Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka úloh z lineární algebry a geometrie

Vypracoval: Jan Jelínek
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka úloh z lineární algebry a geometrie jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ………………………….

Anotace:

Cílem této bakalářské práce je sestavit sbírku úloh z lineární algebry a geometrie. Sbírka může sloužit jako učební pomůcka pro žáky střední a vysoké školy. Některé úlohy jsou ve sbírce ukázkově vyřešeny. Při jejich zadání i popisu řešení jsou použity ilustrační obrázky vytvořené ve vhodném programu dynamické geometrie (GeoGebra).

Klíčová slova:

GeoGebra, lineární algebra, geometrie, vektor, úlohy pro střední školy, úlohy pro vysoké školy

Abstract:

The aim of this bachelor thesis is to compile a collection of problems from linear algebra and geometry. The collection is intended to be used as a teaching tool at the high school and university. Some tasks are resolved in the collection. Sample images created in a suitable dynamical geometry program (GeoGebra) are used when entering and describing the solution.

Keywords:

GeoGebra, linear algebra, geometry, vector, tasks for high school, tasks for university

Poděkování

Touto cestou bych rád poděkoval panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a velkou ochotu při vedení mé bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod ... 4
Stručný přehled symboliky ... 5
2 Vzdálenost ... 6
2.1 Vzdálenost bodu od roviny ... 6
2.2 Vzdálenost přímky od roviny ... 17
2.3 Vzdálenost dvou rovin ... 21
3 Vzájemná poloha bodových podprostorů ... 24
3.1 Vzájemná poloha dvou přímek ... 24
3.2 Vzájemná poloha přímky a roviny ... 29
3.3 Vzájemná poloha dvou rovin ... 33
4 Odchylka ... 36
4.1 Odchylka dvou přímek ... 36
4.2 Odchylka přímky od roviny ... 40
5 Využití vektorů v geometrii ... 44
6 Lineární kombinace, Lineární závislost vektorů ... 51
7 Závěr ... 54
Použitá literatura ... 55

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvořit sbírku úloh z lineární algebry a geometrie. Toto téma jsem si vybral, protože mne velmi zaujal nápad vytvořit sbírku řešených úloh. Jelikož lineární algebra a geometrie patři mezi mé oblíbené odvětví matematiky, tak jsem si vybral právě je. Tato sbírka by měla čtenáři pomoci k pochopení základních souvislostí z daných oblastí.

Lineární algebrou rozumíme odvětví matematiky, které se zabývá především vektory, vektorovými prostory, soustavami lineárních rovnic nebo lineárními transformacemi. Lineární algebra má počátky již v 50. letech 19. století.

Geometrie je matematické odvětví, které se zabývá otázkami tvarů, velikostí a vzájemnými vztahy mezi obrazci a útvary v prostoru. Geometrie bývá podle některých názorů považována za nejstarší vědní obor vůbec. První zmínky o geometrii pochází již ze středověku.

V této bakalářské práci se budu věnovat úlohám, které jsou zaměřené na: vzdálenost bodových podprostorů, vzájemnou polohu těchto podprostorů, jejich odchylku nebo také lineární závislost a nezávislost vektorů. Každá z těchto kapitol má své podkapitoly, u kterých nejprve vyřeším alespoň jednu ukázkovou úlohu. Poté budou k dispozici neřešené úlohy, u kterých bude možnost si ověřit porozumění danému tématu. U některých úloh bude postup jen naznačen, abychom si uvědomili způsob řešení této úlohy. U řešených, ale i některých neřešených úloh budou k dispozici ilustrační obrázky, které by měly sloužit k lepší představě o úloze a ulehčit tak její vyřešení. Tyto obrázky budu vytvářet pomocí vhodného programu - GeoGebra. Tento program lze nalézt v (International GeoGebra Institute, 2017).

GeoGebra je dynamický matematický program, který spojuje geometrii, algebru, tabulkový procesor, grafy, statistiku a analýzu do jednoho snadno použitelného balíčku. Je přehledný, jeho ovládání je velmi snadné a rychle se vyvíjí, proto je GeoGebra tak oblíbenou mezi komunitou milionů uživatelů žijících prakticky ve všech zemích světa. (International GeoGebra Institute, 2017).

Cílem této bakalářské práce je vytvořit sbírku úloh z lineární algebry a geometrie. Měla by čtenáři pomoci k pochopení základních příkladů z daných témat.

Stručný přehled symboliky

¡	množina všech reálných čísel
¥	množina všech přirozených čísel
¢	množina všech celých čísel
$a \in A$	*a* je prvkem množiny *A*
$a \notin A$	*a* není prvkem množiny *A*
$A = \{a, b, c\}$	množina daná výčtem prvků *a, b, c*
$A[a_1, a_2, a_3]$	bod daný souřadnicemi a_1, a_2, a_3
$\emptyset, \{\ \}$	prázdná množina
$A = B$	*A* se rovná *B*
$A - B$	rozdíl množin *A* a *B*
$A \times B$	kartézský součin množin *A* a *B*
$A \cdot B$	skalární součin množin *A* a *B*
$a \wedge b$	konjunkce výroků *a* a *b*
$a \vee b$	disjunkce výroků *a* a *b*
$a \Rightarrow b$	*a* implikuje *b*; jestliže *a*, pak *b*
$a \Leftrightarrow b$	ekvivalence výroků *a*, *b*; *a* právě tehdy když *b*
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	vektor daný souřadnicemi u_1, u_2, u_3
$\lvert v \rvert$	absolutní hodnota (velikost) reálného, resp. komplexního čísla
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů *A*, *B*; velikost úsečky *AB*

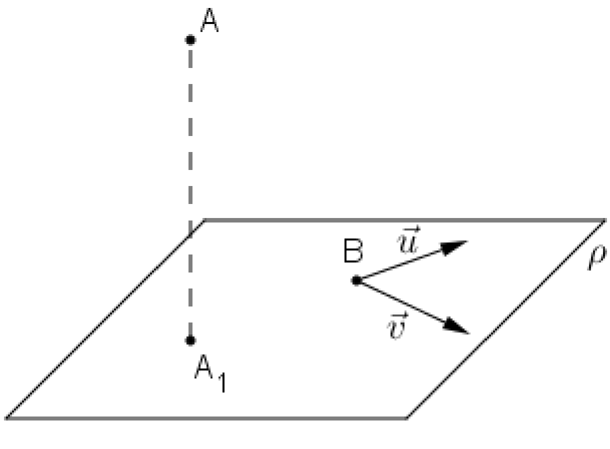
2 Vzdálenost

V této kapitole budeme řešit několik příkladů na téma vzdálenosti v analytické geometrii. Čekají nás příklady zaměřené na vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost přímky od roviny a vzdálenost jedné roviny od druhé roviny. Nejdříve si u každého tohoto tématu vyřešíme alespoň jeden vzorový příklad. Poté budete mít možnost si vyzkoušet obdobně neřešené příklady. Úlohy zaměřené na vzdálenost bodových podprostorů jsem čerpal ze zdrojů (Bican, 2009), (Budinský, 1983) a obdobné příklady lze najít v publikaci od Pecha (2004).

2.1 Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu od roviny je rovna velikosti nejkratší úsečky vedené od tohoto bodu k dané rovině. Z toho plyne, že úhel mezi danou rovinou a úsečkou spojující bod a rovinu bude vždy $90°$.

Příklad 1: V Eukleidovském prostoru E_3 určete vzdálenost bodu A od roviny $\varrho = \left[B, \vec{u}, \vec{v}\right]$, jestliže platí: $A[1,3,2], B[1,2,1]$, $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (1,2,-1)$.



Obr. 1 - Vzdálenost bodu A od roviny ϱ

Řešení: Uvedeme dva různé postupy řešení tohoto příkladu.

I) Použitím kolmého průmětu bodu *A* do roviny *ϱ*

Vzdálenost bodu *A* od kolmého průmětu A_1 bodu *A* do roviny ϱ je stejná jako vzdálenost bodu *A* od roviny ϱ, proto u tohoto způsobu použijeme právě kolmý průmět bodu *A* do roviny ϱ (viz obr. 1). Kolmým průmětem A_1 rozumíme průsečík roviny ϱ a kolmice spuštěné z bodu *A* k rovině, tj. patu té kolmice.

Určíme si kolmý průmět A_1 bodu *A* do roviny ϱ. Rovina je určena bodem *B* a vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které tvoří bázi jejího zaměření. Jelikož bod A_1 náleží rovině ϱ, existují takové hodnoty parametrů *t*, *s*, pro které je $A_1 = B + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$. Potom pro souřadnice bodu A_1 platí:

$$A_1\left[1+t+s, 2+2s, 1+t-s\right] \tag{1}$$

Nyní hledáme hodnoty parametrů *t*, *s*. K tomu využijeme skutečnost, že vektor $\overrightarrow{AA_1}$ je kolmý k rovině ϱ. Určíme si souřadnice vektoru $\overrightarrow{AA_1}$:

$$A_1 - A = \left[1+t+s, 2+2s, 1+t-s\right] - \left[1,3,2\right]$$

$$\overrightarrow{AA_1} = (t+s, -1+2s, -1+t-s)$$

Jestliže je vektor $\overrightarrow{AA_1}$ kolmý k rovině ϱ, pak je kolmý i k vektorům báze zaměření této roviny.

$$\overrightarrow{AA_1} \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} \perp \vec{u} \wedge \overrightarrow{AA_1} \perp \vec{v}$$

$$(A_1 - A)\cdot\vec{u} = 0$$
$$(A_1 - A)\cdot\vec{v} = 0$$

Po dosazení a výpočtu skalárního součinu získáme soustavu rovnic o dvou neznámých. V této soustavě rovnic budeme řešit dosud neznámé hodnoty parametrů *t*, *s*. Řešením této soustavy rovnic jsou hledané hodnoty parametrů *t*, *s*.

$$1\cdot(t+s) + 0\cdot(-1+2s) + 1\cdot(-1+t-s) = 0$$
$$\underline{1\cdot(t+s) + 2\cdot(-1+2s) - 1\cdot(-1+\mathrm{t}-\mathrm{s}) = 0}$$

$$2t - 1 = 0$$
$$\underline{6s - 1 = 0}$$

$$t = \frac{1}{2},\; s = \frac{1}{6}$$

Dosazením získaných hodnot parametrů *t*, *s* do daného vztahu (1) dostáváme souřadnice bodu A_1.

$$A_1\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6},2+2\frac{1}{6},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]\Rightarrow A_1\left[\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right]$$

Známe-li souřadnice bodů A a A_1, můžeme vypočítat jejich vzdálenost. Vzdálenost bodu A od bodu A_1 je totožná se vzdáleností bodu A od roviny ϱ.

Pro výpočet vzdálenosti bodů $M[m_1,m_2,m_3], N[n_1,n_2,n_3]$ použijeme vztah:

$$|v|=\sqrt{(\mathrm{m}_1-n_1)^2+(\mathrm{m}_2-n_2)^2+(\mathrm{m}_3-n_3)^2} \qquad (2)$$

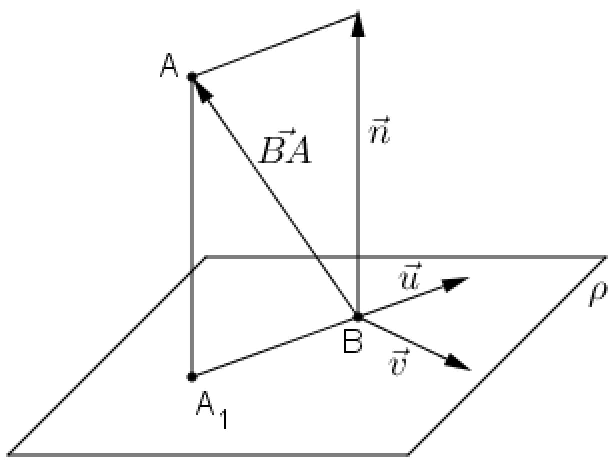
Dosazením souřadnic bodů A, A_1 do vztahu (2) získáváme vzdálenost bodu A od roviny ϱ:

$$|v|=\sqrt{\left(1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(3-\frac{7}{3}\right)^2+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2}\Rightarrow|v|=\frac{\sqrt{12}}{3}$$

Výsledek: Bod A je od roviny ϱ vzdálený $\frac{\sqrt{12}}{3}$.

II) Použitím kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{BA}$ do směru normálového vektoru roviny ϱ

U tohoto způsobu výpočtu využijeme skutečnost, že vzdálenost v je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{BA}$ do směru vektoru $\vec{n}$ (viz obr. 2).



Obr. 2 - Kolmý průmět vektoru $\overrightarrow{BA}$ do směru normálového vektoru

Normálový vektor $\vec{n}$ určíme jako výsledek vektorového součinu vektorů báze zaměření dané roviny.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = (1,0,1) \times (1,2,-1)$$

$$\vec{n} = (-2,2,2)$$

Ze souřadnic bodů A a B získáme souřadnice vektoru $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (0,1,1)$$

Potom pro velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{BA}$ do směru $\vec{n}$ platí vztah:

$$v(A,\varrho) = \frac{\left|(A-B)\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} \tag{3}$$

$$|v| = \frac{(0,1,1)\cdot(-2,2,2)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Jak již bylo řečeno, vzdálenost v je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{BA}$ do směru vektoru $\vec{n}$. Proto dosazením do vztahu (3) dostáváme vzdálenost bodu A od roviny ϱ.

Výsledek: Bod A je od roviny ϱ vzdálený $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Příklad 2: Vypočtěte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny ϱ: $4x+3y+2=0$.

Řešení: Počátek soustavy souřadnic si označíme bodem A. Ze zadání je zřejmé, že budeme počítat vzdálenost bodu $A[0,0,0]$ od roviny ϱ. Z obecné rovnice roviny ϱ určíme její normálový vektor $\vec{n}$ a bod, který této rovině náleží. Poté již můžeme použít kolmý průmět bodu A do roviny ϱ (viz příklad 1, postup I).

Výsledek: Vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny ϱ je $\frac{2}{5}$.

Příklady k procvičení

Příklad 3: Vypočtěte vzdálenost bodu A od roviny $\varrho = [B, \vec{u}, \vec{v}]$, jestliže platí: $A[2,2,5], B[2,3,1], \vec{u} = (0,1,-1), \vec{v} = (4,1,1).$

Výsledek: Vzdálenost bodu A od roviny ϱ je 2.

Příklad 4: Vypočtěte vzdálenost bodu B od roviny $\sigma = [\mathrm{A}, \vec{v}, \vec{w}]$, jestliže platí $B[2,1,4], \mathrm{A}[-2,1,1], \vec{v} = (1,-1,1), \vec{w} = (1,-3,-2).$

Výsledek: Vzdálenost bodu B od roviny σ je $\dfrac{7\sqrt{38}}{19}$.

Příklad 5: Vypočtěte vzdálenost bodu $\mathrm{A}[3,4,5]$ od roviny σ, která je zadána parametricky: $s : x = 2 - t + s, y = 3 + 2t + 3s, z = -1 - t - s,\ t, s \in \mathbb{R}$.

Řešení: Rovina σ je v tomto případě zadána parametricky. Z parametrického vyjádření roviny σ si určíme její dva směrové vektory a bod, který ji náleží. Poté již můžeme využít postupu u příkladu 1.

Výsledek: Vzdálenost bodu A od roviny σ je $\dfrac{31\sqrt{30}}{30}$.

Příklad 6: Na přímce p najděte takový bod, který je stejně vzdálený od rovin ϱ a d, jestliže platí: ϱ: $x + 2y + z + 1 = 0$, $d : x + 2y + z - 3 = 0$, $p : x + y + z = 0$.

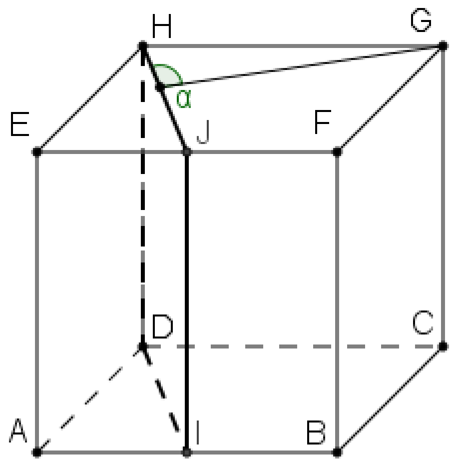
Řešení: Při porovnání normálových vektorů rovin ϱ a d zjistíme, že roviny jsou navzájem rovnoběžné a přímka je s nimi různoběžná. Hledaným bodem je střed úsečky určené průsečíky přímky s rovinami.

Výsledek: Bod, který je stejně vzdálený od rovin ϱ a d má souřadnice $[3,-1,0]$.

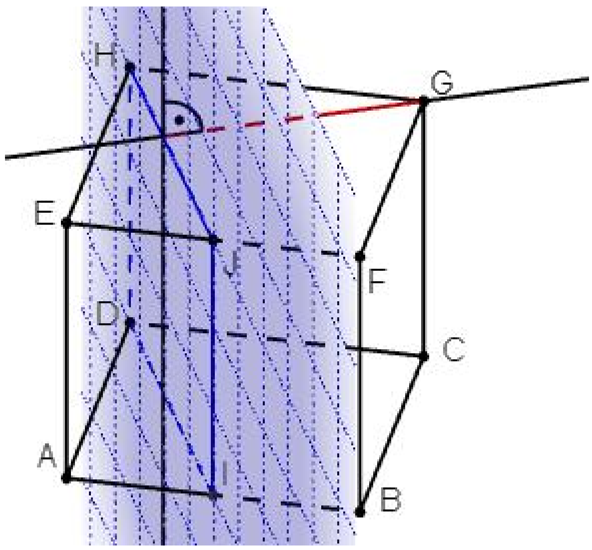
Nyní vypočítáme několik příkladů na vzdálenost bodu od roviny řešené v krychli.

Příklad 7: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočtěte vzdálenost bodu *G* od roviny *DHJ*, jestliže bod *J* je střed hrany *EF* a pro délku hrany *AB* platí: $|AB| = 3$.

Řešení: V tomto příkladu využijeme věty o podobnosti trojúhelníků.

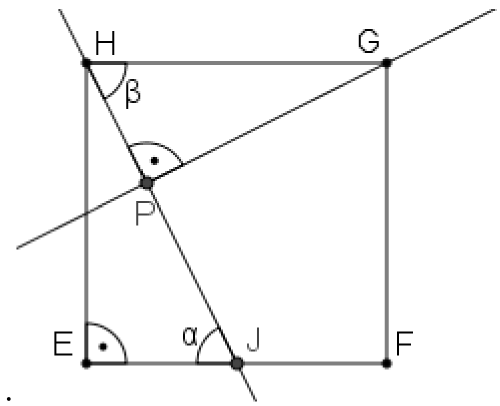


Obr. 3 - Kolmý průmět bodu G do roviny DHJ



Obr. 4 - 3D náhled kolmého průmětu bodu G do roviny DHJ

Tuto situaci si promítneme do horní podstavy krychle (viz obr. 5).



Obr. 5 - Situace v horní podstavě EFGH

Jelikož známe velikost hrany *EH* a délku úsečky *EJ,* tak si pomocí Pythagorovy věty určíme přeponu trojúhelníku *EJH*.

$$|JH| = \sqrt{|EJ|^2 + |EH|^2}$$
$$|JH| = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{11{,}25}$$

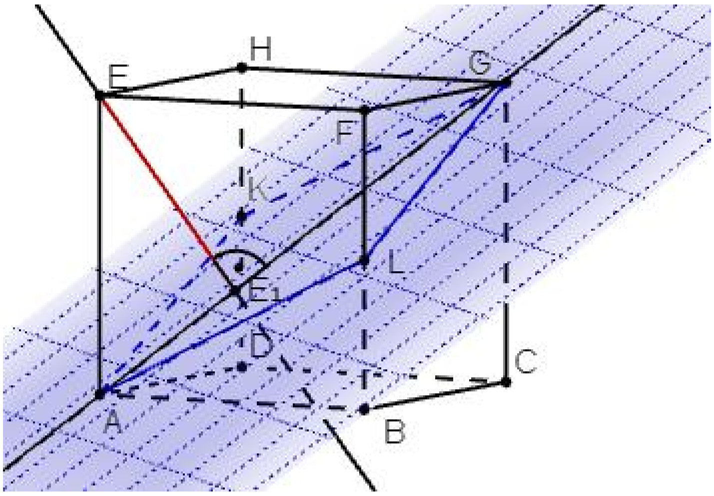
Použijeme větu „*uu*“ o podobnosti trojúhelníků, která zní: „Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou si trojúhelníky podobné“. Z této věty plyne, že trojúhelníky *JHE* a *HGP* jsou si podobné (viz obr. 5). Tyto trojúhelníky mají stejný pravý úhel a úhly α, β jsou shodné, protože jde o úhly střídavé. V následujícím kroku již určíme vzdálenost bodu *G* od bodu *P*, tudíž i od roviny *DHJ*.

$$\frac{|JH|}{|HE|} = \frac{|HG|}{|GP|}$$
$$\frac{\sqrt{11{,}25}}{3} = \frac{3}{|GP|}$$
$$|GP| = \frac{9}{\sqrt{11{,}25}}$$

Výsledek: Vzdálenost bodu *G* od roviny *DHJ* je $\dfrac{9\sqrt{11{,}25}}{11{,}25}$.

Příklad 8: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočtěte vzdálenost bodu *E* od roviny *AKG,* jestliže platí: $K \in DH; DK = HK, |AB| = 4.$

Řešení:



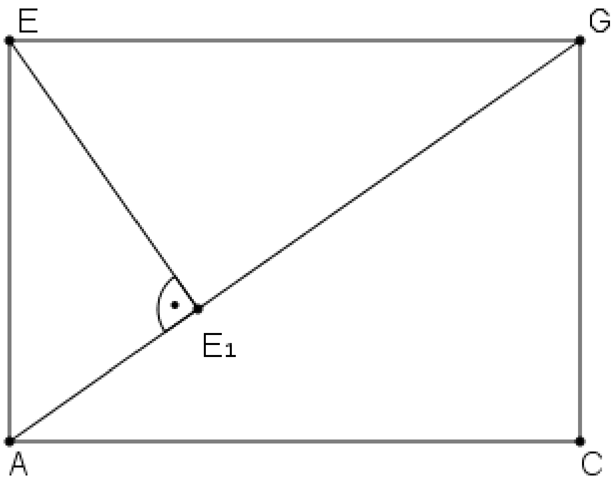
Obr. 6 - Kolmý průmět bodu E do roviny AKG

Označme *L* průsečík hrany *BF* s rovinou řezu. Pak platí:

$$AK \parallel LG \wedge AL \parallel KG; L = \frac{1}{2}|BF|$$

Vyznačme si kolmý průmět E_1 bodu *E* do roviny *AKG.* Délka úsečky EE_1 je vzdálenost bodu *E* od roviny *AKG*. Jelikož mohu bodem *E* vést pouze jednu kolmici k rovině řezu, je kolmý průmět E_1 jednoznačně určený bodem *E* a rovinou *AKG*.

Bod E_1 leží v rovině ACG, proto si situaci promítneme do této roviny (viz obr. 7).



Obr. 7 - Rovina ACG

Pomocí Pythagorovy věty si nejdříve vypočítáme délku strany *EG*.

$$|EG| = \sqrt{|EH|^2 + |GH|^2}$$
$$|EG| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$
$$|EG| = 4\sqrt{2}$$

Poté si pomocí Pythagorovy věty vypočítáme délku strany *AG*.

$$|AG| = \sqrt{|AE|^2 + |EG|^2}$$
$$|AG| = \sqrt{4^2 + (\sqrt{32})^2} = \sqrt{48}$$
$$|AG| = 4\sqrt{3}$$

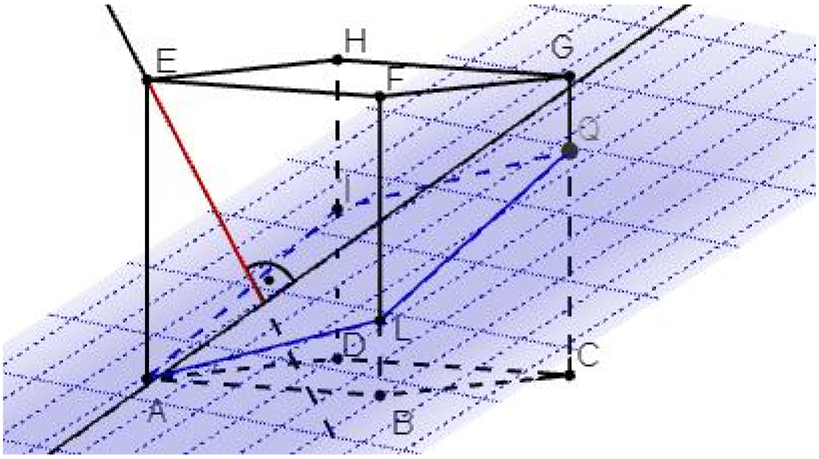
Použijeme-li větu „*uu*“ o podobnosti trojúhelníků, pak je z obr. 7 zřejmé, že trojúhelníky *AEG* a AE_1E jsou si podobné. Poté určíme vzdálenost úsečky EE_1.

$$\frac{|AG|}{|EG|} = \frac{|AE|}{|EE_1|}$$
$$\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{|EE_1|}$$
$$|EE_1| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Výsledek: Bod *E* je vzdálený od roviny *AKG* $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Příklady k procvičení

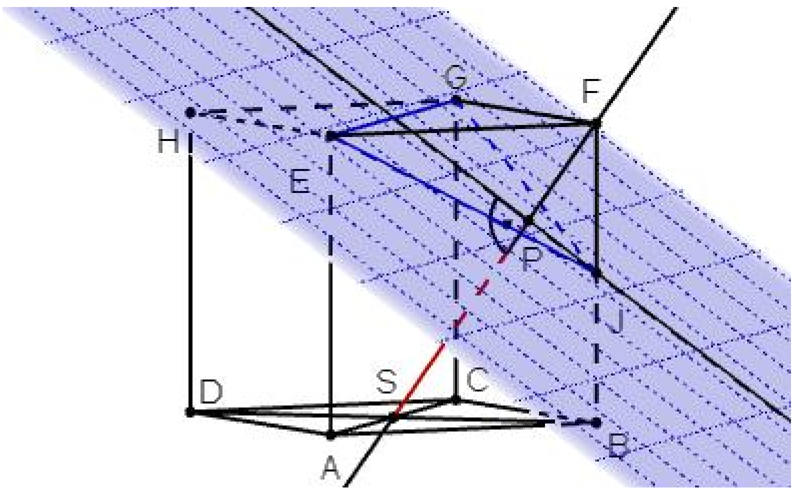
Příklad 9: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočtěte vzdálenost bodu *E* od roviny *ALI*, jestliže platí: $L \in BF; |FL| = 3|BL|, I \in DH; |DI| = |HI|, |AB| = 4.$ Výsledek zaokrouhlete na desetiny.



Obr. 8 - Kolmý průmět bodu E do roviny ALI

Výsledek: Bod *E* je vzdálený od roviny *ALI* 3,2.

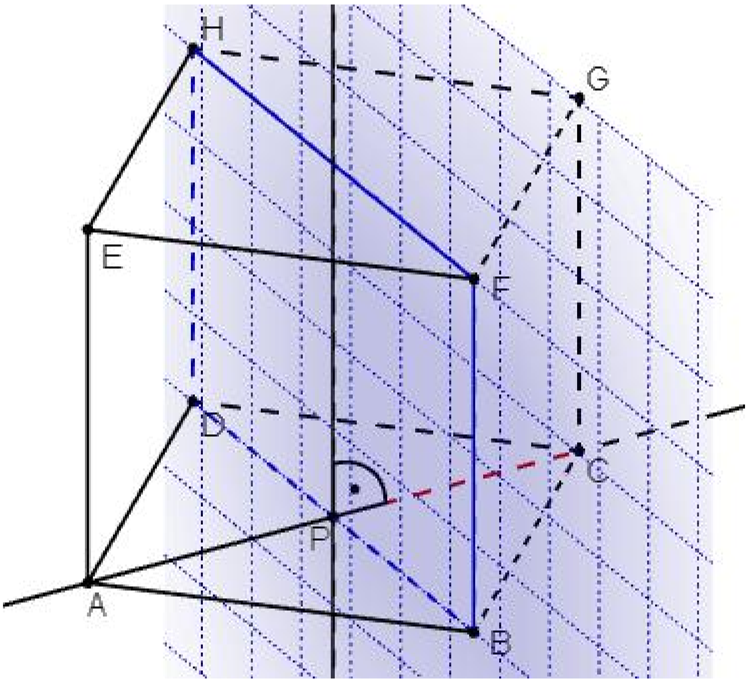
Příklad 10: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete vzdálenost průsečíku úhlopříček S dolní podstavy *ABCD* od roviny *EGJ*, jestliže bod *J* je střed hrany *BF*; $|AB| = 6$. Výsledek zaokrouhlete na desetiny.



Obr. 9 - Kolmý průmět P bodu S do roviny EGJ

Výsledek: Vzdálenost bodu *S* od roviny *EGJ* je 4,9.

Příklad 11: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočtěte vzdálenost bodu *C* od roviny *DBF*, jestliže $|AB| = 4$.



Obr. 10 - Kolmý průmět P bodu C do roviny DBF

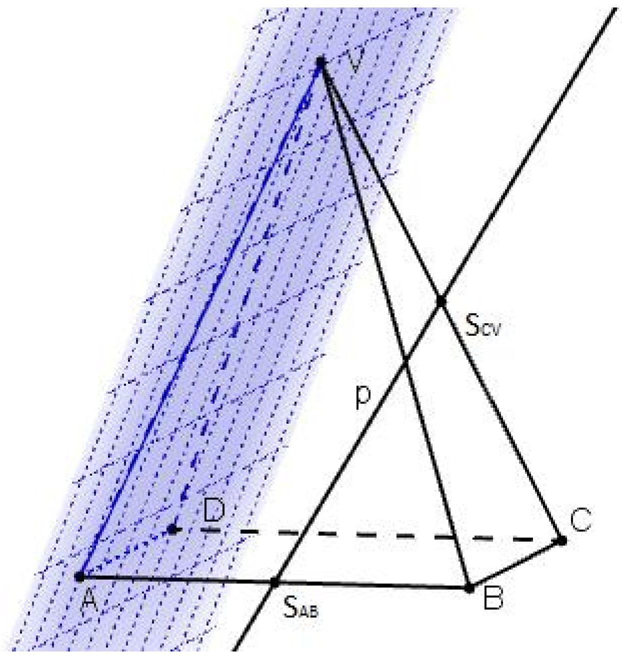
Výsledek: Vzdálenost bodu *C* od roviny *DBF* je $2\sqrt{2}$.

2.2 Vzdálenost přímky od roviny

V prostoru rozlišujeme tři různé vzájemné polohy přímky a roviny: rovnoběžná, incidentní a různoběžná. Je-li přímka s rovinou rovnoběžná, je jejich vzdálenost rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky od této roviny. Při výpočtech využijeme znalostí z předchozí kapitoly. V případě, kdy přímka je s rovinou různoběžná, mají společný bod (průsečík), tzn. jejich vzájemná vzdálenost je 0. Je-li přímka s rovinou incidentní, pak přímka leží v rovině a jejich vzájemná vzdálenost je 0.

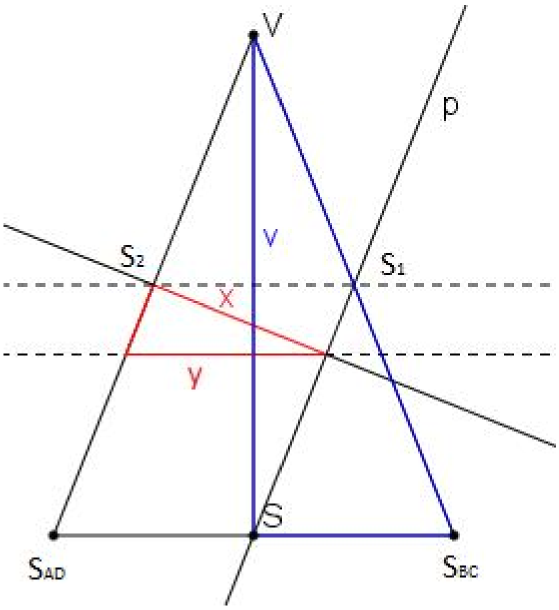
Příklad 12: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Určete vzdálenost přímky $S_{AB}S_{CV}$ od roviny *ADV*, platí-li: $|AB| = 4$, $v = 5$.

Řešení: Přímku $S_{AB}S_{CV}$ nazývejme *p*. Přímka *p* je rovnoběžná s rovinou *ADV*, obsahuje-li rovina *ADV* alespoň jednu přímku, která je rovnoběžná s přímkou *p*. Uvažujme přímku AS_{DV}, která náleží rovině *ADV*. Přímka AS_{DV} je rovnoběžná s přímkou *p*, tudíž i rovina *ADV* je rovnoběžná s přímkou *p*.



Obr. 11 – Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV

Určíme si kolmou rovinu k rovině *ADV*, v ní sestrojíme průmět přímky *p* do roviny *ADV*. Kolmá rovina k rovině *ADV* je například rovina $S_{AD}S_{BC}V$. Pak můžeme uvažovat z hlediska roviny $S_{AD}S_{BC}V$ (viz obr. 12).



Obr. 12 - Situace v jedné rovině $S_{AD}S_{BC}V$

Velikost vodorovné příčky mezi úsečkou SS_1 a úsečkou $S_{AD}S_2$ je 2, protože velikost úsečky SS_{AD} je 2.

Pomocí Pythagorovy věty zjistíme délku úsečky $S_{BC}V$.

$$|S_{BC}V| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Nyní využijeme podobnost vyznačených trojúhelníků:

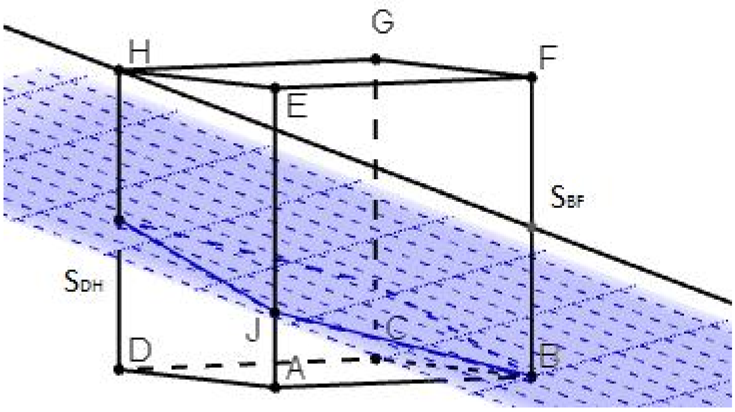
$$\frac{|SV|}{|S_{BC}V|} = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{29}}$$

Výsledek: Vzdálenost přímky $S_{AB}S_{CV}$ od roviny *ADV* je $\frac{10\sqrt{29}}{29}$.

Příklady k procvičení

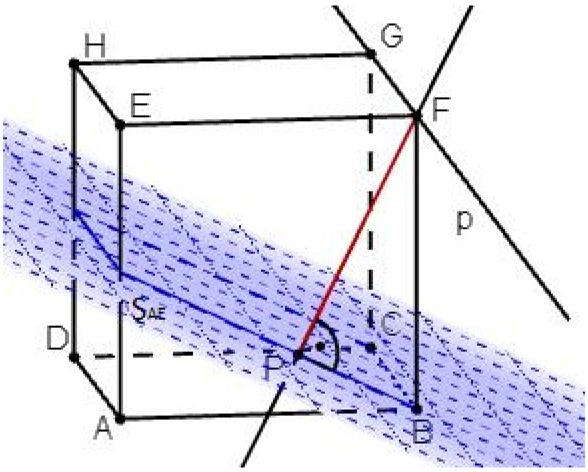
Příklad 13: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Vypočtěte vzdálenost přímky HS_{BF} od roviny BJS_{DH}, jestliže $|AB| = 4$ a $J \in AE; |EJ| = 3|AJ|$.



***Obr. 13 – Vzdálenost přímky p od roviny** BJS_{DH}*

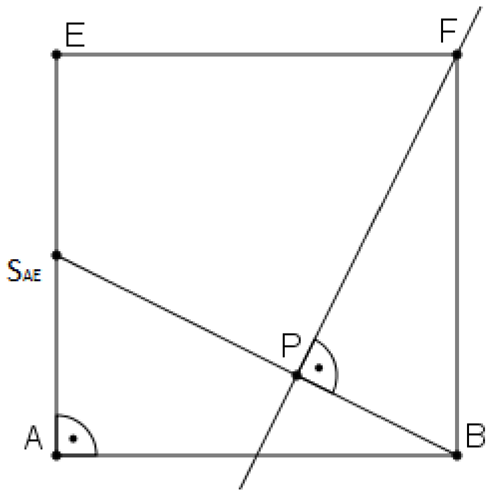
Výsledek: Vzdálenost přímky HS_{BF} od roviny BJS_{DH} je $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Příklad 14: Je dána krychle *ABCDEFGH*, $|AB| = 4$. Určete vzdálenost přímky *FG* od roviny BCS_{AE}.



***Obr. 14 – Vzdálenost přímky FG od roviny** BCS_{AE}*

Řešení: Rovina BCS_{AE} je kolmá k rovině přední stěny $ABFE$. Kolmice na rovinu BCS_{AE} vedená z přímky GF může ležet v přední stěně $ABFE$, proto si zvolíme na přímce GF bod F a hledáme jeho vzdálenost od roviny BCS_{AE}. Situaci si promítneme do přední stěny $ABFE$.



Obr. 15 – Situace promítnutá do přední stěny ABFE

Nyní využijeme Pythagorovy věty pro výpočet strany BS_{AE} trojúhelníku ABS_{AE}. Podle věty „*uu*“ o podobnosti trojúhelníků poznáme, že trojúhelníky BAS_{AE} a FPB jsou si podobné. Jestliže pak známe strany AB, BS_{AE} trojúhelníku BAS_{AE} a strany PF, FB trojúhelníku FPB, vypočítáme vzdálenost FP. Vzdálenost FP je rovna vzdálenosti přímky FG od roviny BCS_{AE}.

Výsledek: Vzdálenost přímky FG od roviny BCS_{AE} je $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

2.3 Vzdálenost dvou rovin

Rozlišujeme tři vzájemné polohy dvou rovin v prostoru E_3: rovnoběžná, různoběžná a totožná. Vzdálenost dvou rovin počítáme pouze tehdy, když jsou roviny rovnoběžné. Jsou-li roviny ϱ, σ rovnoběžné, pak je jejich vzdálenost rovna vzdálenosti libovolného bodu $X \in s$ od roviny ϱ. Jakmile jsou dvě roviny různoběžné, je jejich průnikem přímka (průsečnice), tzn. jejich vzájemná vzdálenost je 0. U rovin totožných je jejich vzájemná vzdálenost také 0.

Příklad 15: Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, platí-li: $r: 2x - 6y + 3z + 15 = 0$, $s: 2x - 6y + 3z - 6 = 0$.

Řešení: Nechť rovnice daných rovin jsou $r: ax + by + cz + d = 0$, $s: ax - by + cz + e = 0$. Již víme, že vzdálenost rovin ρ, σ je rovna vzdálenosti libovolného bodu $M \in r$ od roviny σ. Označíme-li $M[m_1, m_2, m_3]$, potom podle:

$$|rs| = |Ms| = \frac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c \cdot m_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4}$$

V důsledku rovnosti $am_1 + bm_2 + cm_3 + d = 0$ máme $am_1 + bm_2 + cm_3 = -d$. Dosazením do (4) dostáváme vztah:

$$|rs| = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{5}$$

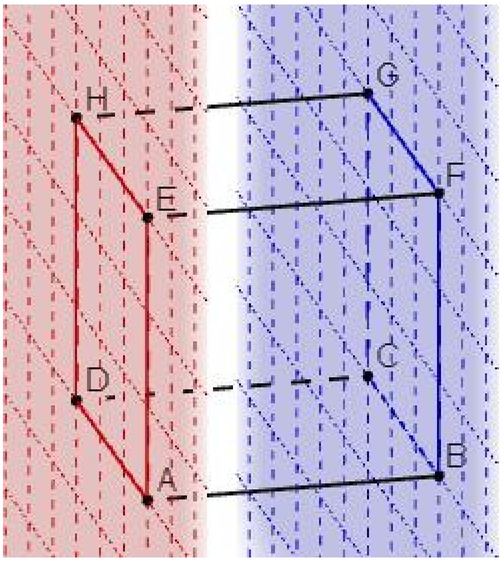
(Pech, 2004)

Dosazením do vztahu (5) vypočítáme vzdálenost bodu rovin ρ, σ:

$$|rs| = \frac{|-6 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-6^2) + 3^2}} = 3$$

Výsledek: Vzájemná vzdálenost rovin ρ, σ je 3.

Příklad 16: Je dána krychle *ABCDEFGH*, $|AB| = 4$. Určete vzájemnou polohu rovin *BCF* a *ADH*. Jsou-li roviny rovnoběžné, určete jejich vzdálenost.



Obr. 16 – Vzdálenost roviny BCF od roviny ADH

Řešení: Snadno poznáme, že roviny *ADH* a *BCF* jsou rovnoběžné. Zvolíme si libovolný bod roviny *ADH*, zvolíme bod *A*. Určíme-li si kolmý průmět A_1 bodu *A* do roviny *BCF*, pak jeho vzdálenost od bodu *A* je rovna vzdálenosti roviny *ADH* od roviny *BCF*. V tomto případě se kolmý průmět A_1 bodu *A* rovná bodu *B*. Budeme tedy počítat vzdálenost bodu *A* od bodu *B*.

Výsledek: Roviny *ADH* a *BCF* jsou rovnoběžné. Jejich vzájemná vzdálenost je 4.

Příklady k procvičení

Příklad 17: Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, které jsou zadány obecně:

$\varrho: 4x+3y-12z-8=0,\ s\ : 4x+3y-12z+18=0.$

Výsledek: Vzájemná vzdálenost rovin ϱ, σ je 2.

Příklad 18: Určete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ. Jsou-li roviny rovnoběžné, určete jejich vzdálenost. $\varrho: x-3y+11z-22=0,\ s\ : x-3y+11z+18=0.$

Řešení: Dvě roviny jsou rovnoběžné právě tehdy, když jsou rovnoběžné jejich normálové vektory. Normálové vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když normálový vektor $\vec{n}_1$ je násobkem normálového vektoru $\vec{n}_2$. Ze zadání je zřejmé, že normálový vektor $\vec{n}_1$ roviny ϱ je násobkem normálového vektoru $\vec{n}_2$ roviny σ, tudíž roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné.

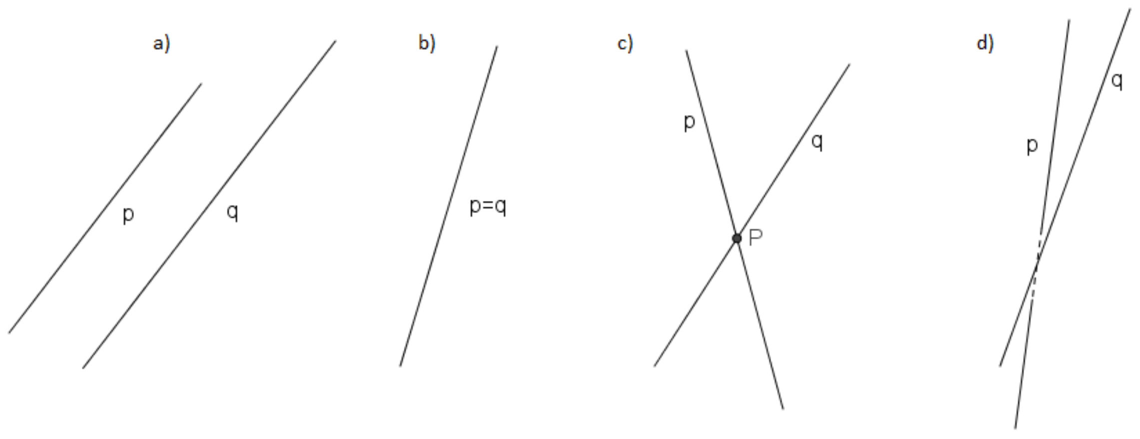
Výsledek: Roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné. Jejich vzájemná vzdálenost je $\dfrac{40\sqrt{131}}{131}$.

3 Vzájemná poloha bodových podprostorů

V této kapitole se seznámíme s příklady na téma vzájemná poloha bodových podprostorů. Příklady jsou rozdělené do podkapitol vzájemná poloha dvou přímek, vzájemná poloha přímky a roviny a vzájemná poloha dvou rovin. V těchto tématech si objasníme, jaké vzájemné polohy jednotlivých útvarů mohou nastat. Nejdříve si u každého tohoto tématu vyřešíme alespoň jeden vzorový příklad. Poté budete mít možnost si vyzkoušet obdobné neřešené příklady. Úlohy na toto téma jsem čerpal v (Tlustý, 2003), (Kuřina, 1996). Podobné příklady můžeme nalézt i v (Polák, 2008).

3.1 Vzájemná poloha dvou přímek

V prostoru rozlišujeme tři různé vzájemné polohy dvou přímek. Dvě přímky mohou být rovnoběžné (a), totožné (b), různoběžné (c) nebo mimoběžné (d). Přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, když nemají žádný společný bod a jejich směrové vektory jsou lineárně závislé. Přímky jsou totožné právě tehdy, když mají společné všechny body a mají stejný směr. Přímky jsou mimoběžné právě tehdy, když přímky nemají žádný společný bod a mají různý směr. Přímky jsou různoběžné, jestliže mají právě jeden společný bod.



Obr. 17 – Vzájemná poloha přímek

Příklad 19: Určete vzájemnou polohu přímek $p(A,\vec{u})$ a $q(B,\vec{v})$, platí-li: $A[3,1,1], \vec{u} = (1,-2,1), B[1,-4,2], \vec{v} = (2,1,-1).$

Řešení: Nejdříve zjistíme, zda jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně závislé. Pokud jsou směrové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně závislé, pak jsou přímky *p* a *q* rovnoběžné nebo totožné. Ve chvíli, kdy jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně nezávislé, pak jsou přímky *p* a *q* buďto různoběžné nebo mimoběžné.

$$\vec{u} = (1,-2,1), \vec{v} = (2,1,-1)$$

Vidíme, že neexistuje žádné $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot \vec{u} = \vec{v}$. Z toho vyplývá, že přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

V následujícím kroku si určíme parametrické rovnice přímek *p* a *q*, z kterých určíme, zda přímky *p* a *q* mají společný bod.

Každá přímka daná bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ lze zapsat pomocí parametrických rovnic:

$$\mathrm{x} = a_1 + \mathrm{u}_1, \ \ \mathrm{y} = a_2 + u_2, \ z = a_3 + u_3$$

$$p: \mathrm{x} = 3 + \mathrm{t}, \mathrm{y} = 1 - 2t, z = 1 + t; \ t \in \mathbb{R}$$
$$q: x = 1 + 2s, y = -4 + s, z = 2 - s; \ \mathrm{s} \in \mathbb{R}$$

Pro určení společného bodu přímek *p* a *q* vyřešíme soustavu tří rovnic o dvou neznámých. V případě, že soustava rovnic nemá řešení, přímky nemají společný bod a jsou mimoběžné. Jestliže soustava bude mít řešení, určíme si společný bod přímek *p* a *q*. V tomto případě jsou přímky *p* a *q* různoběžné.

$$\begin{aligned} 3 + t &= 1 + 2s \\ 1 - 2t &= -4 + s \\ 1 + t &= 2 - s, \ t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s = -3, \ t = 4 \\ &0 \neq 9 \end{aligned}$$

Výsledek: Jelikož soustava nemá řešení, znamená to, že přímky nemají žádný společný bod. Přímky jsou mimoběžné.

Příklad 20: Určete vzájemnou polohu přímek *p* a *q*, jsou-li zadány parametricky: $\mathrm{p}: \mathrm{x}=4-s, y=-1+3s, z=1+s; \mathrm{s} \in \mathbb{R}$, $q: x=-2+2t, y=5-6t, z=3-2t; t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Zjistíme, zda vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně závislé:

$$\vec{u}=(-1,3,1), \vec{v}=(2,-6,-2)$$

Vidíme, že existuje takové $a \in \mathbb{R}$, že $a \cdot \vec{u}=\vec{v}$; $a=-2$. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně závislé. Z toho vyplývá, že přímky jsou rovnoběžné nebo totožné. Nyní ověříme, zda jsou přímky totožné. Zvolíme si libovolný bod na přímce *p* a dosadíme ho přímky *q*.

Zvolíme si bod $A \in p: A[4,-1,1]$

$$\begin{aligned} 4&=-2+2t \Rightarrow t=3 \\ -1&=5-6t \Rightarrow t=1 \\ 1&=3-2t \Rightarrow t=1 \end{aligned}$$

Ze zápisu je zřejmé, že bod *A* neleží na přímce *q*, tudíž jsou přímky rovnoběžné.

Výsledek: Přímky *p* a *q* jsou rovnoběžné.

Příklad 21: Zjistěte vzájemnou polohu dvou přímek, jsou-li přímky *p, q* zadány parametricky. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík. $p: x=1+2s, y=1+3s, z=3-s;\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}$, $q: \mathrm{x}=2+\mathrm{t}, \mathrm{y}=1+t, z=-2-2t;\ t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Nejprve určíme, zda směrové vektory přímek *p, q* jsou lineárně závislé:

$$\vec{u}_p=(2,3,-1), \vec{v}_q=(1,1,-2)$$

Vidíme, že neexistuje žádné $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot \vec{u}=\vec{v}$, tzn. přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné. V následujícím kroku určíme pomocí parametrických rovnic přímek *p* a *q*, zda přímky *p* a *q* mají společný bod. Pro určení společného bodu přímek *p* a *q* vyřešíme soustavu tří rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 1+2s &= 2+t \\ 1+3s &= 1+t \\ 3-s &= -2-2t;\ t,s\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parametry u prvních dvou rovnic nám vychází: $t=-3,\ s=-1$. Jestliže do třetí rovnice dosadíme za parametry *t*, *s*, vychází nám $4=4$. Přímky *p*, *q* jsou tedy různoběžné a mají společný bod. Společný bod vypočítáme dosazením za parametr *t* do parametrických rovnic přímky *q*, popřípadě dosazením za parametr *s* do parametrických rovnic přímky *p*.

Výsledek: Přímky *p* a *q* jsou různoběžné. Jejich průsečíkem je bod $P[-1,-2,4]$.

Příklady k procvičení

Příklad 22: Zjistěte vzájemnou polohu přímek *a* a *b*, jsou-li zadány parametricky. V případě, že jsou různoběžné, určete jejich průsečík. $a: x = 3+5t, y = 2-7t; t \in \mathbb{R}$, $b: x = 1-s, y = 2s; s \in \mathbb{R}$.

Výsledek: Přímky *a* a *b* jsou různoběžné. Průsečík přímek je bod $P[-7,16]$.

Příklad 23: Určete ***n*** takové, aby přímky *p* a *q* byly různoběžné: $p: x = 2+s, y = 3-2s, z = 4; s \in \mathbb{R}$, $q: x = 1-4t, y = n+t, z = 1-3t; t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Dvě přímky jsou různoběžné právě tehdy, když jsou jejich směrové vektory lineárně nezávislé a mají libovolný společný bod. Vytvoříme soustavu tří rovnic o dvou neznámých pomocí parametrických rovnic přímek *p*, *q*. V případě, že tato soustava bude mít řešení, budou mít přímky *p*, *q* společný bod.

Výsledek: $n = -2$.

3.2 Vzájemná poloha přímky a roviny

V prostoru rozlišujeme tři různé vzájemné polohy přímky a roviny: rovnoběžná, incidentní a různoběžná. Jestliže přímka s rovinou nemá žádný společný bod, pak je daná přímka s danou rovinou rovnoběžná. Má-li přímka s rovinou právě jeden společný bod, pak je přímka s rovinou různoběžná. Jejich společný bod nazýváme průsečíkem. V případě, kdy má přímka s rovinou alespoň dva společné body, tak přímka leží v rovině. V tomto případě je přímka s rovinou incidentní.

Příklad 24: Určete vzájemnou polohu přímky $p(A,\vec{u})$ a roviny $\varrho = [B,\vec{v},\vec{w}]$, jestliže platí: $A[1,2,2], \vec{u} = (-1,1,3), B[3,1,2], \vec{v} = (2,1,-1), \vec{w} = (2,-2,1).$

Řešení: Nejprve si určíme normálový vektor $\vec{n}$ roviny ϱ jako výsledek vektorového součinu vektorů $\vec{v}$ a $\vec{w}$ dané roviny. Pokud normálový vektor $\vec{n}$ roviny ϱ není kolmý na směrový vektor přímky *p*, tak je přímka *p* různoběžná s rovinou ϱ. Jestliže normálový vektor $\vec{n}$ roviny ϱ je kolmý na směrový vektor přímky *p*, pak je přímka s rovinou buďto rovnoběžná nebo incidentní.

$$\vec{n} = (2,-1,1)\times(2,-2,-1) = (3,0,2)$$

Pomocí skalárního součinu vektorů $\vec{u}$ a $\vec{n}$ zjistíme, zda jsou na sebe vektory kolmé.

Dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé, je-li jejich skalární součin roven 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = -1\cdot 3 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 \neq 0 \Rightarrow \text{nejsou kolmé}$$

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{n}$ nejsou navzájem kolmé, tudíž přímka *p* a rovina ϱ jsou různoběžné. V tomto případě nalezneme jejich průsečík. Průsečík nalezneme pomocí parametrických rovnic přímky *p* a obecné rovnice roviny ϱ.

$$p: x = 1 - t, y = 2 + t, z = 2 + 3t;\ t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\varrho: 3x + 2z - 13 = 0$$

Abychom zjistili průsečík přímky *p* a roviny *ϱ*, dosadíme souřadnice parametrických rovnic přímky *p* do obecné rovnice roviny *ϱ*. Dosazením souřadnic parametrických rovnic přímky *p* (5) do obecné rovnice roviny *ϱ* vypočítáme hodnotu parametru *t*.

$$3 \cdot (1 - t) + 2 \cdot (2 + 3t) - 13 = 0 \Rightarrow t = -\frac{14}{3}$$

Následným zpětným dosazením získané hodnoty parametru *t* do parametrických rovnic přímky *p* (5) určíme průsečík přímky *p* s rovinou *ϱ*.

$$P\left[1 + \frac{14}{3}, 2 - \frac{14}{3}, 2 + 3(-\frac{14}{3})\right] = \left[\frac{17}{3}, -\frac{8}{3}, -12\right]$$

Výsledek: Přímka *p* a rovina *ϱ* jsou různoběžné a jejich průsečíkem je $P\left[\frac{17}{3}, -\frac{8}{3}, -12\right]$.

Příklad 25: Určete vzájemnou polohu přímky *q* a roviny *σ*, jestliže platí: $q: x = 1 - 6s, y = 3 + s,\ z = -1 + 2s; s \in \mathbb{R},\ \sigma: x - 4y + 5z + 2 = 0$.

Řešení: Nejprve si určíme, zda normálový vektor $\vec{n}$ roviny *σ* je kolmý na směrový vektor přímky *q*.

$$\vec{s_q} \cdot \vec{n_\sigma} = (-6, 1, 2) \cdot (1, -4, 5) = 0$$

Jestliže je skalární součin normálového vektoru $\vec{n}$ roviny *σ* a směrového vektoru přímky *q* roven nule, pak přímka *q* je s rovinou *σ* buďto rovnoběžná nebo incidentní. Zda je přímka s rovinou rovnoběžná nebo incidentní určíme tak, že ověříme, zda existuje takový bod dané přímky *q*, který náleží rovině *σ*.

Bod přímky *q* označíme *A*. Bod *A* určíme z parametrického vyjádření přímky *q* a následně ho dosadíme do obecné rovnice roviny *σ*.

$$A[1,3,-1]$$

$$x-4y+5z+2=0$$

$$1-4\cdot 3+5\cdot(-1)+2=0 \Rightarrow -14 \neq 0$$

Bod *A* v rovině *σ* neleží, tzn. přímka *p* je s rovinou *σ* rovnoběžná.

Výsledek: Přímka *p* a rovina *σ* jsou rovnoběžné.

Příklad 26: Určete vzájemnou polohu přímky *q* a roviny *σ*, jestliže platí: $q: x=1-6s, y=2+s, z=1+2s; s\in$ ¡ , s $: x-4y+5z+2=0$.

Řešení: Určíme si, zda normálový vektor $\vec{n}$ roviny *σ* je kolmý na směrový vektor přímky *q*.

$$\vec{s_q}\cdot\vec{n_s}=(-6,1,2)\cdot(1,-4,5)=0$$

Skalární součin normálového vektoru $\vec{n}$ roviny *σ* a směrového vektoru přímky *q* je roven nule $\Rightarrow$ přímka *q* je s rovinou *σ* buďto rovnoběžná nebo incidentní. Z parametrických rovnic přímky *q* určíme bod *A* ležící na přímce *q*. Nyní zjistíme, zda bod *A* leží v rovině *σ*.

Dosadíme-li bod *A* do roviny *σ*, vidíme, že bod $A\in s$.

$$A[1,2,-1]$$

$$x-4y+5z+2=0$$

$$1-4\cdot 2+5\cdot 1+2=0 \Rightarrow 0=0$$

Bod $A\in s$, tzn. přímka *q* je s rovinou σ incidentní.

Výsledek: Přímka *q* a rovina *σ* jsou incidentní.

Příklady k procvičení

Příklad 27: Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \vec{u})$ a roviny ϱ: $x - 2y + 3z + 5 = 0$, jestliže platí: $A[3, -2, 4], \vec{u} = (4, -1, 2)$.

Řešení: Zjistíme, zda směrový vektor přímky *p* je kolmý k normálovému vektoru roviny ϱ. Poté si určíme parametrické rovnice přímky *p* a postupujeme podle příkladu 24.

Výsledek: Přímka *p* a rovina ϱ jsou různoběžné a jejich průsečíkem je $P[-5, 0, 0]$.

Příklad 28: Určete vzájemnou polohu přímky *p* a roviny *σ*, jestliže platí: $\mathrm{p}: x = 3 - 5s, y = -3 + 2s, z = -1 - s; s \in \mathbb{R}$, $\sigma: 2x + 3y - 4z + 3 = 0$.

Výsledek: Přímka *p* a rovina *σ* jsou rovnoběžné.

3.3 Vzájemná poloha dvou rovin

Vzájemná poloha dvou rovin ve vektorovém prostoru E_3 může být rovnoběžná, totožná nebo různoběžná. Jsou-li dvě roviny navzájem rovnoběžné, nemají pak roviny žádný společný bod. Jsou-li dvě roviny totožné, mají roviny nekonečně mnoho společných bodů. Jsou-li dvě roviny navzájem různoběžné, mají roviny nekonečně mnoho společných bodů. Spojením společných bodů různoběžných rovin dostaneme průsečnici rovin. Dvě různoběžné roviny se protínají. V případě dvou rovin snadno rozhodneme o jejich rovnoběžnosti, případně totožnosti, porovnáním jejich obecných rovnic.

Příklad 29: Určete vzájemnou polohu 2 rovin, jestliže platí: $\varrho: 2x + 4y + z - 8 = 0$, $s: -6x - 12y - 3z - 6 = 0$.

Řešení: Roviny jsou rovnoběžné právě tehdy, když jsou jejich normálové vektory rovnoběžné. Z obecných rovnic rovin ϱ a σ si určíme normálové vektory. Poté určíme, zda jsou vektory lineárně závislé. Jestliže jsou vektory lineárně závislé, pak jsou roviny rovnoběžné. Jestliže jsou vektory lineárně nezávislé, pak jsou roviny různoběžné.

$$\vec{n}_r = (2, 4, 1), \vec{n}_s = (-6, -12, -3)$$

Vidíme, že existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot \vec{u} = \vec{v}$; $a = -3$. Z toho vyplývá, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně závislé, tzn. roviny jsou rovnoběžné. Totožné by byly, pokud by rovnice roviny ϱ byla násobkem rovnice roviny σ.

Výsledek: Roviny ϱ a σ jsou rovnoběžné.

Příklad 30: Napište rovnici roviny ϱ, která je rovnoběžná s vektory $\vec{u} = (1, -2, 3), \vec{v} = (3, 1, -1)$ a prochází bodem $A[1, 0, 3]$.

Řešení: Má-li být rovina ϱ rovnoběžná s vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, musí být její normálový vektor kolmý na oba tyto vektory.

$$\vec{n} \perp \vec{u} \wedge \vec{n} \perp \vec{v}$$

Podle věty „Dva nenulové vektory jsou navzájem kolmé, je-li jejich skalární součin roven 0.“, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, platí:

$$
\begin{aligned}
&(n_1, n_2, n_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 0 \wedge (n_1, n_2, n_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0 \\
&(n_1, n_2, n_3) \cdot (1, -2, 3) = 0 \wedge (n_1, n_2, n_3) \cdot (3, 1, -1) = 0
\end{aligned}
$$

Dostáváme soustavu 2 rovnic o třech neznámých *a, b, c*.

$$
\begin{aligned}
&n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \\
&\underline{3n_1 + n_2 - n_3 = 0 / \cdot 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&7n_1 + n_3 = 0 \\
&n_3 = -7n_1
\end{aligned}
$$

V následujícím kroku si zvolíme jednu z neznámých a zbylé dvě neznámé dopočítáme. Pro nejjednodušší výpočet zvolíme $n_1 = 1$: $n_1 = 1, n_3 = -7, n_2 = -10$.

Jestliže má bod *A* náležet rovině ϱ, dosadíme ho do vypočtené rovnice roviny ϱ a dopočítáme hodnotu parametru *d*.

$$
\begin{aligned}
&x - 7y - 10z + d = 0 \\
&1 - 7 \cdot 0 - 10 \cdot 3 + d = 0 \\
&d = 29 \Rightarrow x - 7y - 10z + 29 = 0
\end{aligned}
$$

Výsledek: Rovnice roviny ϱ má tvar: $x - 7y - 10z + 29 = 0$.

Příklady k procvičení

Příklad 31: Určete vzájemnou polohu dvou rovin, jestliže platí: $\varrho: 2x + 4y + z - 8 = 0$, $\sigma: 2y + z - 6 = 0$.

Výsledek: Roviny ϱ a σ jsou různoběžné. Průsečnice rovin je $p: x = t, y = 1 - 3t, z = 4 + 6t;\ t \in \mathbb{R}$.

Příklad 32: Určete vzájemnou polohu 2 rovin, jestliže platí: $\varrho: x - 2y + 3z - 4 = 0$, $\sigma: 2x - 4y + 6z - 8 = 0$

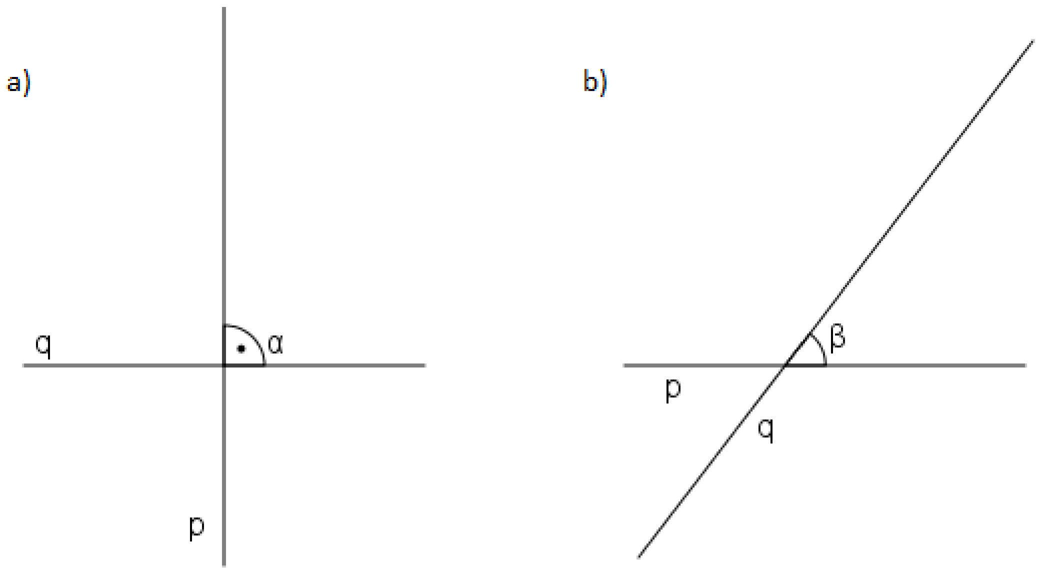
Výsledek: Roviny ϱ a σ jsou rovnoběžné.

4 Odchylka

V této části se setkáme s příklady zaměřenými na odchylky jednotlivých útvarů. Budeme se zabývat příklady na odchylku dvou přímek nebo na odchylku dvou rovin. Nejdříve si u každého tohoto tématu vyřešíme jeden vzorový příklad. Poté budete mít možnost si vyzkoušet obdobné neřešené příklady. Řešené příklady jsem čerpal v (Kuřina, 1990), (Pech, 2004).

4.1 Odchylka dvou přímek

U odchylky dvou přímek budeme počítat velikost každého z pravých (a) nebo ostrých (b) úhlů, které spolu přímky svírají. V případě, že jsou dvě přímky rovnoběžné, je odchylka těchto přímek 0 stupňů.



Obr. 18 – Odchylky dvou přímek

Odchylkou dvou nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ nazýváme číslo $a \langle 0, p \rangle$, pro které platí:

$$\cos a = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Pokud počítáme odchylku přímek, využijeme upravený vztah (6) odchylky dvou nenulových vektorů, který nám zajistí, že:

$$\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Absolutní hodnota v čitateli vztahu (6) nám zajišťuje, že výsledný úhel (odchylka) bude pravý nebo ostrý.

$$\cos\alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|} \qquad (6)$$

Příklad 33: Určete odchylku přímek $p(A, B)$ a q, jestliže $p: A[2,-3,4], B[4,3,7]$, $q: x=-4-s, y=3+s, z=1+s; s \in \mathbb{R}$.

Řešení: Nejprve si určíme směrové vektory přímek *p* a *q*, abychom mohli následně vypočítat odchylku dvou přímek.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,6,3)$$
$$\vec{v} = (-1,1,1)$$

V následujícím kroku si vypočítáme velikosti vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Nyní dosazením do (6) pomocí skalárního součinu vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a velikosti vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ určíme odchylku přímek *p* a *q*.

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot(-1) + 6\cdot 1 + 3\cdot 1|}{7\cdot\sqrt{3}} = \frac{7}{7\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha \doteq 54°44'$$

Výsledek: Odchylka přímek *p* a *q* je přibližně $54^{o}44´$.

Příklady k procvičení

Příklad 34: Vypočtěte odchylku přímky *p* a od přímky *q*, jestliže: $p: 2x - 3y + 11 = 0,\ q: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t; t \in \mathbb{R}$.

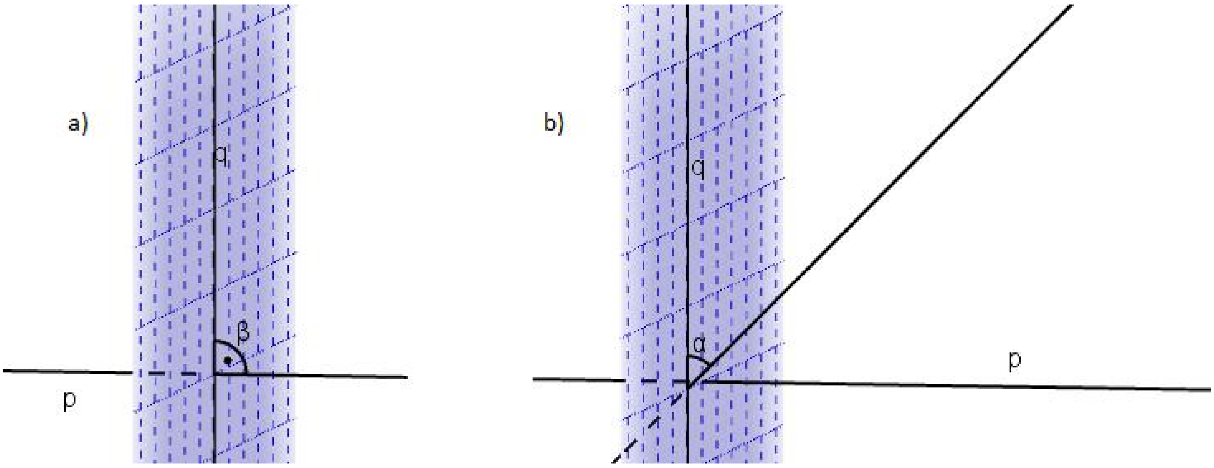
Výsledek: Přímky *p* a *q* jsou na sebe navzájem kolmé.

Příklad 35: Vypočtěte odchylku přímky *p* od přímky *q*, jestliže: $p: 2x + 3y + 11 = 0,\ q: x = 1 + 2t, y = 2 - 3t; t \in \mathbb{R}$.

Výsledek: Odchylka přímky *p* od přímky *q* je přibližně $22^{\circ}37'$.

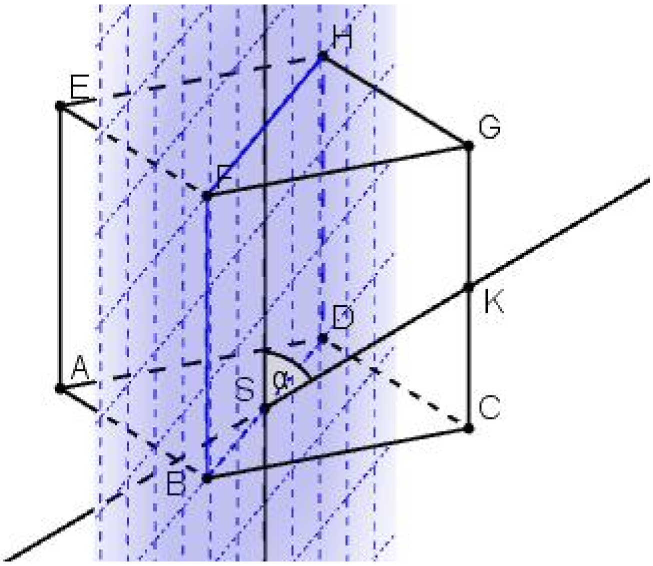
4.2 Odchylka přímky od roviny

U tématu odchylka přímky od roviny budeme zjišťovat velikost každého z pravých (a) nebo ostrých (b) úhlů, které spolu svírají daná přímka s danou rovinou. Odchylka přímky od roviny je odchylka přímky od jejího kolmého průmětu do roviny. Obdobně jako u předchozího tématu bude platit pravidlo, které říká: V případě, že jsou přímka s rovinou rovnoběžné, je jejich odchylka 0 stupňů.



Obr. 19 – Odchylky přímky od roviny

Příklad 36: Určete odchylku vyznačené roviny *DBF* od vyznačené přímky *KS*, jestliže $|AB| = 3$, *K* leží ve středu hrany *CG* a bod *S* je průsečík úhlopříček dolní stěny.

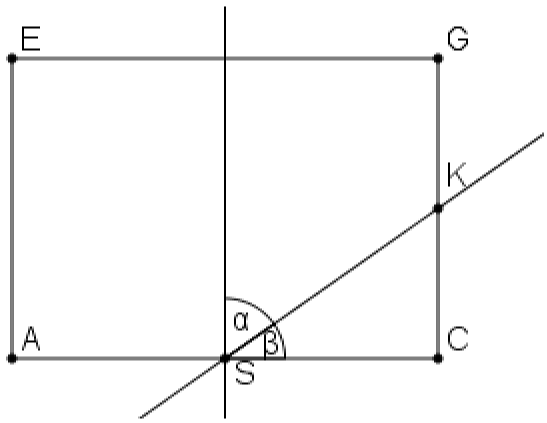


Obr. 20 – Odchylka přímky KS od roviny DBF

Řešení: U tohoto příkladu nalezneme přímku, která leží v rovině *DBF* a svírá daný úhel s přímkou *KS*. Z obr. 20 je zřejmé, že jde o přímku $S_{BD}S_{FH}$. Poté budeme postupovat stejným způsobem jako u odchylky dvou přímek.

Nyní si ukážeme, že výsledku lze dosáhnout i jiným způsobem.

Nalezneme si kolmou rovinu k dané rovině *DBF*. Jediná kolmá rovina, kterou můžeme v tomto případě použít, je rovina *ACG* (viz obr. 21).



Obr. 21 – Rovina ACG kolmá na rovinu DBF

Abychom mohli použít jednu z goniometrických funkcí pro zjištění úhlu *CKS*, zjistíme délku strany *KS*. Tu zjistíme pomocí Pythagorovy věty.

$$|KS| = \sqrt{|CK|^2 + |CS|^2}$$

$$|KS| = \sqrt{1,5^2 + 2,12^2}$$

$$|KS| = \sqrt{6,7444}$$

Z trojúhelníku *CKS* známe délku přepony a délku protilehlé odvěsny. Můžeme použít goniometrickou funkci sinus, která je definována:

$$\sin b = \frac{\text{Délka protilehlé odvěsny}}{\text{Délka přepony}}$$

$$\sin b = \frac{1,5}{\sqrt{6,7444}}$$

$$b\ \mathbf{B}\ 35,28°$$

Vypočítali jsme velikost úhlu *β*. Odchylku roviny *DBF* od přímky *KS* nám značí úhel *α*. Úhel *α* je roven úhlu 90- *β*.

$$a = 90 - b$$

$$a = 90 - 35,28°$$

$$a = 54,72°$$

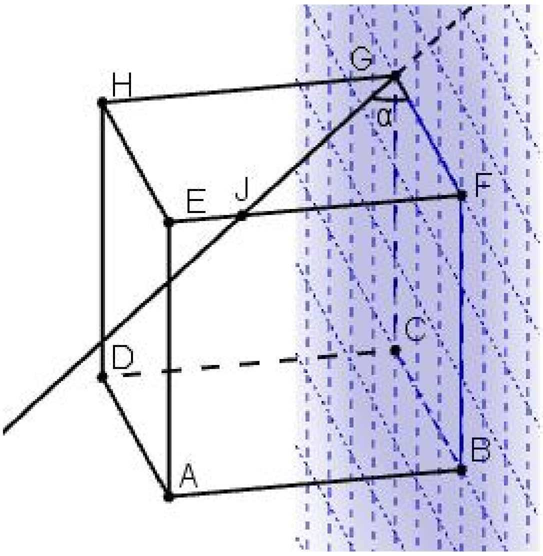
Výsledek: Odchylka roviny *DBF* a přímky *KS* je přibližně 54°43´.

Příklady k procvičení

Příklad 37: Vypočtěte odchylku roviny *BDF* od přímky *DK*, jestliže bod *K* leží ve středu hrany *AB*; $|AB| = 3$.

Výsledek: Odchylka roviny *BDF* od přímky *DK* je přibližně 18°26´.

Příklad 38: Vypočtěte odchylku roviny *BCF* od přímky *GJ*, jestliže platí: $|AB| = 3; J \in EF; 3|\mathrm{EJ}| = |\mathrm{JF}|$.



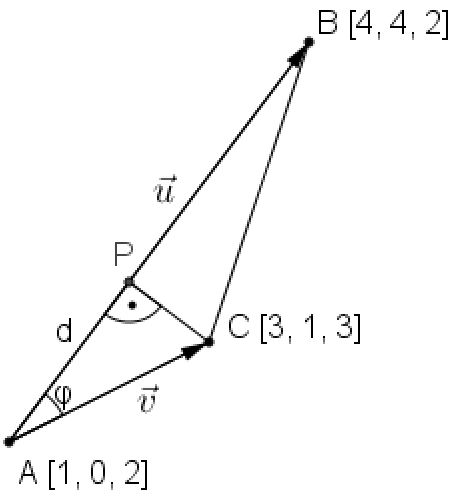
Obr. 22 – Odchylka roviny BCF od přímky GJ

Výsledek: Odchylka roviny *BCF* od přímky *GJ* je přibližně 36°52´.

5 Využití vektorů v geometrii

V této kapitole se budeme věnovat vektorům. V jednotlivých příkladech se pokusíme určit jak směrové, tak normálové vektory. Objasníme si i pojmy obecná rovnice přímky/roviny nebo parametrické rovnice přímky/roviny. Ukážeme si, v jakých výpočtech lze vektory použít. Vybrané příklady s využitím vektorů jsem čerpal v (Hašek, 2017).

Příklad 39: Je dán trojúhelník *ABC*, kde $A[1,0,2], B[4,4,2], C[3,1,3]$. Existuje výška na stranu *c*, kde *P* je pata výšky na stranu *c*. Vypočtěte délky úseček |*AP*| a |*BP*|, na které je strana *c* rozdělena.



Obr. 23 – Trojúhelník ABC

Řešení: Vycházíme ze vztahů $\cos\varphi = \frac{d}{|\vec{v}|}$ a $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$. Z těchto vztahů si vyjádříme $d = |\vec{v}|\cdot\cos\varphi$ a $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$. Dosazením získáme vztah:

$$d = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|} \tag{7}$$

Nejdříve si určíme směrové vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

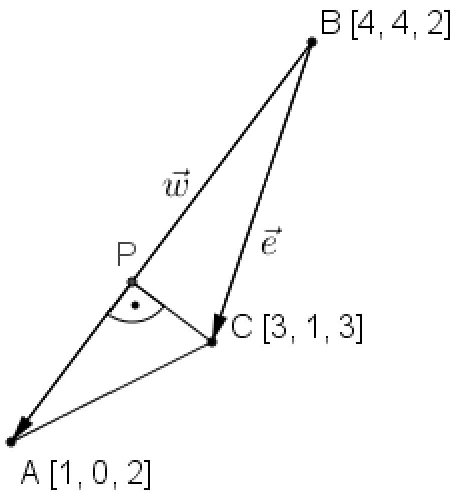
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = [4,4,2] - [1,0,2] = (3,4,0)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = [3,1,3] - [1,0,2] = (2,1,1)$$

Po dosazení směrových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do (7) vypočítáme výsledek.

$$d = \frac{|(3,4,0)\cdot(2,1,1)|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = 2$$

Výsledek nám říká, že velikost úsečky |*AP*| je 2. Jelikož známe velikost strany *AB*, snadno určíme velikost úsečky |*BP*|. |*BP*|=3.

Zkoušku provedeme obdobným způsobem pomocí vektorů $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$, které nám určují velikost úsečky |*BP*|.



Obr. 24 – Zkouška správnosti výsledek

$$\vec{w} = \overrightarrow{BA} = A - B = [1,0,2]-[4,4,2] = (-3,-4,0)$$
$$\vec{e} = \overrightarrow{BC} = C - B = [3,1,3]-[4,4,2] = (-1,-3,1)$$

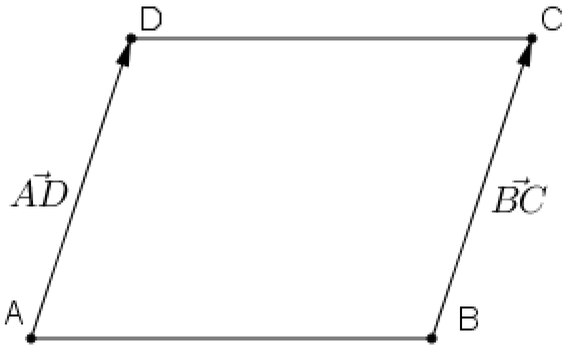
$$d = \frac{|(3,4,0)\cdot(-1,-3,1)|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}} = 3$$

Velikost úsečky |*BP*| jsou 3 jednotky.

Výsledek: Délka úsečky |*AP*| jsou 2 jednotky a délka úsečky |*BP*| jsou 3 jednotky.

Příklad 40: Jsou dány body $A[2,0,-1], B[3,-2,2] C[0,5,3]$. Určete souřadnice vrcholu *D* rovnoběžníku *ABCD*, poté vypočtěte jeho obsah.

Řešení: Pro určení vrcholu *D* rovnoběžníku *ABCD* budeme potřebovat souřadnice bodu *A* a souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$.



Obr. 25 – Rovnoběžník ABCD

Souřadnice bodu A již známe, zbývají nám určit souřadnice vektoru $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = [0,5,3] - [3,-2,2] = (-3,7,1)$$

V následujícím kroku si určíme souřadnice bodu *D*. Jelikož vektor $\overrightarrow{BC}$ je rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{AD}$, můžeme říci, že součtem bodu *A* a vektoru $\overrightarrow{BC}$ určíme bod *D*.

$$D = A + \overrightarrow{BC} = [2,0,-1] + (-3,7,1) = [-1,7,0]$$

Obsah rovnoběžníku určíme pomocí velikosti vektorového součinu $S_{ABCD} = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

Vektor $\overrightarrow{BC}$ si označíme $\vec{v}$. Určíme si vektor $\overrightarrow{AB}$, nazveme ho $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = [3,-2,2] - [2,0,-1] \Rightarrow (1,-2,3)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = [0,5,3] - [3,-2,2] \Rightarrow (-3,7,1)$$

$$S_{ABCD} = |-2\cdot 1 - 3\cdot 7, -3\cdot 3 - 1\cdot 1, 1\cdot 7 - (-2)\cdot(-3)| = |-23,-10,1|$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(-23)^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{630}$$
$$S_{ABCD} \approx 25{,}1\,j^2$$

Výsledek: Souřadnice bodu *D* jsou $D = [-1,7,0]$ a obsah rovnoběžníku je přibližně $S_{ABCD} = 25{,}1\,j^2$.

Příklad 41: Určete vektor $\vec{u}$, který je kolmý na vektor $\vec{v} = (3,4)$ a má velikost 1.

Řešení: Použijeme pravidlo, že dva nenulové vektory jsou na sebe navzájem kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven 0. Pak můžeme říci, že platí:

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (3,4)$$
$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$
$$u_1 \cdot 3 + u_2 \cdot 4 = 0$$

Vektor kolmý k $\vec{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ lze napsat jako $\vec{u} = (\mathrm{v}_2, -\mathrm{v}_1)$, tzn. $\vec{u} = (4, -3)$.

Vektor, který je kolmý k vektoru $\vec{v}$ lze napsat, jako $\vec{u} = (4a, -3a)$. Využijeme vztahu pro výpočet velikosti vektoru, abychom určili ten, který má velikost 1.

$$\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} = |\vec{u}|$$
$$\sqrt{4a^2 + (-3a)^2} = 1$$
$$\sqrt{25a^2} = 1$$
$$a = \left|\frac{1}{5}\right|$$

Po zpětném dosazení hodnoty parametru a do $\vec{u} = (4a, -3a)$ dostáváme výsledek.

$$\left(x = \frac{4}{5} \wedge y = -\frac{3}{5}\right) \text{ nebo } \left(x = -\frac{4}{5} \wedge y = \frac{3}{5}\right).$$

Výsledek: $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ nebo $\vec{u} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Příklady k procvičení

Příklad 42: Je dána přímka *p*, která je zadána parametricky: $p: x = 1 - t, y = 2 + 2t; t \in \mathbb{R}$. Přepište ji do obecné rovnice přímky.

Řešení: Budeme postupovat eliminací parametru z parametrických rovnic přímky.

Z jedné z parametrických rovnic $p: x = 1 - t, y = 2 + 2t; t \in \mathbb{R}$ si vyjádříme *t* a dosadíme do té zbývající.

$$\begin{aligned}
&x = 1 - t \Rightarrow t = -x + 1 \\
&y = 1 + 2t \Rightarrow y = 1 + 2 \cdot (-x + 1) \\
&\Rightarrow 2x + y - 3 = 0
\end{aligned}$$

Dostáváme rovnici, která je obecnou rovnicí přímky *p*.

Výsledek: Obecná rovnice přímky *p* má tvar: $p: 2x + y - 3 = 0$.

Příklad 43: Zjistěte, zda uvedené body leží na přímce $p\left[A, \vec{u}\right]$, kde $A[1,-1,2], \vec{u} = (1,3,1)$.

a) $A_1[-1,1,0]$, b) $A_2[2,2,3]$, c) $A_3[1,-1,2]$, d) $A_4[3,5,2]$, e) $A_5[2,-2,1]$

Řešení: Vyjádříme si parametrické rovnice přímky *p*:

$$\begin{aligned}
&x = 1 + t \\
&y = -1 + 3t \\
&z = 2 + t; t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dosazením souřadnic bodu A_1 za souřadnice *x*, *y*, *z* do parametrických rovnic přímky *p* zjistíme, zda bod A_1 leží na přímce *p*.

$$\begin{aligned}
&-1 = 1 + t \Rightarrow t = -2 \\
&1 = -1 + 3t \Rightarrow t = \frac{2}{3} \\
&0 = 2 + t \Rightarrow t = -2
\end{aligned}$$

Hodnota parametru *t* nám nevyšla u všech parametrických rovnic stejná, tzn. bod A_1 na přímce *p* neleží.

Výsledky: a) Ne, b) Ano, c) Ano, d) Ano, e) Ne

Příklad 44: Jsou dány body $A[3,3,1], B[0,-1,2], C[1,0,-3], D[-1,4,1]$.

a) Napište parametrické vyjádření roviny $\varrho = (BCD)$

b) Napište obecnou rovnici roviny $\varrho = (BCD)$

c) Napište parametrické rovnice roviny d, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho = (BCD)$ a zároveň prochází bodem A

d) Napište obecnou rovnici roviny d, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho = (BCD)$ a zároveň prochází bodem A

e) Urči vzájemnou polohu přímek $p(A,B)$ a $q(C,D)$

f) Vypočtěte vzdálenost bodu A od roviny $\varrho = (BCD)$

g) Vypočtěte vzdálenost roviny d od roviny $\varrho = (BCD)$

h) Vypočtěte vzdálenost přímek $p(A,B)$ a $q(C,D)$

Výsledky: a) $\varrho: x = t - s, y = -1 + t + 5s, z = 2 - 5t - s; t, s \in \mathbb{R}$, b) $\varrho: 4x + y + z - 1 = 0$, c) $d: x = 3 + t - s, y = 3 + t + 5s, z = 1 - 5t - s; t, s \in R$, d) $d: 4x + y + z - 16 = 0$, e) přímky jsou mimoběžné, f) přibližně 3,54, g) roviny jsou na sebe navzájem kolmé, h) 3

Příklad 45: Jaká by musela být hodnota x, aby bod $A[x,2,-5]$ ležel v rovině $\varrho: x - 4y + 3z + 9 = 0$?

Výsledek: Hodnota odpovídá x = 14.

Příklad 46: Zjistěte, zda body $A[2,3,2], B[-1,7,6], C[4,5,-3]$ leží na jedné přímce. Pokud ano, napište její obecnou rovnici a její parametrické rovnice.

Výsledek: $p: 4x + 2y + z - 23 = 0$, $p: x = 4 - 3t, y = 5 + 4t, z = -3 + 4t;\ t \in \mathbb{R}$.

Příklad 47: Napište obecnou rovnici přímky *p*, která je určena body $A[1,4], B[-2,-3]$. Poté ji zapište ve směrnicovém tvaru.

Výsledek: $p: 7x-3y+5=0,\ y=\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$.

Příklad 48: Bodem $A[1,-2]$ veďte přímku p kolmou k přímce $q: 3x+2y-1=0$. Určete průsečík přímek *p* a *q*.

Výsledek: $p: 2x-3y-8=0$. Průsečík přímek *p* a *q* je $P\left[\frac{19}{13},-\frac{22}{13}\right]$.

Příklad 49: Zjistěte, zda bod $X[-1,-1,3]$ leží v rovině $\varrho=(A,B,C)$: $A[1,2,-1], B[3,1,1], C[-1,1,0]$.

Výsledek: Bod *X* leží v rovině ϱ.

6 Lineární kombinace, Lineární závislost vektorů

V této kapitole se budeme věnovat lineární závislosti/nezávislosti vektorů a bodů. Nejdříve si vyřešíme vzorový příklad. Poté budete mít možnost si vyzkoušet obdobně neřešené příklady. Další příklady na téma lineární kombinace vektorů můžete nalézt v (Hašek, 2017).

„Nechť $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ jsou prvky vektorového prostoru *V* nad tělesem *T*. Řekneme, že vektor $\vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$, právě když existují prvky $a_1, a_2, \ldots a_n \in T$ tak, že platí:

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i.$$

Prvky $a_1, a_2, \ldots a_n$ nazýváme koeficienty lineární kombinace. Jsou-li všechny koeficienty rovny nule, nazývá se lineární kombinace triviální, jinak se nazývá netriviální.“ (Hašek, 2017, s. 24)

Příklad 50: Jsou dané body $A[1,4,2], B[3,7,4], C[7,13,8], D[1,4,1]$. Urči, zda tyto body jsou lineárně závislé.

Řešení: Dané body jsou lineárně závislé, jestliže jsou lineárně závislé vektory určené těmito body. Tudíž si vypočteme vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Tyto vektory nám určují body *A*, *B*, *C*, *D*.

Vektory zapíšeme do matice a vidíme, že jsou lineárně závislé $\Rightarrow$ dané body jsou lineárně závislé.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,2)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (6,9,6)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0,0,-1)$$

Výsledek: Body *A*, *B*, *C*, *D* jsou lineárně závislé.

Příklad 51: Rozhodněte, zda je vektor $\vec{v} = (2,1,-3)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a} = (1,1,0), \vec{b} = (0,1,1), \vec{c} = (1,0,1)$.

Řešení: Vektor $\vec{v}$ si zapíšeme jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} \tag{8}$$

Po dosazení souřadnic vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$ do rovnice danou lineární kombinací dostáváme:

$$(2,1,-3) = k_1 \cdot (1,1,0) + k_2 \cdot (0,1,1) + k_3 (1,0,1)$$

Z této rovnice dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$\begin{aligned} 2 &= k_1 + k_3 \\ 1 &= k_1 + k_2 \\ -3 &= k_2 + k_3 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme vyřešit pomocí Gaussovy eliminace matic, pomocí metody sčítací nebo metody dosazovací. My zvolíme metodu dosazovací. Z první rovnice $2 = k_1 + k_3$ si vyjádříme $k_1 = 2 - k_3$. Následným dosazením za k_1 do druhé rovnice dostaneme:

$$1 = 2 - k_3 + k_2 \Rightarrow -1 = -k_3 + k_2$$

Vznikají nám dvě rovnice o dvou neznámých: $-1 = -k_3 + k_2$ a $-3 = k_2 + k_3$.

Po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostáváme hodnotu parametru $k_2 = -2$. Zpětným dosazením získané hodnoty parametru k_2 do původních rovnic $1 = k_1 + k_2$, $-3 = k_2 + k_3$ dostáváme zbylé hodnoty parametrů $k_1 = 3, k_3 = -1$.

Dosazením do (8) určíme lineární kombinaci vektoru $\vec{v}$.

Výsledek: Vektor $\vec{v}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$.

Příklady k procvičení

Příklad 52: Zjistěte, při které hodnotě t je vektor $\vec{u} = (1, t, -3)$ lineárně závislý s vektory $\vec{v} = (2, -4, -6), \vec{w} = (-3, 6, 9)$.

Výsledek: Vektor $\vec{u}$ je lineárně závislý s vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ při hodnotě $t = -2$.

Příklad 53: Zjistěte, zda vektory $\vec{v_1} = (1, 2, 1), \vec{v_2} = (0, -1, 1), \vec{v_3} = (2, -1, 2)$ jsou lineárně závislé.

Výsledek: Vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 54: Jsou dané body $A[3, 2, 2], B[1, 6, 3], C[-2, -3, -2]$. Urči, zda tyto body jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.

Výsledek: Body *A*, *B*, *C* jsou lineárně nezávislé.

Příklad 55: Zjistěte, zda vektory $\vec{v_1} = (1, 2, 1), \vec{v_2} = (0, -1, 1), \vec{v_3} = (2, -1, 2)$ jsou lineárně závislé. Po zjištění lineární závislosti zapište vektor $\vec{u} = (3, 2, 5)$ jako jejich lineární kombinaci.

Výsledek: Vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ jsou lineárně nezávislé. $\vec{u} = \frac{11}{5}\vec{v_1} + 2\vec{v_2} + \frac{2}{5}\vec{v_3}$.

7 Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámit studenty s několika tématy z oboru matematiky - lineární algebra a geometrie. Bakalářská práce byla určena jako pomůcka pro žáky věnující se matematice a geometrii. Témata, kterým jsem se věnoval, byla: vzdálenost bodových podprostorů, vzájemné polohy těchto podprostorů, jejich odchylky, lineární závislost a nezávislost vektorů.

Na začátku mé bakalářské práce jsem vytvořil stručný přehled symboliky, který by měl každému objasnit nejzákladnější matematické symboly. Následně jsem se věnoval úlohám zaměřeným na vzdálenost bodových podprostorů a vzájemnou polohu bodových podprostorů. Tato témata mají své podkapitoly, jakými jsou například: vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost dvou přímek, vzájemná poloha dvou rovin nebo vzájemná poloha přímky a roviny. U každé podkapitoly je uvedeno několik úloh. Řešení těchto úloh jsem popsal na vzorovém příkladu a poté jsem vždy přiložil neřešené úlohy k procvičení.

Ve druhé části mé práce jsem řešil příklady zaměřené na odchylku dvou přímek, lineární závislost a nezávislost vektorů nebo využití vektorů v geometrii.

Všechny úlohy jsem se snažil vyřešit tak, aby jim student porozuměl. Pro lepší představu jednotlivých úloh jsem použil ilustrační obrázky, které jsou vytvořeny pomocí programu GeoGebra. Tento program je pro matematiky vhodný a dobře ovladatelný. Výstupy v podobě 3D obrázků (např. krychle nebo jehlan) jsou názorné a přehledné, proto se hodí k výuce matematiky a geometrie.

Podle mého názoru je studium lineární algebry a geometrie nezbytnou součástí výuky matematiky na středních, ale i vysokých školách. Doufám, že tato sbírka najde své uplatnění a stane se vhodným pomocníkem studentům na těchto školách.

Použitá literatura

[1] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. 2.vyd. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[2] BUDINSKÝ, Bruno. *Analytická a diferenciální geometrie: vysokoškolská příručka pro vysoké školy technického směru*. Praha: SNTL, 1983. Matematika pro vysoké školy technické.

[3] HAŠEK, Roman. *Lineární algebra a geometrie* [online]. © 14. 2. 2017 [cit. 2017-04-24]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LA2/LAG_TextPrednasek_2017_1.pdf

[4] KUŘINA, František. *10 pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

[5] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN, 1990. ISBN 80-04-23753-3.

[6] PECH, Pavel, *Analytická geometrie lineárních útvarů*. 2004. 1.vyd. [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Tiskárna Johanus, 162 s. [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Analyticka.pdf

[7] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

[8] TLUSTÝ, Pavel. *Lineární algebra pro učitele*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7040-609-7.

[9] International GeoGebra Institute. *GeoGebra* [online]. © 2017 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/