Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

VÝZNAMNÉ BODY V TROJÚHELNÍKU

Vypracovala: Červenková Kateřina
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2017

Poděkování

Chtěla bych poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který byl vedoucím mé bakalářské práce. Děkuji mu především za jeho cenné rady a ochotu při spolupráci.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích …………………… …..…………………...………

Obsah

Anotace:

Bakalářská práce Významné body v trojúhelníku shrnuje základní body trojúhelníku a jejich vlastnosti. O těchto bodech se žáci učí již na základních a středních školách. V trojúhelníkuse nachází mnohem více zajímavých bodů, které nejsou součástí učiva ani na vysokých školách. U vybraných bodů se snažím zkoumat jejich vlastnosti a souvislosti mezi nimi. Mezi tyto významné body a vztahy v trojúhelníku patří například Fermatův bod, kružnice devíti bodů, Eulerova přímka, nebo Napoleonův trojúhelník. Cílem této práce je seznámení čtenáře s těmito body trojúhelníku a jejich vlastnostmi. U většiny vlastností jsou popsány jejich důkazy. Součástí jsou také obrázky vytvořené v geometrickém programu GeoGebra, které pomáhají čtenáři porozumět dané problematice.

Annotation:

The bachelor thesis Significant points in a triangle summarizes the basic points of a triangle and their properties. Students learn about these points at elementary and high schools. There are lot of interesting points in a triangle which are not part of the curriculum at the university. I try to examine the properties of selected points and connections among them, for example Fermat point, Nine-point circle, Euler line or Napoleon triangle. The aim of this bachelor thesis is to make readers acquainted with these selected points and prove some of their properties. Pictures in the thesis are created in a geometrical program called GeoGebra. These pictures can help the reader to understand this problem.

Úvod

S pojmem trojúhelník jsme se všichni setkali již na základní škole, kde jsme se naučili jeho základní body a vlastnosti. Zjistili jsme, co jsou vrcholy trojúhelníku a středy stran a dozvěděli jsme se, jak sestrojit osy stran, výšky a těžnice nebo kružnice opsané a vepsané.

Na střední škole jsme si rozšířili vědomosti například o pojem střední příčky a další vztahy mezi body trojúhelníku.

V prvním ročníku vysoké školy jsme se dozvěděli další zajímavosti o již známých bodech, ale také jsme se naučili mnoho dalších bodů a vztahů mezi nimi. Mezi ty nejzajímavější pro mě patří Fermatův bod, pro který je součet vzdáleností od vrcholů minimální; kružnice devíti bodů, která spojuje středy stran, paty výšek a středy spojnic vrcholů s ortocentrem, nebo Eulerova přímka, na níž leží těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané.

Ráda bych ve své práci popsala významné body trojúhelníku, které bychom měli všichni znát. Dále bych chtěla čtenáře seznámit s body a vztahy mezi nimi, o kterých jsme se ve škole neučili. Podle mě stojí za zmínku například Švrčkův bod, Simsonova přímka nebo Nagelův bod.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první z nich si uvedeme definice trojúhelníku a Cevovu větu, pomocí které budeme dokazovat platnost většiny tvrzení. Ve druhé kapitole se budeme věnovat bodům a pojmům, které známe již ze základní školy. Zopakujeme si, co je střední příčka a s ní související příčkový trojúhelník. Dále se zaměříme na těžiště a ortocentrum trojúhelníku, nebo středy kružnic v trojúhelníku. Uvedeme si zde také vlastnosti, o kterých jsme se neučili a bylo by dobré je znát. V závěrečné třetí kapitole si představíme vztahy a body, které mnohdy nejsou součástí učiva ani na vysokých školách. Povíme si o kružnici devíti bodů, Fermatově bodu, Napoleonově trojúhelníku,nebo Simsonově přímce a dalších zajímavých bodech.

Jednotlivé pojmy jsou vysvětlovány na základě znalostí, které bychom měli znát již ze střední školy z hodin geometrie. U každého tvrzení jsou popsány důkazy, některé z nich jsou méně náročné a měly by být srozumitelné i pro žáky druhého stupně základních škol.

Inspirací k výběru tohoto tématu mi byly předměty „Planimetrie“ a „Výpočetní technika pro matematiky 1“. V těchto předmětech jsme početně a s pomocí programu GeoGebra dokazovali platnost vět, využívali jsme například podobnosti trojúhelníku nebo stejnolehlosti. V předmětu „Výpočetní technika pro matematiky 1“ jsme měli za úkol napsat seminární práci, ve které jsme dokazovali vybraná tvrzení pomocí verifikace a klasického důkazu. Většinu tvrzení jsem slyšela poprvé a jejich studování na stránkách Alexandra Bogomolnyho [1] pro mě bylo velmi poučné.

Základním zdrojem pro výběr bodů mi byla Encyclopedia of triangle centers [4] založená a spravovaná profesorem matematiky na University of Evansville Carlem Kimberlingem. Důkazy většiny vět jsem čerpala z již zmíněné stránky A. Bogomolnyho.

Mou snahou bylo napsat práci tak, aby byla srozumitelná nejen pro odborníky v oboru matematiky, ale také pro laiky v této oblasti. Důležitou součástí práce jsou obrázky, které jsou vytvořeny v geometrickém programu GeoGebra.

1 Definice trojúhelníku

Každý má jistě určitou představu o tom, co je trojúhelník a jak vypadá. Ale lze jej definovat mnoha způsoby, proto si zde uvedeme několik definic.

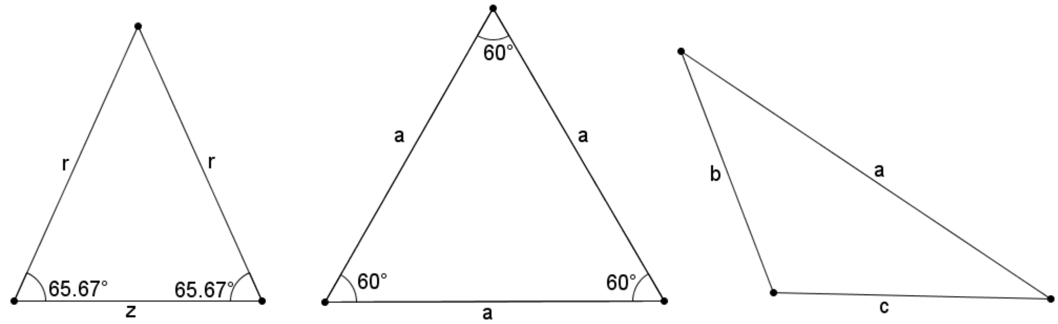
„*Trojúhelník* ABC *je průnik polorovin* ABC, BCA, CAB*, přitom body* A, B, C *jsou různé a neleží v jedné přímce*“ [9, str. 23].

„*Jsou-li dány v rovině tři nekolineární body* A, B, C*, potom společná část polorovin* ABC, BCA *a* CAB *se nazývá trojúhelník* ABC“ [5, str. 68].

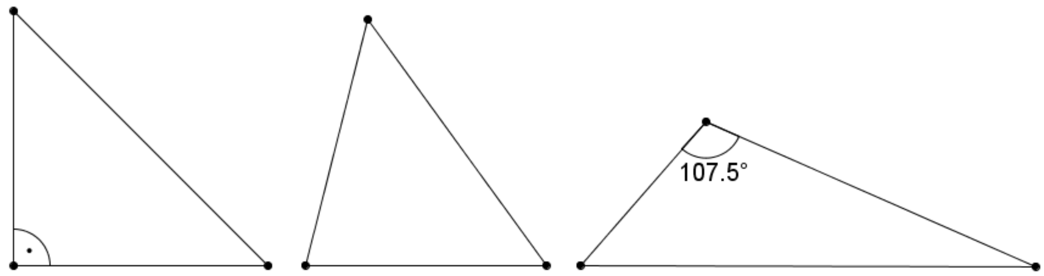
„*Mějme dány tři různé body* A, B, C*, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník* ABC *je průnik polorovin* ABC, BCA, CAB*, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách*“ [8, s. 424].

„*Trojúhelník* ABC *lze též definovat jako množinu všech úseček* AX*, kde* X *je libovolný bod úsečky* BC“ [8, s. 425].

Trojúhelníky rozdělujeme podle délek stran a velikosti úhlů. Podle délek stran klasifikujeme trojúhelníky na rovnostranné, rovnoramenné a obecné. Podle velikostí úhlů dělíme trojúhelníky na ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé. Na první pohled jsou tyto trojúhelníky rozdílné, ale mají mnoho společných vlastností [6].



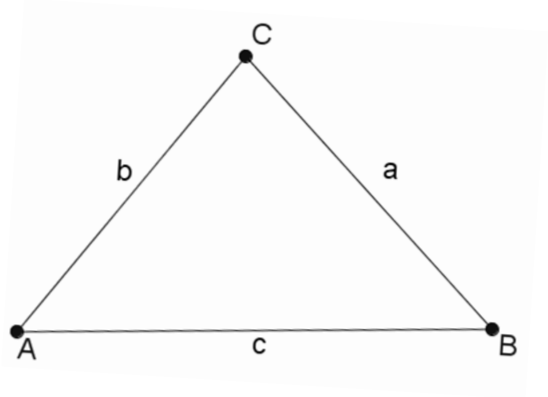
Obrázek 1 - Trojúhelníky rozdělené podle délek stran: rovnoramenný, rovnostranný, obecný



Obrázek 2 - Trojúhelníky rozdělené podle velikosti úhlů: pravoúhlý, ostroúhlý, tupoúhlý

Tři body, které neleží v přímce, určují trojúhelník. Vrcholy trojúhelníku se značí velkými písmeny, obvykle A, B, C. Úsečky spojující jednotlivé vrcholy se nazývají strany trojúhelníku a značí se malými písmeny – a, b, c. Úsečka BC odpovídá straně a, úsečka AC straně b a úsečka AB straně c.

Můžeme tedy konstatovat, že bod A leží naproti straně a, bod B naproti straně b a bod C naproti straně c.

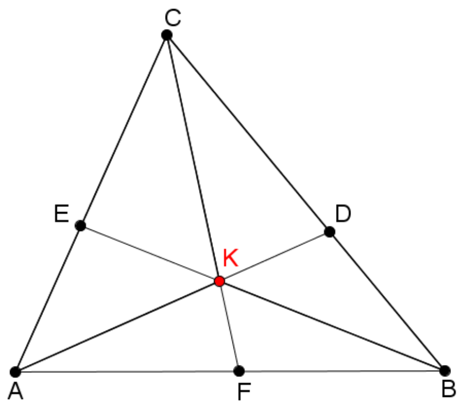


Obrázek 3 - Trojúhelník

1.1 Cevova věta [10]

Je dán trojúhelník ABC. Body D, E a F jsou po řadě vnitřní body stran BC, AC, AB. Přímky AD, BE a CF procházejí jedním bodem, právě když platí

$$\frac{|AF|\,|BD|\,|CE|}{|BF|\,|CD|\,|AE|} = 1.$$



Obrázek 4 - Cevova věta

Důkaz: [1]

Cevova věta je ve tvaru ekvivalence, proto důkaz rozdělíme do dvou částí. Předpokládejme nejprve, že přímky CF, AD, BE se protínají v jednom bodě. Poměr $\frac{|AF|}{|BF|}$ můžeme snadno vyjádřit jako poměr obsahů trojúhelníků ACF a BCF, protože tyto trojúhelníky mají shodnou výšku z vrcholu C. Tento poměr můžeme vyjádřit také jako poměr obsahů trojúhelníků AKF a BKF, protože mají shodnou výšku z vrcholu K. Víme tedy, že

(I) $$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{S_{ACF}}{S_{BCF}} \rightarrow |AF| \cdot S_{BCF} = |BF| \cdot S_{ACF}$$

(II) $$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{S_{AKF}}{S_{BKF}} \rightarrow |AF| \cdot S_{BKF} = |BF| \cdot S_{AKF}$$

Po odečtení těchto rovností dostaneme vztah

$$|AF| \cdot (S_{BCF} - S_{BKF}) = |BF| \cdot (S_{ACF} - S_{AKF}).$$

Výrazy v závorkách nejsou nic jiného, než obsahy trojúhelníků AKC a BKC. Platí proto

$$|AF| \cdot S_{BKC} = |BF| \cdot S_{AKC} \rightarrow \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}.$$

Cyklickou záměnou získám zbylé dva vztahy

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{S_{BKA}}{S_{CKA}}, \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{S_{CKB}}{S_{AKB}}.$$

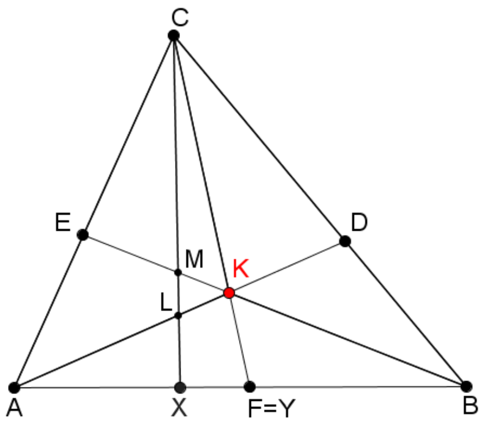
Vynásobením těchto tří rovností získáváme:

$$\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}} \cdot \frac{S_{BKA}}{S_{CKA}} \cdot \frac{S_{CKB}}{S_{AKB}} = 1,$$

čímž je první část ekvivalence dokázána.

Druhý směr implikace dokážeme sporem. Uvažujme, že místo bodu F zavedeme bod X takový, že přímky CX, AD, BE se neprotínají v jednom bodě. Protínají se tedy ve třech různých bodech. Snažíme se dokázat, že potom neplatí vztah

(a) $\frac{|AX|}{|BX|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1.$



Obrázek 5 - Cevova věta

Průsečíky dvojic přímek AD, BE; AD, CX a CX, BE označme po řadě K, L, M. Zavedeme dále bod Y takový, že Y leží na průsečíku strany AB a přímky CK. Podle první části důkazu platí vztah

$$\text{(b)} \quad \frac{|AY|}{|BY|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1,$$

protože přímky CY, AD, BE se protínají v jednom bodě – v bodě K. Předpokládejme, že platí

$$\frac{|AX|}{|BX|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1.$$

Vydělíme-li vztahy (a) a (b), dostaneme následující rovnost

$$\frac{|AY|}{|AX|} \cdot \frac{|BX|}{|BY|} = 1,$$

odkud po úpravě dostáváme vztah

$$|AY| \cdot |BX| = |AX| \cdot |BY|.$$

Pokud bod Y leží blíž k bodu B než bod X, pak platí následující nerovnosti

$$|AY| > |AX|, |BX| > |BY|,$$

které spolu s poslední rovností vedou ihned ke sporu, protože její levá strana je vždy větší než pravá strana. Jestliže bod Y naopak leží dál od bodu B než bod X, pak dostaneme nerovnosti

$$|AY| < |AX|, |BX| < |BY|.$$

Opět dostaneme spor s rovností

$$\frac{|AY|}{|AX|} \cdot \frac{|BX|}{|BY|} = 1.$$

V obou případech jsme dospěli ke sporu, což znamená, že důkaz druhé implikace je též ukončen.

2 Definice základních prvků

V této kapitole se zaměříme na prvky trojúhelníku, jako jsou střední příčky, středy kružnic, ortocentrum a těžiště. Základní vlastnosti těchto bodů bychom měli znát již ze základní školy. Na následujících stránkách si rozšíříme znalosti o mnoho zajímavých vlastností, které ze školy neznáme.

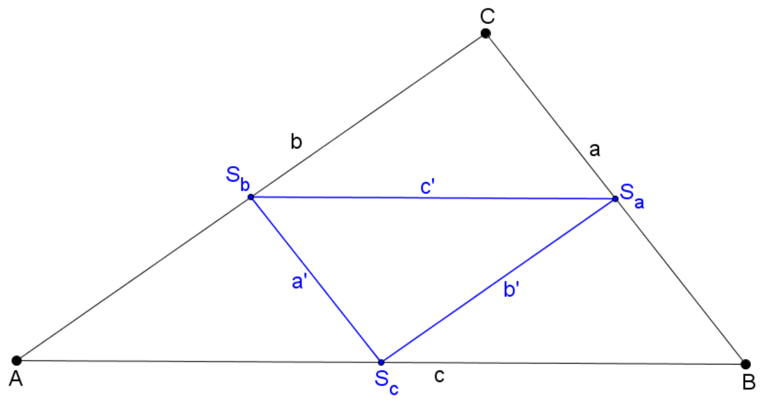
2.1 Střední příčky

Sjednocení všech stran trojúhelníku nazveme hranicemi trojúhelníku. Body ležící na hranici trojúhelníku jsou hraniční body. Všechny ostatní body trojúhelníku se nazývají vnitřní body trojúhelníku. Nejvýznamnější hraniční body jsou středy stran, které nazveme S_a, S_b, S_c, ležící postupně na stranách a, b, c [8].

„Úsečka, jejímiž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníku, se nazývá střední příčka trojúhelníku. Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou a její délka je rovna polovině délky této strany, tj. platí

$$AB \parallel S_aS_b, BC \parallel S_bS_c, AC \parallel S_aS_c,$$

$$|S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|, |S_bS_c| = \frac{1}{2}|BC|, |S_aS_c| = \frac{1}{2}|AC|\text{" } [8, str. 434].$$



Obrázek 6 - Střední příčky trojúhelníku

Dle [14] se trojúhelník $S_aS_bS_c$ nazývá příčkový trojúhelník trojúhelníku ABC a je s ním podobný podle věty sss s poměrem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

Důkaz: [1]

Zaměříme-li se na čtyřúhelník $S_cBS_aS_b$, vidíme, že se jedná o rovnoběžník. Jelikož bod S_c leží ve středu úsečky AB, pak platí

$$|AB| = 2|S_cB|.$$

A protože bod S_a je středem strany a, pak

$$|BC| = 2|S_aB|.$$

Z toho vyplývá, že

$$|S_bS_a| = |S_cB| \text{ a } |S_bS_c| = |S_aB|.$$

Taktéž z rovnoběžníku $S_cS_aCS_b$ získáváme vztahy

$$|S_bC| = |S_cS_a|, |S_aC| = |S_cS_b|$$

a z rovnoběžníku $AS_cS_aS_b$ vyplývají tyto vztahy

$$|AS_c| = |S_bS_a| \text{ a } |AS_b| = |S_cS_a|.$$

Dále platí:

$$AB \parallel S_aS_b, BC \parallel S_bS_c \text{ a } AC \parallel S_aS_c.$$

Tím jsme dokázali, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $S_aS_bS_c$ podle věty sss s poměrem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

Střední příčky dělí trojúhelník ABC *na čtyři shodné trojúhelníky. Jsou jimi trojúhelníky* $AS_bS_c, S_cBS_a, S_aS_bS_c, S_aS_bC$ [15].

Důkaz:

Bod S_c leží ve středu úsečky AB, proto

$$|AS_c| = |S_cB|,$$

bod S_a je středem BC, tudíž

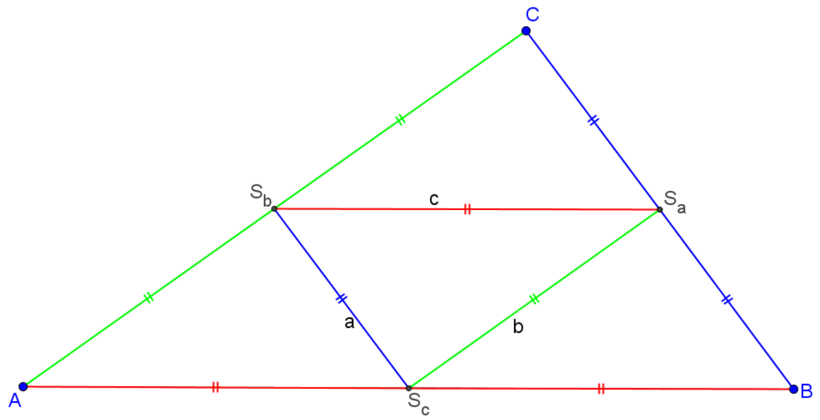
$$|BS_a| = |S_aC|$$

a bod S_b je uprostřed úsečky AC a tedy

$$|AS_b| = |S_bC|.$$

Z předchozí věty víme, že platí

$$|S_aS_b| = |AS_c| = |S_cB|, |S_bS_c| = |BS_a| = |CS_a| \text{ a } |S_aS_c| = |CS_b| = |AS_b|.$$



Obrázek 7 - Střední příčky

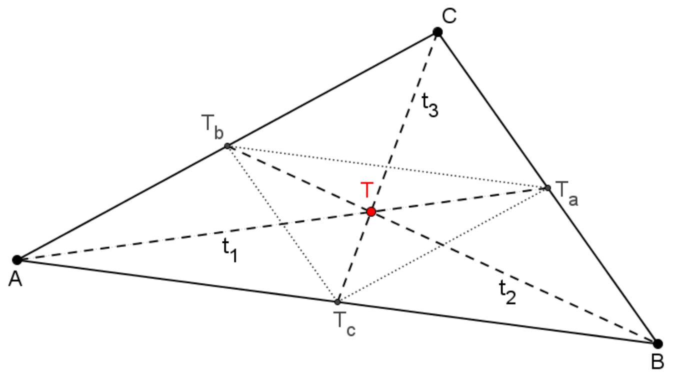
Označme délky stran trojúhelníku $S_aS_bS_c$ následovně

$$|S_bS_c| = a, |S_cS_a| = b, |S_aS_b| = c.$$

Dosadíme-li rovnosti do předchozího vztahu, zjišťujeme, že trojúhelníky AS_bS_c, S_cBS_a, $S_aS_bS_c, S_aS_bC$ mají délky stran rovny a, b, c. Z toho vyplývá, že trojúhelníky jsou shodné podle věty sss.

2.2 Těžiště a těžnice

V trojúhelníku ABC *označme postupně* T_a, T_b, T_c *středy jeho stran* BC, CA, AB. *Úsečky* T_bT_c, T_aT_c, T_aT_b *nazýváme středními příčkami trojúhelníka* ABC. *Trojúhelník* $T_aT_bT_c$ *nazýváme příčkovým trojúhelníkem trojúhelníka* ABC. *Úsečky* AT_a, BT_b, CT_c *nazýváme těžnicemi trojúhelníka* ABC. *Všechny tři těžnice se protínají v jednom bodě – tento bod se nazývá těžiště trojúhelníku a značí se písmenem* T [14], [6], [9].



Obrázek 8 - Těžiště trojúhelníku

Důkaz:

Provedeme pomocí Cevovy věty. V trojúhelníku ABC, ve kterém body T_a, T_b, T_c jsou středy stran a, b, c, platí

$$|AT_c| = |T_cB|, |BT_a| = |T_aC| \text{ a } |CT_b| = |T_bA|.$$

Dosazením těchto rovností do vztahu pro Cevovu větu platí

$$\frac{|AT_c|}{|BT_c|} \cdot \frac{|BT_a|}{|CT_a|} \cdot \frac{|CT_b|}{|AT_b|} = 1.$$

Z toho plyne, že těžnice t_1, t_2, t_3 procházejí jedním bodem.

Těžiště má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky těžnice. Těžiště dělí těžnici v poměru 2:1, přičemž delší část tvoří spojnice vrcholu a těžiště [14], [6], [10].

Důkaz:

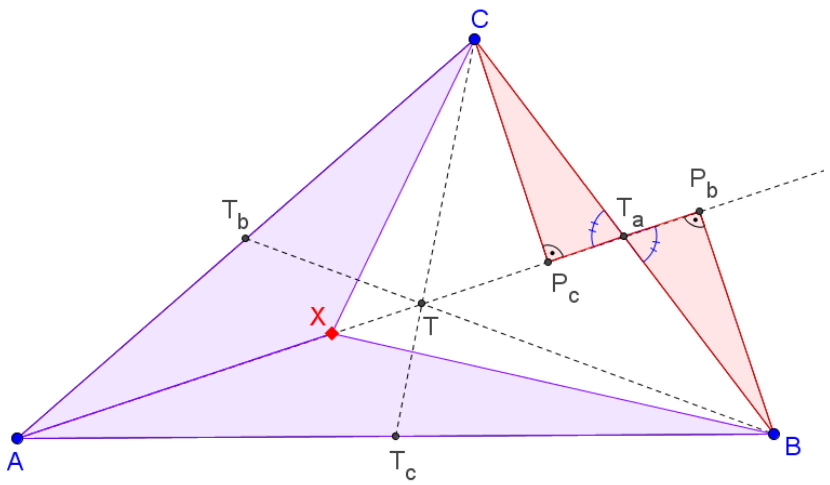
Trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem T_bT_aT, přičemž platí

$$\frac{|AB|}{|T_aT_b|} = \frac{2}{1} = \frac{|BT|}{|T_bT|} = \frac{|AT|}{|T_aT|},$$

$$|AT_a| = |AT| + |TT_a| = 2 + 1 = 3,$$

$$T \text{ je } \frac{2}{3} \text{ od } A \text{ a } \frac{1}{3} \text{ od } T_a.$$

V trojúhelníku ABC existuje množina bodu X taková, že obsahy trojúhelníků ABX a *ACX jsou shodné. Množinou je celá těžnice* na stranu a [10].



Obrázek 9 - Vlastnosti těžnice

Důkaz:

Využijeme toho, že trojúhelníky ABX a ACX mají shodnou stranu AX. Obsah trojúhelníku AXB vyjádříme jako

$$S_{ABX} = \frac{|AX| \cdot |BP_b|}{2}.$$

Pro obsah trojúhelníku ACX platí

$$S_{ACX} = \frac{|AX| \cdot |CP_c|}{2}.$$

Nyní chceme dokázat, že výšky těchto trojúhelníků se shodují. Zaměříme-li se na trojúhelníky CP_cT_a a BT_aP_b vidíme, že úhly při vrcholu T_a jsou vrcholové, a tudíž jsou shodné. Oba trojúhelníky jsou pravoúhlé, proto i jejich třetí úhel se shoduje. Dále víme, že T_a je střed úsečky BC, platí tedy

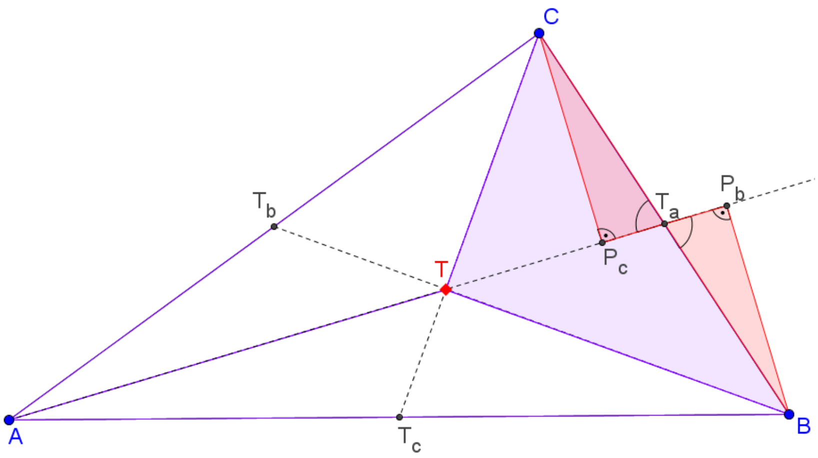
$$|CT_a| = |BT_a|.$$

Trojúhelníky CP_cT_a a BT_aP_b jsou shodné podle věty usu. Z toho vyplývá, že platí rovnost

$$|CP_c| = |BP_b|.$$

Dokázali jsme, že výšky trojúhelníků ABX a ACX jsou shodné, a proto jsou si rovny i obsahy těchto trojúhelníků.

Uvnitř trojúhelníku ABC leží právě jeden bod X takový, že trojúhelníky BCX, CAX, ABX mají stejný obsah. Tímto bodem je právě těžiště trojúhelníka ABC [14].



Obrázek 10 - Vlastnosti těžiště

Důkaz:

Řekněme, že těžiště T trojúhelníku ABC leží na těžnici na stranu a. Z předchozí věty snadno vyjádříme obsahy trojúhelníků ABT a ACT

$$S_{ABT} = \frac{|AT| \cdot |BP_b|}{2} = S_{ACT} = \frac{|AT| \cdot |CP_c|}{2}.$$

Nyní se zaměříme na obsah trojúhelníku BCT. Tento obsah můžeme rozdělit na součet obsahů trojúhelníků BTT_a a CTT_a. Využijeme opět toho, že tyto trojúhelníky mají shodnou stranu TT_a. Dále z předchozí věty víme, že

$$|CP_c| = |BP_b|.$$

Pro obsahy trojúhelníků BTT_a a CTT_a platí

$$S_{BTT_a} = \frac{|TT_a| \cdot |BP_b|}{2} = S_{CTT_a} = \frac{|TT_a| \cdot |CP_c|}{2}.$$

Obsah trojúhelníku BCT vyjádříme jako

$$S_{BCT} = \frac{|TT_a| \cdot |BP_b|}{2} + \frac{|TT_a| \cdot |CP_c|}{2} = |TT_a| \cdot |CP_c| = |TT_a| \cdot |BP_b|.$$

Dále víme, že těžiště dělí těžnici v poměru 2:1. Upravíme-li obsah trojúhelníku BCT, dostaneme

$$S_{BCT} = |TT_a| \cdot |CP_c| = \frac{|AT| \cdot |CP_c|}{2} = S_{ACT} = S_{ABT}.$$

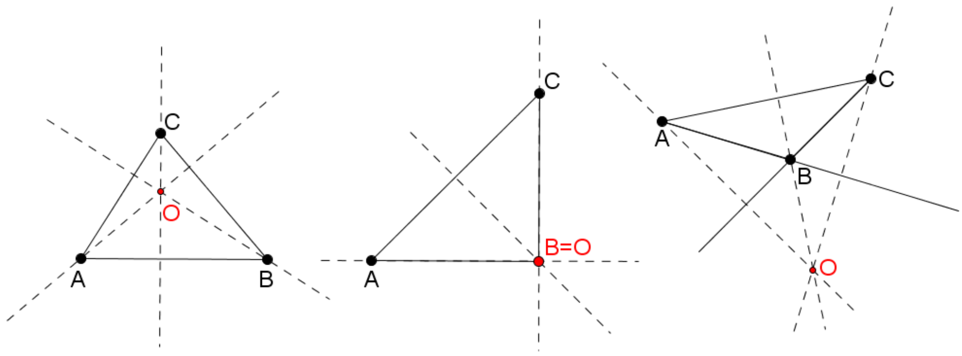
Obsahy trojúhelníků ACT, ABT a BCT jsou tedy shodné.

2.3 Výšky a ortocentrum

„Výška trojúhelníku je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy trojúhelníku“ [9, str.27].

V každém trojúhelníku existují právě tři jeho výšky. Přímky, na kterých leží výšky, se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá ortocentrum a značí se obvykle velkým písmenem O [8].

Poloha ortocentra je závislá na druhu trojúhelníku. Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží ortocentrum uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník pravoúhlý, splývá ortocentrum s vrcholem trojúhelníku při jeho pravém úhlu, a pokud je trojúhelník tupoúhlý, nachází se ortocentrum vně trojúhelníku [8], [6].



Obrázek 11 - Poloha ortocentra v ostroúhlém, pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku

Důkaz 1:

Veďme každým vrcholem trojúhelníku ABC rovnoběžnou přímku s protilehlou stranou. Bodem A veďme rovnoběžku se stranou a, bodem B rovnoběžku se stranou b a bodem C rovnoběžnou přímku se stranou c. Přímky označme postupně a', b', c' a průsečíky těchto přímek nazveme A', B', C'. Tyto body vymezují trojúhelník. Trojúhelník ABC je příčkový trojúhelník trojúhelníku $A'B'C'$. Z předchozí kapitoly víme, že vrcholy příčkového trojúhelníku leží ve středu příslušné strany. Výšky trojúhelníku ABC procházející kolmo vrcholem tohoto trojúhelníku jsou zároveň osami stran trojúhelníku $A'B'C'$.

Nyní dokážeme, že výšky procházejí právě jedním bodem. Průsečík výšek v_a a v_b nazveme O. Bod O leží na výšce v_a a z vlastnosti osy strany víme, že

$$|C'O| = |B'O|.$$

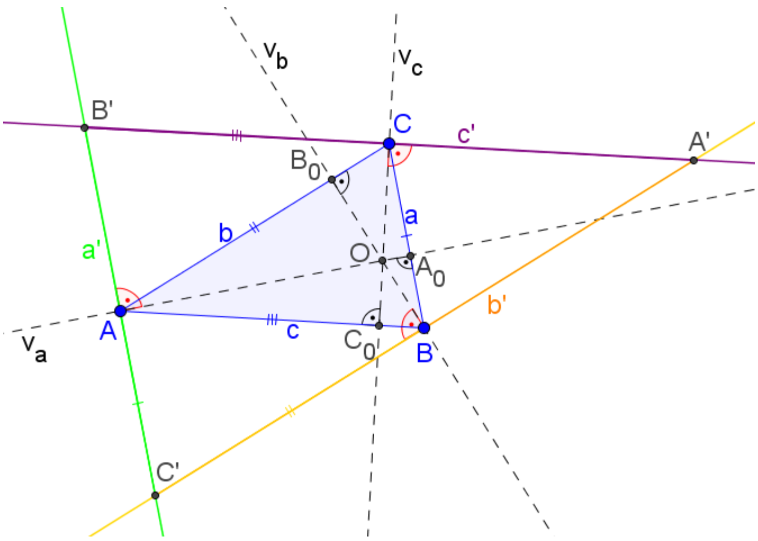
Dále bod O leží na výšce v_b, pak

$$|C'O| = |A'O|.$$

Z těchto rovností plyne

$$|B'O| = |A'O|,$$

a to znamená, že bod O leží i na výšce v_c.



Obrázek 12 - Ortocentrum

Důkaz 2:

Provedeme pomocí Cevovy věty. Nejprve si dopočítáme potřebné poměry. Označme strany trojúhelníku standardně a, b, c a úseky C_0B, A_0C, B_0A pojmenujme postupně x, y, z. Pomocí Pythagorovy věty vyjádříme výšku na stranu c z trojúhelníků AC_0C a BC_0C. Dostáváme následující rovnice

$$v_c^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

$$v_c^2 = a^2 - x^2.$$

Po úpravě dostáváme

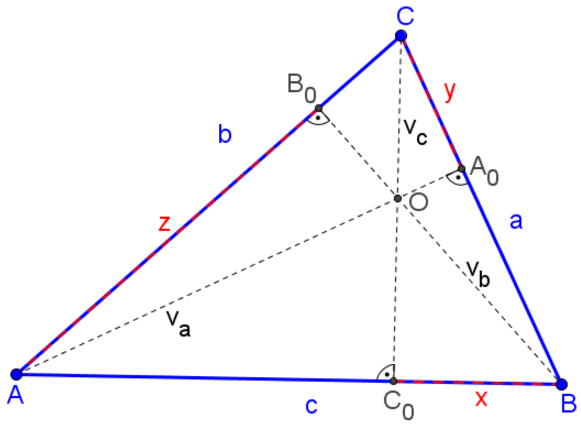
$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

a odtud pro x platí

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Úsek AC_0 pak vyjádříme jako

$$c - x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$



Obrázek 13 - Ortocentrum

Tímto způsobem získáme i rovnosti pro zbylé úseky

$$y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \qquad a - y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a},$$

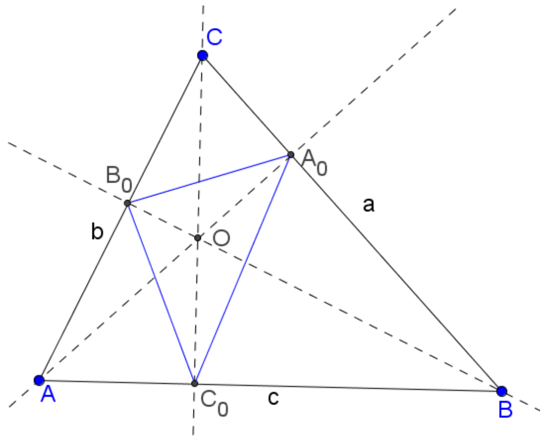
$$z = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2b}, \qquad b - z = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b}.$$

Nyní můžeme tyto vztahy dosadit do vztahu pro Cevovu větu

$$\frac{|AC_0|}{|C_0B|} \cdot \frac{|BA_0|}{|A_0C|} \cdot \frac{|CB_0|}{|B_0A|} = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{a^2 - b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{b^2 - c^2 + a^2}{b^2 - a^2 + c^2} = 1.$$

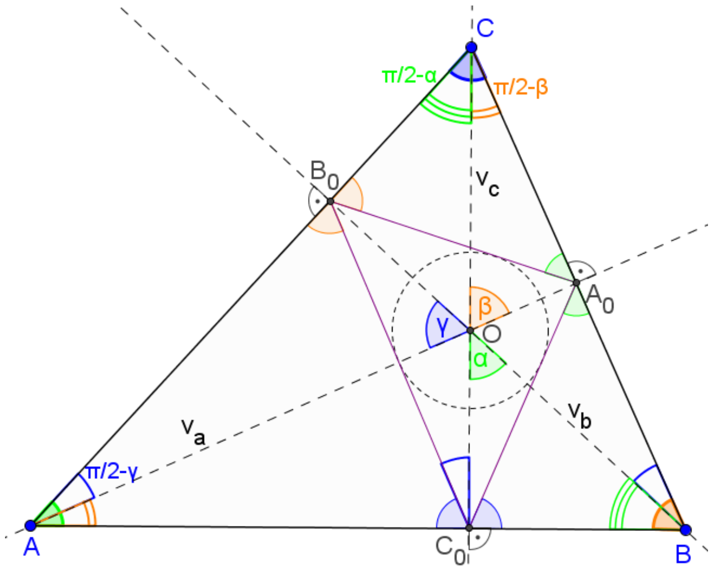
Z této rovnosti vyplývá, že se všechny výšky trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě.

Paty výšek A_0, B_0, C_0 *vytváří trojúhelník, který se nazývá ortický. V pravoúhlém trojúhelníku však tento trojúhelník neexistuje, protože dvě ze tří pat výšek splynou v jeden bod* [14].



Obrázek 14 - Ortický trojúhelník

V ostroúhlém trojúhelníku platí $|\sphericalangle A_0C_0B_0| = \pi - 2\gamma, |\sphericalangle B_0A_0C_0| = \pi - 2\alpha$, $|\sphericalangle C_0B_0A_0| = \pi - 2\beta$ *a dále platí, že ortocentrum je zároveň středem kružnice vepsané jeho ortickému trojúhelníku* [14].



Obrázek 15 - Ortický trojúhelník v ostroúhlém trojúhelníku

Důkaz: [14]

Označme úhly trojúhelníku ABC standardně α, β, γ a paty výšek A_0, B_0, C_0. Z trojúhelníku AA_0B si můžeme dopočítat úhel při vrcholu A, který je roven

$$|\sphericalangle \mathrm{BA}A_0| = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Z trojúhelníku AC_0O určíme úhel při vrcholu O

$$|\sphericalangle \mathrm{AO}C_0| = \beta.$$

Obdobným způsobem dopočítáme i zbylé úhly při ortocentru

$$|\sphericalangle \mathrm{AO}B_0| = \gamma, |\sphericalangle B_0OC| = \alpha, |\sphericalangle \mathrm{CO}A_0| = \beta, |\sphericalangle A_0OB| = \gamma, |\sphericalangle \mathrm{BO}C_0| = \alpha.$$

Čtyřúhelník OC_0BA_0 je tětivový, neboť

$$|\sphericalangle \mathrm{B}C_0O| = |\sphericalangle \mathrm{O}A_0\mathrm{B}| = \frac{\pi}{2}.$$

Lze mu proto opsat kružnici. Z věty o obvodových úhlech ihned vyplývá

$$|\sphericalangle \mathrm{BO}A_0| = |\sphericalangle \mathrm{B}C_0A_0| = \gamma \text{ a } |\sphericalangle C_0OB| = |\sphericalangle C_0A_0B| = \alpha.$$

Čtyřúhelníku C_0AB_0O můžeme taktéž opsat kružnici a získáváme

$$|\sphericalangle C_0\mathrm{OA}| = |\sphericalangle C_0B_0A| = \beta \text{ a } |\sphericalangle B_0OA| = |\sphericalangle B_0C_0A| = \gamma.$$

A z tětivového čtyřúhelníku C_0OB_0C zjistíme, že

$$|\sphericalangle A_0OC| = |\sphericalangle A_0B_0C| = \beta \text{ a } |\sphericalangle \mathrm{CO}B_0| = |\sphericalangle \mathrm{C}A_0B_0| = \alpha.$$

Nyní již snadno dopočítáme úhly ortického trojúhelníku $A_0B_0C_0$

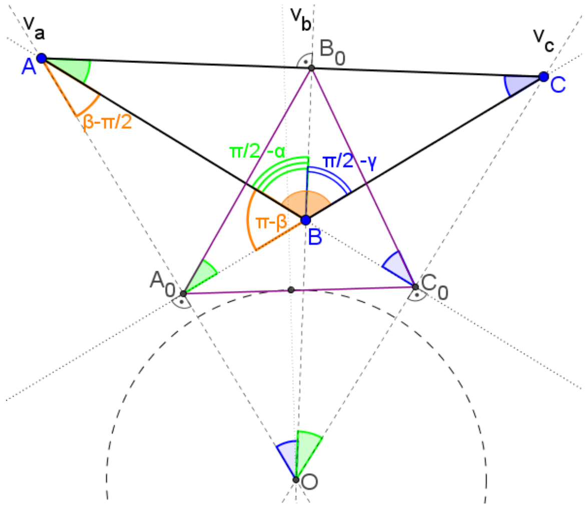
$$|\sphericalangle A_0B_0C_0| = \pi - 2\beta, |\sphericalangle B_0C_0A_0| = \pi - 2\gamma \text{ a } |\sphericalangle C_0A_0B_0| = \pi - 2\alpha.$$

Z předchozích rovností vidíme, že výšky trojúhelníku ABC jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Ortocentrum je tedy středem kružnice vepsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$ a tím je důkaz hotov.

V tupoúhlém trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu B platí

$$|\sphericalangle A_0B_0C_0| = 2\beta - \pi, |\sphericalangle C_0A_0B_0| = 2\alpha, |\sphericalangle B_0C_0A_0| = 2\gamma.$$

Dále platí, že ortocentrum tohoto trojúhelníka je středem kružnice připsané jeho ortickému trojúhelníku $A_0B_0C_0$ proti vrcholu B_0 [14].



Obrázek 16 - Ortický trojúhelník v tupoúhlém trojúhelníku

Důkaz:

Označme úhly trojúhelníku ABC standardně α, β, γ a paty výšek A_0, B_0, C_0. Z trojúhelníku BB_0C si můžeme dopočítat úhel při vrcholu B, který je roven

$$|\sphericalangle B_0BC| = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Z trojúhelníku A_0OB určíme úhel při vrcholu O

$$|\sphericalangle \mathrm{BO}A_0| = \gamma.$$

Obdobným způsobem dopočítáme i zbylé úhly. Ze čtyřúhelníku OC_0BA_0, který je tětivový, zjistíme, že

$$|\sphericalangle A_0OB| = |\sphericalangle A_0C_0\mathrm{B}| = \gamma \text{ a } |\sphericalangle BOC_0| = |\sphericalangle \mathrm{B}A_0C_0| = \alpha.$$

Ze čtyřúhelníku BC_0CB_0 získáváme

$$|\sphericalangle B_0\mathrm{CB}| = |\sphericalangle B_0C_0B| = \gamma \text{ a } |\sphericalangle C_0CB| = |\sphericalangle C_0B_0B| = \beta - \frac{\pi}{2}.$$

A z tětivového čtyřúhelníku A_0BB_0A zjistíme, že

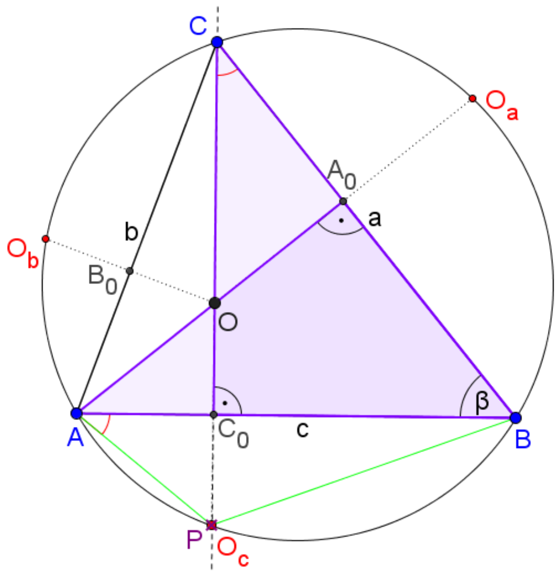
$$|\sphericalangle A_0AB| = |\sphericalangle A_0B_0B| = \beta - \frac{\pi}{2} \text{ a } |\sphericalangle \mathrm{BA}B_0| = |\sphericalangle B_0A_0B| = \alpha.$$

Nyní již snadno dopočítáme úhly ortického trojúhelníku $A_0B_0C_0$

$$|\sphericalangle A_0B_0C_0| = 2\beta - \pi, |\sphericalangle B_0C_0A_0| = 2\gamma \text{ a } |\sphericalangle C_0A_0B_0| = 2\alpha.$$

Vidíme, že výška v_b je osou vnitřního úhlu při vrcholu B_0 a výšky v_a a v_c jsou osami vnějších úhlů při vrcholech A_0 a C_0. Z toho vyplývá, že ortocentrum trojúhelníku ABC je středem kružnice připsané, která se dotýká strany A_0C_0.

Je dán trojúhelník ABC a body O_a, O_b, O_c, které jsou obrazy ortocentra v osových souměrnostech s osami a, b, c. Body O_a, O_b, O_c leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC [14].



Obrázek 17 - Vlastnosti ortocentra

Důkaz: [14]

Označme P průsečík výšky CC_0 s kružnicí trojúhelníku ABC opsanou, který je různý od vrcholu C. Úhly PCB a PAB jsou obvodové úhly příslušející kružnici nad tětivou PB, a proto

$$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCB|.$$

Dále vidíme, že trojúhelníky C_0BC a A_0AB jsou podobné podle věty sus, a proto platí

$$|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle BAO|.$$

Z obou těchto rovností vyplývá

$$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BAO|.$$

Nyní snadno vidíme, že trojúhelníky PC_0A a OAC_0 jsou shodné a tedy

$$|PC_0| = |OC_0|.$$

Platí, že $O_c = P$, a proto bod O_c leží na kružnici trojúhelníku opsané. Cyklickou záměnou snadno vyvodíme, že i body O_a, O_b leží na této kružnici.

2.4 Středy kružnic

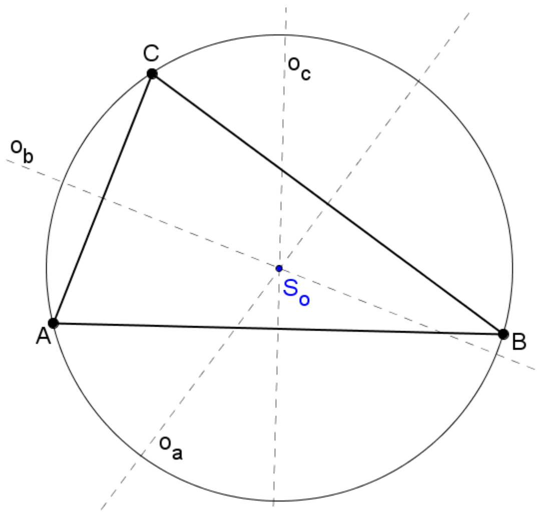
V trojúhelníku můžeme sestrojit několik typů kružnic. Nejznámější jsou kružnice opsaná, vepsaná a kružnice připsaná. V této části si ukážeme, kde mají tyto kružnice svůj střed a jak je sestrojit.

2.4.1 Kružnice opsaná

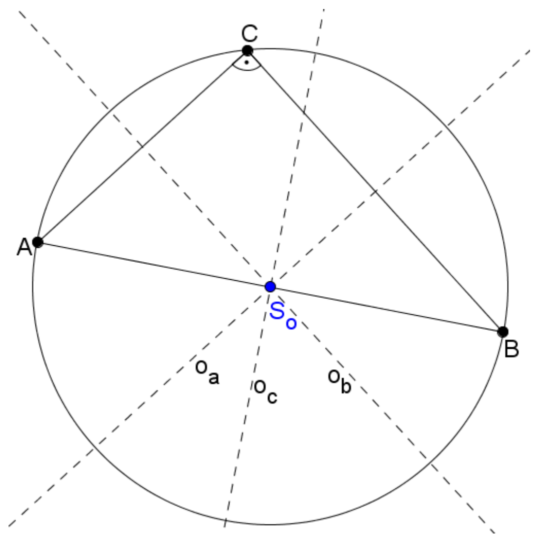
Je dán libovolný trojúhelník ABC*. Osy jeho stran* AB, BC, CA *označíme postupně* o_c, o_a, o_b*. Pak platí věta: „Osy stran trojúhelníka procházejí týmž bodem. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří vrcholů jsou stejné“* [14, str. 43]

Průsečík os stran nazveme S_o *a kružnice se středem v tomto bodě a poloměrem* $r = |S_oA| = |S_oB| = |S_oC|$ *se nazývá kružnice opsaná trojúhelníku* ABC [14].

V pravoúhlém trojúhelníku leží střed kružnice opsané uprostřed přepony tohoto *trojúhelníku* [6].



Obrázek 18 - Kružnice opsaná trojúhelníku ABC



Obrázek 19 - Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku

Důkaz:

Průsečík os o_a a o_b nazveme S_o. Leží-li bod S_o na ose o_a, poté z vlastnosti osy strany platí, že

$$|BS_o| = |CS_o|.$$

Dále bod S_o leží na ose o_b, a proto

$$|AS_o| = |CS_o|.$$

Z těchto dvou rovností plyne, že

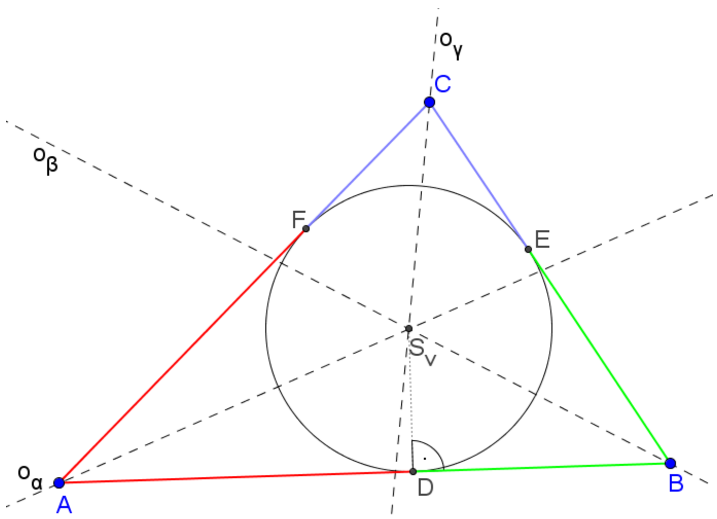
$$|AS_o| = |BS_o|,$$

a to znamená, že bod S_o leží i na ose o_c. Střed kružnice opsané je tedy opravdu průsečíkem os o_a, o_b, o_c.

2.4.2 Kružnice vepsaná

V libovolném trojúhelníku ABC platí: „Osy vnitřních úhlů trojúhelníku procházejí týmž bodem. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří přímek BC, CA, AB jsou stejné“ [14, str. 38].

Průsečík os nazveme S_v a kružnici se středem v tomto bodě a poloměrem $\rho = |S_vD| = = |S_vE| = |S_vF|$ nazveme kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC [14].



Obrázek 20 - Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC

Důkaz:

Body dotyku kružnice s trojúhelníkem ABC nazveme D, E a F. Průsečík os úhlů při vrcholech A, B označme S_v. Jelikož bod S_v leží na ose o_α pak z vlastností osy úhlu platí rovnost

$$|FS_v| = |DS_v|,$$

dále leží i na ose o_β, proto

$$|DS_v| = |ES_v|.$$

Z toho plyne, že vzdálenosti

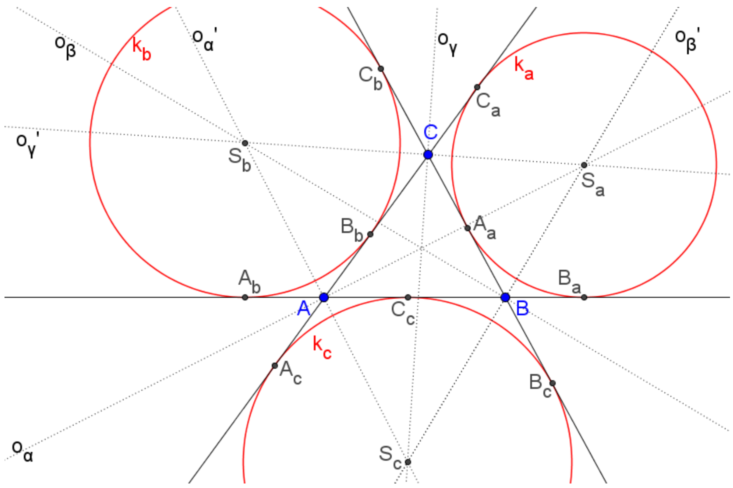
$$|DS_v| = |FS_v| = |ES_v|,$$

a tedy bod S_v leží i na ose o_γ.

2.4.3 Kružnice připsaná

„Osy vnějších úhlů při dvou vrcholech trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při třetím vrcholu procházejí týmž bodem. Vzdálenosti každého takového bodu (tyto body jsou tři) od všech tří přímek AB, BC, AC jsou stejné“ [14, str.39].

Kružnice se středy v těchto bodech a poloměry rovnými vzdálenostem od příslušné strany trojúhelníku se nazývají kružnice vně připsané stranám trojúhelníku ABC. Každý trojúhelník má tři takové kružnice. Středy připsaných kružnic leží vždy vně trojúhelníku [9].



Obrázek 21 - Kružnice připsané

Důkaz s užitím vlastností osy úhlu:

Průsečík os o_β a $o_{\alpha'}$ nazveme S_b. Leží-li S_b na o_β, pak platí

$$|S_bA_b| = |S_bC_b|,$$

dále bod S_b leží i na ose $o_{\alpha'}$, poté

$$|S_bA_b| = |S_bB_b|.$$

Z těchto rovností plyne

$$|S_bC_b| = |S_bB_b|,$$

a tudíž bod S_b leží i na ose $o_{\gamma'}$.

Průsečík os $o_{\beta'}$ a o_α nazveme S_a. Leží-li S_a leží na ose $o_{\beta'}$, pak je

$$|S_aA_a| = |S_aB_a|,$$

dále bod S_a leží i na ose o_α a tedy

$$|S_aC_a| = |S_aB_a|.$$

Z těchto rovností vyplývá

$$|S_aC_a| = |S_aA_a|,$$

a proto bod S_a leží i na ose $o_{\gamma'}$.

Průsečík os $o_{\beta'}$ a $o_{\alpha'}$ nazveme S_c. Předpokládejme, že S_c leží na ose $o_{\beta'}$, pak platí

$$|S_cC_c| = |S_cB_c|,$$

potom bod S_c leží i na ose $o_{\alpha'}$, a proto

$$|S_cC_c| = |S_cA_c|.$$

Z těchto rovností plyne

$$|S_cA_c| = |S_cB_c|$$

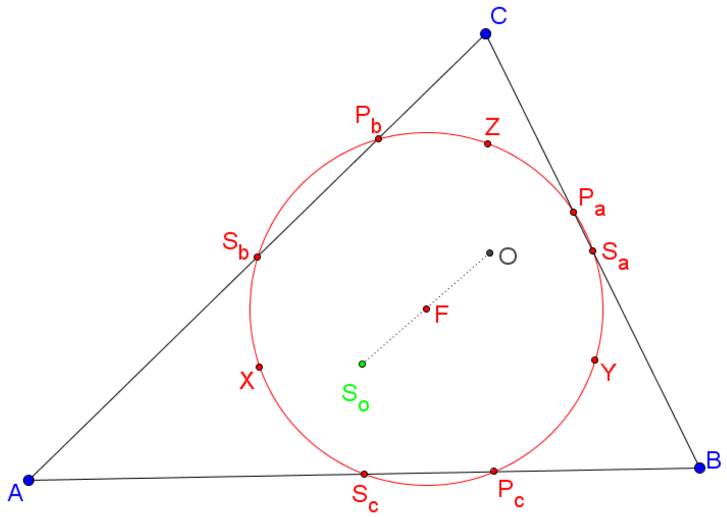
a tedy bod S_c leží i na ose o_γ.

3 Další zajímavé body a vztahy

V této kapitole se seznámíme s body trojúhelníku, které se na středních školách běžně nevyučují. Jsou jimi body a přímky, které v trojúhelníku vzniknou, když pro některé známé body využijeme souměrná zobrazení nebo jimi proložíme přímky. Mezi nejzajímavější jednoznačně patří Eulerova přímka, Fermatův bod, či Simsonova přímka.

3.1 Kružnice devíti bodů

Kružnice devíti bodů je známa také pod názvem Feuerbachova kružnice. Prochází středy stran trojúhelníka, patami výšek trojúhelníka a středy úseček dané vrcholem a ortocentrem [4], [12].



Obrázek 22 - Kružnice devíti bodů

Feuerbachova kružnice je pojmenována po německém matematikovi Karlu Wilhelmu Feuerbachovi (1800-1834), protože dokázal, že se tato kružnice dotýká kružnice vepsané a kružnic připsaných [1].

Důkaz: [1]

Všimněme si, že $S_b S_c$ je střední příčka v trojúhelníku ABC, která je rovnoběžná s BC. Z definice střední příčky víme, že

$$\frac{|S_b S_c|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Totéž platí i o úsečce YZ, která je střední příčkou v trojúhelníku OBC a je taktéž rovnoběžná se stranou BC. Proto platí

$$\frac{|YZ|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Tyto dvě rovnice můžeme přepsat do tvaru

$$|BC| = 2|S_b S_c| = 2|YZ|.$$

Z toho vyplývá, že $S_b S_c YZ$ je rovnoběžník. Dále platí, že $S_b Z$ je střední příčka v trojúhelníku AOC, a proto

$$\frac{|S_b Z|}{|AO|} = \frac{1}{2}.$$

Úsečka $S_c Y$ je střední příčkou v trojúhelníku AOB a platí

$$\frac{|S_c Y|}{|AO|} = \frac{1}{2}.$$

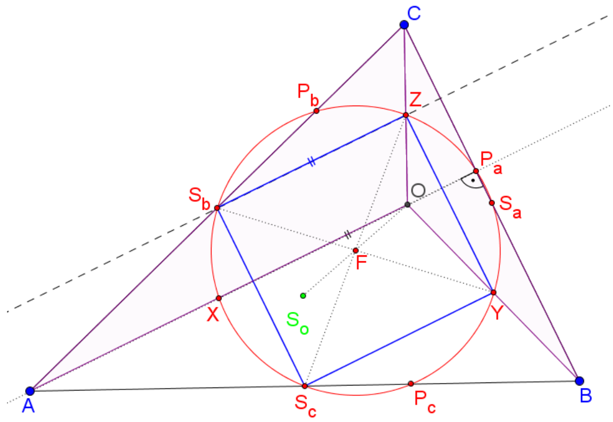
Po úpravě dostáváme následující rovnost

$$|AO| = 2|S_b Z| = 2|S_c Y|.$$

Dále víme, že body A, O leží na výšce ke straně BC a jelikož je

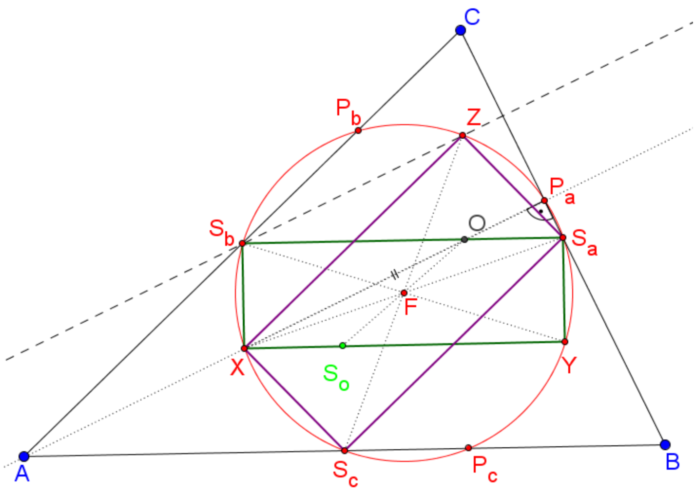
$$S_b Z \parallel AO,$$

můžeme říci, že i přímka $S_b Z$ je kolmá na BC. Proto čtyřúhelník $S_b S_c YZ$ je obdélník.



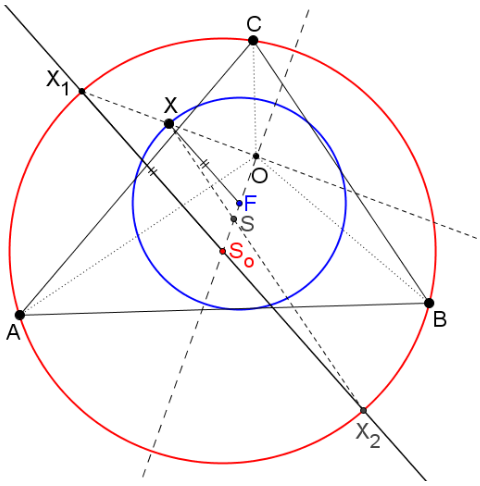
Obrázek 23 - Kružnice daná šesti body

Úhlopříčky obdélníku se protínají v jejich středu F. Obdélníky S_aS_cZX a S_aS_bXY získáme stejným způsobem. Tyto tři obdélníky mají společné tři diagonály: S_aX, S_bY, S_cZ, a proto mají společný střed F. To ukazuje, že všech 6 bodů - S_a, S_b, S_c, X, Y, Z leží na kružnici se středem v bodě F. V trojúhelníku XP_aS_a je úhel při bodu P_a pravý a přepona S_aX je průměr kružnice se středem v bodě F. Z toho vyplývá, že P_a leží také na této kružnici. A totéž platí i pro ostatní paty výšek.



Obrázek 24 - Feuerbachova kružnice

Střed Feuerbachovy kružnice je středem úsečky, jejímiž krajními body jsou ortocentrum a střed kružnice opsané. Feuerbachova kružnice má poloviční poloměr než kružnice opsaná [4].



Obrázek 25 - Kružnice opsaná a Feuerbachova kružnice

Důkaz:

Provedeme pomocí stejnolehlosti kružnic. Zvolme si na Feuerbachově kružnici libovolný bod X a sestrojme průměr kružnice opsané rovnoběžný s FX. Průsečíky tohoto průměru s kružnicí opsanou nazveme X_1 a X_2. Tyto body jsou obrazy bodu X v dané stejnolehlosti. Středy stejnolehlosti, na obrázku body S a O, najdeme jako průsečíky přímek S_oF a X_1X (resp. X_2X). Koeficient stejnolehlosti vypočítáme jako poměr

$$\frac{|OF|}{|S_oF|} = \frac{1}{2}.$$

Dále tedy platí

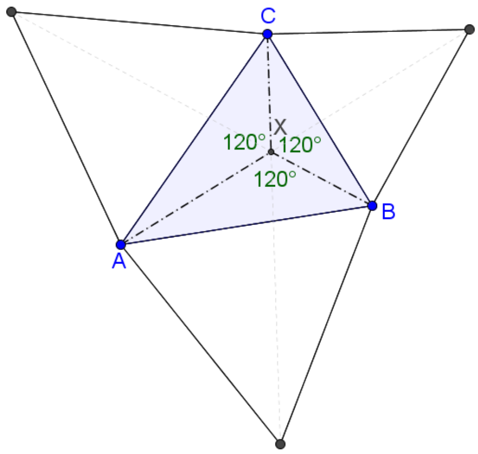
$$\frac{|FX|}{|S_oX_1|} = \frac{1}{2}.$$

Z toho vyplývá, že střed kružnice devíti bodů leží uprostřed úsečky S_oO a kružnice opsaná má dvakrát větší poloměr než kružnice Feuerbachova.

3.2 Fermatův bod

Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku existuje právě jeden bod X *takový, že součet délek* $|AX| + |BX| + |CX|$ *je minimální možný. Tento bod je situován tak, že všechny úhly* AXB, BXC, CXA *mají velikost* $120°$ [4].

Sestrojení tohoto bodu je velmi jednoduché – nad stranami trojúhelníka sestrojíme rovnostranné trojúhelníky. Fermatův bod leží na průniku spojnic protějších vrcholů.



Obrázek 26 - Fermatův bod

Důkaz: [1]

Využijme rotaci trojúhelníku ABX kolem bodu B o úhel 60°. Obraz bodu X pojmenujme H, obraz bodu A nazveme D. Pak obrazem trojúhelníku ABX bude trojúhelník BDH. Jelikož jsme bod X otočili do bodu H o úhel $60°$ a

$$|BX| = |BH|,$$

tak trojúhelník BHX je rovnostranný. Platí tedy

$$|BX| = |HX|.$$

Bod A jsme otočili do bodu D o úhel $60°$, a proto

$$|AB| = |BD|.$$

Trojúhelník ABD je tedy také rovnostranný. Když si uvědomíme, že trojúhelník BDH je otočený trojúhelník AXB, pak strana AX se otočí na stejně dlouhou stranu DH. Proto

$$|AX| = |DH|.$$

Dosadíme-li rovnosti

$$|BX| = |HX| \text{ a } |AX| = |DH|$$

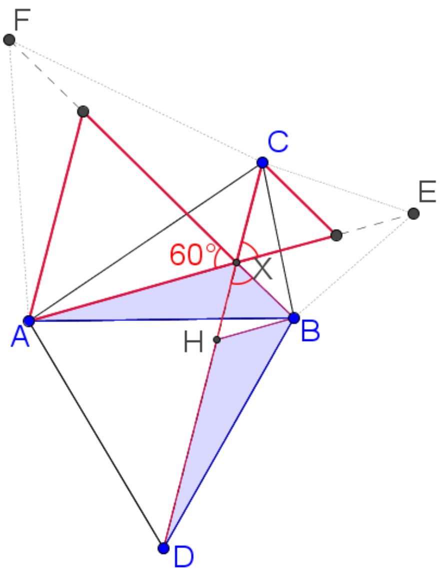
do klíčového součtu

$$|AX| + |BX| + |CX|,$$

dostáváme

$$|DH| + |HX| + |CX|.$$

Z geometrie víme, že délka lomené čáry $DHXC$ je nejkratší tehdy, když tyto body leží na přímce. Bod X tedy leží na přímce CD.

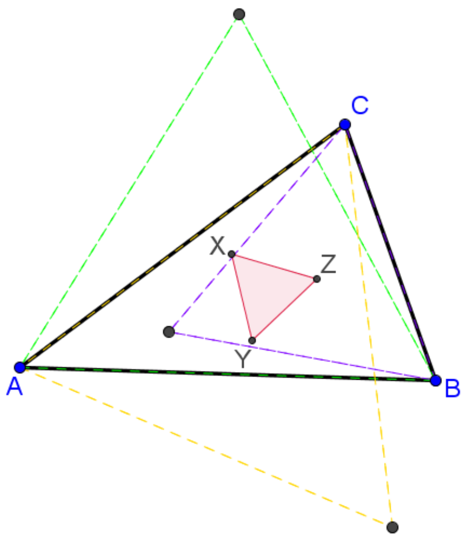


Obrázek 27 – Fermatův bod – otočení trojúhelníku ABX

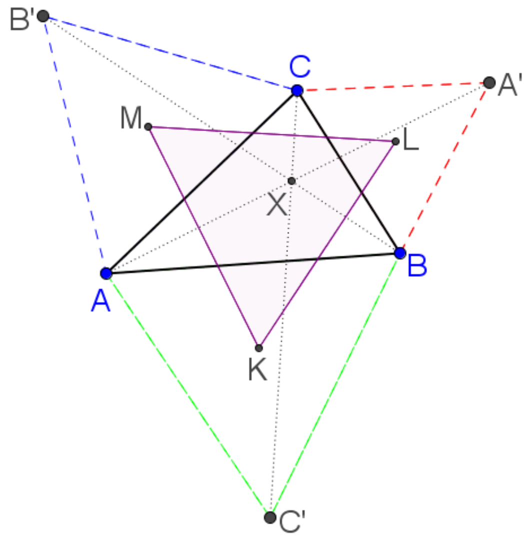
Sestrojíme-li body E, F takové, že trojúhelníky BCE a ACF jsou rovnostranné, potom cyklickou záměnou zjistíme, že bod X musí ležet i na přímkách AE, BF. Protože ale bod X popsaný v zadání určitě existuje, pak se tyto přímky protnou právě v jednom bodě. Zbývá nám dokázat, že úhly AXB, BXC a CXA mají velikost $120°$. Podívejme se na předchozí obrázek. Víme, že trojúhelník BHX je rovnostranný, proto úhel BXH má velikost $60°$. Navíc jsme zjistili, že aby bod X splňoval zadání, tak body C, X, H, D leží na přímce. Tudíž i úhel BXD má velikost $60°$. Cyklickou záměnou i úhly CXE, AXF mají velikost $60°$. Z vlastností vrcholových úhlů je již snadno vidět, že úhly AXB, BXC a CXA mají skutečně velikost $120°$.

3.3 Napoleonův trojúhelník

Nad stranami libovolného trojúhelníka sestrojme rovnostranné trojúhelníky (všechny vně nebo dovnitř). Potom středy kružnic opsaných těchto rovnostranných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník [7].



Obrázek 28 – Vnitřní Napoleonův trojúhelník



Obrázek 29 – Vnější Napoleonův trojúhelník

Důkaz pro vnější Napoleonův trojúhelník: [1]

Tato věta úzce souvisí s Fermatovým bodem, který známe z předchozí kapitoly. Zavedeme proto Fermatův bod X. Vyjděme z toho, že

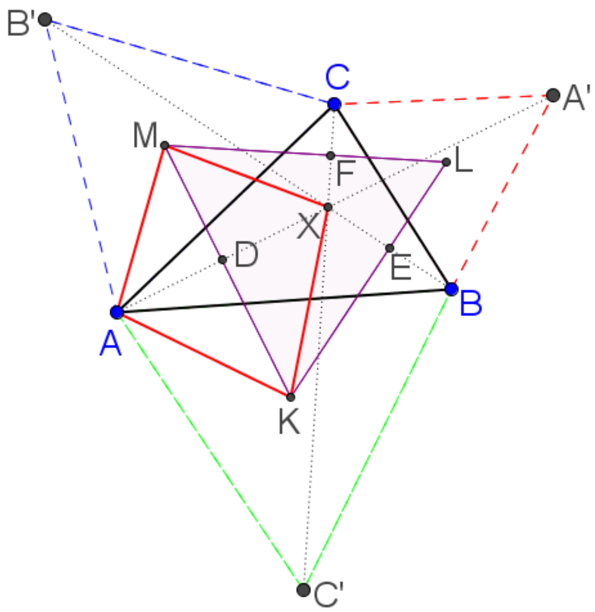
$$|\measuredangle AC'B| = 60°$$

a z vlastností Fermatova bodu plyne, že

$$|\measuredangle AXB| = 120°.$$

Součet těchto úhlů je $180°$, proto je $AC'BX$ tětivový čtyřúhelník. Víme, že kružnice opsaná tomuto čtyřúhelníku musí být shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC', která má střed v bodě K. Pro poloměr kružnice platí

$$|AK| = |BK| = |XK|.$$



Obrázek 30 – Napoleonův trojúhelník – deltoid AKXM

Cyklickou záměnou zjistíme, že i úsečky BL, CL, XL a CM, AM, XM jsou shodné. Pokud je

$$|AK| = |XK| \text{ a } |AM| = |XM|,$$

pak je čtyřúhelník $AKXM$ deltoid. Jeho úhlopříčky AX a MK jsou na sebe kolmé. Označíme-li průsečík těchto úhlopříček D, tak MD je osou úhlu AMX a KD je osou úhlu AKX. Proto je

$$|\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle XMD|.$$

Stejně tak jsou shodné i úhly

$$|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle XKD|.$$

Cyklickou záměnou získáme

$$|\sphericalangle XKE| = |\sphericalangle BKE|, |\sphericalangle XLE| = |\sphericalangle BLE|, |\sphericalangle XLF| = |\sphericalangle CLF|, |\sphericalangle CMF| = |\sphericalangle XMF|.$$

Úhel AKB lze vyjádřit jako součet úhlů

$$|\sphericalangle AKB| = |\sphericalangle AKD| + |\sphericalangle XKD| + |\sphericalangle XKE| + |\sphericalangle BKE|.$$

Jelikož víme, že některé úhly jsou shodné, můžeme tento součet zjednodušit jako

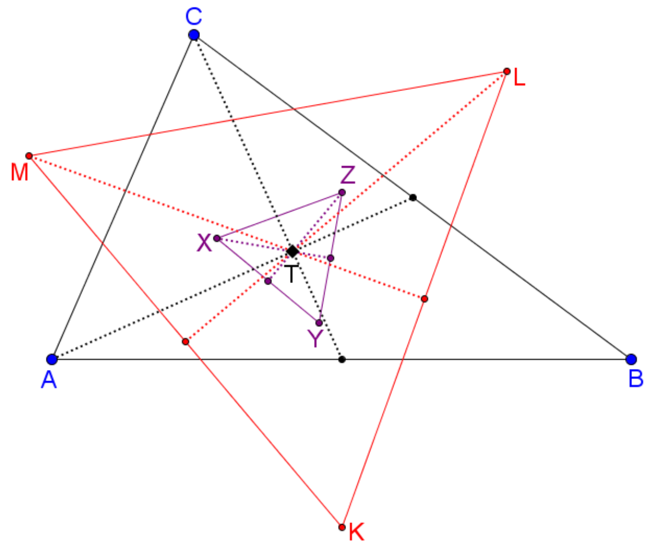
$$|\measuredangle AKB| = 2(|\measuredangle XKD| + |\measuredangle XKE|) = 2|\measuredangle DKE|,$$

tedy úhel DKE je poloviční úhel k úhlu AKB. Dále víme, že úhel AKB má velikost $120°$, neboť je středovým úhlem k obvodovému úhlu $AC'B$. Pokud tedy platí

$$|\measuredangle AKB| = 2|\measuredangle DKE|,$$

tak úhel DKE má velikost $60°$. Úhel DKE je úhlem MKL, proto má úhel MKL také velikost $60°$. Cyklickou záměnou dostaneme i zbylé dva vnitřní úhly trojúhelníku KLM taktéž rovné $60°$. Trojúhelník KLM je rovnostranný.

Těžiště vnějšího Napoleonova trojúhelníka KLM a vnitřního trojúhelníka XYZ je shodné s těžištěm trojúhelníka ABC [7].



Obrázek 31 - Těžiště Napoleonových trojúhelníků

Důkaz: [11]

Nejprve dokážeme, že těžiště T je společné pro vnější Napoleonův trojúhelník KLM a trojúhelník ABC. Nechť S_c je střed strany AB, bod T je těžiště trojúhelníku ABC a bod K je těžiště trojúhelníku ABC'. Trojúhelníky $CC'S_c$ a TKS_c jsou podobné, protože platí

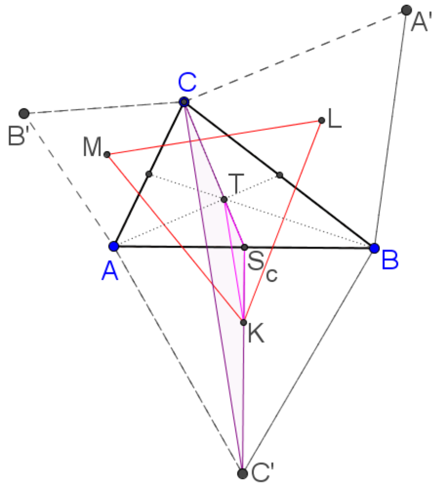
$$|\mathrm{C}S_c| = 3|S_cT| \text{ a } |\mathrm{C}'S_c| = 3|KS_c|.$$

Přímka CC' je rovnoběžná s přímkou TK a platí

$$|\mathrm{CC}'| = 3|TK|.$$

Dále platí

$$|\mathrm{AA}'| = 3|TL| \text{ a } |BB'| = 3|TM|.$$



Obrázek 32 - Společné těžiště trojúhelníků ABC a KLM

Jelikož platí

$$|\mathrm{AA}'| = |BB'| = |CC'|, \text{poté i } |\mathrm{TL}| = |\mathrm{TM}| = |\mathrm{TK}|.$$

To znamená, že bod T je těžištěm trojúhelníku KLM.

Nyní dokážeme, že těžiště T je společné pro vnitřní trojúhelník XYZ a trojúhelník ABC. Nechť S_c je střed strany c, bod T je těžiště trojúhelníku ABC a bod X je těžištěm trojúhelníku ABC‘. Trojúhelníky $CC'S_c$ a TXS_c jsou podobné, protože

$$|CS_c| = 3|S_cT| \text{ a } |C'S_c| = 3|XS_c|.$$

Přímky CC‘ a TX jsou rovnoběžné, a proto

$$|CC'| = 3|TX|.$$

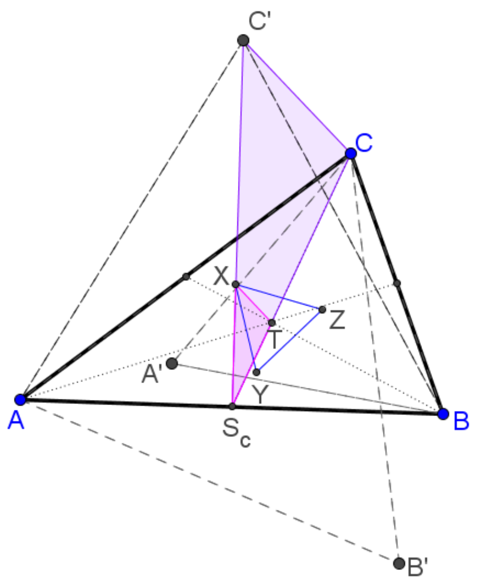
Totéž platí i pro

$$|AA'| = 3|TZ| \text{ a } |BB'| = 3|TY|.$$

Poté platí

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| \text{ a } |TZ| = |TY| = |TX|.$$

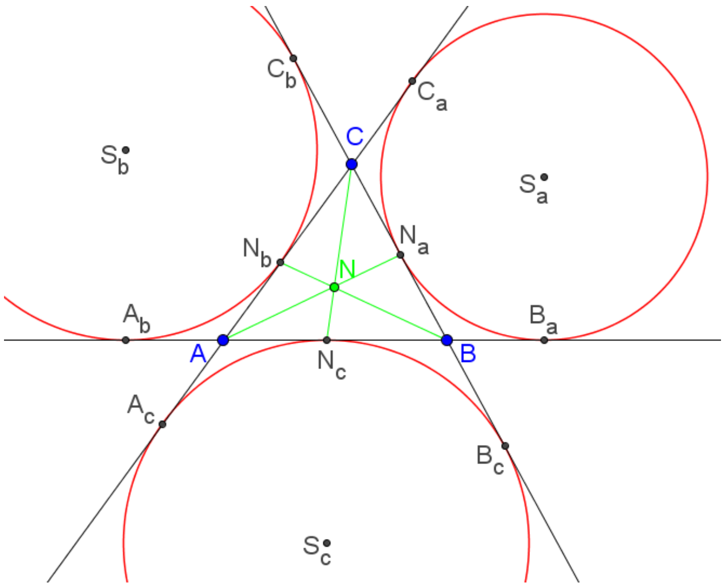
To znamená, že bod T je těžištěm trojúhelníku XYZ. A tím jsme dokázali, že bod T je společným těžištěm pro trojúhelníky ABC, KLM, XYZ.



Obrázek 33 - Společné těžiště pro trojúhelníky ABC a XYZ

3.4 Nagelův bod

Body N_a, N_b, N_c jsou dotykové body kružnic připsaných stranám a, b, c s těmito stranami. Přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí týmž bodem, který se nazývá Nagelův bod. Tento bod leží uvnitř trojúhelníku ABC [13], [14].



Obrázek 34 - Nagelův bod I

Důkaz založený na Cevově větě: [14]

Přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí jedním bodem. Nejprve je ovšem nutné dopočítat poměry jednotlivých stran trojúhelníku ABC. Z obrázku je vidět, že platí vztah

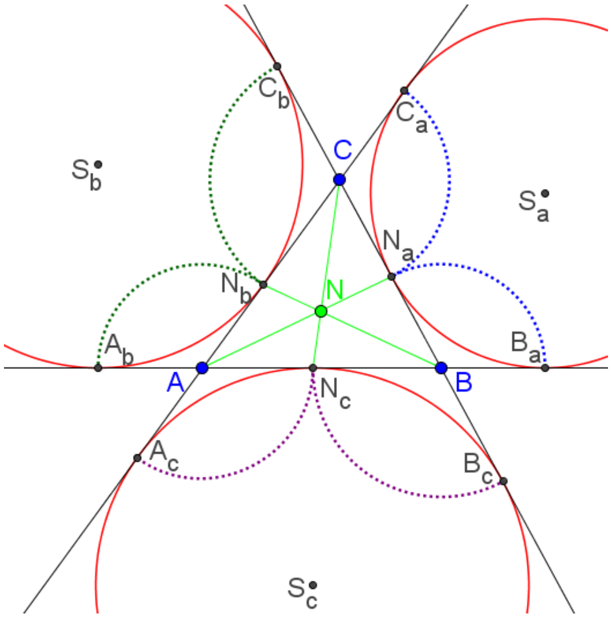
$$|AB_a| + |AC_a| = |AB| + |BB_a| + |CA| + |CC_a| = |AB| + |BN_a| + |CA| + |CN_a| = o,$$

kde o je obvod trojúhelníka ABC.Dále víme, že bod S_a leží na ose úhlu o_α při vrcholu A, proto platí

$$|AB_a| = |AC_a|.$$

Z předchozí rovnosti dostáváme

$$|AB_a| = |AC_a| = \frac{o}{2}.$$



Obrázek 35 - Nagelův bod II

Nyní s využitím těchto vztahů vyjádříme velikosti $|BN_a|$ a $|CN_a|$, platí tedy

$$|BN_a| = |AB| + |BN_a| - |AB| = |AB| + |BB_a| - c = |AB_a| - c = \frac{o}{2} - c$$

a

$$|N_aC| = |CA| + |N_aC| - |CA| = |AC_a| - b = \frac{o}{2} - b.$$

Dále víme, že bod S_b leží na ose úhlu o_β při vrcholu B, proto platí

$$|BC_b| = |BA_b| = \frac{o}{2}.$$

Nyní můžeme vyjádřit rovnosti $|CN_b|$ a $|AN_b|$, platí tedy

$$|AN_b| = |AB| + |AN_b| - |AB| = |BC_b| - c = \frac{o}{2} - c$$

a

$$|CN_b| = |CB| + |CN_b| - |CB| = |CB| + |CC_b| - a = |BC_b| - a = \frac{o}{2} - a.$$

Víme, že bod S_c leží na ose úhlu o_γ při vrcholu C, proto platí

$$|CA_c| = |CB_c| = \frac{o}{2}.$$

Nyní vyjádříme velikosti $|BN_c|$ a $|AN_c|$, platí tedy

$$|AN_c| = |CA| + |AN_c| - |CA| = |CA_c| - b = \frac{o}{2} - b$$

a

$$|BN_c| = |BC| + |BN_c| - |BC| = |CB_c| - a = \frac{o}{2} - a.$$

Získáváme tedy následující vzorce

$$|BN_a| = \frac{o}{2} - c, \qquad |CN_b| = \frac{o}{2} - a, \qquad |AN_c| = \frac{o}{2} - b,$$

$$|CN_a| = \frac{o}{2} - b, \qquad |AN_b| = \frac{o}{2} - c \quad \text{a} \quad |BN_c| = \frac{o}{2} - a.$$

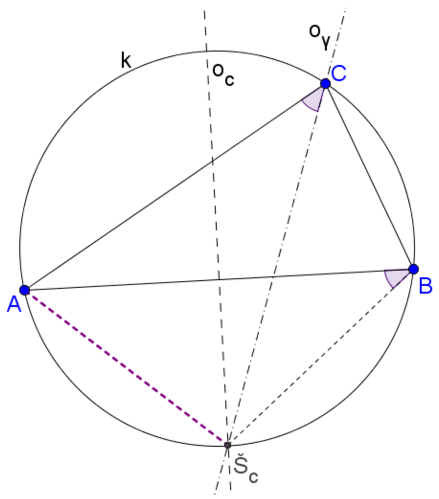
Dosazením do vztahu pro Cevovu větu dostáváme

$$\frac{|AN_c|}{|BN_c|} \cdot \frac{|BN_a|}{|CN_a|} \cdot \frac{|CN_b|}{|AN_b|} = \frac{\frac{o}{2} - b}{\frac{o}{2} - a} \cdot \frac{\frac{o}{2} - c}{\frac{o}{2} - b} \cdot \frac{\frac{o}{2} - a}{\frac{o}{2} - c} = 1.$$

Z Cevovy věty plyne, že přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí týmž bodem.

3.5 Švrčkův bod

Je dán libovolný trojúhelník ABC*. Osa úhlu* ACB *protíná kružnici opsanou trojúhelníku* ABC *v bodě různém od* C*, který pojmenujeme* $Š_c$*. Pak* $Š_c$ *leží i na ose úsečky* AB [2], [10].



Obrázek 36 - Švrčkův bod I

Důkaz: [14]

Označme průsečík osy úhlu při vrcholu C a kružnice k bodem X, který je různý od vrcholu C. Protože přímka CX je osou úhlu ACB, pak

$$|\measuredangle ACX| = |\measuredangle BCX| = \frac{\gamma}{2}.$$

Dále si všimněme, že tětivu AX kružnice k můžeme vidět z této kružnice ze dvou různých bodů B, C pod stejným úhlem. Proto pokud je

$$|\measuredangle ACX| = \frac{\gamma}{2},$$

potom je i

$$|\measuredangle ABX| = \frac{\gamma}{2}.$$

Analogicky i pro tětivu BX platí, že ji lze z kružnice k vidět ze dvou různých bodů A, C, proto

$$|\measuredangle BAX| = |\measuredangle BCX| = \frac{\gamma}{2}.$$

Zaměřme se nyní na trojúhelník ABX. Víme, že úhly při vrcholech A, B jsou shodné, proto můžeme říct, že

$$|AX| = |BX|,$$

Průsečík osy strany AB a kružnice k označme Y, proto platí

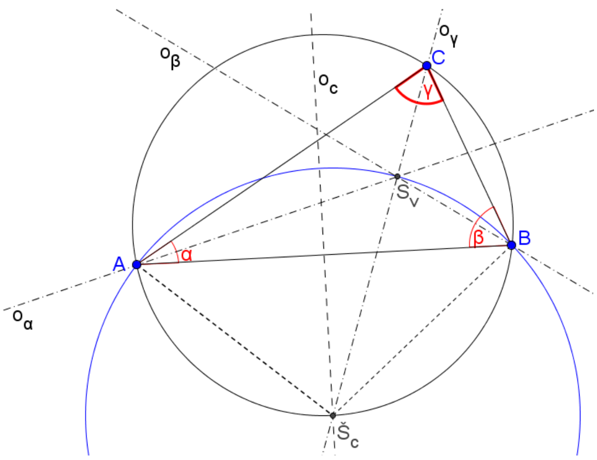
$$|AY| = |BY|.$$

Z posledních dvou rovností vyplývá, že

$$X = Y = Š_c,$$

čímž je důkaz hotov.

Je-li $Š_c$ *Švrčkův bod vůči straně* AB *v trojúhelníku* ABC, *pak pro střed* S_v *kružnice vepsané tomuto trojúhelníku platí:* $|Š_cA| = |Š_cB| = |Š_cS_v|$ [10].



Obrázek 37 - Švrčkův bod II

Důkaz: [14]

Vyjdeme z toho, že AS_v, BS_v jsou osy úhlů, pokud označíme vnitřní úhly standardně α, β, γ, tak

$$|\sphericalangle BAS_v| = \frac{\alpha}{2} \text{ a } |\sphericalangle ABS_v| = \frac{\beta}{2}.$$

Potom zbývající vnitřní úhel v trojúhelníku ABS_v má velikost

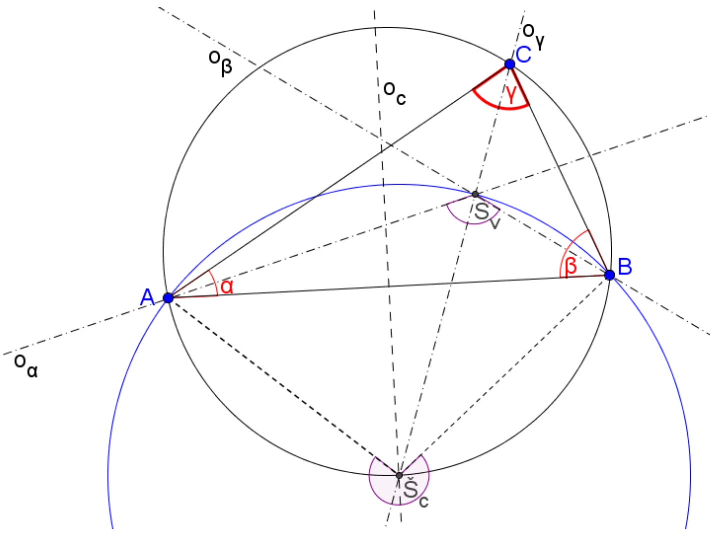
$$|\sphericalangle BS_vA| = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Po úpravě dostáváme rovnost

$$|\sphericalangle BS_vA| = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Pokud skutečně bod S_v leží na kružnici se středem v $Š_c$ a poloměrem $|AŠ_c|$, pak by úhel AS_vB měl být obvodový vůči nekonvexnímu středovému úhlu $AŠ_cB$. Protože středový úhel je vždy dvakrát větší než obvodový, chceme tedy dokázat, že platí

$$|\sphericalangle AŠ_cB| = \pi + \gamma.$$



Obrázek 38 - Nekonvexní úhel Švrčkova bodu

Z předchozího důkazu víme, že

$$\left|\sphericalangle AB\check{S}_c\right| = \left|\sphericalangle BA\check{S}_c\right| = \frac{\gamma}{2}.$$

Dopočítáme-li zbylý vnitřní úhel v trojúhelníku $AB\check{S}_c$, zjistíme, že konvexní úhel $A\check{S}_cB$ má velikost

$$\left|\sphericalangle A\check{S}_cB\right| = \pi - \gamma.$$

Víme, že konvexní a nekonvexní úhel $A\check{S}_cB$ musí dohromady dát plný úhel. Pro nekonvexní úhel $A\check{S}_cB$ platí

$$\left|\sphericalangle A\check{S}_cB\right| = 2\pi - (\pi - \gamma) = \pi + \gamma.$$

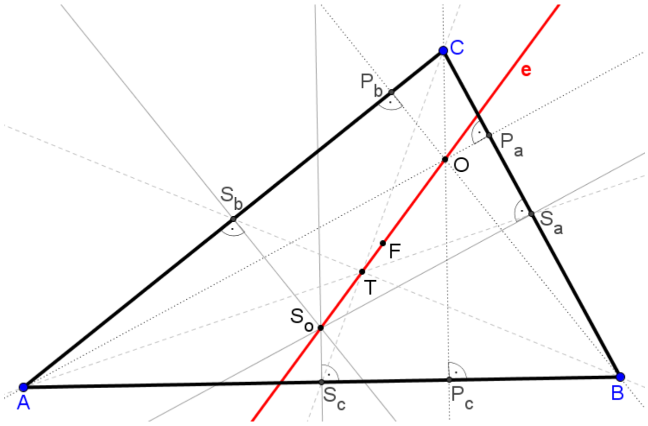
A tím je tvrzení dokázáno.

3.6 Eulerova přímka

Je dán trojúhelník ABC, který není rovnostranný, potom střed kružnice opsané S_o, těžiště T, ortocentrum O a střed Feuerbachovy kružnice F jsou čtyři různé body, které leží na přímce v pořadí $O, F, T,\ S_o$ tak, že platí:

$$|TS_o| = \frac{1}{3}|S_oO|, \qquad |FT| = \frac{1}{4}|OT| \quad [14].$$

V rovnostranném trojúhelníku tyto body splývají v jeden, a tak přímka neexistuje [6].



Obrázek 39 - Eulerova přímka

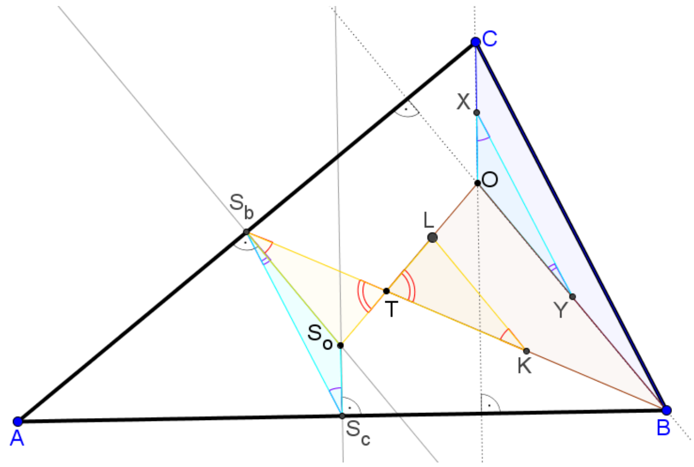
Důkaz: [3]

Nechť body $S_aS_bS_c$ jsou středy stran trojúhelníka ABC. Nejprve se zaměříme na trojúhelníky $S_cS_bS_o$ a BCO. Strana S_cS_b je střední příčkou trojúhelníku ABC, proto platí

$$|BC| = \frac{1}{2}|S_bS_c|.$$

Strany S_bS_o a OB jsou rovnoběžné, neboť jsou obě kolmé na stranu AC. Taktéž i strany S_cS_o a CO jsou rovnoběžné, protože jsou kolmé na stranu AB. Jelikož jsou všechny strany rovnoběžné, pak jsou sobě si odpovídající úhly shodné. V trojúhelníku BCO sestrojme střední příčku XY rovnoběžnou se stranou BC. Pak platí

$$|XY| = |S_bS_c| \text{ a } |OY| = |S_oS_b|.$$



Obrázek 40 - Eulerova přímka – shodnost trojúhelníků

Trojúhelníky $S_cS_bS_o$ a XYO jsou shodné. Nyní budeme věnovat svou pozornost trojúhelníkům S_bS_oT a TBO. Víme, že

$$S_bS_o \parallel OB$$

a pro úhly platí, že jsou shodné. Sestrojíme-li v trojúhelníku BOT střední příčku rovnoběžnou se stranou OB, zjistíme, že trojúhelník S_bS_oT je shodný s trojúhelníkem KLT. Je tedy zřejmé, že platí

$$2|S_oT| = |TO| \text{ a } 2|S_bT| = |TB|,$$

neboli

$$\frac{|S_oT|}{|S_oO|} = \frac{1}{3}.$$

Dále víme, že střed Feuerbachovy kružnice leží se středu úsečky S_oO, a proto

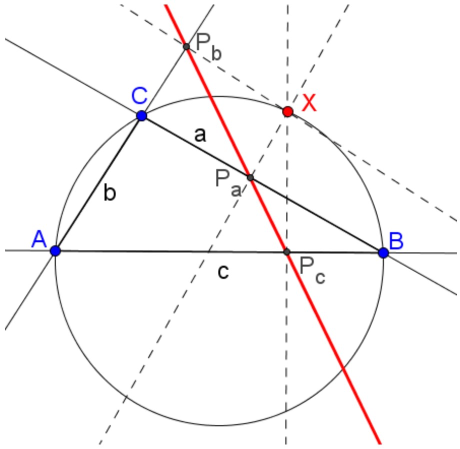
$$\frac{|FT|}{|OT|} = \frac{1}{4}\ .$$

Dokázali jsme tedy, že body S_o, T, F, O leží na přímce v přesném poměru.

$$\frac{|S_oT|}{|S_oO|} = \frac{1}{3}, \frac{|FT|}{|OT|} = \frac{1}{4}\ .$$

3.7 Simsonova přímka

Je dán trojúhelník ABC. Zvolíme-li libovolný bod X na kružnici opsané tomuto trojúhelníku a spustíme z tohoto bodu kolmice na jednotlivé strany trojúhelníku, pak paty těchto kolmic P_a, P_b, P_c leží na přímce, která se nazývá Simsonova přímka příslušná bodu X [13], [14].



Obrázek 41 - Simsonova přímka I

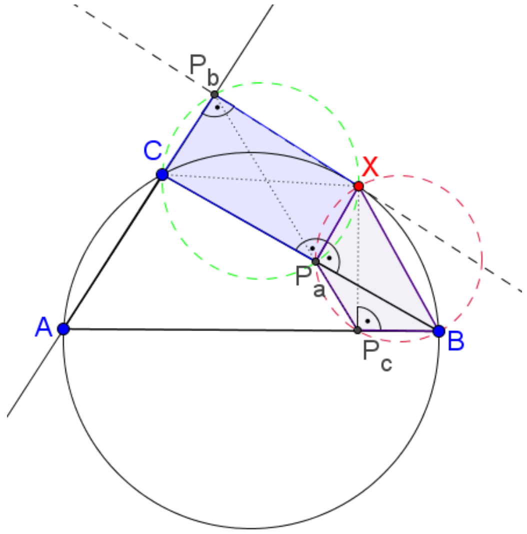
Důkaz: [14]

1. Předpokládejme, že bod X leží na kružnici opsané. Chceme dokázat, že body P_a, P_b, P_c leží na přímce. Pokud bod X splyne s některým vrcholem trojúhelníka, je přímka jednoznačně dána tímto bodem a patou kolmice na protější stranu. Předpokládejme tedy, že s vrcholy nesplývá. Dokážeme, že

$$|\measuredangle P_b P_a C| = |\measuredangle P_c P_a B|.$$

V čtyřúhelníku CP_aXP_b jsou úhly XP_aC a CP_bX pravé, a proto mu lze opsat kružnici. Z věty o obvodových úhlech plyne

$$|\measuredangle P_b P_a C| = |\measuredangle P_b X C|.$$



Obrázek 42 - Simsonova přímka II

Obdobně i čtyřúhelníku BXP_aP_c můžeme opsat kružnici a snadno dokážeme, že

$$|\measuredangle P_cP_aB| = |\measuredangle P_cXB|.$$

Z předchozích dvou rovností snadno zjistíme, že platí

$$|\measuredangle P_bP_aC| = |\measuredangle P_bXP_c| - |\measuredangle CXP_c|,$$
$$|\measuredangle P_cP_aB| = |\measuredangle CXB| - |\measuredangle CXP_c|.$$

Stačí tedy dokázat, že

$$|\measuredangle P_bXP_c| = |\measuredangle CXB|.$$

V čtyřúhelníku AP_cXP_b jsou úhly

$$|\measuredangle XP_cA| = |\measuredangle AP_bX| = \frac{\pi}{2},$$

jedná se tedy opět o tětivový čtyřúhelník, kterému můžeme opsat kružnici. Z toho plyne

$$|\measuredangle P_bXP_c| = \pi - |\measuredangle BAC|.$$

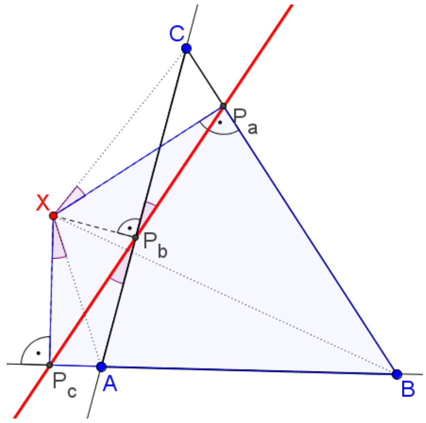
Podobně čtyřúhelníku $CABX$ lze opsat kružnici, která je zároveň kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Platí následující rovnost

$$|\measuredangle CXB| = \pi - |\measuredangle BAC|.$$

Z posledních dvou rovností dostáváme

$$|\measuredangle P_b X P_c| = \pi - |\measuredangle BAC| = |\measuredangle CXB|,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 43 - Simsonova přímka III

2. Předpokládejme, že body P_a, P_b, P_c leží na přímce, a ukažme, že bod X leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané. Pokud některé dva z bodů P_a, P_b, P_c splývají, potom bod X splývá s jedním z vrcholů trojúhelníka a tvrzení je zřejmé. Předpokládejme tedy, že tomu tak není. Úplně stejně jako v první části důkazu dostáváme

$$|\sphericalangle P_c P_b A| = |\measuredangle P_c X A| = |\measuredangle P_c X P_a| - |\measuredangle A X P_a|,$$
$$|\measuredangle P_a P_b C| = |\measuredangle P_a X C| = |\measuredangle AXC| - |\measuredangle AXP_a|,$$
$$|\measuredangle P_c X P_a| = \pi - |\measuredangle CBA|.$$

Protože body P_a, P_b, P_c leží na přímce, platí

$$|\measuredangle P_c P_b A| = |\measuredangle P_a P_b C|.$$

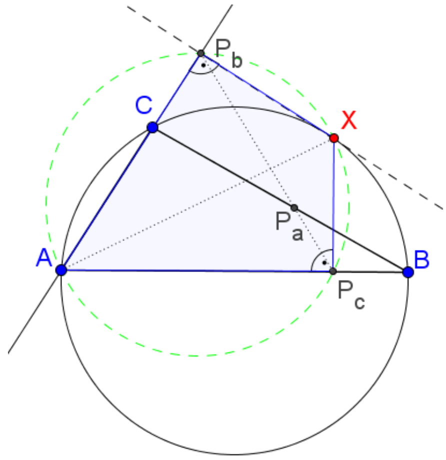
Z první dvojice předchozích rovností potom vychází

$$|\measuredangle P_c X P_a| = |\measuredangle AXC|.$$

Dosazením této rovnosti do třetí rovnice dostáváme

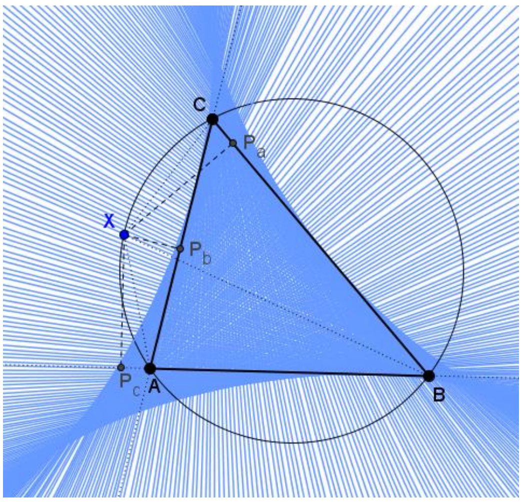
$$|\measuredangle AXC| = \pi - |\measuredangle CBA|.$$

Z toho vyplývá, že čtyřúhelníku $CXAB$ lze opsat kružnici, což znamená, že bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Leží-li bod X na kružnici opsané trojúhelníku ABC, potom se přímka, na níž leží body P_a, P_b, P_c nazývá Simsonova přímka příslušející bodu X.



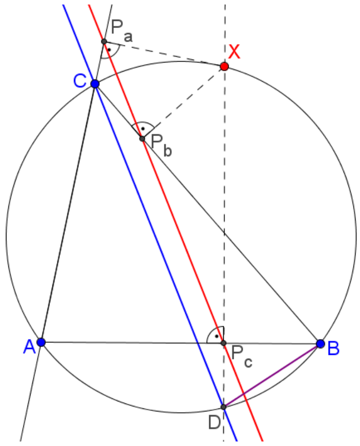
Obrázek 44 - Simsonova přímka

Simsonových přímek existuje nekonečně mnoho. Simsonova přímka je vždy vztažená k nějakému bodu, který náleží kružnici trojúhelníku opsané.



Obrázek 45 - Steinerův deltoid

Je dán trojúhelník ABC a bod X na kružnici trojúhelníku opsané, který je různý od vrcholu C. Potom přímka procházející vrcholem C a rovnoběžná se Simsonovou přímkou příslušnou bodu X protíná kolmici vedenou bodem X k přímce AB v bodě D, který leží na kružnici k [14].



Obrázek 46 - Vlastnosti Simsonovy přímky

Důkaz: [14]

Průsečík kolmice vedené z bodu X k přímce AB s kružnicí k označíme D'. Kružnice k je opsaná čtyřúhelníku $CD'BX$. Z věty o obvodových úhlech dostáváme

$$|\measuredangle XD'C| = |\measuredangle XBC| = |\measuredangle XBP_a|.$$

Protože úhly BP_cX a BP_aX jsou pravé, můžeme čtyřúhelníku BXP_aP_c opsat kružnici. Z věty o obvodových úhlech vyplývá

$$|\measuredangle XBP_a| = |\measuredangle XP_cP_a|.$$

Z předchozích rovností dostáváme vztah

$$|\measuredangle XD'C| = |\measuredangle XP_cP_a|,$$

což ukazuje, že přímka CD' je rovnoběžná se Simsonovou přímkou P_cP_a. Pak platí $D' = D$, a to jsme chtěli dokázat.

Pokud by bod X splynul s vrcholem A nebo B, bylo by řešení obdobné, proto jej uvádět nebudeme.

Závěr

Práce shrnuje známé body a vlastnosti trojúhelníku a vztahy mezi nimi, které jsou vyučovány již na základní škole. Tyto poznatky jsou rozšířeny o nové vlastnosti. Čtenář se seznámí s několika novými vybranými body, které nejsou součástí výuky ani na škole vysoké. Cílem práce bylo čtenáře seznámit s těmito pojmy a rozšířit tak vědomosti týkající se trojúhelníku.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole je uvedeno několik definic pojmu trojúhelník. Jsou zde uvedeny druhy trojúhelníků podle délek stran a velikostí úhlů, Cevova věta, která je potřebná k důkazu mnohých tvrzení založených na protnutí tří přímek v jednom bodě.

Druhá kapitola seznamuje se základními body trojúhelníku, mezi které patří těžiště, ortocentrum nebo středy kružnic. Čtenář si zde přečte vlastnosti ortocentra a těžiště, která nejsou součástí běžné školní výuky.

Ve třetí kapitole jsou popsány vybrané body a přímky trojúhelníku, které nejsou součástí učiva. Mezi tyto body jsem vybrala Nagelův bod, Švrčkův bod nebo Fermatův bod, ze kterého jsou vidět strany trojúhelníka pod stejným úhlem. Dále jsou do této kapitoly zařazeny přímky, jako je například Eulerova přímka spojující významné body, nebo Simsonova přímka, která je vždy vázána na určitý bod kružnice opsané.

V této práci jsme si zopakovali základní body trojúhelníku a jejich vlastnosti, které jsme rozšířili o vlastnosti nové. Dále jsme si definovali body a přímky, o kterých jsme se ve škole neučili. Jak jsem již psala v úvodu, body jsem vybírala z Encyclopedia of triangle centres, která k 26. prosinci 2016 obsahuje 11 362 bodů spojených s konstrukcí trojúhelníka. V rámci této práce jsem zvolila body, které mě zaujaly a které často souvisely se základními pojmy z druhé kapitoly. Mezi další zajímavé body, které bychom mohli v rámci této práce zkoumat, patří například Longchampův bod středově souměrný podle středu kružnice opsané s ortocentrem nebo Gergonnův bod, který je průsečíkem přímek, jejímiž krajními body jsou vrcholy trojúhelníku a dotykové body kružnice vepsané. Dalším bodem by mohl být Lemoinův bod a s ním související Lemoinovy či Tuckerovy kružnice.

Při zpracovávání tohoto tématu jsem si obohatila vědomosti z oblasti geometrie trojúhelníku, se kterými bych se při studiu matematiky jinak neseznámila. Součástí práce jsou i obrázky vytvořené v geometrickém programu GeoGebra, bez kterých by bylo mnohdy složité pochopit pojmy a vztahy mezi nimi.

Myslím si, že geometrie trojúhelníku je velice zajímavým oborem matematiky, jemuž ve školách bohužel není věnován potřebný čas. Mezi žáky není geometrie příliš oblíbená, a to zejména proto, že při konstrukčních úlohách je nutná přesnost a pečlivost. Navrhovala bych proto využití programu GeoGebra v hodinách matematiky, neboť rýsování je mnohem rychlejší a žák si snadno ověří správnost konstrukce.

Ráda bych si v budoucnu rozšířila své znalosti týkající se geometrie trojúhelníku a zaměřila se na využití poznaných bodů při konstrukčních úlohách. Poznatky z této práce, zejména vlastnosti běžně vyučovaných bodů, bych ráda aplikovala v učitelské praxi.

Použitá literatura

[1] BOGOMOLNY Alexander. *Geometry Articles, Theorems, Problems, and Interactive Illustrations from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*. [online].[cit.2017-04-01].Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml.

[2] BRKOS. Brněnský korespondenční seminář [online]. [cit. 2017-03-25]. Dostupné z: http://brkos.math.muni.cz/index.php?s=zadani&t=povidani&u=216.

[3] FYZMATIK. Fyzikálně – Matematický blog: *Eulerova přímka* [online]. [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/1399-eulerova-primka.html.

[4] KIMBERLING, Clark. *Encyclopedia of triangle centers* [online]. [cit. 2017-04-06]. Dostupné z: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart5.html.

[5] LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 1: základy geometrie v rovině*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. ISBN 80-7082-861-7.

[6] Math Open Reference: Triangles [online]. [cit. 2017-03-25]. Dostupné z: http://www.mathopenref.com/tocs/triangletoc.html.

[7] PECH, Pavel. *Selected topics in geometry with classical vs. computer proving*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2007. ISBN 978-981-270-942-4.

[8] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

[9] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 9788071963585.

[10] PraSe – Matematický korespondenční seminář. [online]. [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php?categ=1&supcats.

[11] SMYTH, M. R. F. *MacCool's Proof of Napoleon's Theorem* [online]. Irish Mathematical Society, č. 59, 2007, s. 71-72. [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull59/M5903.pdf.

[12] ŠRUBAŘ, Jiří. *Vlastnosti trojúhelníka a jejich analogie pro čtyřstěn: 25. konference o geometrii a počítačové grafice* [online]. [cit. 2017-03-17]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/srubar.pdf.

[13] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. 2. přeprac. vyd. Praha: Karolinum, 2004. ISBN 80-246-0814-6.

[14] ŠVRČEK, Jaroslav; VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. 1. vydání. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-017-88.

[15] VYŠÍN, Jan. *Geometrie pro pedagogické fakulty - 1. díl.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.