden z nejvýznamnějších matematiků 18. století Leonhard Euler (1707–1783). Euler objevil souvislost magických a latinských čtverců. Zjistil, že pokud vhodně sestrojíme magický čtverec lichého řádu, můžeme z něho odvodit dvojici tzv. ortogonálních latinských čtverců. Euler se i často zabýval úlohami rekreační matematiky. Nalezl řešení úlohy, která řeší problém, zda může šachový kůň postupně projít všechna pole na šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou. Pokud zapíšeme Eulerovo řešení tak, že kůň skáče z pole označeného n na pole n + 1 obdržíme následující čtverec [2]:

1	**48**	**31**	**50**	**33**	**16**	**63**	**18**
30	**51**	**46**	**3**	**62**	**19**	**14**	**35**
47	**2**	**49**	**32**	**15**	**34**	**17**	**64**
52	**29**	**4**	**45**	**20**	**61**	**36**	**13**
5	**44**	**25**	**56**	**9**	**40**	**21**	**60**
28	**53**	**8**	**41**	**24**	**57**	**12**	**37**
43	**6**	**55**	**26**	**39**	**10**	**59**	**22**
54	**27**	**42**	**7**	**58**	**23**	**38**	**11**

Obr. 19 - Cesta šachového koně po šachovnici [2]

Tento čtverec je polomagický. Součet řádků a sloupců je stejný, to však neplatí pro součet úhlopříček. Pozoruhodnou zajímavostí je, že Euler řešení úlohy odvodil zpaměti, tedy v době, kdy již byl dávno slepý [2].

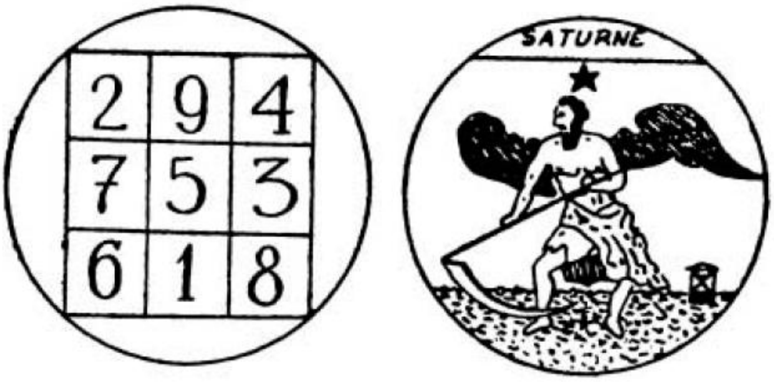
Eulerovou úlohou se později v roce 1862 zabýval šachista Jaenisch. Jeho řešení tvoří opět polomagický čtverec (Obr. 20) vylepšený o jednu vlastnost. Kůň může z pole 64 skočit znovu na pole 1, tj. po ukončení cesty se vrátit na výchozí pole [2].

50	**11**	**24**	**63**	**14**	**37**	**26**	**35**
23	**62**	**51**	**12**	**25**	**34**	**15**	**38**
10	**49**	**64**	**21**	**40**	**13**	**36**	**27**
61	**22**	**9**	**52**	**33**	**28**	**39**	**16**
48	**7**	**60**	**1**	**20**	**41**	**54**	**29**
59	**4**	**45**	**8**	**53**	**32**	**17**	**42**
6	**47**	**2**	**57**	**44**	**19**	**30**	**55**
3	**58**	**5**	**46**	**31**	**56**	**43**	**18**

Obr. 20 - Jaenischovo řešení úlohy o šachovém koni [2]

V Evropě se však také jako po celém světě nevěnovali magickým čtverců pouze na poli matematiky. Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493–1541), známý spíše pod jménem Paracelsus, byl německým lékařem, filosofem, přírodovědcem, alchymistou a astrologem. Patří mezi průkopníky léčení pomocí hornin a minerálů. Napsal dílo Archidoxa magica, ve kterém je popsáno „léčebné“ užití magických čtverců. V práci Paracelsus uvádí návody, jak si zhotovit léčebné pečetě, jejichž nedílnou a podstatnou součástí jsou magické čtverce [2].

Na obrázku 21 je jedna z pečetí, pečeť Saturnova. Tato pečeť musí být zhotovena z čistého olova z Villachu. Na jedné straně do ní musí být vyryt magický čtverec, jehož konstanta je 15. Na straně druhé musí být vyryt obraz planety, v tomto případě muže s kosou, jehož postoj naznačuje kosení trávy. Nad jeho hlavou musí být hvězda a nahoře jeho jméno – Saturnus [2].

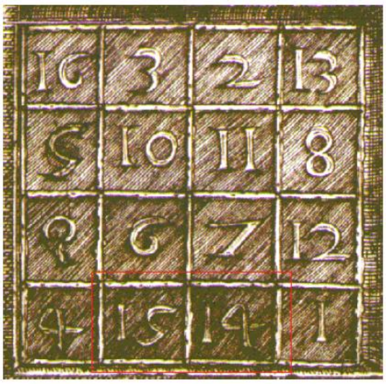


Obr. 21 - Pečeť Saturnova [2]

Magické čtverce se objevily i v umění. Jeden z nejznámějších magických čtverců je čtverec zobrazený na rytině Melencolia I (Obr. 22) německého malíře Albrechta Dürera.

Obr. 22 - Rytina Melencolia I s magickým čtvercem vpravo nahoře [25]

Název díla znamená „zamyšlení". Obraz obsahuje mnoho matematických objektů či symbolů. Dürer se s magickými čtverci setkal s největší pravděpodobností v Itálii, kde dlouhou dobu pobýval. Velmi se zajímal o matematiku a zejména o geometrii. V Itálii se pravděpodobně seznámil s Pacioliho prací, protože čtverec z obrazu je v této práci uveden. Pokud se na magický čtverec podíváme pozorněji, zjistíme, že čísla uprostřed spodního řádku tvoří rok 1514 (viz Obr. 23). V tomto roce zemřela Dürerova matka a pravděpodobně vznikla i tato rytina [2].



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 23 - Magický čtverec z rytiny Melencolia I s přepisem [2]

Trochu pozměněný magický čtverec čtvrtého řádu, odvozený z Dürerova čtverce, najdeme na stěně Gaudího katedrály v Barceloně. Magický čtverec je pozměněný tak, aby součty dávaly číslo 33, tzv. Kristova léta [2].

Obr. 24 - Gaudího katedrála v Barceloně [21]

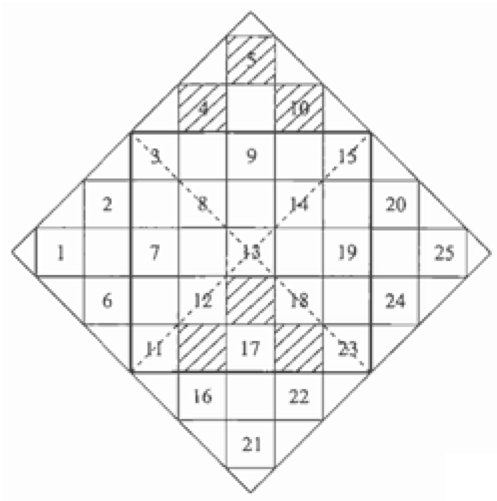
3.3 Metody konstrukce latinského čtverce

Existuje mnoho způsobů, jak sestrojit magický čtverec. Metody se liší podle typu magického čtverce. Lichý magický čtverec je takový, který má na jedné straně lichý počet políček (3 × 3, 5 × 5, 7 × 7, atd.). Sudý magický čtverec je následně takový, který má na jedné straně sudý počet políček (4 × 4, 6 × 6, 8 × 8, atd.). Několik konstrukčních metod popíši v následujících podkapitolách.

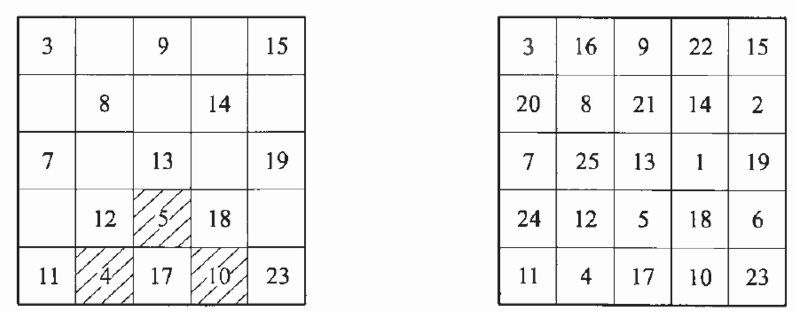
3.3.1 Lichý magický čtverec

Šarounová [6] uvádí sestavení lichého magického čtverce pomocí opsaného čtverce na příkladu magického čtverce 5 × 5 následovně:

1) Čtverci 5 × 5 opíšeme pootočený čtverec.
2) Podle obrázku 25 vepíšeme do pootočeného čtverce čísla 1 až 25.
3) Čísla uvnitř zvýrazněného čtverce 5 × 5 jsou již „na svém místě“
4) Čísla z rohů opsaného čtverce přesuneme na správné místo podle obrázku 26.



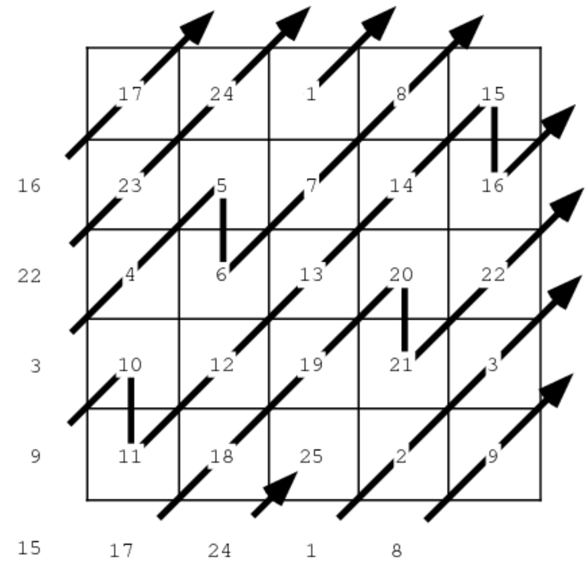
Obr. 25 - Pootočený čtverec opsaný čtverci 5 × 5 ([6], s. 3)



Obr. 26 - Doplnění čísel ([6], s. 3)

Indický způsob sestavení lichého magického čtverce popisuje Šarounová [6] takto:

1) Do středu prvního řádku vepíšeme číslo 1.
2) Dále postupujeme vždy diagonálně vpravo nahoru. Dostaneme-li se mimo čtverec, pak „nad“ prvním řádkem je poslední řádek čtverce a „vpravo“ od posledního sloupce je první sloupec čtverce.
3) Pokud narazíme na již popsané políčko, napíšeme číslo pod číslo, které jsme zapsali jako poslední.
4) Po zapsání čísla do pravého horního rohu pokračujeme políčkem pod ním.

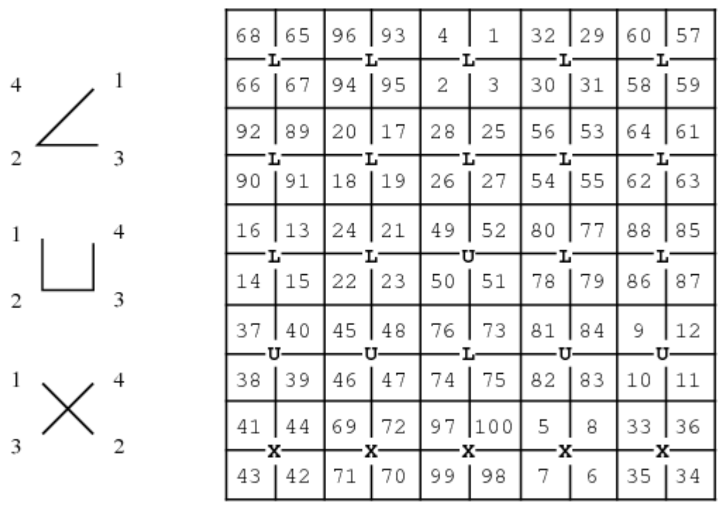


Obr. 27 - Indický způsob sestavení lichého magického čtverce [29]

3.3.2 Sudý magický čtverec

Roskovec [19] uvádí konstrukci magického čtverce řádu n, kdy n je sudé, nedělitelné 4, následovně:

1) Čtverec si rozdělíme na menší čtverečky o straně 2. Podle indického způsobu sestavení lichého magického čtverce očíslujeme čtverečky 1 až n^2.
2) Použijeme tzv. LUX metodu. Čtverečky v prostředním řádku a nad ním označíme písmenem L, čtverečky v řádku pod prostředním U a zbývající X. Nakonec prohodíme označení prostředního čtverečku s tím pod ním.
3) Doplníme čtveřice čísel podle obrázku 28.



Obr. 28 - Znázornění metody LUX [29]

Konstrukci magického čtverce řádu n, kdy n je dělitelné 4, uvádí Roskovec [19] následovně:

1) Očíslujeme všechna pole po řádcích zleva doprava 1 až n^2.
2) Rozdělíme čtverec na menší čtverce o straně 4 a zvýrazníme v nich obě diagonály. Zvýrazněná čísla již leží „ na svém místě“.
3) Nezvýrazněná políčka vyměníme ve středové souměrnosti se středem čtverce.

1	2	3	**4**	**5**	6	7	**8**
9	**10**	**11**	12	13	**14**	**15**	16
17	**18**	**19**	20	21	**22**	**23**	24
25	26	27	**28**	**29**	30	31	**32**
33	34	35	**36**	**37**	38	39	**40**
41	**42**	**43**	44	45	**45**	**47**	48
49	**50**	**51**	52	53	**54**	**55**	56
57	58	59	**60**	**61**	62	63	**64**

1	63	62	**4**	**5**	59	58	**8**
56	**10**	**11**	53	52	**14**	**15**	49
48	**18**	**19**	45	44	**22**	**23**	41
25	39	38	**28**	**29**	35	34	**32**
33	31	30	**36**	**37**	27	26	**40**
24	**42**	**43**	21	20	**45**	**47**	17
16	**50**	**51**	13	12	**54**	**55**	9
57	7	6	**60**	**61**	3	2	**64**

Obr. 29 - Konstrukce magického čtverce řádu n, kdy n je dělitelné 4

Na obrázku 30 je znázorněn první způsob konstrukce magického čtverce 4 × 4 dle Šarounové [6]. Postup je následující:

1) Do prázdného čtverce vepíšeme po řádcích zleva doprava čísla 1 až 16.
2) Pořadí na obou úhlopříčkách obrátíme.
3) Prohodíme dva střední sloupce.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 30 - Konstrukce magického čtverce 4 × 4

Druhý způsob uvádí Webster [7] takto:

1) Do prázdného čtverce vepíšeme po řádcích zleva doprava čísla 1 až 16.
2) Vyjmeme ve vnějších řádcích a sloupcích dvě prostřední čísla.
3) Čísla 2 a 3 prohodíme a dosadíme je do volných polí po číslech 14 a 15.
4) Čísla 14 a 15 prohodíme a dosadíme je do polí, kde původně byla čísla 2 a 3.
5) Obdobně přemístíme dvojice čísel 5, 9 a 8, 12.

3.4 Speciální magické čtverce

Magické čtverce mohou mít zajímavé vlastnosti. Zde uvádím několik příkladů takových čtverců podle Šarounové [6].

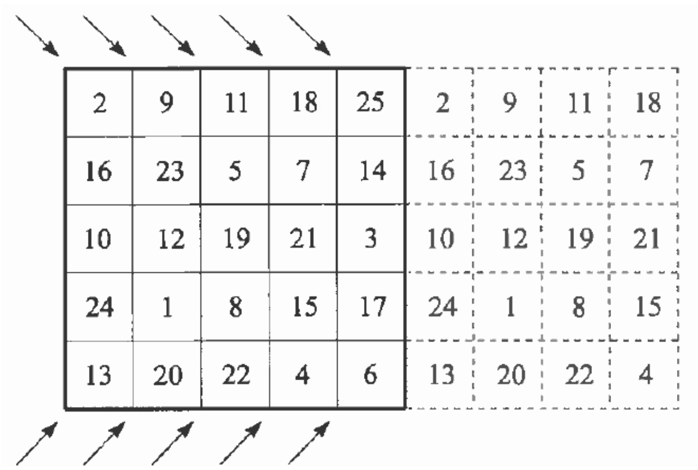
Čtverce obsahující v sobě menší magické čtverce. Tím nejznámějším je Dürerův magický čtverec (Obr. 23), zobrazený na rytině Melencolia I (Obr. 22). Jeho konstanta S_4 je rovna číslu 34. Pokud čtverec rozdělíme na čtyři čtverce 2 × 2, součet čísel v každém z nich je 34. Součet čísel ze čtyř středních čtverečků je také 34. Další příklady těchto magických čtverců jsou zobrazeny na obrázku 31.

43	50	52	57
54	55	45	48
49	44	58	51
56	53	47	46

25	28	39	38
40	37	26	27
34	35	32	29
31	30	33	36

Obr. 31 - Čtverce obsahující v sobě menší magické čtverce [6]

Supermagický čtverec. Konstantu magického čtverce získáme i v „posunutých úhlopříčkách“.



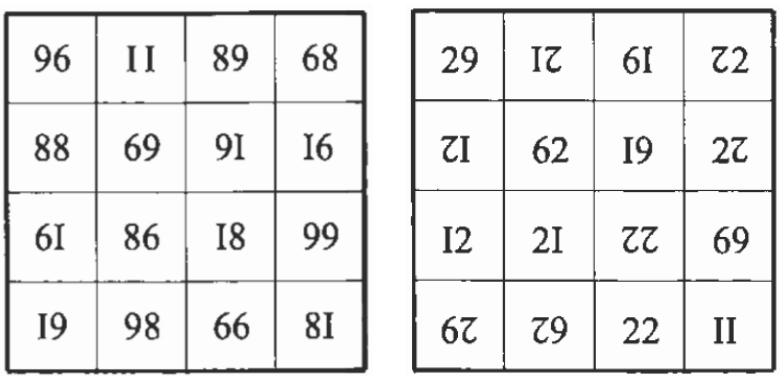
Obr. 32 - Supermagický čtverec ([6], s. 10)

Bimagický čtverec. Příkladem bimagického čtverce je čtverec na obrázku 33. Jeho konstanta je S_8 = 260. Když k němu sestavíme další čtverec tak, že do políček čtverce 8 × 8 zapíšeme místo původních čísel jejich druhé mocniny, vznikne opět magický čtverec. Jeho konstanta bude 11 180.

13	44	63	26	3	38	49	24
57	18	5	46	55	32	11	36
28	51	40	15	22	61	42	1
48	9	30	59	34	7	20	53
54	8	19	33	60	10	29	47
35	31	12	56	45	17	6	58
2	62	41	21	16	52	39	27
23	37	50	4	25	43	64	14

Obr. 33 - Bimagický čtverec [6]

Oboustranné magické čtverce. Tyto čtverce je možné číst i v obrácené poloze a i pak jsou magické. Čísla však musíme zapisovat ve vhodném tvaru, například v pravém čtverci na obrázku 34 je třeba číst obrácené číslo 2 jako 7.



Obr. 34 - Oboustranné magické čtverce ([6], s. 11)

Prvočíselný magický čtverec. Čtverec na obrázku 35 je vyplněn prvními 144 prvočísly, pokud mezi prvočísla pro tentokrát zařadíme i číslo 1.

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

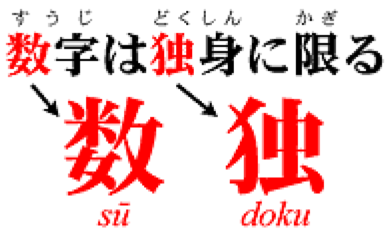
Obr. 35 - Prvočíselný magický čtverec

4 SUDOKU

4.1 Základní informace a pravidla

Každé výsledné postavení populární hry sudoku je speciálním případem latinského čtverce 9 × 9. Pokud čísla na každé diagonále jsou vzájemně různá, jedná se o sudoku, které je zároveň magickým čtvercem 9 × 9.

Slovo sudoku pochází z japonštiny. Jedná se o zkratku věty: *„Suuji wa dokushin ni kagiru“* (Obr. 36), což v překladu do češtiny znamená „číslice musí zůstat samotná“. Slovo „Su“ znamená číslo a „Doku“ jediné. Zajímavostí je, že v samotném Japonsku, kde se sudoku těší velké oblibě, používají pro hru původní anglický název Number Place. Důvodem je, že název sudoku vymyslelo v roce 1984 nakladatelství Nikoli a nechalo si jej v Japonsku patentovat. Ostatní japonští vydavatelé používají anglický název, aby se vyhnuli poplatkům. Poplatky však platí pouze pro Japonsko, a tak zbytek světa používá japonskou zkratku sudoku [5].



Obr. 36 - Původ slova sudoku [8]

Hlavolam Sudoku má tvar čtvercové mřížky, obvykle o rozměrech 9 × 9. Čtverec je rozdělen do devíti bloků o velikosti 3 × 3. Ve výsledném postavení sudoku musí každý blok, každý řádek a každý sloupec obsahovat právě jednu z číslic 1 až 9. Místo čísel 1, 2,…, 9 můžeme také psát písmena či jiné symboly.

4.2 Terminologie

V následujícím výčtu jsou vysvětleny základní pojmy hry sudoku. Za termínem je v závorce uveden anglický výraz.

- pole, buňka (cell, square) – základní čtvereček
- blok (block, box) – malý čtverec, obvykle o rozměrech 3 × 3
- linie (line) – obecný výraz pro řádek či sloupec
- jednotka (unit, virtual line, domain) – obecný výraz pro řádek, sloupec nebo blok
- pás (band) – řada tří bloků vedle sebe nebo pod sebou
- mřížka (grid) – celá herní plocha
- stopy (clues) – předvyplněná čísla v mřížce
- kandidáti (candidates) – pomocná čísla, která se mohou vyskytovat v buňce

4.3 Historie

Již na konci 19. století se ve francouzských novinách objevovaly rébusy obdobné dnešnímu sudoku. V roce 1892 otiskl deník Le Siècle na svých stránkách mřížku s 81 poli. V mřížce byly zvýrazněné bloky a oproti dnešnímu sudoku obsahovala i dvoumístná čísla [3].

UN PROBLÈME PAR JOUR

5129. — CARRÉ MAGIQUE DE 9 A COMPARTIMENTS ÉGAUX

Composé par M. le commandant Coccoz

Compléter le carré ci-dessous en employant les 81 premiers nombres de manière que les neuf carrés composés de neuf nombres donnent chacun, comme total, 369. De plus, chacune des deux grandes diagonales, chaque horizontale et chaque verticale du carré complet devra donner 369.

17	20	5	55	67	79	51	36	39
70	73			42			8	11
45		33	2		26			64
19		16	11		20	63		78
47	32			81			10	22
75		72	13		1	35		50
59			27		15	37		34
6	18			28			77	62
31	43	46	80	56	68	12	24	9

Solution du problème nº 5115

Composé par M. Guillaume Louis R.

Leman + DO = Madelon
Calino + RE = Caroline
Aliéne + MI = Mélanie
Unités + FA = Faustine

Obr. 37 - Rébus v deníku Le Siècle [23]

Roku 1895 se v jiném francouzském deníku, La France, objevila hra, jež už spočívá v doplnění čísel 1 až 9, stejně jako v dnešním sudoku. V mřížce však chybí vyznačení bloků. Tyto hry byly vydávány každý týden i v dalších francouzských médiích, všechna však zanikla během 1. světové války [3].

eut la tête prise et écrasée par les tampons.
La mort a été instantanée.

Léopold Lepers.

DIVERTISSEMENTS QUOTIDIENS

N° 3879 — CARRÉ MAGIQUE DIABOLIQUE
Par M. B. Meyniel

Compléter le carré ci-dessous en employant les neuf premiers nombres chacun neuf fois de manière que les horizontales, les verticales et les deux grandes diagonales donnent toujours à l'addition le même total.

7	8	9	1	2	3	4	5	6
3				4				8
5				9				1
8				3				4
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6				7				2
9				1				5
2				6				7
4	5	6	7	8	9	1	2	3

Ce carré devra être diabolique, c'est-à-dire que le carré restera magique si l'on place une ligne horizontale ou une colonne verticale à la suite de toutes les autres.

N° 3865 — MATHÉMATIQUES
Par M. Adolphe R.

Solution

Le marchand a vendu 27,075 vases; le 95e jour, le dernier, il a vendu 567 vases.

Solutions justes

MM. Améthyste; un chercheur; Paul et Jules Duplant; Albert Labarre; L. Grobet; C. Gerbaulet.

Les solutions et les envois de problèmes inédits doivent être adressés, dans la huitaine, au rédacteur soussigné.

Félix André.

Obr. 38 - Rébus v deníku La France [12]

Hra Sudoku, jak ji známe dnes, se poprvé objevila v roce 1979 v edici Dell Pencil Puzzle and Word Games pod názvem Number Place. Vytvořil ji americký architekt Howard Garns [5].

V dubnu 1984 představilo nakladatelství Nikoli hru v Japonsku pod názvem sudoku. V Japonsku se hra stala ihned velmi populární. Až do dnešní doby vydává mnoho předních japonských novin hlavolam sudoku denně [28].

Do Evropy se sudoku dostalo zejména díky Wayne Gouldovi z Nového Zélandu, který se s touto hrou seznámil v Japonsku. Od té doby pracoval šest let na programu, který generuje úlohy sudoku 9 × 9 s právě jedním řešením. Program funguje tak, že se do mřížky zcela náhodně přidávají čísla z množiny 1, 2,…, 9 tak, aby byla splněna pravidla výsledného postavení sudoku. Když program zjistí, že úloha má právě jedno řešení, přestane přidávat čísla, a zadání úlohy je hotové [5]. Svůj program Gould nabídl zdarma britskému deníku Times. V něm vyšlo první sudoku v listopadu 2004. Následně se přidal The Guardian, The Independent, The Daily Telegraph, německý tisk Die Zeit a další. V roce 2005 se hra sudoku objevila také v americkém tisku New York Post, USA Today a San Francisco Chronicle [28].

V České republice se hlavolam poprvé objevil v červnu 2005 v Lidových novinách, kde od té doby vychází nový hlavolam každý den [16].

V řešení sudoku se koná i mistrovství světa. Vůbec první mistrovství světa v řešení sudoku se konalo 11. 3. 2006 v italském městě Lucca. Zúčastnilo se ho 84 soutěžících z 22 zemí a vítězkou se stala Češka Jana Tylová [15].

4.4 Varianty hry sudoku

Klasické sudoku. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci i vyznačeném čtverci 3 × 3 vyskytlo každé číslo právě jednou.“*

1	2					6		
7				5	3			
			4			7		1
		5		8			1	
	9		6		4		3	
	6			3		8		
9		3			6			
			3	7				9
		8					6	2

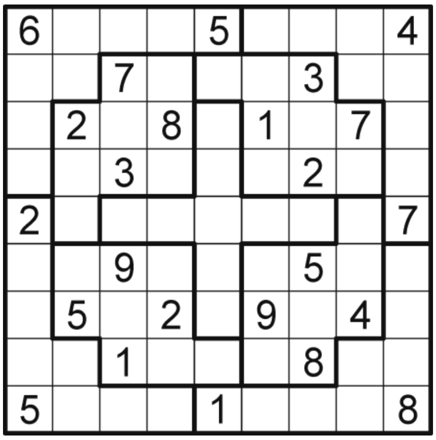
Obr. 39 - Zadání klasického sudoku [11]

Diagonální sudoku. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci, vyznačeném čtverci 3 × 3 i na vyznačených diagonálách každé číslo vyskytlo právě jednou.“*

	4	5				3		
					8			6
8					6			4
	9	7		6				
			2		1			
				5		8	4	
5			9					8
7			6					
		4				6	7	

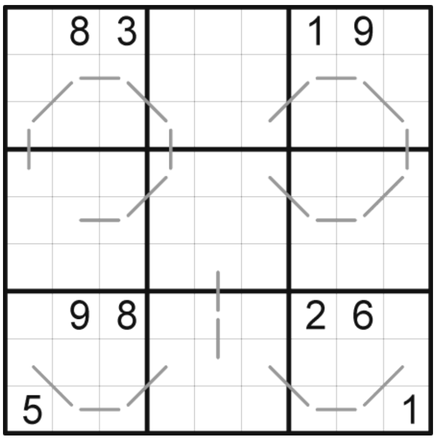
Obr. 40 - Zadání diagonálního sudoku [11]

Nepravidelné sudoku. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se každé číslo v každém řádku, sloupci i ve vyznačených nepravidelných podoblastech o devíti polích vyskytlo právě jednou.“*



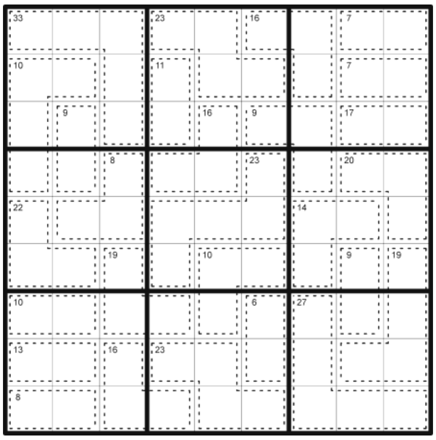
Obr. 41 - Zadání nepravidelného sudoku [11]

Posloupnosti. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci i vyznačeném čtverci 3 x 3 každé číslo vyskytlo právě jednou. Čísla podél šedých linií tvoří monotónní aritmetické posloupnosti, tzn. rozdíl mezi každými dvěma po sobě jdoucími čísly podél jedné čáry je stále stejný a čísla se nesmí opakovat.“*



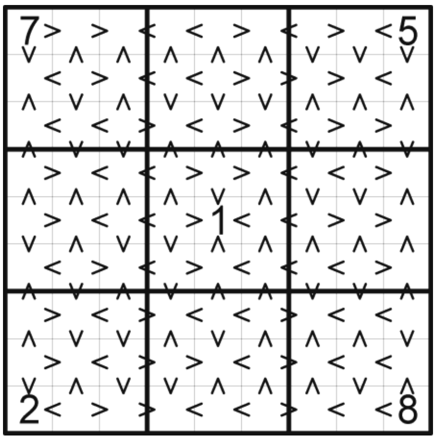
Obr. 42 - Zadání sudoku Posloupnosti [11]

Součtové sudoku (Killer Sudoku). Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci i vyznačeném čtverci 3 × 3 vyskytlo každé číslo právě jednou. Ve vyznačených podoblastech se vyskytují taková čísla, jejichž součtem je hodnota vyznačená v levém horním rohu podoblasti.“*



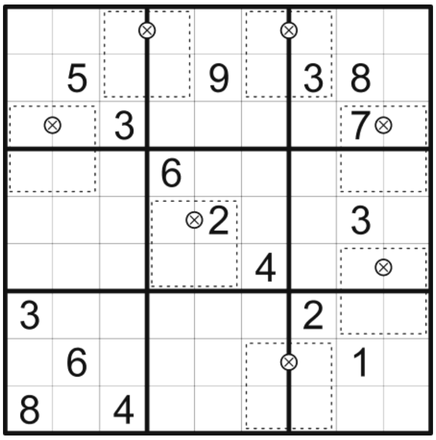
Obr. 43 - Zadání součtového sudoku [11]

Srovnávací sudoku. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci i vyznačeném čtverci 3 × 3 vyskytlo každé číslo právě jednou. Vepsaná čísla musí zároveň splňovat vyznačené nerovnosti.“*



Obr. 44 - Zadání srovnávacího sudoku [11]

Malá násobilka. Zadání zní: *„Vyplňte mřížku čísly 1 až 9 tak, aby se v každém řádku, sloupci i vyznačeném čtverci 3 × 3 vyskytlo každé číslo právě jednou. Ve vyznačených koších jsou výpočty malé násobilky. V horním řádku jsou vždy dvě jednociferná čísla, která se vynásobí, a vyjde dvojciferné číslo na spodním řádku.“*

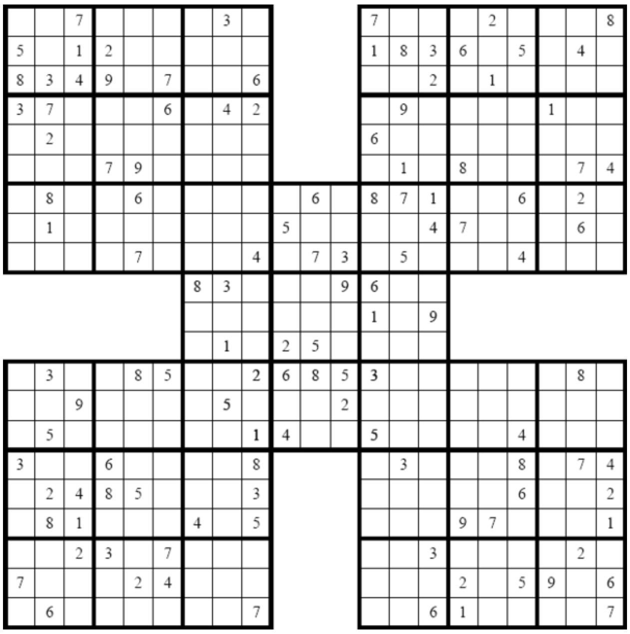


Obr. 45 - Zadání sudoku Malá násobilka [11]

Wordoku (Word sudoku). Jedná se o variantu hry sudoku, kdy jsou do mřížky místo čísel doplňována písmena. Po vyřešení hry se objeví skryté slovo, většinou obsahující devět písmen, a to v řádku nebo sloupci.

Obr. 46 - Zadání Wordoku [24]

Samurai sudoku. Jedná se o rébus obsahující pět klasických her sudoku o rozměrech 9 × 9 se společnými rohovými čtverci.



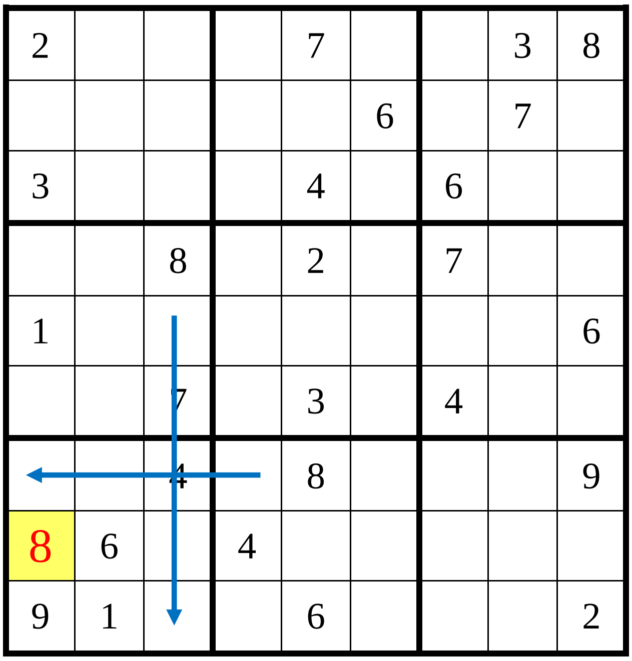
Obr. 47 - Zadání Samurai sudoku [20]

4.5 Strategie řešení sudoku

Existují dva způsoby, jak dělit strategie řešení sudoku, a to podle obtížnosti a podle kategorie, do které patří. Dělení podle obtížnosti je spíše subjektivní, ale nezbytné například při výběru pořadí, ve kterém jsou strategie použity k vyřešení hry. V této podkapitole je popsáno několik základních strategií, které uvádí [22]. Jsou rozděleny do jednotlivých kategorií a zároveň seřazeny podle obtížnosti. Jednotlivé strategie jsou vysvětleny na příkladu, který je doplněn obrázkem. Značení polí sudoku na obrázcích provádím takto – sloupce čísluji zleva od 1 do 9, řádky označuji shora písmeny ve sledu A, B, C, D, E, F, G, H a J.

4.5.1 Naked Single

Poslední zbývající pole v bloku. Nejvhodnějším způsobem je začít s blokem, ve kterém je vyplněno nejvíce polí. V našem případě (viz obr. 48) se jedná o blok číslo 7, v němž jsou vyplněna čtyři pole. Pokud budu chtít doplnit číslo 8, vidím, že 8 v D3 zabírá celý sloupec a zakazuje číslo 8 v polích H3 a J3. Podobně 8 v G5 zabírá celý řádek a zakazuje číslo 8 v polích G1 a G2. Poslední zbývající pole pro číslo 8 v bloku 7 je pole H1.



Obr. 48 - Poslední zbývající pole v bloku [22]

Poslední zbývající pole v řádku (nebo sloupci). Ve hře na obrázku 49 chceme doplnit číslo 4 do prvního řádku. Číslo 4 v G3 a F7 brání vepsání 4 do pole A3 a A7. Zároveň 4 v bloku číslo 2 nedovoluje umístění čísla 4 do polí A4 a A6. Z tohoto důvodu jediná možnost doplnění čísla 4 do prvního řádku je do pole A2.

2	4			7			3	8
					6		7	
3				4		6		
		8		2		7		
1								6
		7		3		4		
		4		8				9
8	6		4					
9	1			6				2

Obr. 49 - Poslední zbývající pole v řádku (nebo sloupci) [22]

Poslední možné číslo. Do mřížky na obrázku 50 můžeme doplnit číslo 5 do pole B1, protože všechna ostatní čísla od 1 do 9, kromě 5 se vyskytují ve stejném řádku, sloupci i bloku.

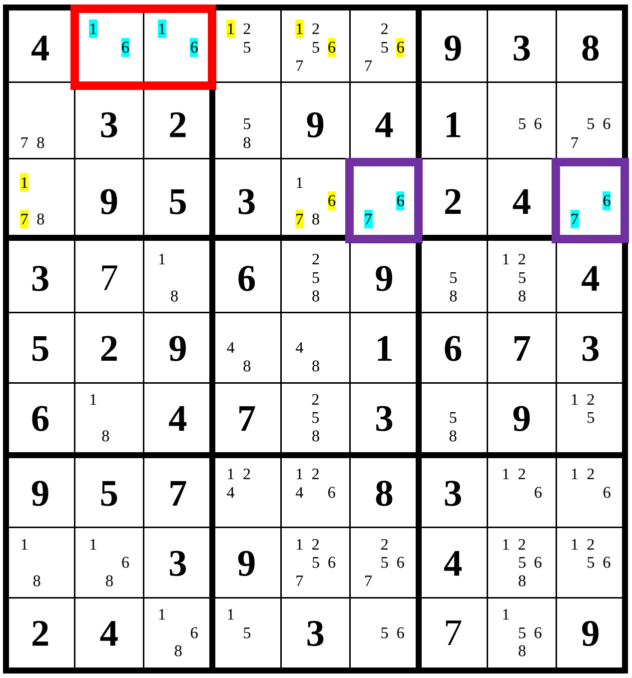
2	4	6		7			3	8
5			3		6		7	4
3	7			4		6		
		8		2		7		
1								6
		7		3		4		
		4		8			6	9
8	6		4					7
9	1			6			4	2

Obr. 50 - Poslední možné číslo [22]

4.5.2 Naked Candidates

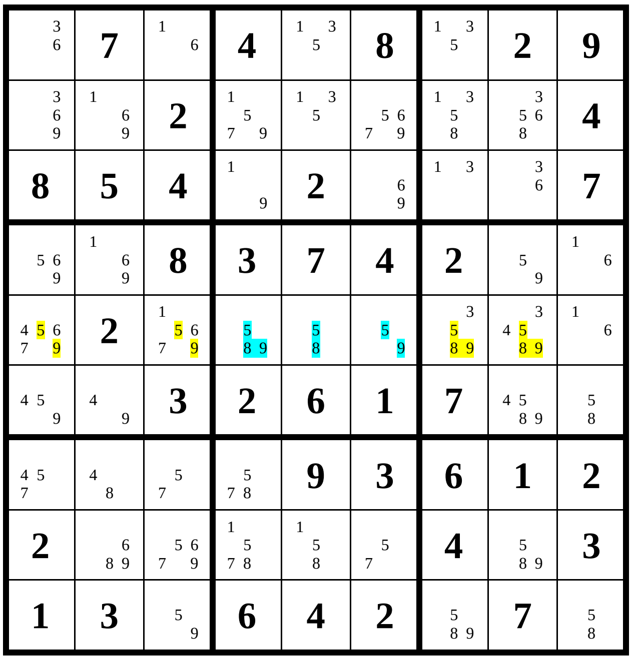
Naked Pairs. Na obrázku 51 jsou vyznačeny dva příklady Naked Pairs. Obě červeně zvýrazněné buňky A2 a A3 v řádku A obsahují čísla 1 a 6. Nevíme, v jaké z těchto dvou buněk bude číslo 1 a 6, víme však, že tato čísla nebudou v žádných jiných buňkách v řádku A. Buňky A2 a A3 leží v bloku 1, a proto číslo 1 nemůže být v buňce C1.

Dalším příkladem jsou kandidáti 6 a 7 v buňkách C6 a C9. Při vyloučení těchto kandidátů z ostatních buněk v řádku C a zkombinováním s prvním příkladem Naked Pairs zjistíme, že v buňce C1 může být pouze číslo 8.



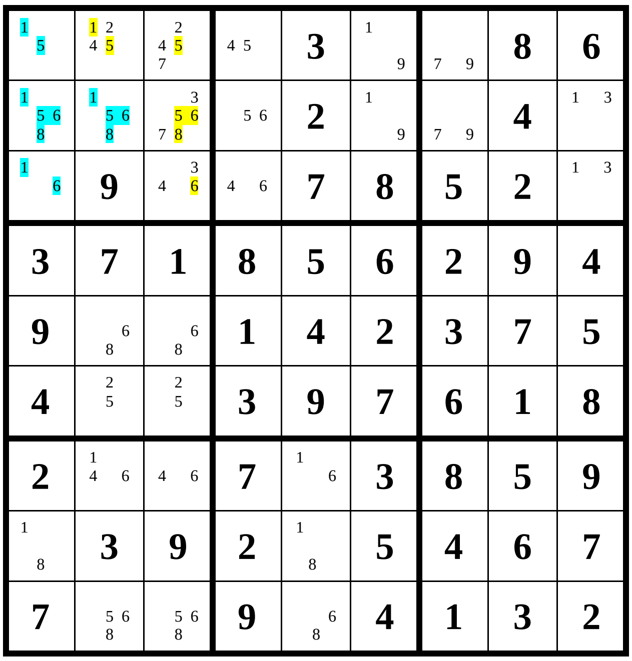
Obr. 51 - Naked Pairs [22]

Naked Triples. V řádku E na obrázku 52 v bloku 5 obsahují buňky E4, E5 a E6 dohromady čísla 5, 8 a 9. To znamená, že tato čísla budou umístěna právě v těchto třech buňkách, nevíme však, které číslo bude v které buňce. Kandidáty 5, 8 a 9 tedy můžeme vyloučit z ostatních buněk v řádku E.



Obr. 52 - Naked Triples [22]

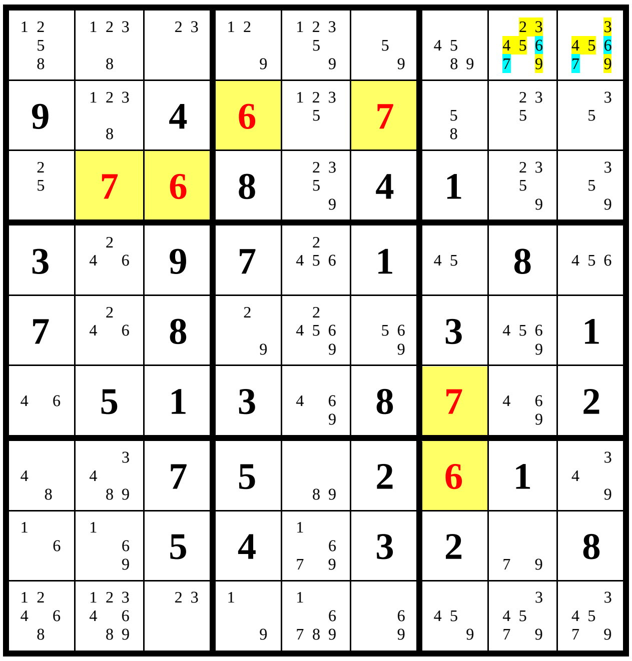
Naked Quads. Strategie Naked Quads není tak často používaná jako ostatní starategie. Její využití můžeme vidět na obrázku 53. V bloku 1 obsahují buňky A1, B1, B2 a C1 dohromady čísla 1, 5, 6, 8, tudíž tato čísla budou rozdělena mezi tyto čtyři buňky. Je tedy jasné, že tato čísla nemohou být v jiných buňkách v témže bloku.



Obr. 53 - Naked Quads [22]

4.5.3 Hidden Candidates

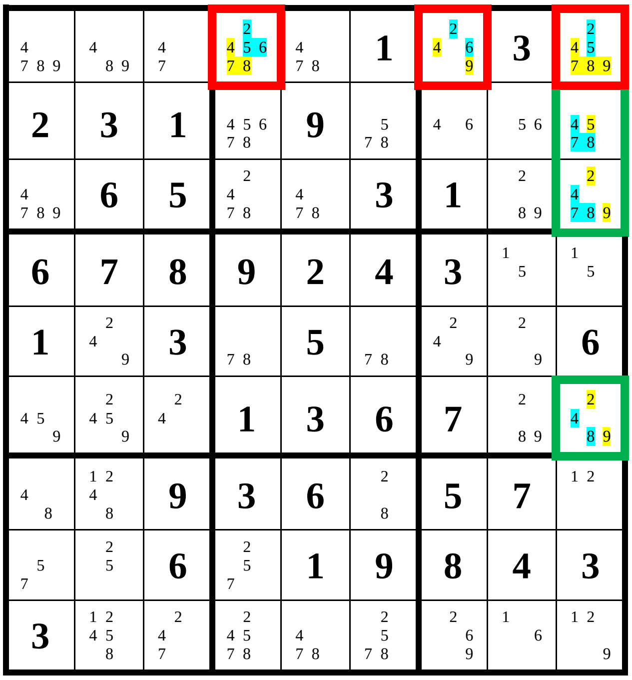
Hidden Pairs. Při pohledu na mřížku na obrázku 54 vidíme, že v prvních dvou blocích se vyskytují čísla 6 a 7. Stejná čísla se vyskytují i v sloupci 7. Čísla 6 a 7 mohou tedy být v bloku 3 pouze v buňkách A8 a A9, z tohoto důvodu můžeme z těchto buněk všechny ostatní kandidáty vyloučit. Dále můžeme postupovat podle strategie Naked Pairs.



Obr. 54 - Hidden Pairs [22]

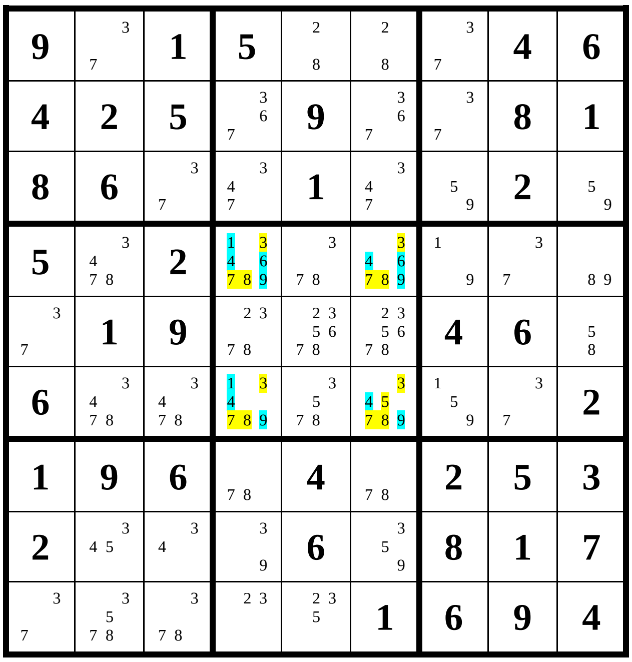
Hidden Triples. V mřížce na obrázku 55 jsou vyznačené dvě ukázky Hidden Triples. První, vyznačená červeně, se nachází v řádku A. Buňky A4, A7 a A9 jsou poslední zbývající buňky v řádku, které mohou obsahovat čísla 2, 5 a 6. Další kandidáty z těchto buněk můžeme proto odstranit.

Když jsme odstranili kandidáty z červeně označených buněk, vznikne nám další Hidden Triple ve sloupci 9. Buňky B9, C9 a F9 budou obsahovat čísla 4, 7 a 8, ostatní kandidáty můžeme opět odstranit.



Obr. 55 - Hidden Triples [22]

Hidden Quads. V příkladu na obrázku 56 lze Hidden Quad najít v bloku 5. Jedná se o čísla 1, 4, 6 a 9, která můžeme dosadit pouze do buněk D4, D6, F4 a F6. Ostatní kandidáty můžeme opět odstranit.



Obr. 56 - Hidden Quads [22]

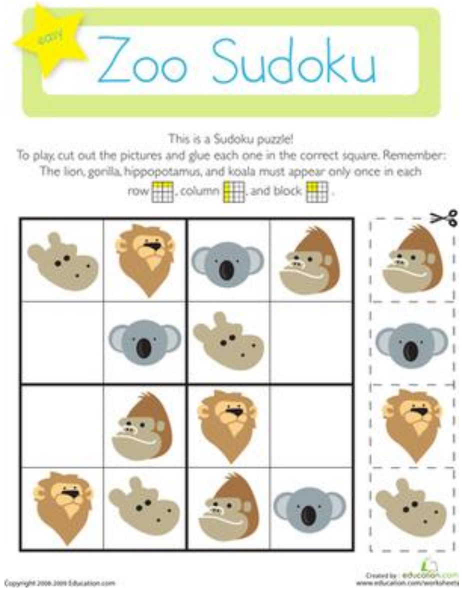
4.6 Využití hry sudoku ve výuce matematiky

Hlavolam sudoku se stal na počátku tohoto tisíciletí obrovským hitem po celém světě. Uchvátil všechny věkové kategorie, od nejmladších po nejstarší. Stal se součástí většiny tisku a v mnoha vychází denně až dodnes. Po celém světě jsou vydávány publikace s touto hrou a jejími variantami.

Hlavolam se stal tak oblíbeným, že se dostal dokonce i do škol. Není také divu, sudoku přispívá k budování kritického myšlení žáka. Při eliminaci čísel studenti používají logické myšlení a je také dokázáno, že luštění sudoku trénuje paměť. Mnoho škol proto v České republice pořádá soutěže v řešení těchto hlavolamů. Některé školy mají dokonce i svůj klub, kde žáci řeší sudoku v časovém limitu. Existují i mezinárodní soutěže, v nichž žáci mohou otestovat svoje schopnosti s žáky z ostatních zemí.

Popularita sudoku čím dál tím více roste. Jedním z důkazů je, že hra sudoku se objevila i v učebnicích matematiky. Například brněnští učitelé vytvořili sadu učebnic matematiky pro druhý stupeň základních škol a víceletá gymnázia, kde je výklad látky kombinovaný s různými hrami, jež mají žákům učení zpříjemnit. Učebnice samozřejmě obsahují i sudoku [27].

Kromě učebnic můžeme najít na internetu mnoho pracovních listů s hrou sudoku. Jejich úkolem je zpestřit žákům hodiny matematiky. Pracovní listy jsou tvořeny s ohledem na jejich věk. Ty pro nejmenší, z mateřských škol nebo první třídy, jsou vytvořeny tak, aby děti hned zaujaly. Obsahují sudoku o menších rozměrech oproti klasickému sudoku, nejčastěji 4×4. Aby bylo sudoku pro děti ještě více atraktivní, doplňují se místo čísel do mřížky obrázky týkající se nějakého tématu. Takovými tématy jsou např. zvířata, sport, školní pomůcky nebo svátky – Halloween, Vánoce, atd. Příklady těchto pracovních listů můžeme vidět na obrázku 56. Pracovní listy pro děti ve věku 8–9 let obsahují sudoku o rozměrech 6×6, děti od desíti let pak řeší klasické sudoku o rozměrech 9×9 [17].



Obr. 57 - Pracovní listy sudoku pro nejmenší [17]

5 ZÁVĚR

Cílem práce bylo poskytnout čtenáři základní informace o latinských a magických čtvercích, včetně pohledu do historie, a přiblížit důvody, proč jimi byli lidé odedávna fascinováni. V práci je uveden jejich historický vývoj od jejich nejstarších výskytů až do dnešní doby. Na něm si můžeme povšimnout využití latinských a magických čtverců v různých odvětvích, ať už vědeckých či nevědeckých. Lidé odedávna díky jejich zvláštním vlastnostem věřili, že se v nich ukrývají magické síly. Nejdříve byly používány i méně vzdělanými lidmi na výrobu různých talismanů a amuletů, nebo na věštění. Ve středověku je lidé vyrývali do trámů staveb jako ochranu před nemocemi. Postupem času se začalo upouštět od nahlížení lidí na čtverce jako na magické objekty. Významnou zásluhu na tom má švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler, který zkoumal latinské a magické čtverce na poli matematiky. S latinskými a magickými čtverci se i dnes setkáváme velmi často a to v podobě populární hry sudoku.

V další části práce bylo mým cílem seznámit čtenáře s hlavolamem zvaným sudoku, který je v dnešní době velmi oblíbený. Každý den vychází po celém světě množství publikací obsahujících nejrůznější varianty tohoto hlavolamu. Několik takových variant jsem uvedla i v této práci. Každá z nich je ještě doplněna ukázkou. Dále jsou uvedeny základní strategie řešení této hry rozdělené do jednotlivých kategorií a seřazené podle obtížnosti. Jednotlivé strategie jsou vysvětlené na příkladu doplněným obrázkem pro lepší pochopení. Hra sudoku je vřele doporučována i didaktiky matematiky, protože rozvíjí logické myšlení. V závěru práce je uvedeno, jak je tato hra zařazena do aktivit ve školách, ať už v podobě soutěží a klubů, nebo ve výuce matematiky.

Snad každý z nás se již někdy setkal s hrou sudoku. Mnoho lidí si pravidelně kupuje publikace s tímto hlavolamem, ale jen málokdo zná jeho původ. Čtenáři této bakalářské práce je tato otázka již zodpovězena.

6 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BOSÁK, Juraj. *Latinské štvorce.* Praha: Mladá fronta, 1976. Škola mladých matematiků, sv. 38.

[2] FUCHS, Eduard. Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti. In: TROJÁNEK, Aleš, NOVOTNÝ, J. a Dag HRUBÝ (Eds). *Matematika, fyzika a vzdělávání: sborník z XI. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky*. Sv. 11. Brno: VUTIUM, 2004, s. 29-63. Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF a Vysoké učení technické v Brně. ISBN 80-214-2601-2.

[3] JUSSIEN, Narendra. *A to Z of Sudoku*. London: ISTE, 2007. ISBN 978-1-84704-000-8.

[4] KATRNOŠKA, František. Latinské čtverce a genetický kód. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Praha: JČMF, 2007, 52(3), 177-187. ISSN 0032-2423.

[5] KATRNOŠKA, František, KŘÍŽEK, Michal a Lawrence SOMER. Magické čtverce a sudoku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Praha: JČMF, 2008, 53(2), 113-124. ISSN 0032-2423.

[6] ŠAROUNOVÁ, Alena. *Magické čtverce a další číselná schémata: alfabetník 2*. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-315-1.

[7] WEBSTER, Richard. *Numerologická magie: využijte číselné čtverce k ochraně, předpovídání budoucnosti a v lásce*. Praha: Železný, 2001. Knížky dostupné každému. ISBN 80-237-3647-7.

Internetové zdroje:

[8] מה מקור השם סודוקו?. *(Izraelské sudoku)* [online]. © 2005-2009 [cit. 2017-03-19]. Dostupné z: http://www.sudoku-online.co.il

[9] ANDERSEN, Lars Døvling. Chapter on The history of latin squares. FAJSTRUP, Lisbeth. *R. 2003/22: Dipaths and dihomotopies in a cubical complex* [online]. Aalborg University: Department of Mathematical Sciences, 2007 [cit. 2017-02-28]. ISSN 1601–7811. Dostupné z: http://vbn.aau.dk/files/13649565/R-2007-32.pdf

[10] Combinatorics and Probabilities: 1152. MICHON, Gerard P. *Final Answers to Scientific Questions* [online]. Los Angeles, 2002 [cit. 2017-03-02]. Dostupné z: http://www.numericana.com/answer/counting.htm

[11] Databáze sudoku. *Český svaz hádankářů a křížovkářů* [online]. Praha: ČSHAK, © 2011-2017 [cit. 2017-03-22]. Dostupné z: http://www.cshak.cz/databaze-sudoku

[12] Etymology of the word Sudoku. In: *English dictionary* [online]. © 2017 [cit. 2017-03-20]. Dostupné z: http://englishdictionary.education/en/sudoku

[13] File: Lo Shu 3x3 magic square.svg. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2001-2017 [cit. 2017-03-09]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lo_Shu_3x3_magic_square.svg

[14] Latin square. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2001-2017 [cit. 2017-04-23]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Latin_square

[15] LUCCA. První šampionát v Sudoku má svou vítězku. Češku. In: *Lidovky.cz* [online]. Praha: MAFRA, 2006 [cit. 2017-03-23]. Dostupné z: http://relax. lidovky.cz/prvni-sampionat-v-sudoku-ma-svou-vitezku-cesku-fru- /zajimavosti.aspx?c=A060313_082836_ln_volby_svo

[16] Před 10 lety sudoku dorazilo do Česka. Nejdříve vyšlo v Lidových novinách. In: *Lidovky.cz* [online]. Praha: MAFRA, 2015 [cit. 2017-03-23]. Dostupné z: http://byznys.lidovky.cz/pred-10-lety-sudoku-dorazilo-do-ceska-nejdrive-vyslo-v-lidovych-novinach-1nr-/media.aspx?c=A150619_132459_ln-media_ELE

[17] Puzzle & Sudoku Resources. *Help Your Kids Excel in Math and Reading: Complete Pre-K through 5th Grade Learning Program* [online]. San Mateo: © 2006 - 2017 [cit. 2017-04-03]. Dostupné z: https://www.education.com/ resources/puzzles-and-soduku/

[18] Ramon Llull. *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [online]. Stanford: Stanford University, 2017 [cit. 2017-03-06]. Center for the Study of Language and Information. Dostupné z: https://plato.stanford.edu/entries/llull/

[19] ROSKOVEC, Tomáš. Magické čtverce. *Matematický korespondenční seminář* [online]. Praha: KAM MFF UK, 2009, 28, 41-45 [cit. 2017-03-15]. Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf

[20] Samurai sudokus. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation, 2001-2017 [cit. 2017-03-23]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Samurai_sudokus?uselang=cs

[21] Spain Gaudi Magic Square. *Hat.net: Aftersleep travel log* [online]. © 1994-2014 [cit. 2017-03-13]. Dostupné z: http://www.hat.net/album/europe/spain/detail 004.htm

[22] Strategy Families. In: *SudokuWiki: Strategies for Number Puzzles of all kinds* [online]. Article created on 12-April-2008, page last modified on 30-March-2014 [cit. 2017-04-01]. Dostupné z: http://www.sudokuwiki.org/Strategy_Families

[23] Sudoku's French ancestors. *Multimagic squares site* [online]. 2002-2017 [cit. 2017-03-20]. Dostupné z: http://www.multimagie.com/English/Sudoku Ancestors.htm

[24] Theme and Variations. *Sudoku Dragon* [online]. © 2005-2017 [cit. 2017-03-23]. Dostupné z: http://www.sudokudragon.com/sudokuvariants.htm

[25] There’s No Melancholy in Melencolia – One Secret of Greatest Art Fraud in Art History. In: *The Hidden Secrets in Albrecht Durer's Art and Life* [online]. 2013 [cit. 2017-03-12]. Dostupné z: http://www.albrechtdurerblog.com/theres-no-melancholy-in-melencolia-one-secret-of-greatest-art-fraud-in-art-history/

[26] *Uk.pinterest.com* [online]. [cit. 2017-03-06]. Dostupné z: https://uk.pinterest.com/pin/471189179739420623/

[27] VAISOVÁ, Michaela. Brněnští učitelé vytvořili učebnice matematiky, které zpestřují sudoku [online]. *MuniMedia.cz*. Brno: FSS MU, 2016 [cit. 2017-04-03]. Katedra mediálních studií a žurnalistiky. Dostupné z: http://www.munimedia.cz/prispevek/brnensti-ucitele-vytvorili-ucebnice-matematiky-ktere-zpestruji-sudoku-10398/

[28] VLASÁK, Emil. Do nitra sudoku 1. *Šachový software* [online]. Ústí nad Labem: Vlasák [cit. 2017-03-18]. Dostupné z: http://www.vlasak.biz/sudokupdf.pdf

[29] WEISSTEIN, Eric. Magic Square. *Wolfram Mathworld: the web’s most extensive mathematics resource* [online]. © 1999-2017 [cit. 2017-03-15]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html

7 SEZNAM OBRÁZKŮ