Pedagogická fakulta
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Využití programu GeoGebra v příkladech z matematické analýzy

Vypracovala: Radka Navrátilová

Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Využití programu GeoGebra v příkladech z matematické analýzy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne ………………………. ……………………….

podpis

Poděkování

Touto cestou bych chtěla především poděkovat vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D za odborné vedení, cenné rady, připomínky a také za trpělivost a vstřícný přístup během zpracovávání mé práce.

Také děkuji rodině za morální a finanční podporu během studia a v neposlední řadě bych chtěla poděkovat mým kamarádům za veškerou pomoc.

Anotace

Předkládaná bakalářská práce se zabývá řešením příkladů z matematické analýzy, konkrétně z příkladů na derivace funkce s využitím matematického programu GeoGebra. Derivace se vyučují na středních školách, ale ve školní praxi se s nimi setkáme hlavně v posledních ročnících gymnázií. V bakalářské práci si ukážeme jednotlivé řešení příkladů s využitím programu GeoGebra. Tyto příklady jsou vybrány z různých sbírek úloh tak, aby se prošla celá problematika derivací. Vypočtené modelové příklady by měly pomoci studentům při procvičování derivací. Spolu s příklady a jejich řešením jsou uvedeny i základní definice derivací, které jsou nutnou znalostí k samotnému počítání derivací.

Annotation

This bachelor addresses the examples of mathematical analysis, specifically from the examples of derivatives of functions using mathematical GeoGebra. Derivative taught in secondary schools, but in practice, the school will meet them, especially in the last years of grammar schools. In this thesis, we will show examples of different solutions using GeoGebra. These examples are selected from different collections of tasks so that the whole issue has undergone differentiation. Together with examples and their solution is to put the basic definition of derivatives. These calculated model examples should assist students in practicing derivatives.

Obsah

Vysvětlivky 6
Úvod 7
1 Derivace funkce 11
1.1.1 Vymezení derivace 11
1.1.2 Definice 11
1.1.3 Věta V. 1: věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí 12
1.1.4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí 12
1.1.5 Věta V. 2: věta o derivacích složené funkce 12
2 Příklady derivací na základě vzorců. 14
3 Příklady derivací součinu, podílu a funkcí složených. 19
4 Příklady na goniometrické funkce 26
5 Příklady na exponenciální funkce 33
6 Derivace funkce logaritmické 39
7 Derivace vyšších řádů 43
8 Využití diferenciálního počtu k vyšetření průběhu funkce 46
8.1 Vztah monotonie funkce a derivace funkce 46
8.2 Lokální extrémy funkce 46
8.3 Konvexnost na intervalu 47
8.4 Konkávnost na intervalu 47
8.5 Věty o postačujících podmínkách konvexnosti, resp. konkávnosti funkce na intervalu 48
8.6 Konvexnost a konkávnost v bodě – inflexní body 48
8.7 Ukázka příkladů na určení předešlého vyšetření funkce. 49
Výsledky 58
Závěr 64
Použitá literatura a zdroje 65

Vysvětlivky

Tyto vysvětlivky se týkají u grafů využitých v řešených příkladech.

Svislá osa – v celé práci označená jako y

Vodorovná osa – v celé práci označená jako x

Úvod

Derivace funkcí se využívají při výpočtech nejen v matematice, ale i v jiných disciplínách, například ve fyzice, elektrotechnice a dalších odvětvích. V matematice se s derivacemi setkáváme při vyšetřování průběhů funkcí a při integrování, kde nám v tomto případě derivace funkce slouží jako kontrola správné integrace. Je dobré s nimi studenty seznámit již na středních školách, protože znalost derivací studentům pomůže na začátku jejich dalšího studia.

Cílem předkládané práce je vytvořit sbírku příkladů, která by měla sloužit jako pomocná publikace k rozšíření učiva pro studenty, kteří se snaží v daném oboru více zorientovat a rozšířit své znalosti. Procvičování této problematiky se ve středoškolské literatuře objevuje jen výjimečně. Setkáváme se s touto problematikou hlavně v materiálech pro gymnázia. Poněkud jiná situace nastává ve vysokoškolském prostřední, ve kterém vznikají skripta věnující se těžším příkladům z dané oblasti. Proto cílem této práce je poskytnout syntézu těchto prací tak, aby došlo k pochopení a efektivnímu procvičení této problematiky.

Práce je rozdělena do 8 kapitol. V úvodu práce se nachází vysvětlení jednotlivých derivací funkcí a následné fixace probrané látky na podobných příkladech. Jednotlivé příklady se řeší pomocí programu GeoGebra. Program GeoGebra pomáhá lépe se zorientovat ve funkcích a výborně se hodí pro znázornění funkcí v grafech, a právě proto budou veškeré grafy pocházet právě z tohoto programu. V každém grafu se zobrazí zadaná funkce před derivací a po derivaci, aby lépe vynikl rozdíl mezi oběma stavy. Pro lepší názornost tohoto rozdílu je zvoleno jiné barevné rozlišení grafů, takže se získá lepší přehled. V první části bakalářské práce je kladen důraz na procvičení jednotlivých derivací, které nám pomohou v druhé části bakalářské práce s vyšetřením potřebných vlastností funkcí a vyšetření průběhu celé funkce.

Jak pracovat v programu GeoGebra?

Počítačový program GeoGebra je využíván pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu. Je velkým pomocníkem při řešení různých matematických příkladů. Předností tohoto programu je, že si ho studenti mohou stáhnout zdarma dále je zde propojena geometrická a algebraická oblast matematiky. V mé bakalářské práci budeme využívat okno CAS, které nám umožní a pomůže vypočítávat derivace, které pak budeme znázorňovat do nákresny. V nákresně se nám zobrazí graf funkce, na kterém si dokážeme snadněji představit výpočty.

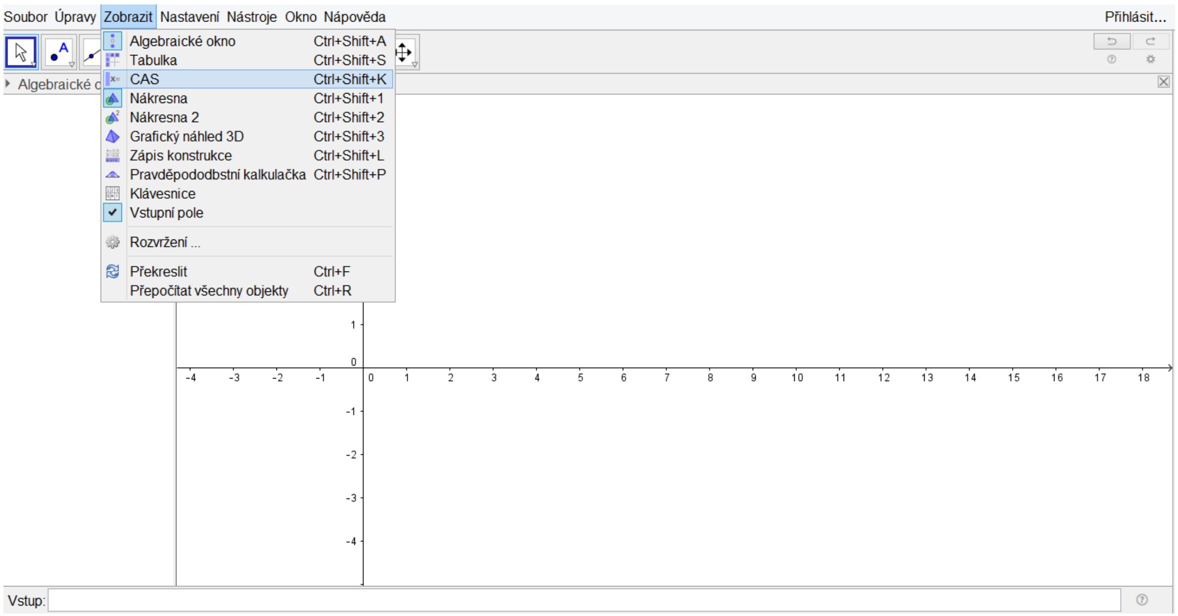
Ukážeme si práci s programem na konkrétním příkladu.

Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{1}{(5-x)^2}$.

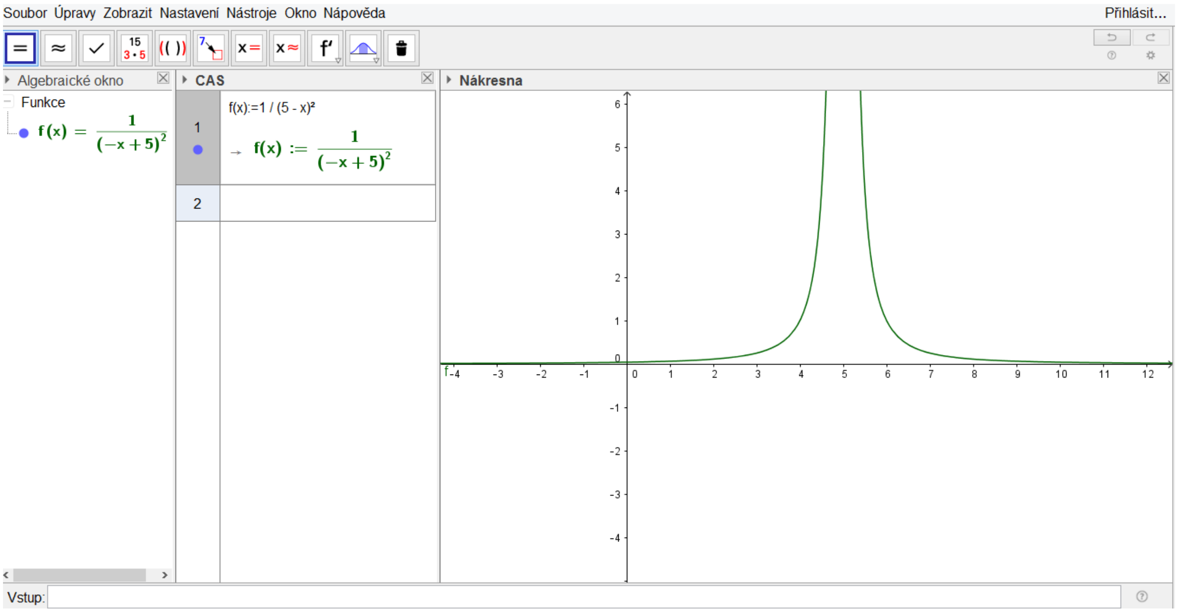
Řešení: Funkci si přepíšeme do tvaru $f(x) = (5-x)^{-2} = -2(5-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{(5-x)^3}$.

V programu GeoGebra pak budeme pracovat takto.

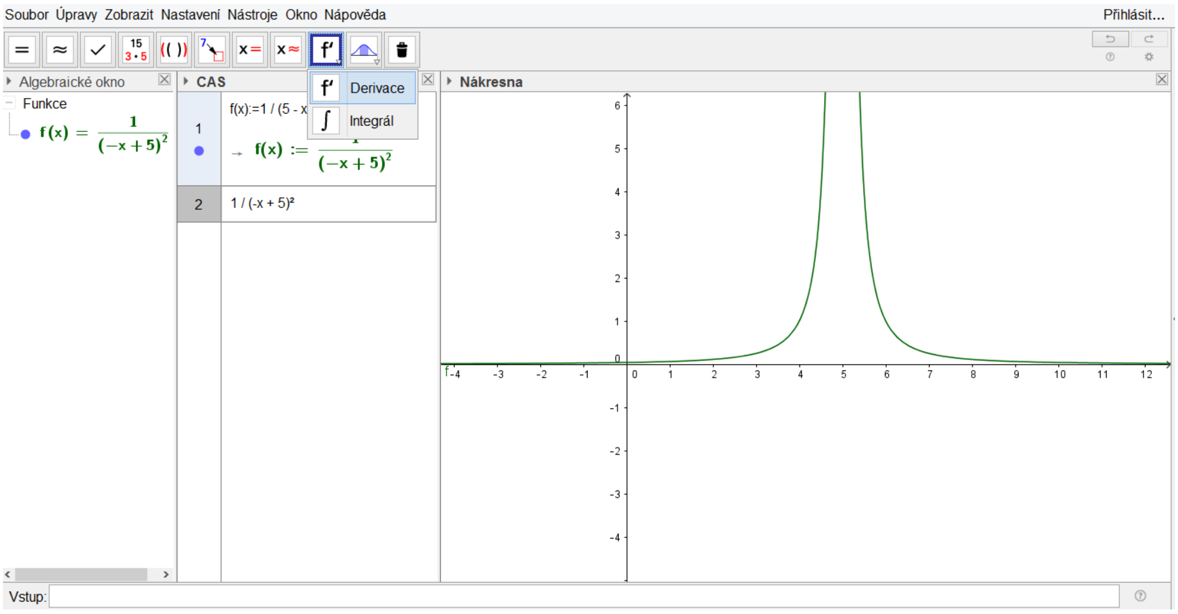
1) Nejprve otevřeme příkazový řádek CAS, do kterého budeme zapisovat.



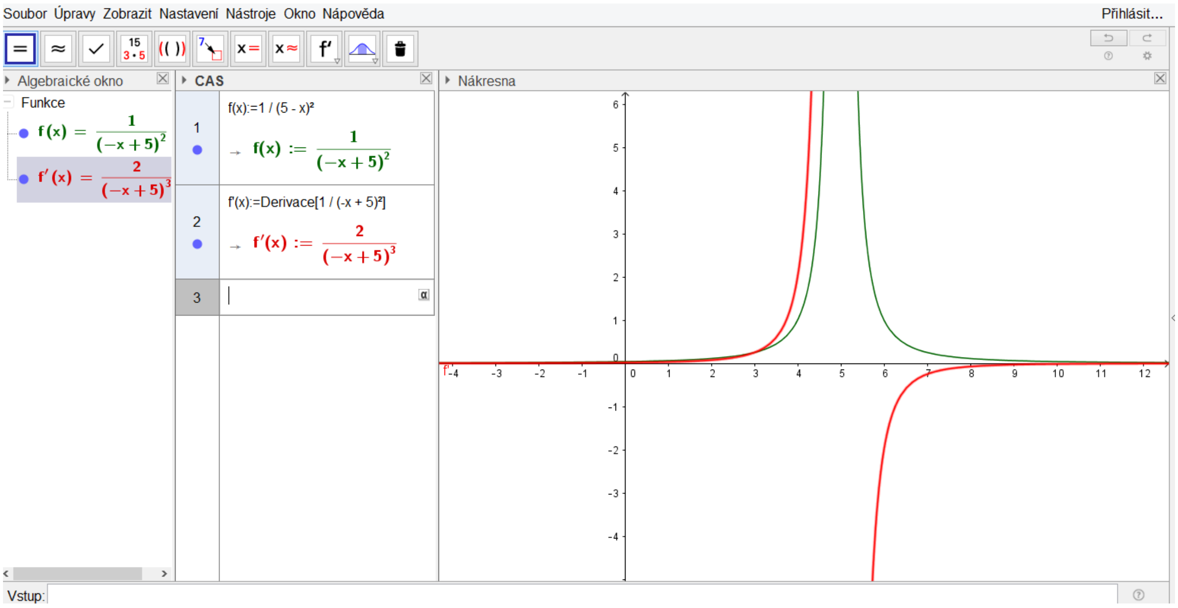
2) Do okna CAS vložíme předpis funkce.



3) Nyní kliknem na funkci a zvolíme příkaz pro derivaci.



4) Derivace se zobrazí v dalším příkazovém řádku a graficky se nám zobrazí derivace v nákresně. Navíc je každá funkce (její předpis a graf) vyznačena pro přehlednost jinou barvou.



1 Derivace funkce

Pojem derivace vznikl v 17. století v pracích Newtona a Leibnize při řešení geometrických a fyzikálních problémů. Derivace funkce je změna (růst či pokles) obrazu této funkce v poměru k (ideálně) nekonečně malé změně jejích argumentů. Opačným procesem k derivování je integrování. V případě dvourozměrného grafu funkce $f(x)$ je derivace této funkce v libovolném bodě (pokud existuje) rovna směrnici tečny tohoto grafu. Například pokud funkce popisuje dráhu tělesa v čase, bude její derivace v určitém bodě udávat okamžitou rychlost; pokud popisuje rychlost, bude derivace udávat zrychlení.

1.1.1 Vymezení derivace

Derivace funkce f je definována na nějakém okolí Vx_0 bodu x_0 a nechť $x \in Vx_0$. Rozdíl $x - x_0$ nazýváme diferencí argumentu v bodě x_0. Rozdíl $f(x) - f(x_0)$ nazýváme diferencí závislé proměnné funkce f v bodě x_0. Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se nazývá diferenční podíl funkce f v bodě x_0.

1.1.2 Definice

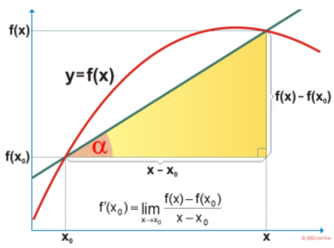
Existuje-li vlastní limita, resp. vlastní limita zprava, resp. vlastní limita zleva diferenčního podílu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \quad (1)$$

Nazýváme tuto limitu *derivací funkce* f *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. [1]

Přičemž výraz $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ udává směrnici přímky procházející body $[x, f(x)]$ a $[x_0, f(x_0)]$, tzn. sečny grafu funkce f. Pokud se x blíží k bodu x_0, tj. (1), směrnice sečny přejde ve směrnici tečny k funkci f v bodě $[x_0, f(x_0)]$. ([2], str. 76)

Je-li limita (1) vlastní, nazývá se číslo $f'(x_0)$ *vlastní derivací* funkce f v bodě x_0, je-li limita (1) nevlastní, nazývá se $f'(x_0)$ *nevlastní derivací* funkce f v bodě x_0. [1]



Obr. 1: Geometrický význam derivace funkce [3]

1.1.3 Věta V. 1: věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Mají-li funkce f, g v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$, pak v tomto bodě mají derivaci i funkce $f+g, f-g, fg, cf,$ kde $c \in R$ je konstanta, a pro $g(x_0) \neq 0$ také funkce $\frac{f}{g}$, přičemž platí:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ ([5], str. 378)

1.1.4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce f a g mají derivaci v každém bodě $x \in M$ (kde M je množina, resp. sjednocení intervalů z definičního oboru funkcí f a g), pak výše uvedené vzorce pro derivaci součtu, rozdílu a podílu těchto funkcí platí pro všechna $x \in M$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$). ([5], str. 378)

1.1.5 Věta V. 2: věta o derivacích složené funkce

Nechť funkce $g: u = g(x)$ má v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$ a nechť funkce $f: y = f(u)$ má v bodě $u_0 = g(x_0)$ derivaci $f'(u_0)$. Pak složená funkce $h: f(g(x))$ má derivaci v bodě x_0, přičemž platí:

$$h'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0).$$ ([5], str. 379)

Pro lepší zapamatování je dobré se naučit vzorec, který je uveden výše, pro derivaci složené funkce.

1.1.5.1 Vzorec pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána složená funkce $h: f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $h = f \circ g$ má derivaci h' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí:

$$h'(x) = f'(u)g'(x).$$ ([5], str. 379)

V následující tabulce je přehled derivací základních funkcí. Tyto vzorce najdeme v matematicko-fyzikálních tabulkách, nebo je můžeme odvodit užitím definice derivace funkce, viz kapitola 2.

f	f'	$D(f)$	$D(f')$	Poznámky
konstanta	0	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$x \in R$
x^a	ax^{a-1}	**x > 0**	**x > 0**	$a \in R$
e^x	e^x	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	**x > 0**	**x > 0**	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	**x > 0**	**x > 0**	$a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	
tg$x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$	$\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$	
cotg$x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{x \neq k\pi}$	$\boldsymbol{x \neq k\pi}$	
arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$< \boldsymbol{-1, 1} >$	$(\boldsymbol{-1, 1})$	v ±1 jen jednostranná derivace
arccos$x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$< \boldsymbol{-1, 1} >$	$(\boldsymbol{-1, 1})$	v ±1 jen jednostranná derivace
arctg$x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	
arccotg$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	

Tab. č.1. Základní vzorce derivace funkce

2 Příklady derivací na základě vzorců.

V této kapitole si ukážeme derivace funkce za pomoci základních vzorců derivace, na které se můžete podívat v předcházející kapitole (Tab. č.1. Základní vzorce pro derivace).

Poznámka: Pokud nepřipisujeme k výsledkům podmínku platnosti, předpokládá se, že jak daná funkce, tak její derivace jsou definovány pro všechna $x \in R$.

Ukázkové příklady na derivace podle základních vzorců.

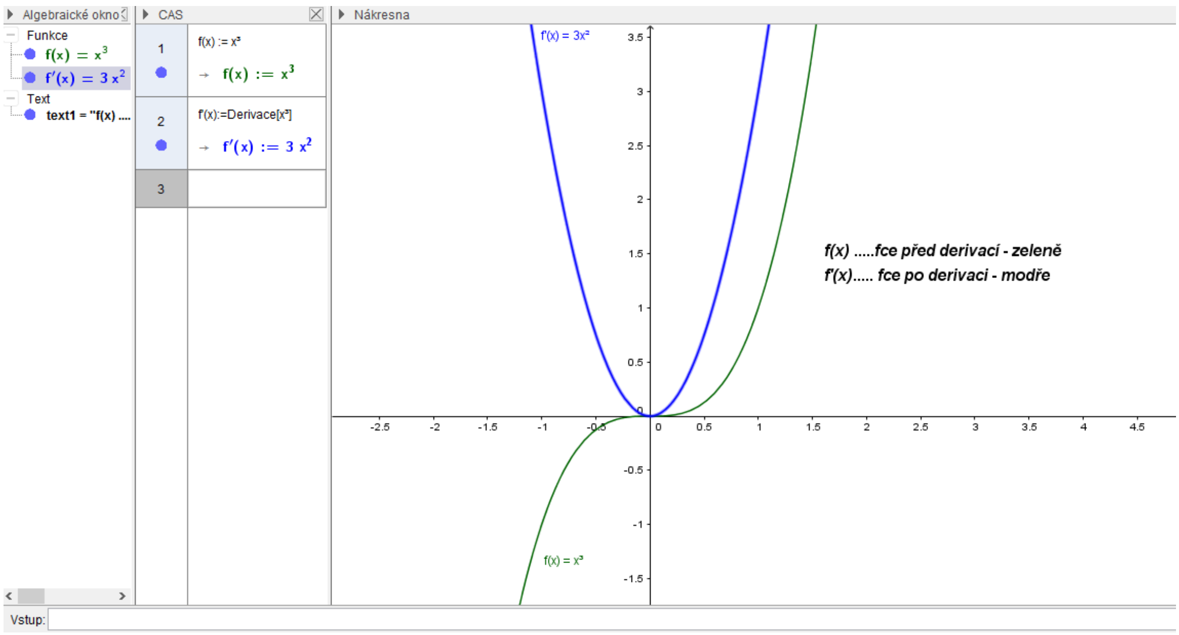
Příklad 2.1. Určete derivaci funkce $f(x)$ zadanou předpisem $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ a znázorněte graficky.

Užijeme vzorec pro derivaci mocninné funkce $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, kde $n = 3$.

Řešení:

$$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1},$$
$$f'(x) = 3 \cdot x^2.$$

Řešení znázorněno v grafu Graf č. 1.



Graf č. 1

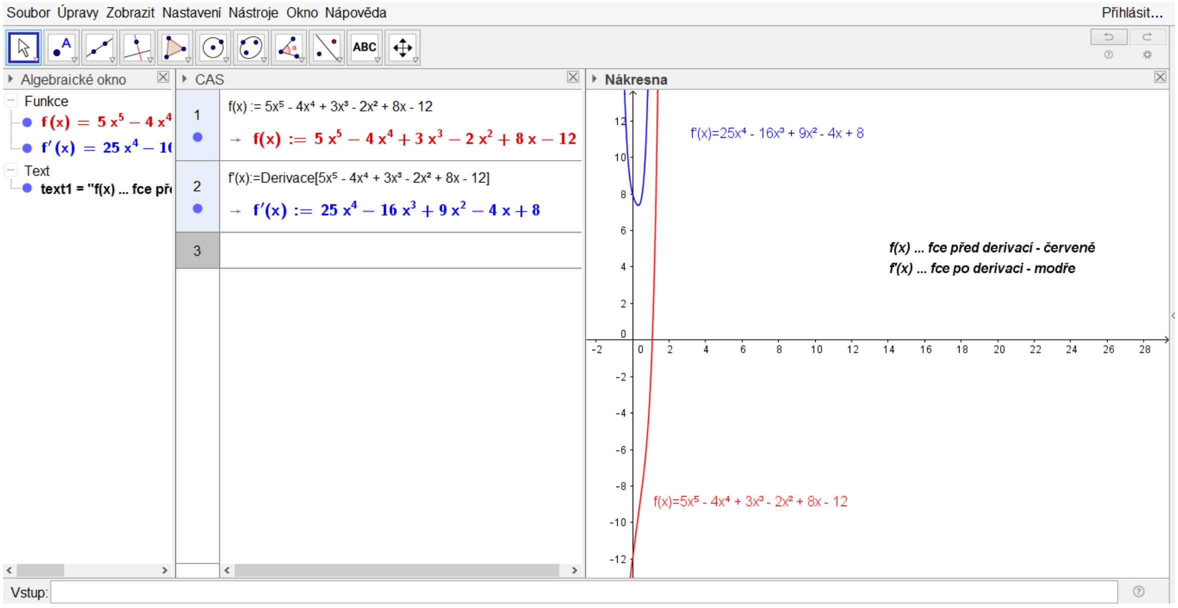
Příklad 2.2. Derivujte funkci $\boldsymbol{f(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 8x - 12}$.

Užijeme vzorec pro derivaci mocninné funkce.

Řešení:

$$f'(x) = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 4x + 8.$$

Je třeba věnovat pozornost faktu, že celá funkce se vyvíjí podle nejvyšší mocniny. Podobně tomu je i u derivace. Tento stav dokládá znázornění na grafu Graf č. 2.



Graf č. 2

Příklad 2.3. Vypočítejte derivaci funkce $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}}$.

Abychom mohli využít vzorec pro derivaci mocninné funkce, upravíme si předpis na tvar $f(x) = 4 \cdot x^{-3} - 9 \cdot x^{-4}$.

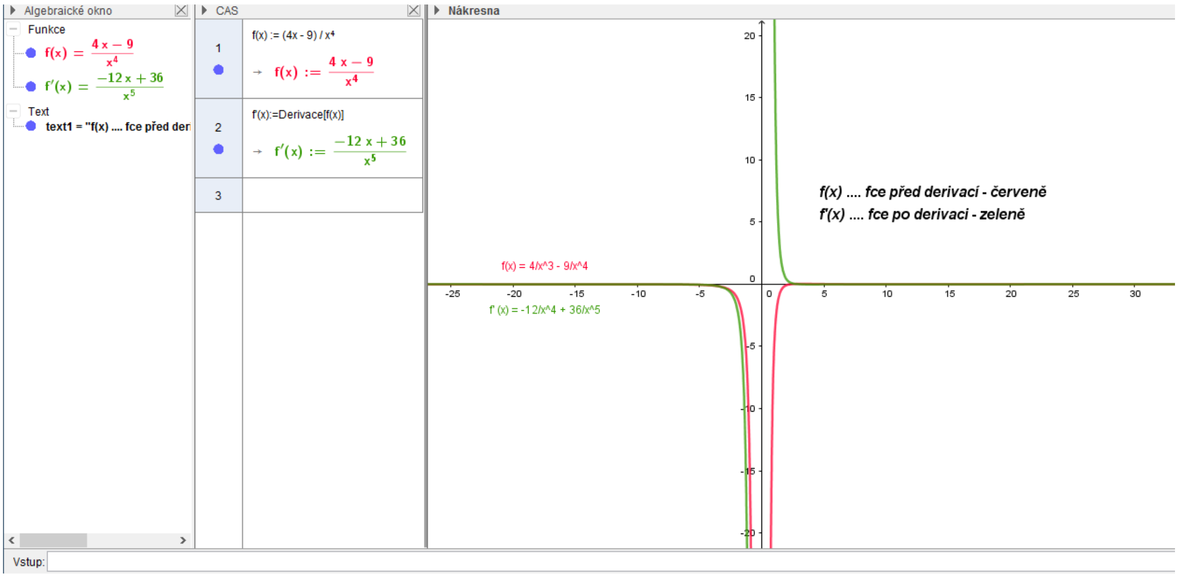
Řešení po úpravě:

$$f'(x) = 4 \cdot (-3) \cdot x^{(-3-1)} - 9 \cdot (-4) \cdot x^{(-4-1)},$$

$$f'(x) = -12 \cdot x^{-4} + 36 \cdot x^{-5},$$

$$f'(x) = -\frac{12}{x^4} + \frac{36}{x^5}.$$

Celé řešení je dobře vidět na Grafu č. 3.



Graf č. 3

Příklad 2.4. Určete derivaci funkce $\boldsymbol{f(x) = x^2 \cdot \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)}$.

Derivaci funkce je možno určit dvěma způsoby. Ukážeme si oba, aby bylo patrné, že výsledek musí být samozřejmě stejný.

1) Pokud předpis funkce upravíme na tvar $f(x) = x^5 - x$, nebudeme muset derivovat jako součin.

Po prvním kroku postupujeme pro nás již zažitým způsobem, který jsme si ukázali v předešlých ukázkových příkladech.

Řešení: $f'(x) = 5x^4 - 1$.

2) Zadaná funkce je ve tvaru součinu dvou funkcí x^2 a $x^3 - \frac{1}{x}$.

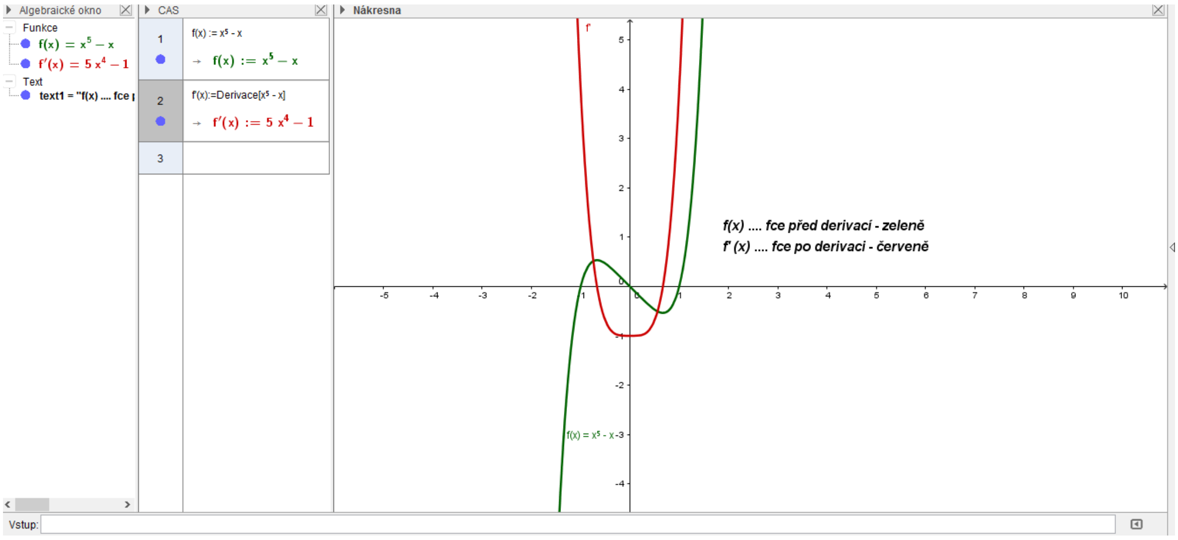
Můžeme využít vzorec pro derivaci součinu (viz. Věta V.1: věta o derivace součtu, rozdílu a podílu funkcí). Dostáváme:

$$f'(x) = 2x\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) + x^2\left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Upravíme
$$f'(x) = 2x^4 - 2 + 3x^4 + 1,$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1.$$

Pro následující graf je typická orientace na nejvyšší hodnotu exponentu. Od kterého se odvíjejí grafy funkcí. Tuto situaci nám znázorňuje Graf č. 4.



Graf č. 4

Příklad 2.5. Derivujte funkci zadanou předpisem $\boldsymbol{f(x) = x^2 + \sqrt[2]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[8]{x^7}}$.

Nejprve si funkci napíšeme v podobě mocnin $f(x) = x^2 + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{7}{8}}$.

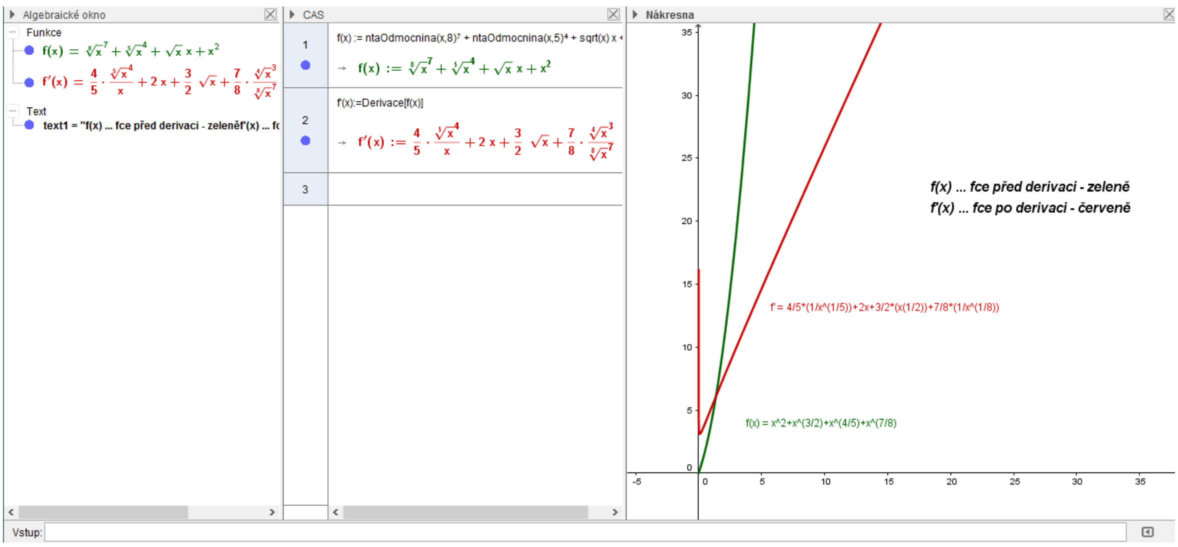
Prvním krokem je derivace a úprava vzorce:

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}},$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x}},$$

$$f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} + 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}.$$

Celý příklad je vizualizován na Grafu č. 5.



Graf č. 5

Příklady 2.6. Příklady k procvičení derivací na základě vzorců.

Zadejte předpis funkce f do programu GeoGebra výše uvedeným způsobem. Použijte nástroje pro derivaci funkce f zderivujte a pozorujte grafy funkce f i její derivace f'.

1) $f(x) = x^3 + 2$
2) $f(x) = x^2 - 4x$
3) $f(x) = 3x^4 + 6$
4) $f(x) = x^2 + x^3$
5) $f(x) = x^5 - 1$
6) $f(x) = \pi x^2$
7) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
8) $f(x) = 4x^2 - x + 1$
9) $f(x) = 6x^2 - x^3 + 2$
10) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
11) $f(x) = x^{13} - x^{11} + 2x^2 - x$
12) $f(x) = x^{-4} + x^{-7} + x^{-11} - 15$
13) $f(x) = 7x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 9$
14) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 46$
15) $f(x) = \frac{1}{x}$
16) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$
17) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$
18) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$
19) $f(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x$
20) $f(x) = -\frac{5x^8}{7} - \frac{8x^7}{11} - \frac{6x^6}{18}$
21) $f(x) = \frac{8}{x^8} - \frac{6}{x^6} + \frac{4}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 18$
22) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{6}$
23) $f(x) = \sqrt{x}$
24) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
25) $f(x) = \sqrt{6x^3}$
26) $f(x) = \sqrt{x} + x^{-2}$
27) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}$
28) $f(x) = \sqrt[3]{x^7} - \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$
29) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 5$
30) $f(x) = 5x - 7\sqrt{x}$
31) $f(x) = \sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x^{12}}$
32) $f(x) = \sqrt{x^7} - \sqrt[4]{x^9}$
33) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{4x}}{5} + \sqrt[6]{\frac{1}{x^5}}$
34) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$
35) $f(x) = \sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}}}$
36) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{7} \cdot \sqrt[5]{x^2}$
37) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}} - \frac{1}{\sqrt[5]{2x^2}}$
38) $f(x) = x^4 \cdot \left(x^5 - \frac{1}{x^2}\right)$
39) $f(x) = 5(3x^2 - 4x + 8)$
40) $f(x) = \left(3x^7 - \frac{x^5}{5} - 3x^2 + 4\right) \cdot \sqrt{2}$
41) $f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - x\sqrt{5} + \frac{4}{5}\right)$

3 Příklady derivací součinu, podílu a funkcí složených.

V následující kapitole se budeme věnovat procvičování jednotlivých příkladů na derivaci součinu, podílu a funkcí složených s využitím znalostí z výše uvedených kapitol. Vzorce, které používáme v této kapitole, jsou uvedeny již v kapitole 1.1.2 Vzorce o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí.

Příklad 3.1. Vypočítejte derivaci funkce zadanou předpisem

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(4x^2+5x+7).}$$

Podle věty o derivaci součinu na množině M platí:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Funkci $(\boldsymbol{x-1})$ označíme jako$f$. Funkci $\boldsymbol{(4x^2+5x+7)}$ označíme jako g.

Pak platí

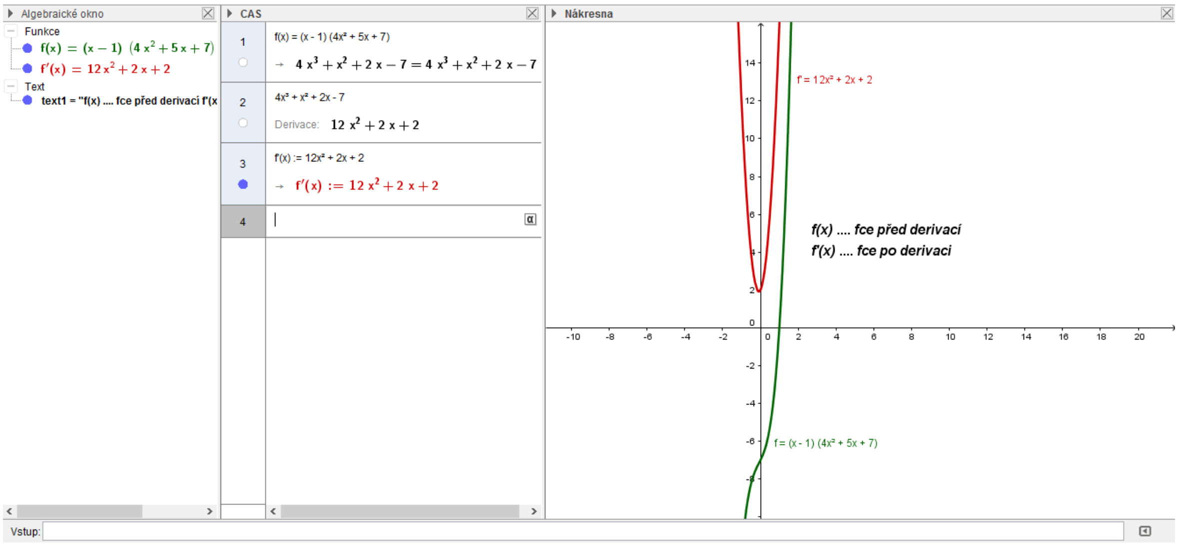
$$f'(x) = (x-1)'(4x^2+5x+7) + (x-1)(4x^2+5x+7)'.$$

Upravíme

$$f'(x) = (1)(4x^2+5x+7) + (x-1)(8x+5),$$

$$f'(x) = 4x^2+5x+7+8x^2-3x-5\,,$$
$$f'(x) = 12x^2+\ 2x+2\,.$$

Graf č. 6 se nám vyvíjí opět podle největší hodnoty exponentu.



Graf č. 6

Příklad 3.2. Derivujte funkci $f(x) = \frac{\boldsymbol{x^2+2x}}{\boldsymbol{1-x}}$ za pomoci vzoce pro derivace podílu.

Podle věty o derivaci podílu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, kde v našem případě zvolíme:

$f: f(x) = \boldsymbol{x^2 + 2x}$ a $g: g(x) = \boldsymbol{1 - x}$.

Poznámka: Definiční obor obou funkcí je R. Definiční obor podílové funkce a derivace bude $R - \{1\}$.

Řešení:

Po dosazení do vzorce dostáváme

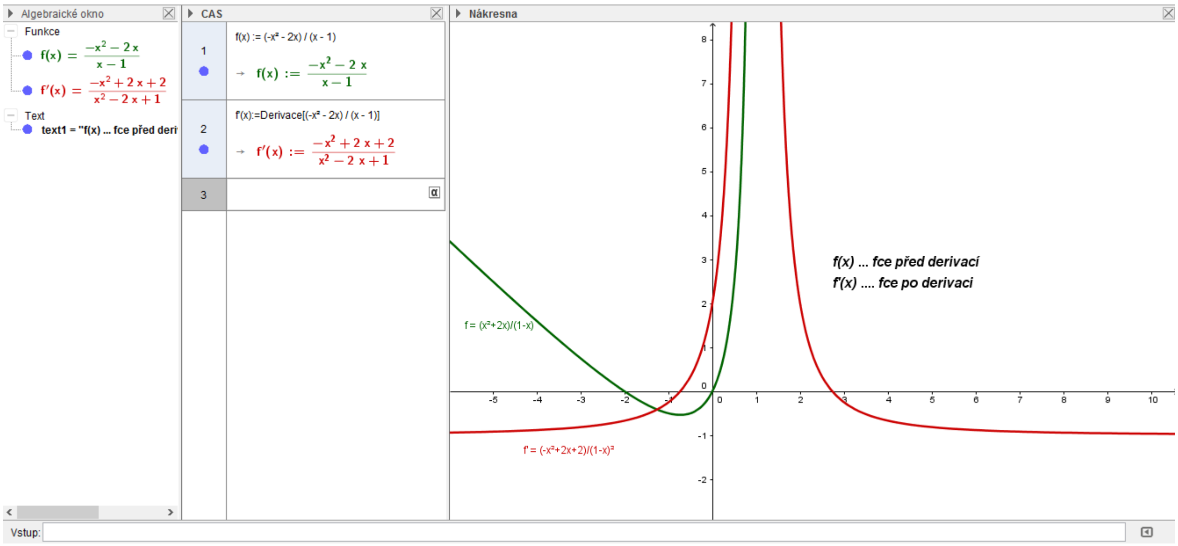
$$f'(x) = \frac{(x^2+2x)'\cdot(1-x)-(x^2+2x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(1-x)-(x^2+2x)(-1)}{(1-x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{2x-2x^2+2-2x+x^2+2x}{(1-x)^2},$$

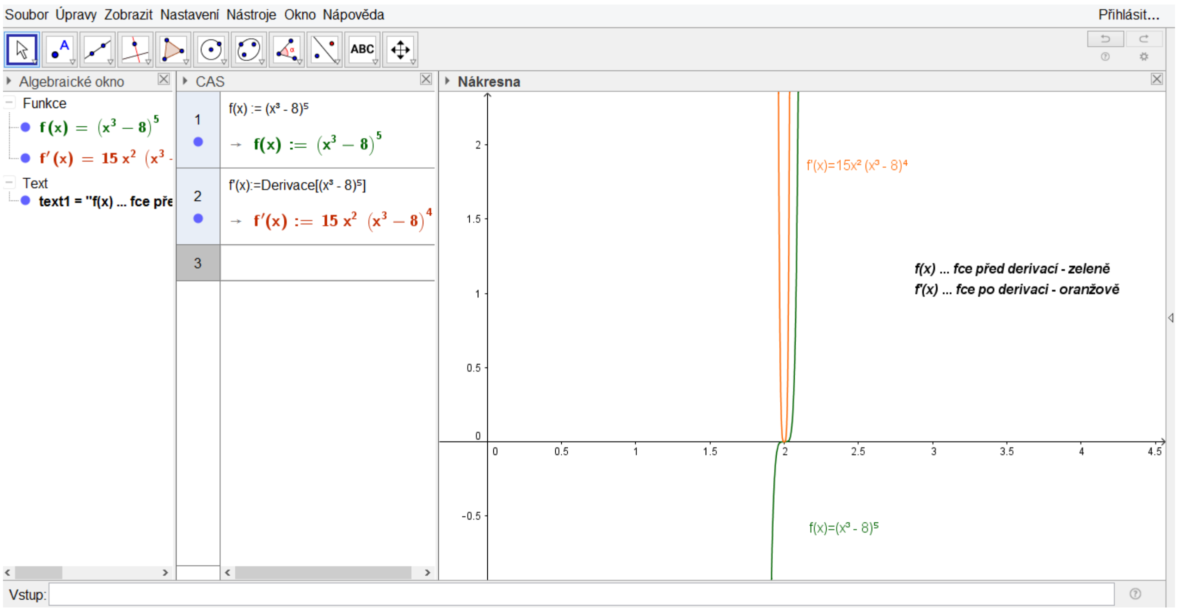
$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}.$$

Pro lepší představu je řešení znázorněno na Grafu č. 7.



Graf č. 7

Příklad 3.3. Určete derivaci funkce zadanou předpisem $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{h(x) = (x^3 - 8)^5}$.



Graf č. 8

Můžeme si všimnout, že funkce h je funkce složená. Pro výpočet její derivace využijeme vzorec pro derivaci složené funkce $h'(x) = \left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ (viz str. 12). V tomto konkrétním příkladu je vnější funkcí funkce $f: f(x) = x^5$ a funkcí vnitřní funkce $g: g(x) = x^3 - 8$.

Derivace jsou $f'(x) = 5x^4$ a $g'(x) = 3x^2$.

Pak s užitím zmiňovaného vzorce je $h'(x) = 5(x^3 - 8)^4 \cdot 3x^2$,

upravíme na $h'(x) = 15x^2(x^3 - 8)^4$.

Tento výpočet je znázorněn na Grafu č. 8.

Příklad 3.4. Vypočítejte derivaci funkce zadanou tímto výrazem $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{5}}{(\mathbf{5}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}}$.

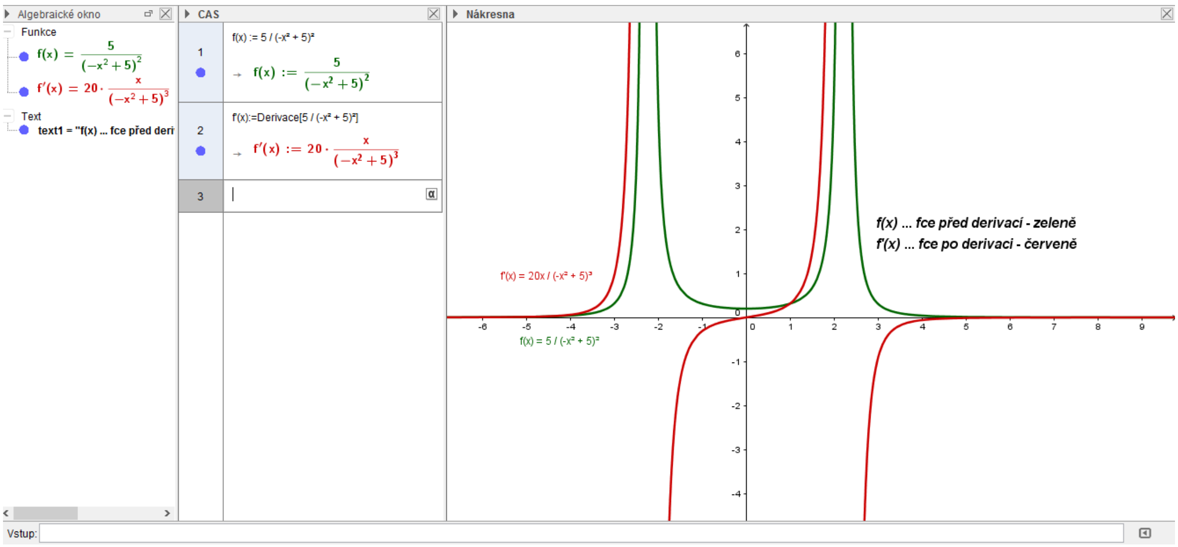
Upravíme si na funkci $h(x) = 5 \cdot (5 - x^2)^{-2}$.

Nyní můžeme opět využít vzorec pro derivaci složené funkce, kde $f(g(x)) = (5 - x^2)^{-2}$, $f: f(x) = (x)^{-2}$ a $g: g(x) = 5 - x^2$. Derivace jsou $f'(x) = -2x^{-3}$ a $g'(x) = -2x$

$$h'(x) = 5(-2(5 - x^2)^{-3}) \cdot (-2x),$$

$$h'(x) = \frac{20x}{(5-x^2)^3}.$$

Vypočítaný příklad je znázorněn v Grafu č. 9.



Graf č. 9

Příklad 3.5. Podle následujícího předpisu se pokuste vypočítat derivaci funkce

$$\boldsymbol{h}: \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}.$$

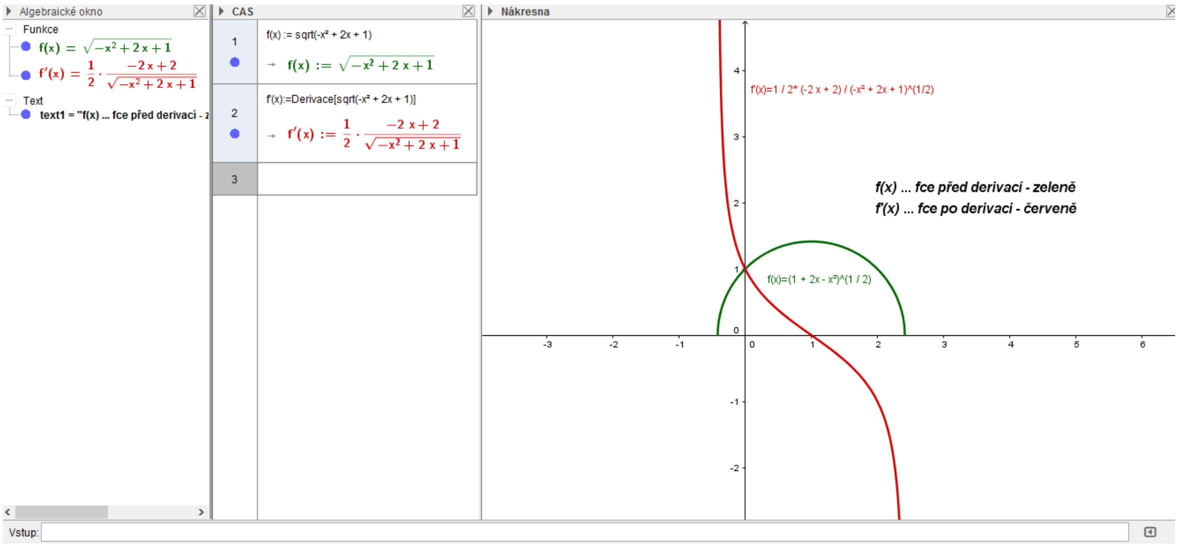
Provedeme úpravu předpisu na tvar mocninné funkce $h(x) = (1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Budeme derivovat jako složenou funkci a následně ji upravíme.

$$h'(x) = \frac{1}{2}(1 + 2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - 2x),$$

$$h'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Opět celá situace je znázorněna graficky na Grafu č. 10.



Graf č. 10

Příklad 3.6. Dle následujícího předpisu proveďte derivaci funkce zadanou formou podílu funkcí $\boldsymbol{f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{4+x^3}}}$.

Řešení:

a) Podle derivace podílu je

$$f'(x) = \frac{(2-x)' \cdot (4+x^3)^{\frac{1}{2}} - (2-x) \cdot \left[(4+x^3)^{\frac{1}{2}}\right]'}{(\sqrt{4+x^3})^2},$$

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (4+x^3)^{\frac{1}{2}} - (2-x)\left(\frac{1}{2} \cdot (4+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)\right)}{4+x^3}.$$

Derivaci se pokusíme co nejvíce zjednodušit

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{4+x^3} - (2-x) \cdot \left(\frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{4+x^3}}\right)}{4+ x^3},$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{4+x^3} - \left(\frac{6x^2-3x^3}{2\cdot\sqrt{4+x^3}}\right)}{4+x^3},$$

$$f'(x) = \sqrt{4+x^3} \cdot \frac{x^3-6x^2-8}{2x^6+16x^3+32}.$$

b) K výpočtu derivace zadané funkce můžeme využít i derivaci součinu, ale nejdříve si musíme funkci upravit na součinový tvar

$$f(x) = (2-x)(4+x^3)^{-\frac{1}{2}}.$$

Již můžeme derivovat

$$f'(x) = (-1)\cdot(4+x^3)^{-\frac{1}{2}} + (2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot(4+x^3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3x^2\right).$$

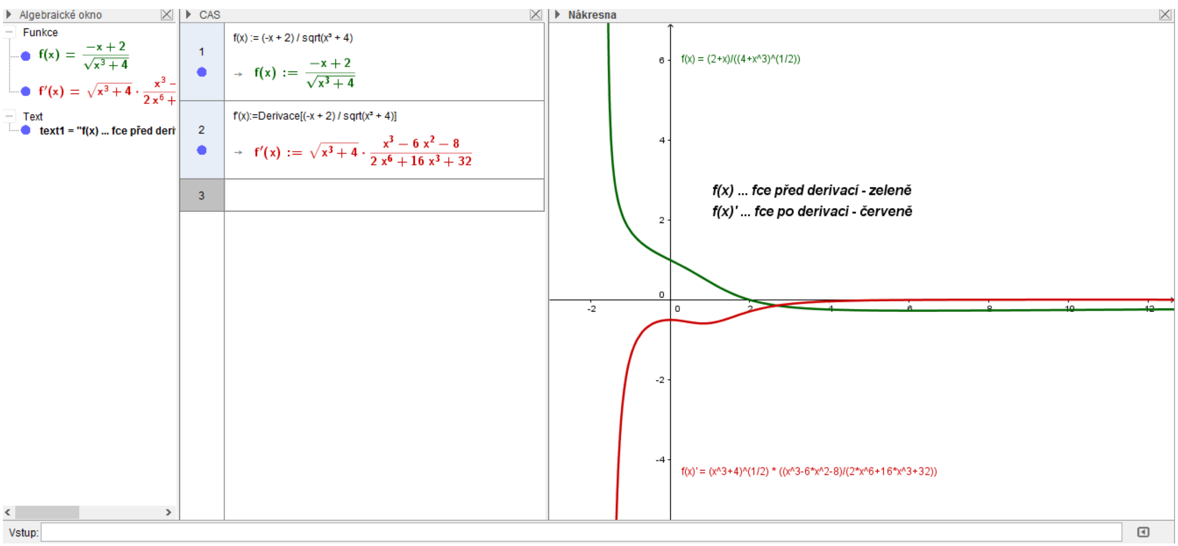
Upravíme

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{4+x^3}} + (2-x)\cdot\left(-\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{(4+x^3)^3}}\right),$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{4+x^3}} + \frac{3x^3-6x^2}{2\cdot\sqrt{(4+x^3)^3}},$$

$$f'(x) = \sqrt{4+x^3} \cdot \frac{x^3-6x^2-8}{2x^6+16x^3+32}.$$

Derivace je znázorněna v Grafu č. 11.



Graf č. 11

Příklad 3.7. Příklady k procvičení součinu, podílu a funkcí složených.

Pokuste se vypočítat derivace zadaných funkcí využitím vzorců pro derivování a následně si svůj výpočet zkontrolujte pomocí programu GeoGebra (okno CAS). Pozorujte i nákresnu s oběma grafy, ze kterých si můžete udělat vizuální obraz průběhu funkce.

1) $f(x) = (x+2)^2$
2) $f(x) = (1-x)^3$
3) $f(x) = (3x-5)^3$
4) $f(x) = (x^3-5)^5$
5) $f(x) = (4x^3+5)^2$
6) $f(x) = (x^4-4x^2+9)^3$
7) $f(x) = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$
8) $f(x) = x \cdot \sqrt[5]{x^2-4}$
9) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 - \frac{1}{x})$
10) $f(x) = (3+2x)(6-4x^2)$
11) $f(x) = (x-3)(x^5+4x^3-5)$
12) $f(x) = (x^3+7x-4)(3-x)$
13) $f(x) = (1+x^2)^2\,(1-x+x^2)^3$
14) $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$
15) $f(x) = (\sqrt{x}-1)^2-(x^2+1)^4$
16) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
17) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$
18) $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$
19) $f(x) = \frac{4}{(1-x)^4}$
20) $f(x) = \frac{2x^6-1}{x^3}$
21) $f(x) = \frac{x^4}{7x-13}$
22) $f(x) = \frac{2x^5-5x^2+6}{x^3-2}$
23) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$
24) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
25) $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$
26) $f(x) = \sqrt[4]{x+\sqrt{x^3}}$
27) $f(x) = \sqrt{x^5+x^3}$
28) $f(x) = \frac{2}{x}\sqrt{6-x^2}$
29) $f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}}$
30) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$
31) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
32) $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{2+x^2}}$

4 Příklady na goniometrické funkce

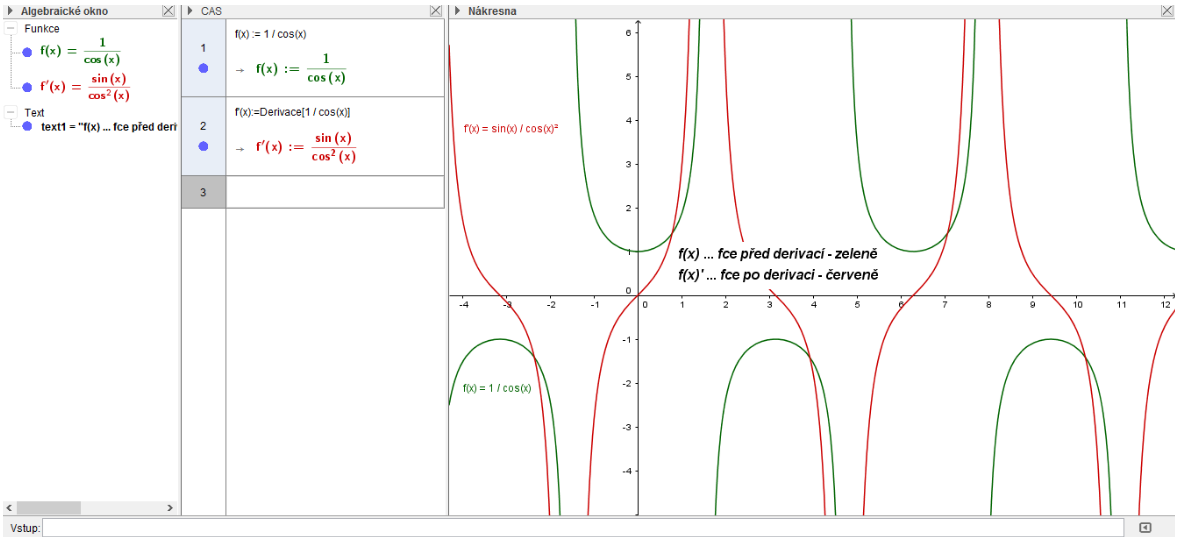
V této kapitole si uvedeme některé vztahy mezi jednotlivými goniometrickými funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens, uvedeme si několik řešených příkladů derivací goniometrických funkcí.

Příklad 4.1. Vypočítejte derivaci této funkce $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\cos x}}$.

Platí, že $\frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x\,, \cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Řešení: $f'(x) = (-1) \cdot (\cos^{-2} x) \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Tato situace je zobrazena v Grafu č. 12.



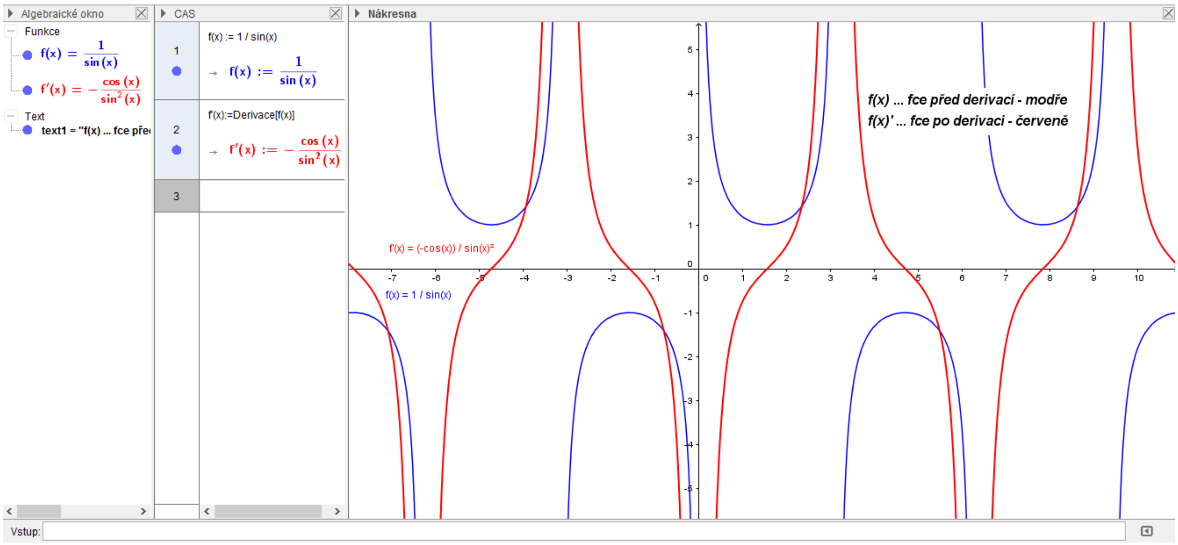
Graf č. 12

Příklad 4.2. Vypočítejte derivaci zadanou předpisem $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sin x}}$.

Platí, že $\frac{1}{\sin x} = \sin^{-1} x, \sin x \neq 0, x \neq k\pi$

Řešení: $f'(x) = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Na tomto Grafu č. 13 je vidět situace před derivací a po derivaci.



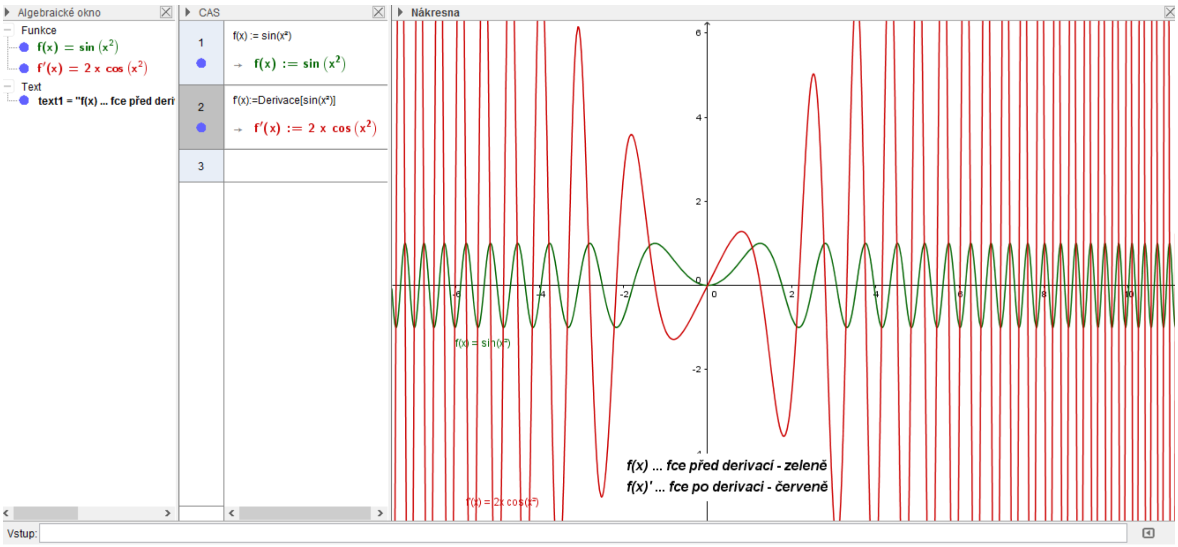
Graf č. 13

Příklad 4.3. Derivujte funkci $\boldsymbol{f(x) = \sin(x^2)}$, $x\epsilon(-\infty; \infty)$

Derivujeme podle vzorce složené funkce.

Řešení: $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$.

Tato situace je řešena a znázorněna na Grafu č. 14.

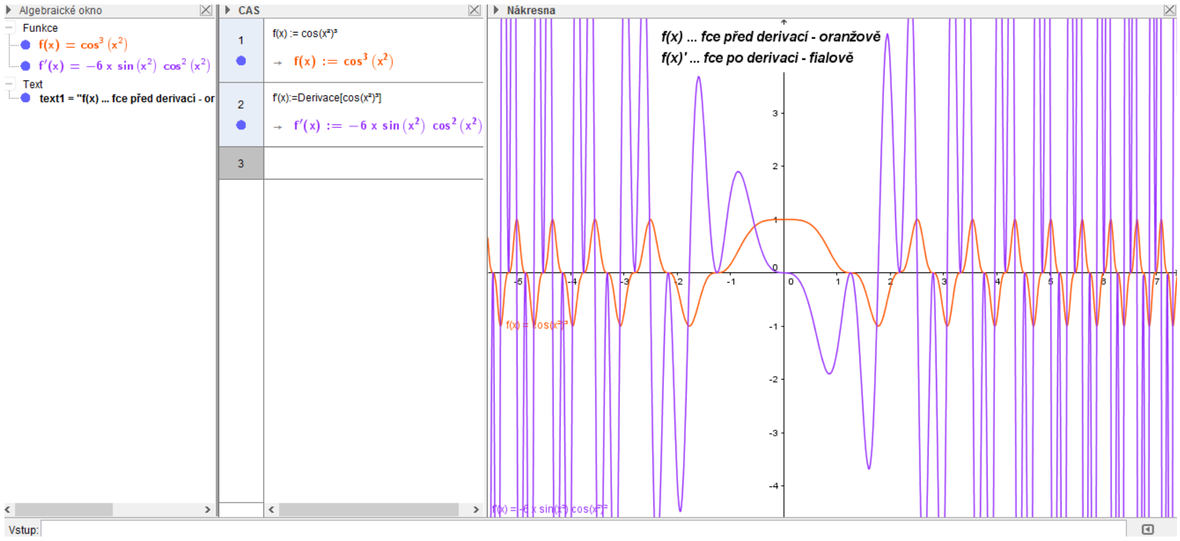


Graf č. 14

Příklad 4.4. Proveďte derivaci funkce $f(x) = \mathbf{cos^3\, x^2}$, $x\epsilon(-\infty;\infty)$

Řešení: $f'(x) = -3 \cdot \cos^2 x^2 (\sin x^2) \cdot 2x = -6 \cdot (\sin x^2) \cos^2 x^2$.

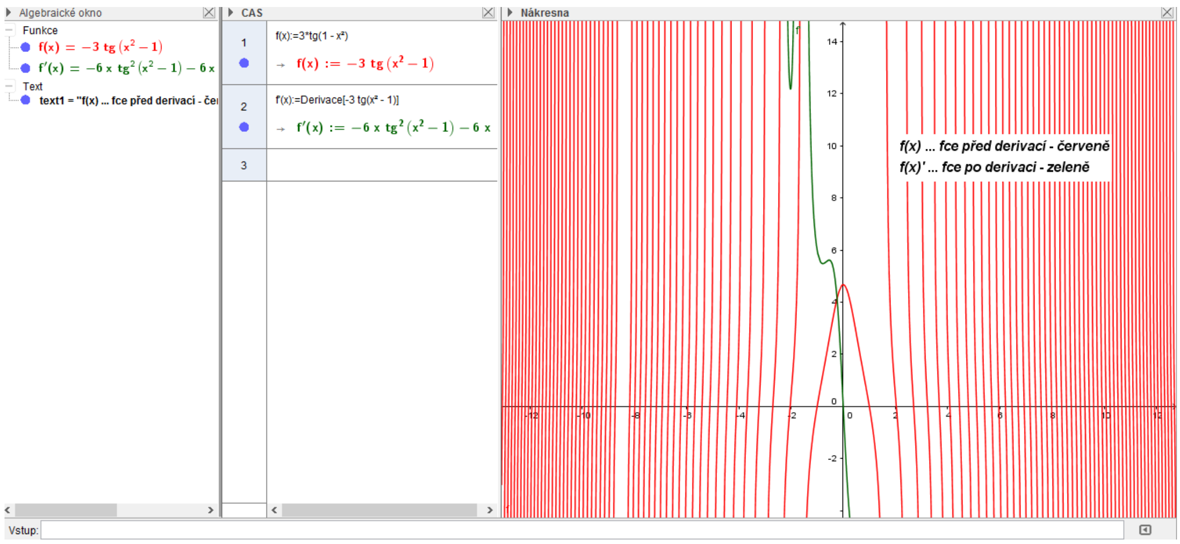
Tuto řešenou situaci si můžeme představit za pomoci Grafu č. 15.



Graf č. 15

Příklad 4.5. Vypočítejte derivaci funkce zadané předpisem

$$\boldsymbol{f(x) = 3 \cdot \mathrm{tg}\,(1 - x^2)}\ ,\ \cos(1 - x^2) \neq 0.$$



Graf č. 16

Řešení: $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-x^2)} \cdot (-2x) = \frac{-6x}{\cos^2(1-x^2)}$.

Na Grafu č. 16 vidíme situaci řešenou v příkladu 4.5. Jelikož je tg x periodická funkce, proto vidíme na grafu červeně znázorněnou funkci, která je dominantní v zadaném výrazu.

Příklad 4.6. Derivujte tuto funkci zadanou předpisem $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1-\cos x}}{\mathbf{1+\cos x}}$, $\cos x \neq -1$,

$$x \neq \pi + 2k\pi$$

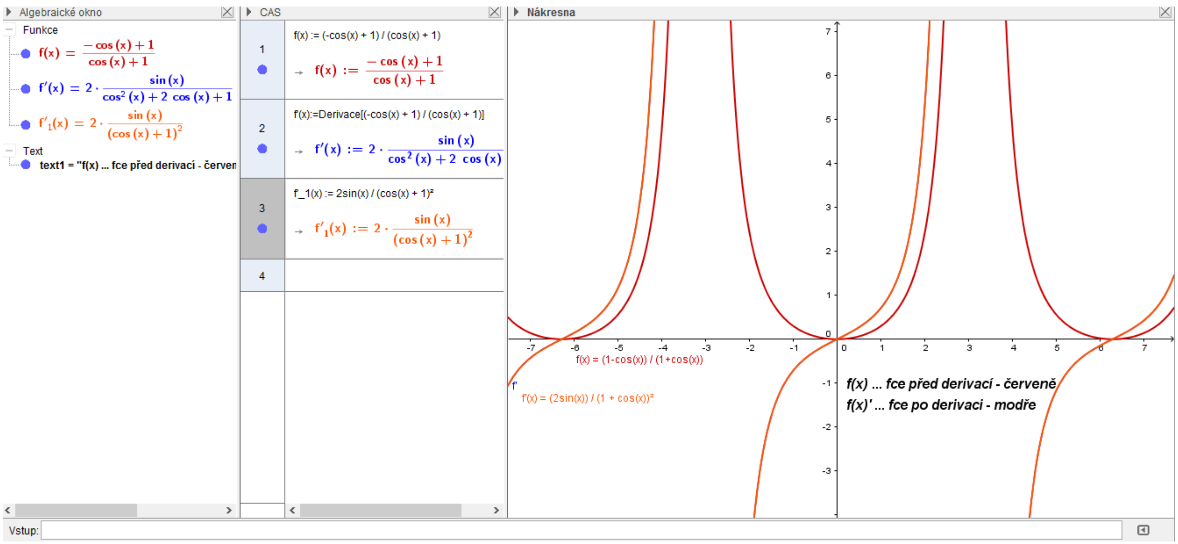
Řešení:

$$f'(x) = \frac{\sin x\,(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{\sin x+\sin x\cos x-(-\sin x+\sin x\cos x)}{(1+\cos x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Grafické znázornění řešeného příkladu vidíme na Grafu č. 17.



Graf č. 17

Příklad 4.7. Proveďte derivaci této funkce $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{tg}\,x\mathbf{+1}}{\mathbf{tg}\,x\mathbf{-1}}$, $\operatorname{tg} x \neq 1, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Řešení č.1.

Upravíme si vzorec, který pak budeme derivovat podle vzorce derivace podílu:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{\frac{\sin x}{\cos x}-1} = \frac{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}.$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2},$$

$$f'(x) = \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2},$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Řešení č.2.

Budeme opět derivovat podle vzorce derivace podílu.

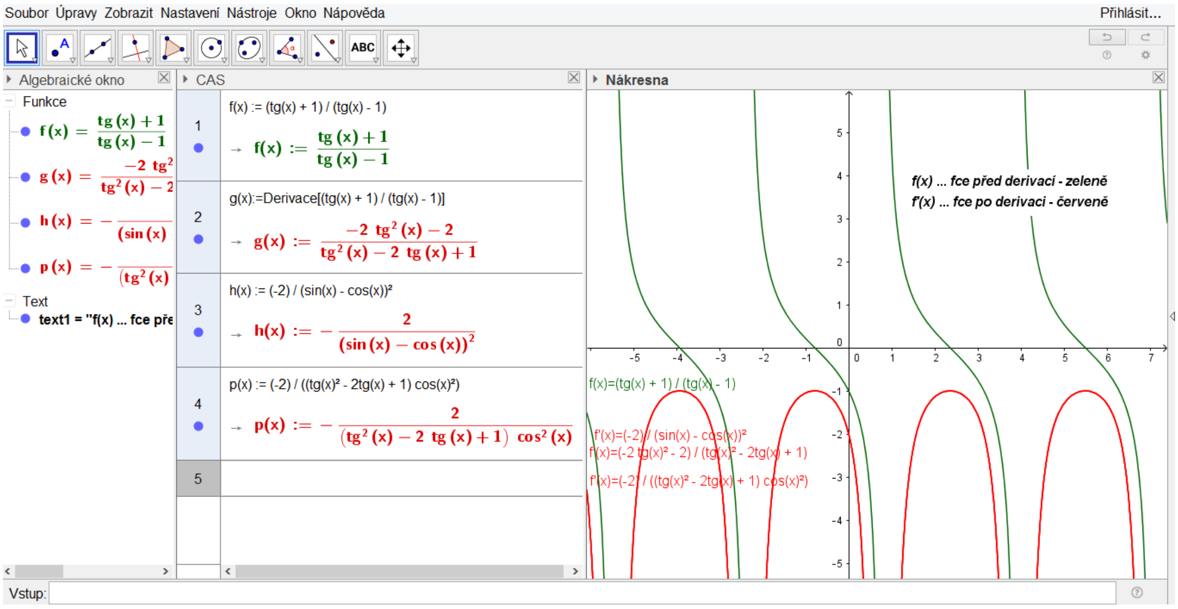
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x - 1) - (\operatorname{tg} x + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1},$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1},$$

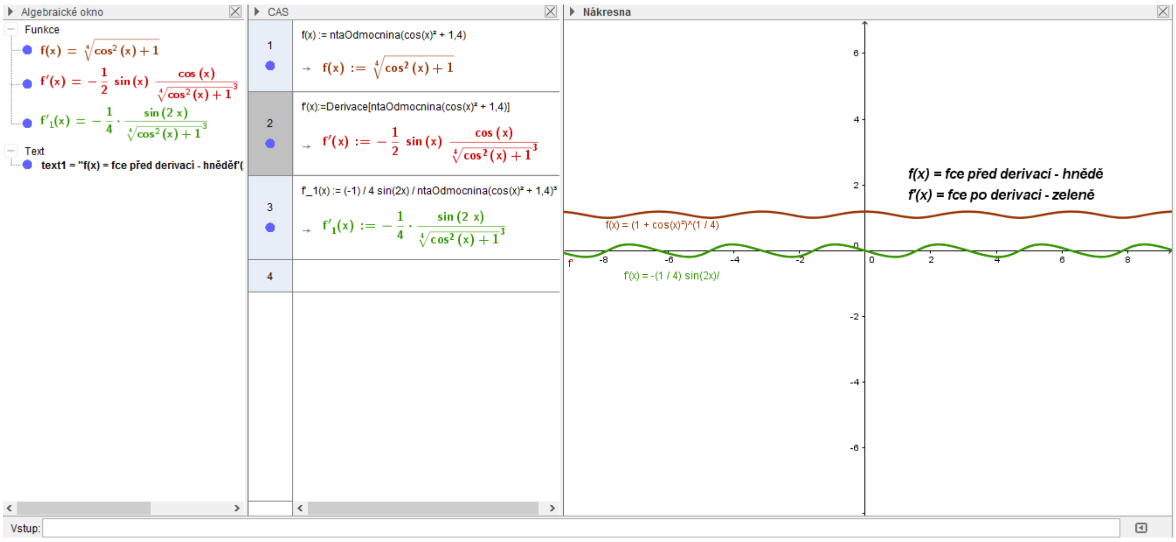
$$f'(x) = \frac{-2}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1)}.$$

Na Grafu č. 18 je znázorněna tato situace.



Graf č. 18

Příklad 4.8. Vypočítejte derivaci této funkce $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}}$, $x\epsilon(-\infty;\infty)$



Graf č. 19

Upravíme si výraz: $\sqrt[4]{1+\cos^2 x} = (1+\cos^2 x)^{\frac{1}{4}}$.

Teď už derivujeme podle vzorce složené funkce:

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1+\cos^2 x)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2\cos x\,(-\sin x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{2\cdot\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$$

$$= -\frac{\sin 2x}{4\cdot\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}.$$

Na Grafu č. 19 si můžeme tuto situaci prohlédnout.

Příklady 4.9. Příklady na procvičení derivací goniometrických funkcí.

Zadejte předpis funkce f do programu GeoGebra, kde si jako v předešlých příkladech ověříte výsledek výpočtu a zobrazí se vám grafy funkcí před a po derivaci.

1) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$
2) $f(x) = \sin 2x$
3) $f(x) = \cos(x^3)$
4) $f(x) = \cos^3 x$
5) $f(x) = x \cdot \cos x$
6) $f(x) = \sin x^2$
7) $f(x) = \cos^3 x^2$
8) $f(x) = \cos(x + 1)$
9) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x$
10) $f(x) = 1 + \cos x$
11) $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$
12) $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$
13) $f(x) = 3x + \sin x - \frac{4}{5}$
14) $f(x) = x^7 - 7 \cos x$
15) $f(x) = \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{cotg} x$
16) $f(x) = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$
17) $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$
18) $f(x) = \frac{1}{\sin^5 x}$
19) $f(x) = \operatorname{cotg} \frac{1}{1+x^2}$
20) $f(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x}$
21) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$
22) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x+2}$
23) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{2+\sin^2 x}$
24) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{\cos x}$
25) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$
26) $f(x) = \sqrt{\sin 7x + 3}$
27) $f(x) = \sqrt[5]{2 + \sin^2 x}$
28) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin 6x}$
29) $f(x) = \sqrt[4]{4 + \cos 4x}$
30) $f(x) = \sqrt{4x + \sin 4x}$
31) $f(x) = \sqrt[5]{\cos 2x + 3}$
32) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos 4x}$
33) $f(x) = \sqrt[5]{1 + \cos^4 x}$
34) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \sin 2x$
35) $f(x) = \cos^2 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

5 Příklady na exponenciální funkce

Exponenciální funkcí se nazývá taková funkce, jež má neznámou na místě exponentu. Exponenciální funkce má tvar $f(x) = a^x, a \in R, a > 0, a \neq 1$. Přičemž symbol a se nazývá základ a výraz x se nazývá exponent.

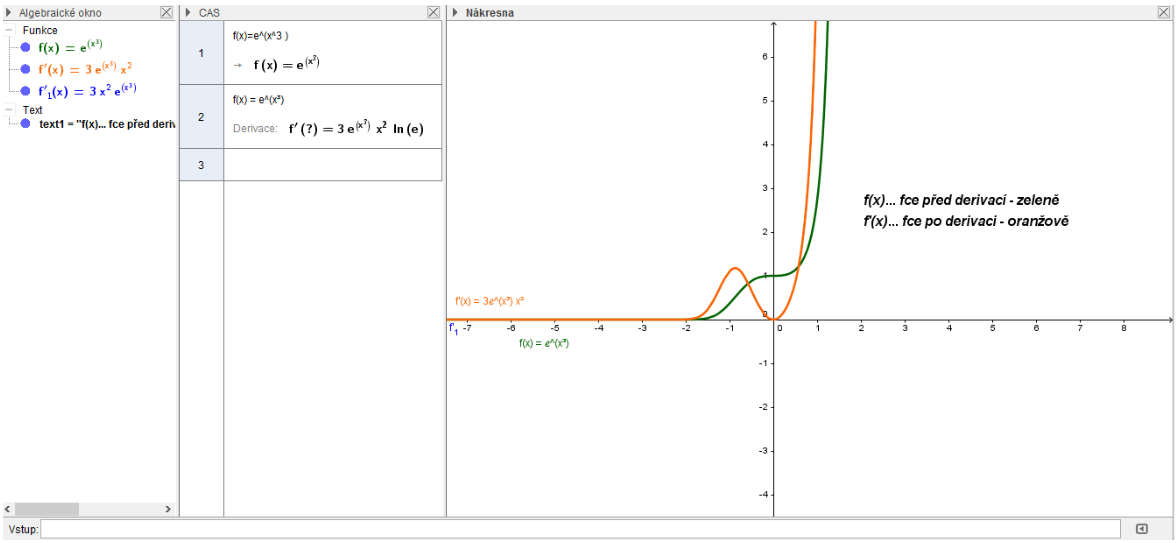
Příklad 5.1. Vypočtěte derivaci exponenciální funkce zadané vzorcem $\boldsymbol{f(x) = e^{x^3}}$.

Budeme postupovat podle vzorce pro derivaci složené funkce.

Řešení: Dosadíme do vzorce a poté počítáme obvyklým způsobem jako v předešlých příkladech.

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

Na Grafu č. 20 je znázorněn průběh této funkce.



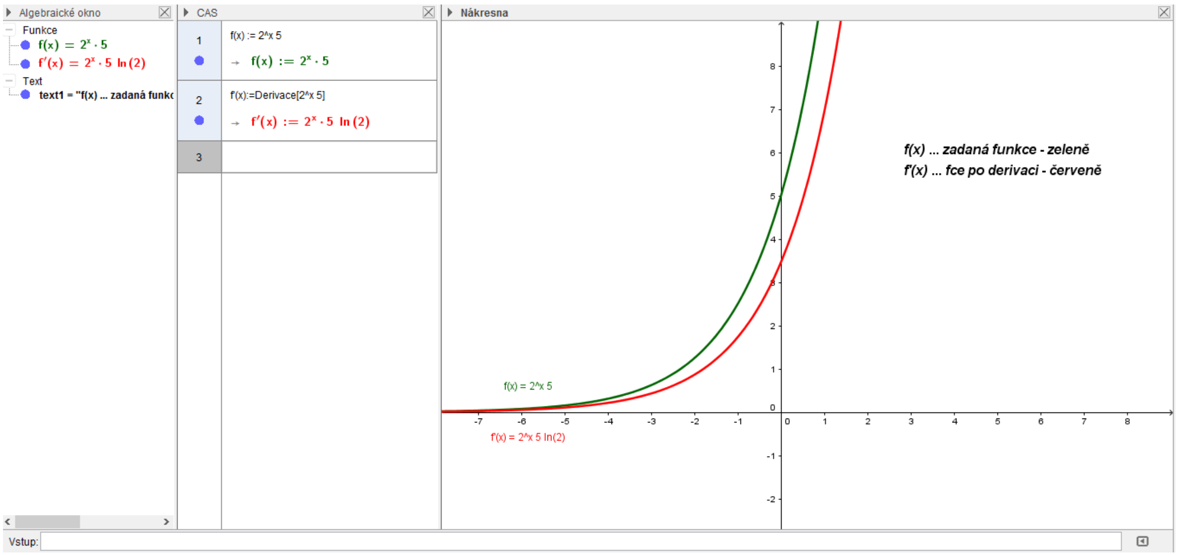
Graf č. 20

Příklad 5.2. Zjistěte derivaci funkce $\boldsymbol{f(x) = 5 \cdot 3^x}$.

Budeme postupovat podle derivace vzorce exponenciální funkce $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, v našem případě dosadíme za a hodnotu 3.

Řešení: $f'(x) = 5 \cdot 3^x \cdot \ln 3$.

Na Grafu č. 21 je znázorněná funkce před i po derivaci.



Graf č. 21

Příklad 5.3. Určete derivaci funkce zadanou předpisem $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{x}{2+x}}}$, $\boldsymbol{(x \neq -2)}$.

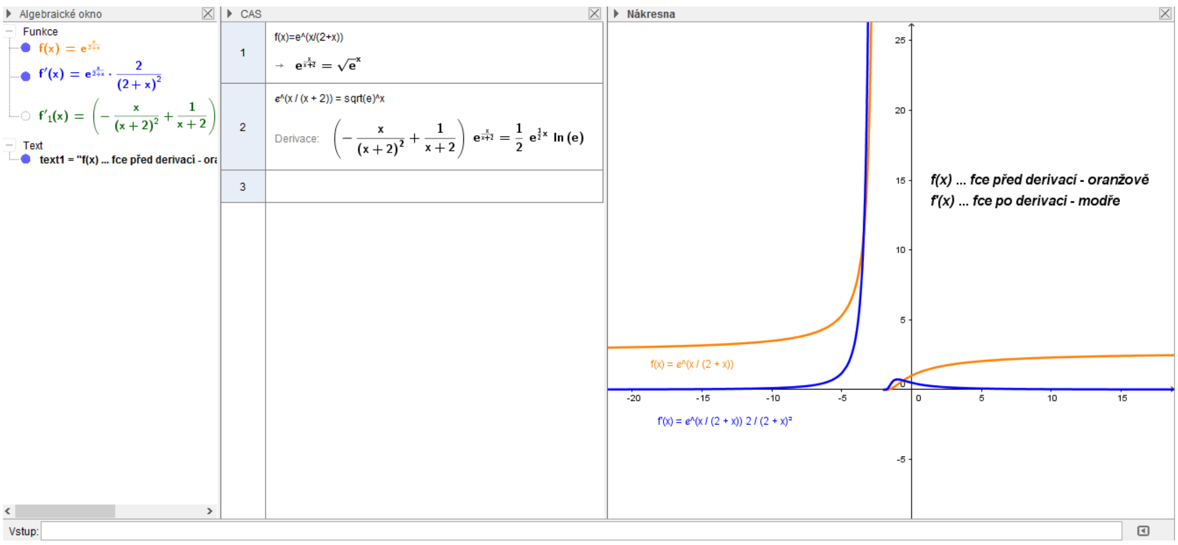
Při výpočtu budeme opět postupovat za pomoci vzorce derivace složené funkce.

Řešení:

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2+x}} \cdot \frac{1\cdot(2+x)-x\cdot(1)}{(2+x)^2},$$

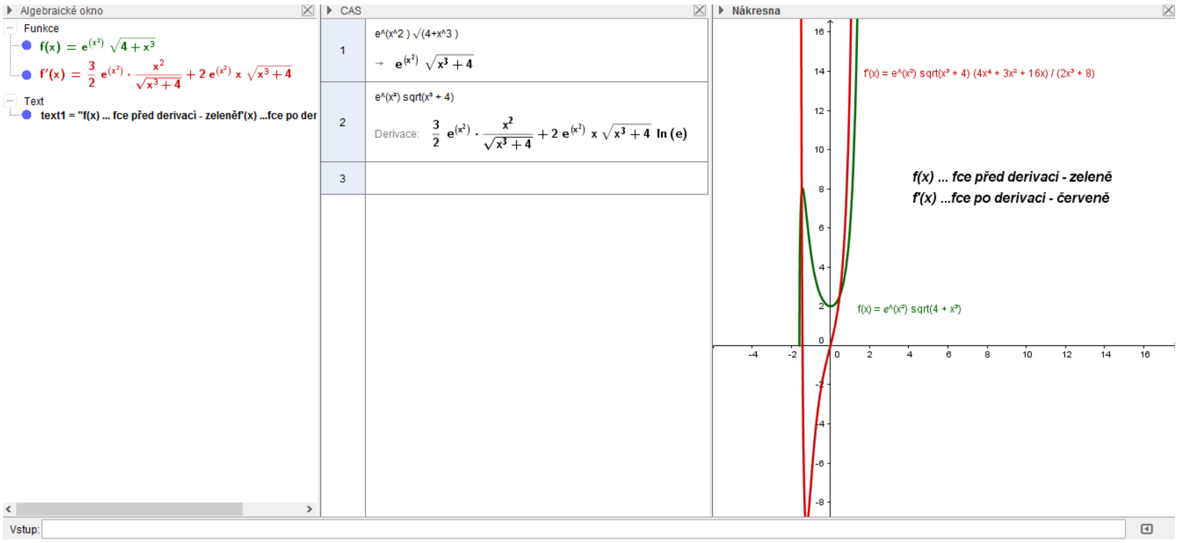
$$f'(x) = e^{\frac{x}{2+x}} \cdot \frac{2}{(2+x)^2}.$$

Situace je znázorněna na Grafu č. 22.



Graf č. 22

Příklad 5.4. Vypočítejte derivaci $\boldsymbol{f(x) = e^{x^2}\sqrt{4+x^3}, x \in R}$.



Graf č. 23

Upravíme si vzorec do tvaru $f(x) = e^{x^2} \cdot (4+x^3)^{\frac{1}{2}}$, který nám usnadní výpočet derivace. Pro provedení derivace využijeme pravidlo derivace součinu.

Řešení:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (4+x^3)^{\frac{1}{2}} + e^{x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 ,$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \sqrt{4+x^3} + \frac{3x^2 \cdot e^{x^2}}{2 \cdot \sqrt{4+x^3}} .$$

Výpočet je znázorněn v Grafu č. 23.

Příklad 5.5. Derivujte předpis funkce $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{\operatorname{cotg} 4x}{x^4+4}}}$ pomocí vzorce derivace složené funkce a derivace podílu.

Řešení:

$$f'(x) = e^{\frac{\operatorname{cotg} 4x}{x^4+4}} \cdot \frac{-\frac{1}{\sin^2 4x} \cdot 4 \cdot (x^4+4) - \operatorname{cotg} 4x \cdot 4x^3}{(x^4+4)^2} .$$

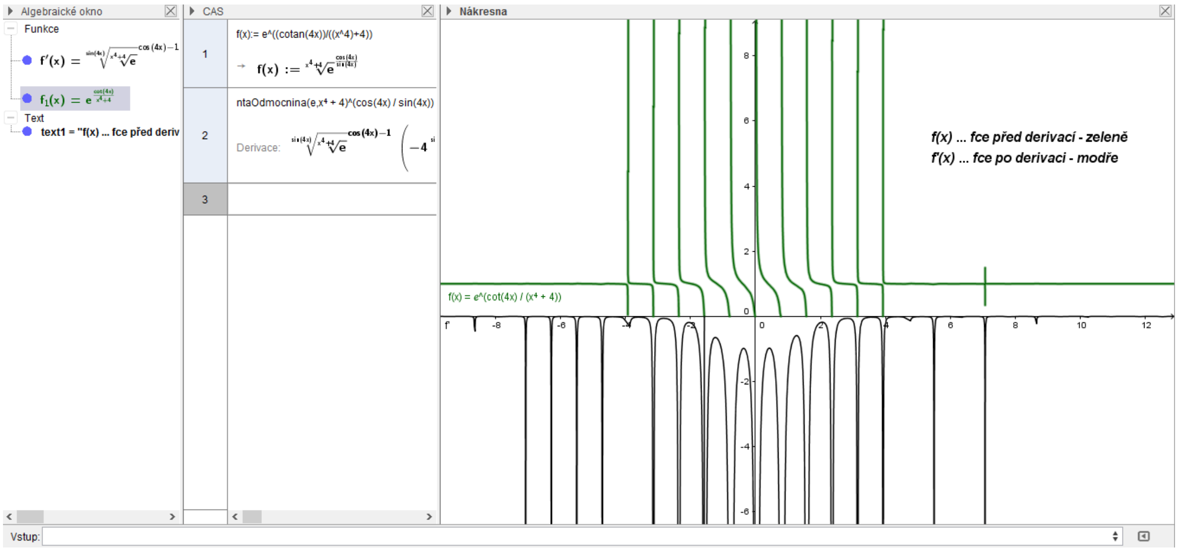
Derivaci co nejvíce zjednodušíme.

$$f'(x) = e^{\frac{\operatorname{cotg} 4x}{x^4+4}} \cdot \frac{-\frac{4(x^4+4)}{\sin^2 4x} - \frac{4x^3 \cdot \cos 4x}{\sin 4x}}{(x^4+4)^2} ,$$

$$f'(x) = e^{\frac{\operatorname{cotg} 4x}{x^4+4}} \cdot \frac{\frac{-4(x^4+4) - \sin 4x \cdot (4x^3 \cdot \cos 4x)}{\sin^2 4x}}{(x^4+4)^2} ,$$

$$f'(x) = e^{\frac{\operatorname{cotg} 4x}{x^4+4}} \cdot \frac{-4(x^4+4) - \sin 4x \cdot 4x^3 \cdot \cos 4x}{(x^4+4)^2 \cdot \sin^2 4x}.$$

Tento výpočet jsme znázornili v programu GeoGebra viz. Graf č. 24.



Graf č. 24

Příklad 5.6. Vypočítejte derivaci podle vzorce $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$.

Derivujeme podle vzorce derivace podílu

Poznámka: $e^x \cdot e^{-x} = 1$

Řešení:
$$f'(x) = \frac{[e^x - e^{-x} \cdot (-1)](e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})[e^x + e^{-x} \cdot (-1)]}{(e^x - e^{-x})^2},$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2},$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2},$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2},$$

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Druhou možností je, že si upravíme a zjednodušíme vzorec tak, aby se nám s ním v následujících krocích lépe počítalo:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{x-\frac{1}{e^x}}}{e^{x+\frac{1}{e^x}}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Počítáme opět pomocí vzorce pro derivaci podílu. Výsledek se opět musí shodovat s předešlým výpočtem.

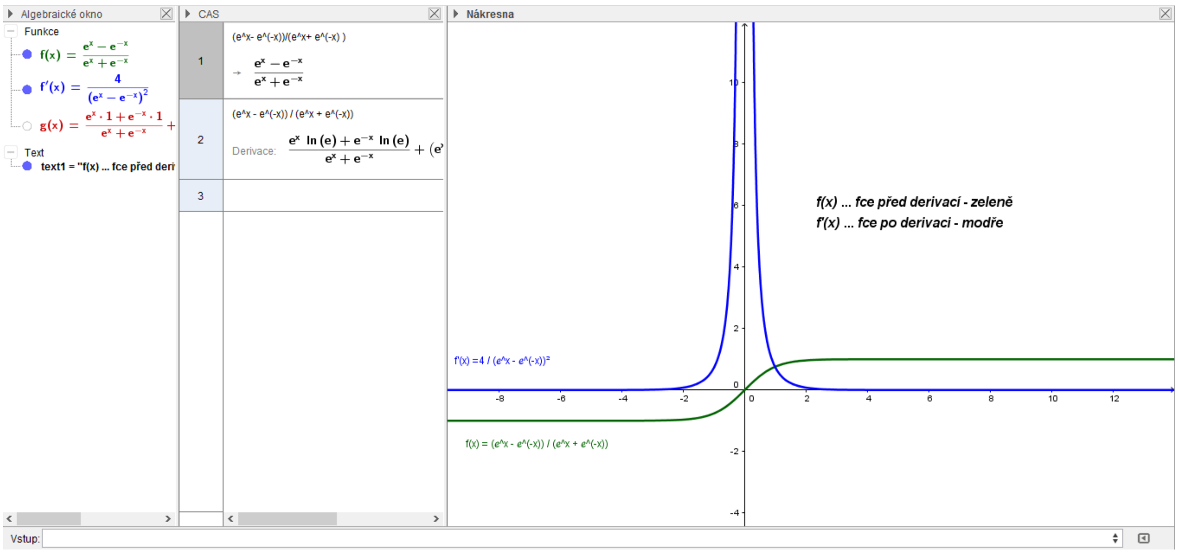
Řešení: $$f'(x) = \frac{e^{2x}\cdot 2\left(e^{2x}+1\right)-\left(e^{2x}-1\right)\cdot e^{2x}\cdot 2}{\left(e^{2x}+1\right)^2},$$

upravíme na základní tvar:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1-e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2},$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4}{\frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{e^{2x}}} = \frac{4}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}.$$

Jak jsme již výše počítali, příklad má dva postupy řešení a stejný výsledek, který se nám v programu GeoGebra zobrazil do Grafu č. 25.



Graf č. 25

Příklad 5.7. Příklady na procvičení exponenciálních funkcí.

Vypočítejte derivace zadaných funkcí a následně si svůj výpočet zkontrolujte pomocí programu GeoGebra (okno CAS). Pozorujte i nákresnu s oběma grafy.

1) $f(x) = 7^x + 2e^x$
2) $f(x) = 2^x - 4e^x - 6^x$
3) $f(x) = 3^{2x}$
4) $f(x) = 2^{3^x}$
5) $f(x) = -7e^x + 4^x - 8x + \frac{x}{5}$
6) $f(x) = x^{e^x}$
7) $f(x) = (x^x)^2 - 2^x$
8) $f(x) = e^{3x^8+18x+9}$
9) $f(x) = x^5 \cdot e^{-x^2}$
10) $f(x) = e^{\frac{x^4}{3+x^2}}$
11) $f(x) = \sqrt{2 + e^x}$
12) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+1}$
13) $f(x) = \frac{\cos 3x}{3-3^{3x}}$
14) $f(x) = \frac{e^{4x}-x^4}{\sqrt[3]{x^2-1}} + 4^x$

6 Derivace funkce logaritmické

Logaritmická funkce je vyjádřena rovnicí $y = \log_a(x)$, kde $a > 0$ (různé od 1). Logaritmická funkce o základu $a = 10$ se nazývá dekadická logaritmická funkce, pro

$a = e$ přirozená logaritmická funkce $y = \ln(x) = \log_e(x)$, kde e je tzv. Eulerovo číslo.

Definiční obor funkce $y = \log(x)$ je $D(f) = (0, \infty)$.

Vztah pro převod mezi logaritmickou a exponenciální funkcí:$y = \log_a x \rightarrow a^y = x$.

Uvedeme si základní vlastnosti přirozeného logaritmu.

Vlastnosti logaritmů:

Pro $\forall\, x, y \in (0, \infty)$, $k \in Z$ platí:

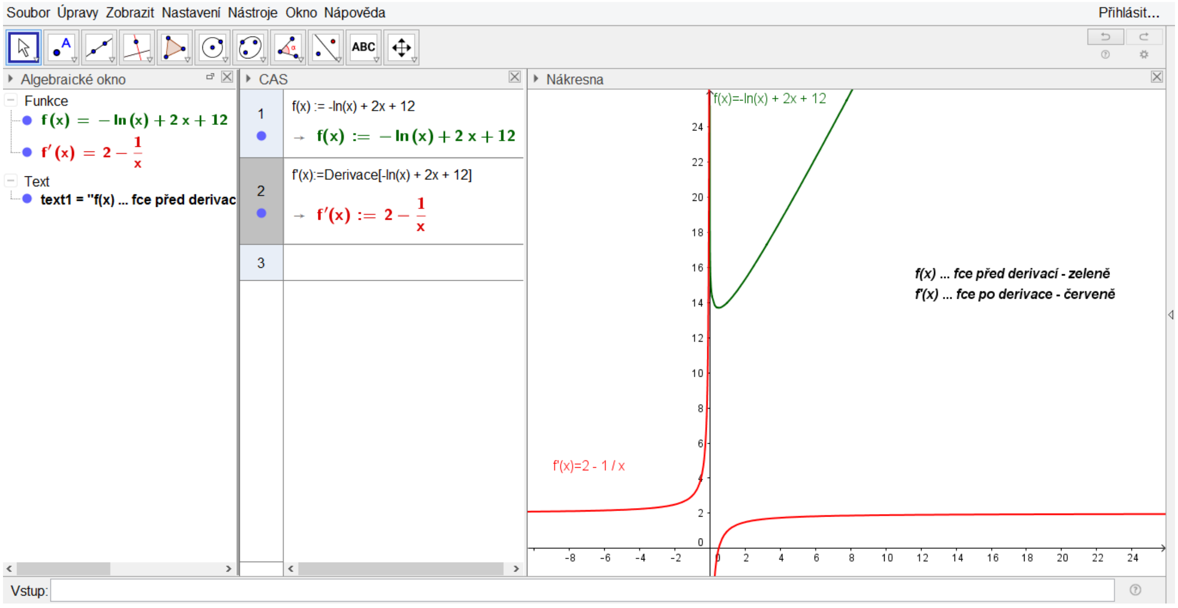
1) $\ln 1 = 0$.
2) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
3) $\ln x^k = k \cdot \ln x$.
4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5) Je-li $y = \ln f(x)$, je $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pro každé x, pro které je $f(x) > 0$.
6) Je-li $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$, je $y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Příklad 6.1. Vypočítejte derivaci $\boldsymbol{f(x) = 2x - \ln x + 12}$ podle základních vzorců.

V tomto příkladu postupujeme podle základních vzorců pro derivaci součtu a rozdílu, které máme popsané v Kapitole 1.1.2.

Řešení: $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

Zde je v Grafu č. 26 zakreslena řešená situace.



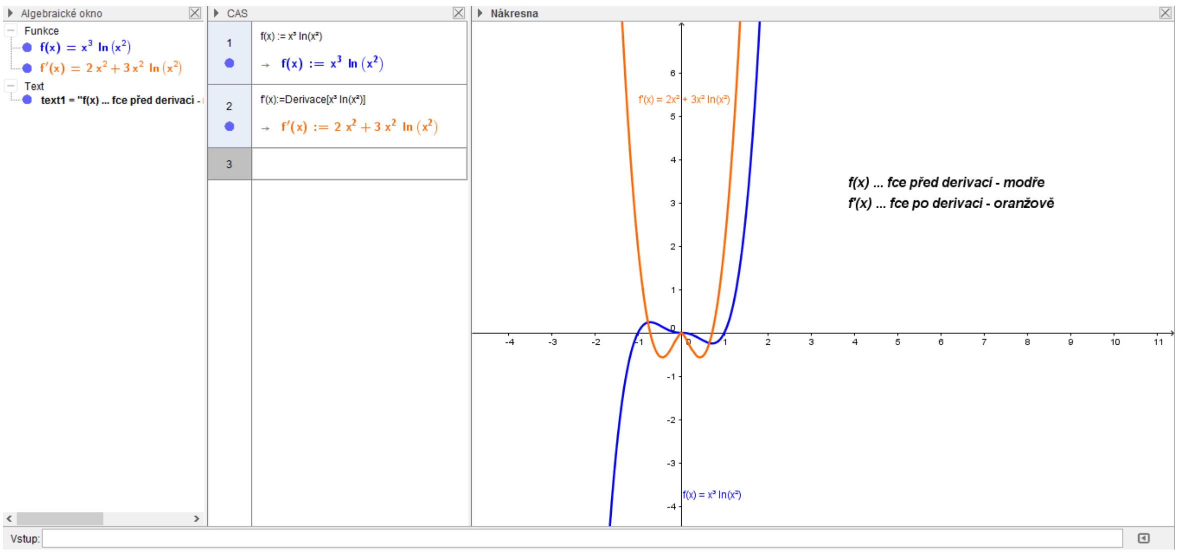
Graf č. 26

Příklad 6.2. Určete derivaci funkce $\boldsymbol{f(x) = x^3 \cdot \ln x^2}$.

Postupujeme za pomoci využití vzorce složené funkce.

Řešení: $f'(x) = 3x^2 \cdot \ln x^2 + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x^2 + 3x^2 \ln(x^2)$.

Zobrazené grafy funkcí v programu GeoGebra v Grafu č. 27 jasně dokazují výše uvedené výpočty.



Graf č. 27

Příklad 6.3. Derivujte vzorec $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{\ln(\sin 2x)}}$.

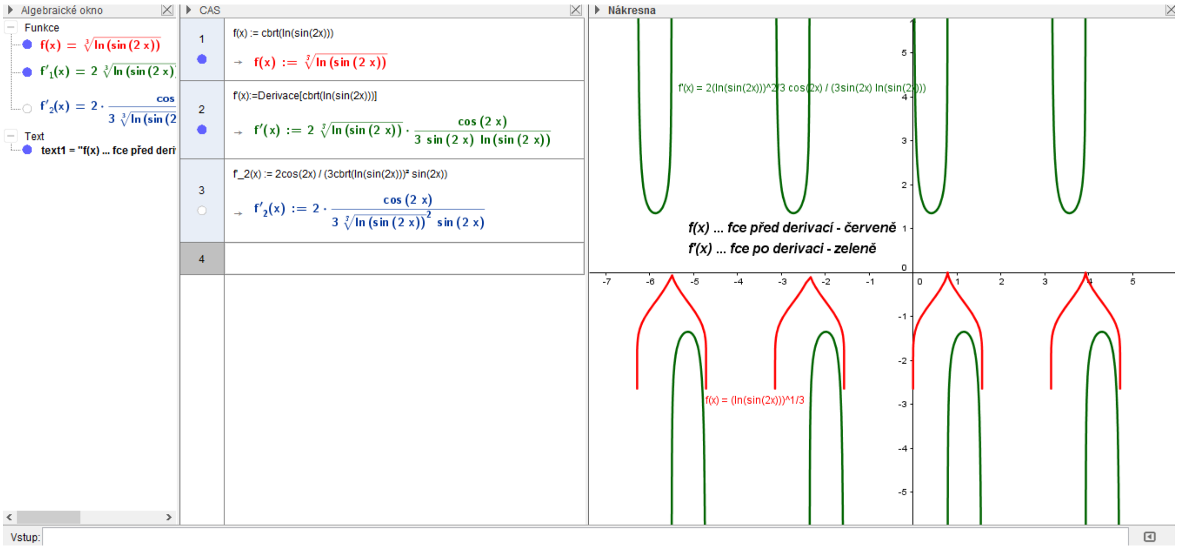
Upravíme si vzorec pro ulehčení matematických výpočtů na tvar $f(x) = [\ln(\sin 2x)]^{\frac{1}{3}}$.

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot [\ln(\sin 2x)]^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2,$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{\ln(\sin 2x)^2} \cdot \sin 2x}.$$

Program nám zobrazil grafický výpočet v Grafu č. 28 řešení.



Graf č. 28

Příklad 6.4. Podle předpisu derivujte funkci $\boldsymbol{f(x) = \ln \frac{(x+3)^2}{\sqrt{(2x+5)^3}}, (x > -\frac{5}{2})}$.

Abychom mohli se zadaným předpisem snadněji pracovat, je vhodné před samotnou derivací provést tuto úpravu:

$$f(x) = \ln[(x+3)^2 \cdot (3x+5)^{-\frac{3}{2}}] \,.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{(2x+5)^3}}{(x+3)^2} \cdot \frac{2 \cdot (x+3) \cdot \sqrt{(2x+5)^3} - (x+3)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (2x+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{(\sqrt{(2x+5)^3})^2},$$

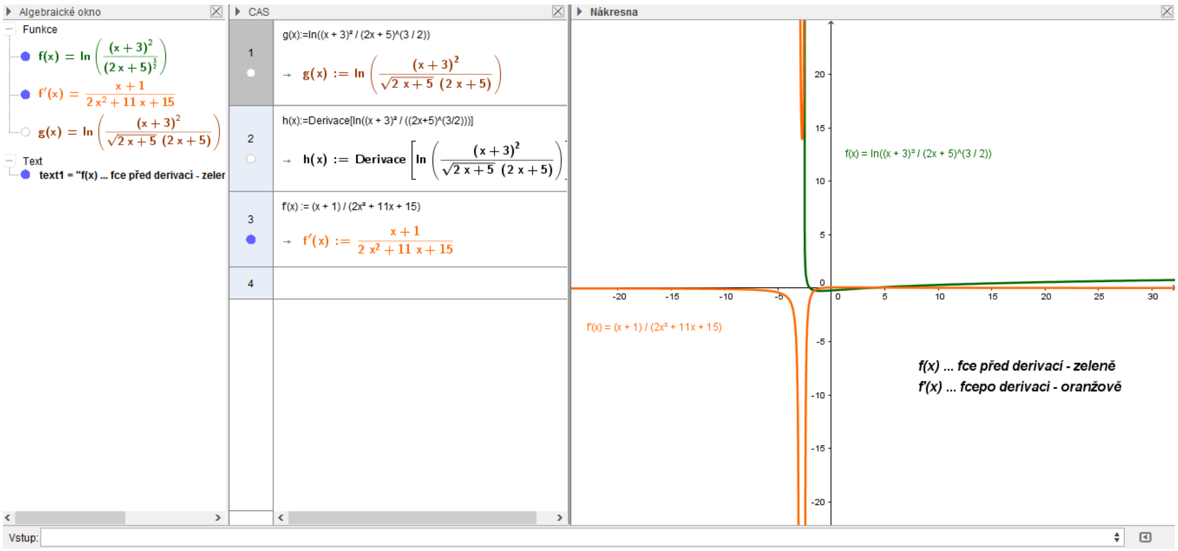
$$f'(x) = \frac{\sqrt{(2x+5)^3}}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3) \cdot \left[2 \cdot \sqrt{(2x+5)^3} - (x+3) \cdot 3 \cdot \sqrt{(2x+5)}\right]}{(2x+5)^3},$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{(2x+5)^3}}{(x+3)} \cdot \frac{\sqrt{(2x+5)} \cdot [2 \cdot (2x+5)^2 - 3x - 9]}{(2x+5)^3},$$

$$f'(x) = \frac{(2x+5)^2 \cdot (x+1)}{(x+3) \cdot (2x+5)^3},$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2x^2+11x+15}.$$

V následujícím Grafu č. 29 je vidět proměna funkce v závislosti na derivaci.



Graf č. 29

Příklad 6.5. Příklady na procvičení derivace funkce logaritmické.

Pokuste se vypočítat derivace zadaných funkcí a zadejte předpis funkce f do programu GeoGebra, kde si ověříte svůj výpočet a pozorujte grafy funkce f i její drivace f'.

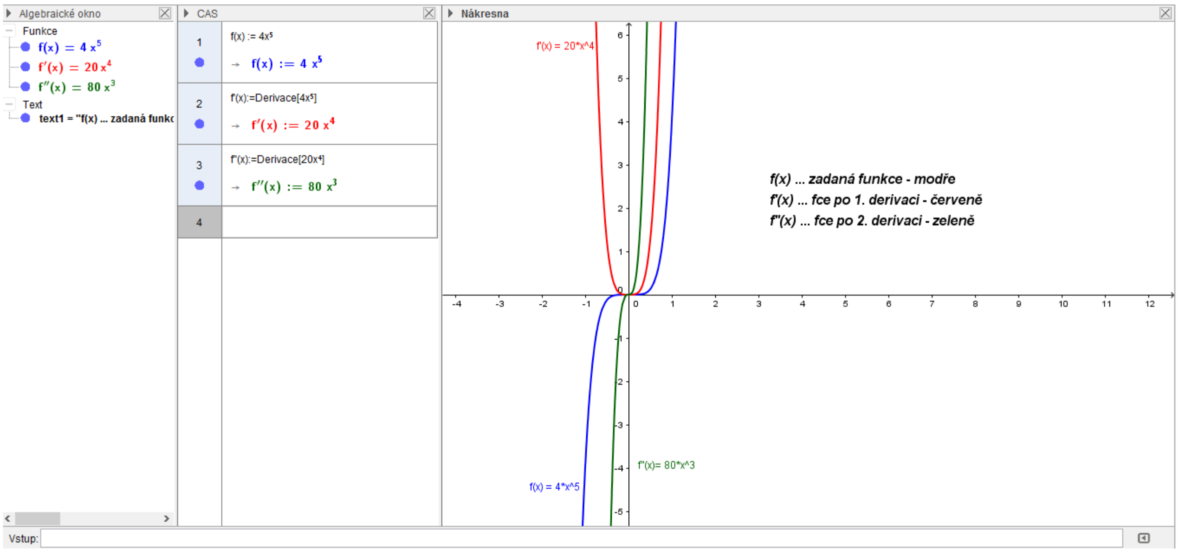
1) $f(x) = \ln 8x$
2) $f(x) = 4x - \ln 4x + 8$
3) $f(x) = \log x - \ln x + \log_4 x$
4) $f(x) = \ln^2 x - 4x^5$
5) $f(x) = x \cdot \ln x$
6) $f(x) = \ln x \cdot \sin x$
7) $f(x) = \ln(3x + 5)$
8) $f(x) = \ln(\cos 2x)$
9) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
10) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$
11) $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x^2}$
12) $f(x) = \frac{x^3 \cdot \ln x}{1+x^5}$
13) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x) \cdot (4 + x^4 + 8x^7)}$

7 Derivace vyšších řádů

Je-li f funkce, která má v každém bodě x nějakého otevřeného intervalu (a, b), derivaci $f'(x)$, potom f' je funkcí definovanou na tomto intervale. Má-li funkce f' v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci, tj. existuje-li limita $\lim_{n \to 0} \frac{f'(x_0+n)-f'(x_0)}{n}$, nazýváme ji druhou derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Místo f'' se píše často též y''. ([5], str. 384)

Příklady na derivace vyšších řádů.

Příklad 7.1. Určete derivaci 2. řádu u předpisu $\boldsymbol{f(x) = 4x^5}$**.**



Graf č. 30

Postupujeme následovně:

1) Vypočítáme si derivaci prvního řádu $f'(x) = 20x^4$.
2) Určíme derivaci druhého řádu, přičemž budeme derivovat podle výsledku první derivace $f''(x) = 80x^3$.

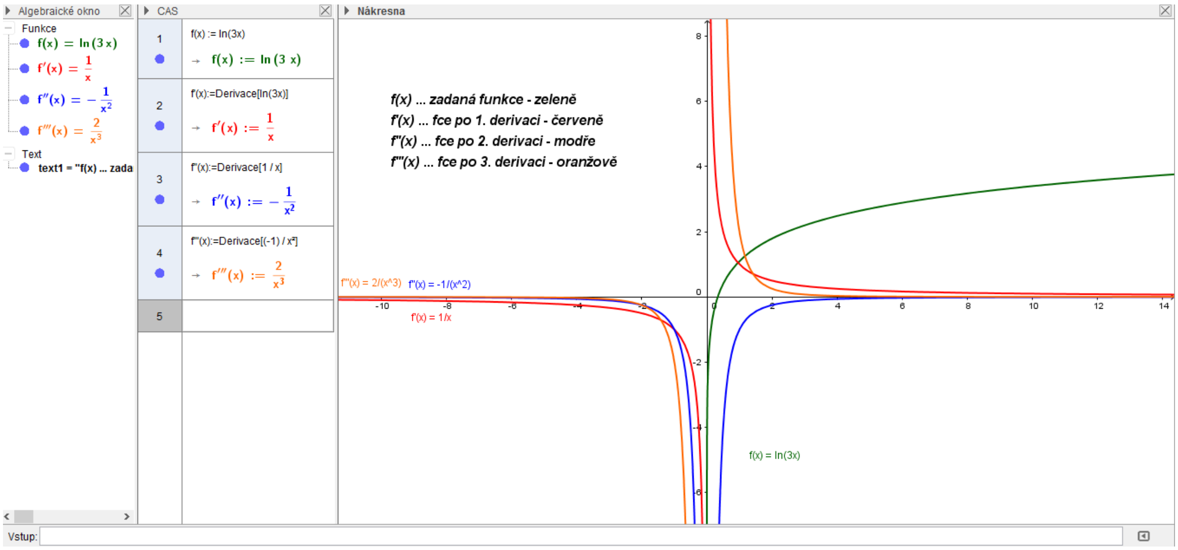
Zobrazíme si grafy funkce po derivaci 1. řádu a 2. řádu na Grafu č. 30.

Příklad 7.2. Vypočítejte derivaci 3. řádu funkce $\boldsymbol{f(x) = \ln 3x}$.

Budeme volit podobný postup jako v předešlém příkladu.

1) Vypočítáme si derivaci 1. řádu $f'(x) = \frac{1}{x}$, upravíme vzorec pro lepší práci s výpočty na $f'(x) = x^{-1}$.
2) Provedeme derivaci 2. řádu podle výsledku derivace 1. řádu $f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$.
3) Vypočítáme derivaci 3. řádu podle výsledku derivace 2. řádu $f'''(x) = 2 \cdot x^{-3}$.

Popisovanou situaci si zobrazíme na Grafu č. 31.



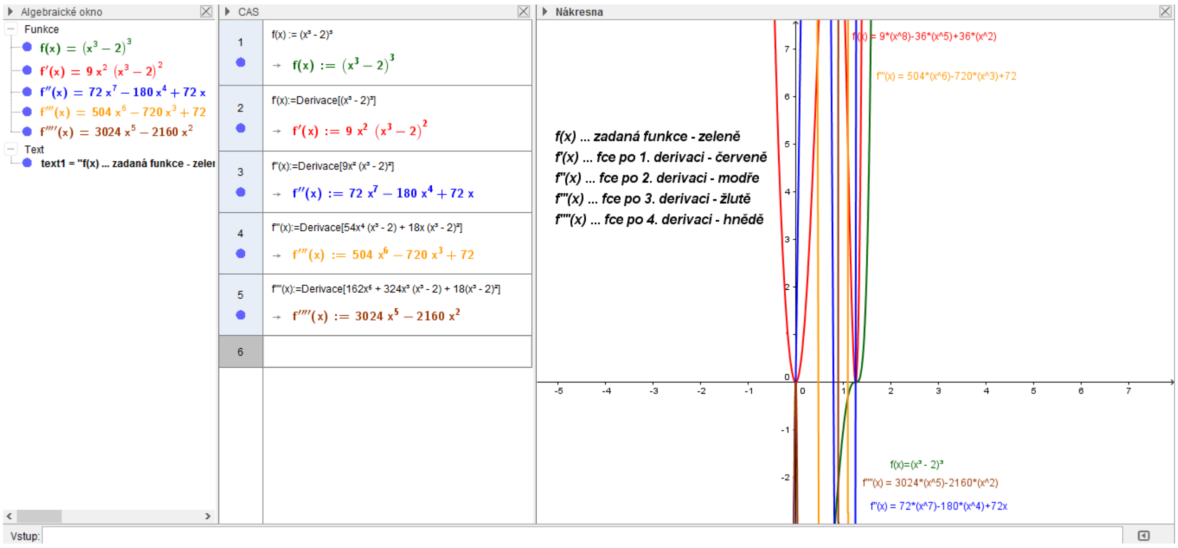
Graf č. 31

Příklad 7.3. Najděte derivaci 4. řádu funkce $\boldsymbol{f(x) = (x^3 - 2)^3}$.

Budeme postupovat podle vzorce derivace složené funkce a ostatní výpočty budou probíhat stejně jako v předešlých příkladech.

1) Vypočítáme derivaci 1. řádu $f'(x) = 3 \cdot (x^3 - 2)^2 \cdot 3x^2$. Tento výpočet si upravíme pro další výpočty:
   $f'(x) = 9x^2 \cdot (x^3 - 2)^2 = 9x^2 \cdot (x^6 - 4x^3 + 4) = 9x^8 - 36x^5 + 36x^2$.
2) Zjistíme si derivaci 2. řádu, budeme derivovat podle výpočtu derivace 1. řádu
   $f''(x) = 72x^7 - 180x^4 + 72x$.
3) Určíme derivaci 3. řádu, derivujeme podle výpočtu derivace 2. řádu
   $f'''(x) = 504x^6 - 720x^3 + 72$.
4) Provedeme derivaci 4. řádu podle výsledku derivace 3. řádu
   $f''''(x) = 3024x^5 - 2160x^2$.

Ukážeme si grafy funkce derivací jednotlivých řádů zobrazených v Grafu č. 32.



Graf č. 32

8 Využití diferenciálního počtu k vyšetření průběhu funkce

Je-li analyticky zadaná funkce definovaná v intervalu, nebo ve sjednocení intervalů, nelze určit všechny body jejího grafu, ale jen některé. Určením vlastností funkce, které nám upřesní sestrojení grafu, je nazváno vyšetřováním průběhu funkce.

8.1 Vztah monotonie funkce a derivace funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu I, kde I je libovolný typ intervalu. Nechť existuje derivace funkce f v každém vnitřním bodě I.

Potom platí:

1) Jestliže pro každý vnitřní bod intervalu I je $f'(x) > 0$, potom funkce f je rostoucí na I.
2) Jestliže pro každý vnitřní bod intervalu I je $f'(x) \geq 0$, potom funkce f je neklesající na I.
3) Jestliže pro každý vnitřní bod intervalu I je $f'(x) < 0$, potom funkce f je klesající na I.
4) Jestliže pro každý vnitřní bod intervalu I je $f'(x) \leq 0$, potom funkce f nerostoucí na I.
5) Jestliže pro každý vnitřní bod intervalu I je $f'(x) = 0$, potom funkce f konstantní na I.

Poznámka: Pokud je derivace funkce kladná v daném intervalu (tzn. v každém bodě tohoto intervalu) je funkce v tomto intervalu rostoucí. Pokud je derivace funkce záporná v daném intervalu, je funkce v tomto intervalu klesající. ([19], str. 79)

8.2 Lokální extrémy funkce

Lokálními extrémy se nazývají společně případy lokálního minima a lokálního maxima, se kterými se v následujících odstavcích seznámíme.

Definujeme si funkci $f: x = f(x)$. Nechť funkce je definovaná v bodě x_0 a jeho jistém okolí. Je definováno, že funkce v bodě x_0 má své lokální minimum v případě, kdy existuje okolí $U\ (x_0)$ bodu x_0. V této situaci platí, že pro všechna $x \in U\ (x_0) \cap D\ (f)$, následně platí, že $f(x) \geq f\ (x_0)$.

V druhém případě se říká, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum, pokud splní následující parametry a to jestli existuje takové okolí $\cup\ (x_0)$ bodu x_0, že pro všechny

$x \in\ U, x_0 \cap D\ (f)$. Platí, že $f(x) \leq f\ (x_0)$ a zároveň platí, že $x \neq\ x_0$.

Pouze při ostré nerovnosti se jedná o ostré lokální minimum, respektive o ostré lokální maximum. ([11], str. 110)

8.3 Konvexnost na intervalu

Funkce f spojitá na intervalu J se nazývá funkce konvexní na intervalu J, právě když pro libovolnou trojici čísel $x_1, x, x_2 \in J$, která splňuje nerovnost $x_1 < x < x_2$ platí, že bod P $[x, f(x)]$ grafu funkce f, leží buď pod přímkou procházející body $P_1\,[x_1, f(x_1)]$, $P_2\,[x_2, f(x_2)]$ nebo je na ni. Tuto skutečnost vyjádříme předpisem:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Speciálně: Funkce f se nazývá ryze konvexní na intervalu J, když bod P $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží pod přímkou procházející body $P_1\,[x_1, f(x_1)]$, $P_2\,[x_2, f(x_2)]$. Platí tedy:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$ ([11], str. 119)

8.4 Konkávnost na intervalu

Funkce f se nazývá funkce konkávní na intervalu J, právě když pro libovolnou trojici čísel $x_1, x, x_2 \in J$ takových, že splňují nerovnost $x_1 < x < x_2$ platí:

bod P $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží buď nad přímkou procházející body $P_1\,[x_1, f(x_1)]$, $P_2\,[x_2, f(x_2)]$, nebo leží na ní. Platí tedy:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Speciálně: Funkce f se nazývá funkce ryze konkávní na intervalu J, když bod P $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží nad přímkou procházející body $P_1\,[x_1, f(x_1)]$, $P_2\,[x_2, f(x_2)]$, tj. platí-li ostrá nerovnost:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$ ([11], str. 119)

Pro funkci f, která má na intervalu J druhou derivaci f'', lze provést určení její konvexnosti, resp. konkávnosti na intervalu J jednodušeji užitím derivace pomocí vět v následující kapitole.

8.5 Věty o postačujících podmínkách konvexnosti, resp. konkávnosti funkce na intervalu.

Funkce f je spojitá na intervalu J a má druhou derivaci pro všechny vnitřní body x intervalu J. Potom platí:

- Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) \geq 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu J.
- Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) > 0$, je funkce f ryze konvexní na intervalu J.
- Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) \leq 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu J.
- Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) < 0$, pak je funkce f ryze konkávní na intervalu J.
- Jestliže pro všechny vnitřní body x je $f''(x) = 0$, potom funkce f je na intervalu J lineární. ([11], str. 122)

8.6 Konvexnost a konkávnost v bodě – inflexní body

Body $x_0 \in D(f)$, ve kterých se funkce f mění z konvexní na konkávní, anebo naopak a pro něž má graf funkce f v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ tečnu t a v tomto bodě $T[x_0, f(x_0)]$ mění grafy svůj průběh. Tento bod se proto nazývá inflexním bodem grafu funkce f.

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a má v něm derivaci $f'(x_0)$, tj. graf funkce f má v bodě $T[x_0, f(x_0)]$ tečnu t. Mění-li se v bodě x_0 funkce f z konvexní na konkávní, resp. z konkávní na konvexní, potom bod x_0 se nazývá inflexní bod funkce f a říká se též, že funkce f má v bodě x_0 inflexi. Bod $[x_0, f(x_0)]$ se pak nazývá inflexní bod grafu funkce f.

Funkce f má v bodě a vlastní derivaci $f'(a)$ a nechť pro všechna $\delta > 0$ taková, že:

1) $\forall x \in P_\delta(a)$ platí $f(x) > f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Potom říkáme, že funkce f je ryze konvexní v bodě a.
2) $\forall x \in P_\delta(a)$ platí $f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Potom říkáme, že funkce f je ryze konkávní v bodě a.

3) V $P_\delta^+(a)$ platí jedena z výše uvedených nerovností a v $P_\delta^-(a)$ platí druhá z výše uvedených nerovností, nebo naopak. Potom říkáme, že funkce f má v bodě a inflexní bod.

Nechť f je funkce, $a \in R$ a existuje $f''(a)$. Potom platí:

1) Jestliže druhá derivace $f''(a) > 0$, funkce f je v bodě a ryze konvexní.
2) Jestliže druhá derivace $f''(a) < 0$, funkce f je v bodě a ryze konkávní.

Nutná podmínka pro inflexní bod, v němž má druhou derivaci.

Je-li bod a inflexní bod funkce f a má-li v něm funkce f druhou derivaci $f''(a)$, pak platí:

$$f''(a) = 0, \text{ nebo neexistuje.}$$

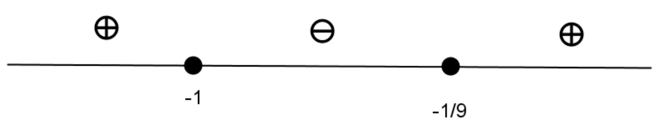
Postačující podmínka pro inflexní bod.

Nechť f je funkce a existuje její vlastní druhá derivace f'' v $U_\delta(a)$. Jestliže $\forall x \in P_\delta^+(a)$ platí, že $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$ a $\forall x \in P_\delta^-(a)$ platí $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) > 0$, pak funkce f má v bodě a inflexní bod. ([5], [1], str. 387-397)

8.7 Ukázka příkladů na určení předešlého vyšetření funkce.

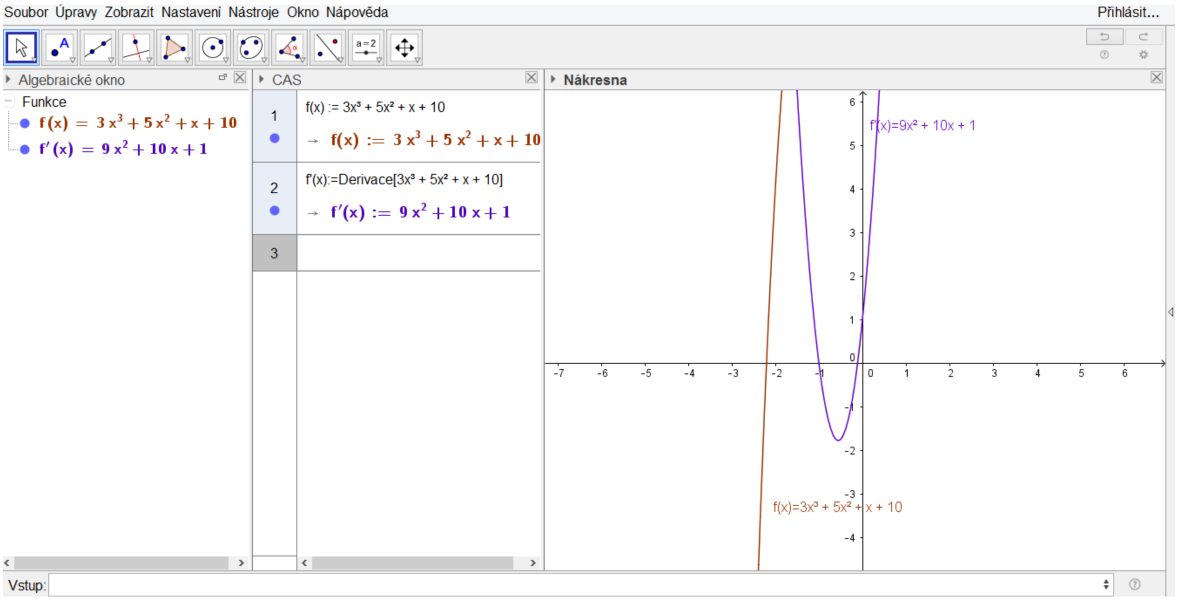
1) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 10$ monotónní a určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy a jaké.

Řešení: Definičním oborem funkce je $D(f) = R$. Nejprve určíme první derivaci funkce $f'(x) = 9x^2 + 10x + 1$. Z podmínky $f'(x) = 0$ určíme body, ve kterých by daná funkce mohla mít extrém. Řešením kvadratické rovnice $9x^2 + 10x + 1$ dostaneme kořeny $x_1 = -\frac{1}{9}$ a $x_2 = -1$. Na číselné ose znázorňující $D(f)$ vyznačíme tyto body a ve vzniklých intervalech určíme znaménko derivace.



Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$ a $\left\langle -\frac{1}{9}, \infty\right)$, klesající na intervalu $\left(-1, -\frac{1}{9}\right\rangle$.
Funkce má v bodě $x = -1$, $y = 11$ ostré lokální maximum, protože se zde mění monotonie funkce z rostoucí na klesající a v bodě $x = -\frac{1}{9}$, $y = \frac{2417}{243}$ ostré lokální minimum.

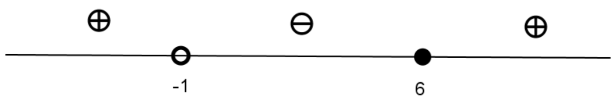
Celý výpočet je znázorněn na Grafu č. 33.



Graf č. 33

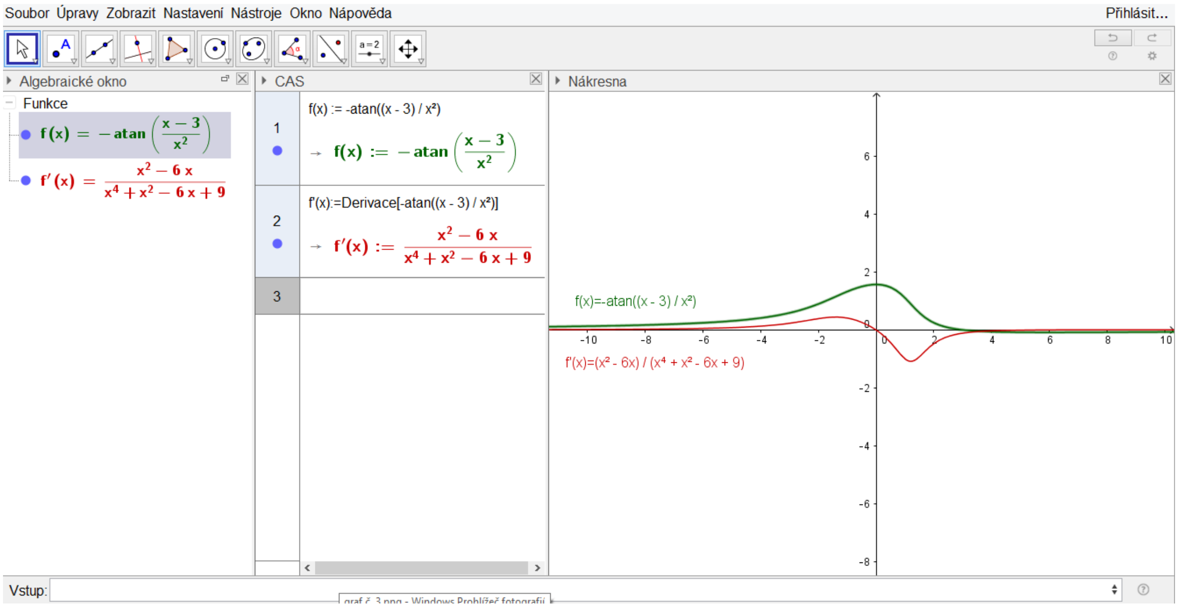
2) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{3-x}{x^2}$ monotónní a určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy a jaké.

Řešení: Definiční obor funkce je $D(f) = R - \{0\}$. Určíme první derivaci funkce $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3-x}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{-x^2-(3-x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2-6x+2x^2}{x^4+(3-x)^2} = \frac{x^2-6x}{x^4+(3-x)^2}$. Derivaci položíme rovnou nule a řešíme rovnici $x^2 - 6x = 0$, tj. $x(x-6) = 0$, odtud $x = 6$ a druhý kořen $x = 0$ nevyhovuje podmínce definičního oboru. Nyní určíme znaménka první derivace ve vzniklých intervalech.



Funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a na $\langle 6, \infty)$ a klesající na intervalu $(0, 6\rangle$.

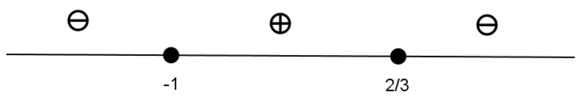
Situace je vyobrazená na Grafu č. 34.



Graf č. 34

3) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = (3x^2 + 4x) \cdot e^{-2x}$ monotónní a určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy a jaké.

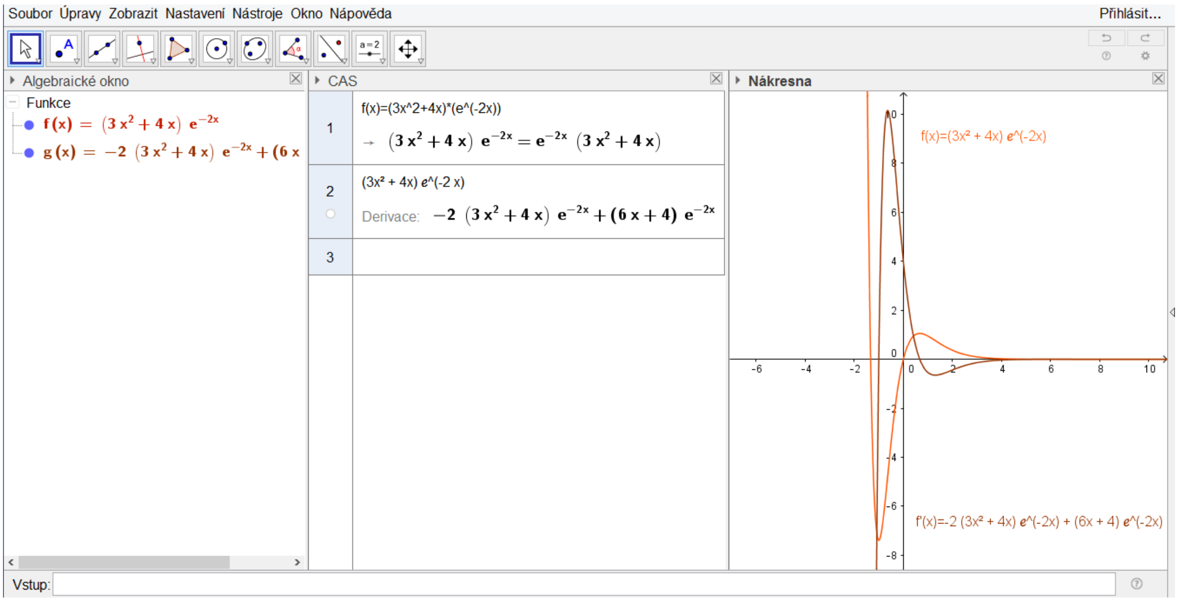
Řešení: Definiční obor funkce $D(f) = R$. Určíme první derivaci funkce $f'(x) = (6x + 4) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x}(3x^2 + 4x) = e^{-2x}(-6x^2 - 2x + 4)$. Hledáme body podezřelé z extrému. Řešením rovnice $6x^2 + 2x - 4 = 0$, získáváme kořeny $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -1$. Na grafu vidíme znaménka první derivace ve vzniklých intervalech.



Funkce je rostoucí na intervalu $\langle -1, \frac{2}{3} \rangle$ a klesající na intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a $\left\langle \frac{2}{3}, \infty \right)$.

Dále je $f(-1) = -e^2$ a $f\left(\frac{2}{3}\right) = 4e^{-\frac{4}{3}} \doteq 1{,}05$. Funkce má ostré lokální minimum v bodě $x = -1$ a $y = -e^2$ a ostré lokální maximum v bodě $x = \frac{2}{3}$, $y = 4e^{-\frac{4}{3}}$.

Výpočet je vidět graficky na Grafu č. 35.



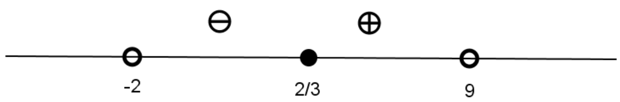
Graf č. 35

4) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce jedné proměnné $f(x) = \ln\frac{x+2}{9-x}$ konvexní či konkávní, a určete inflexní body grafu této funkce.

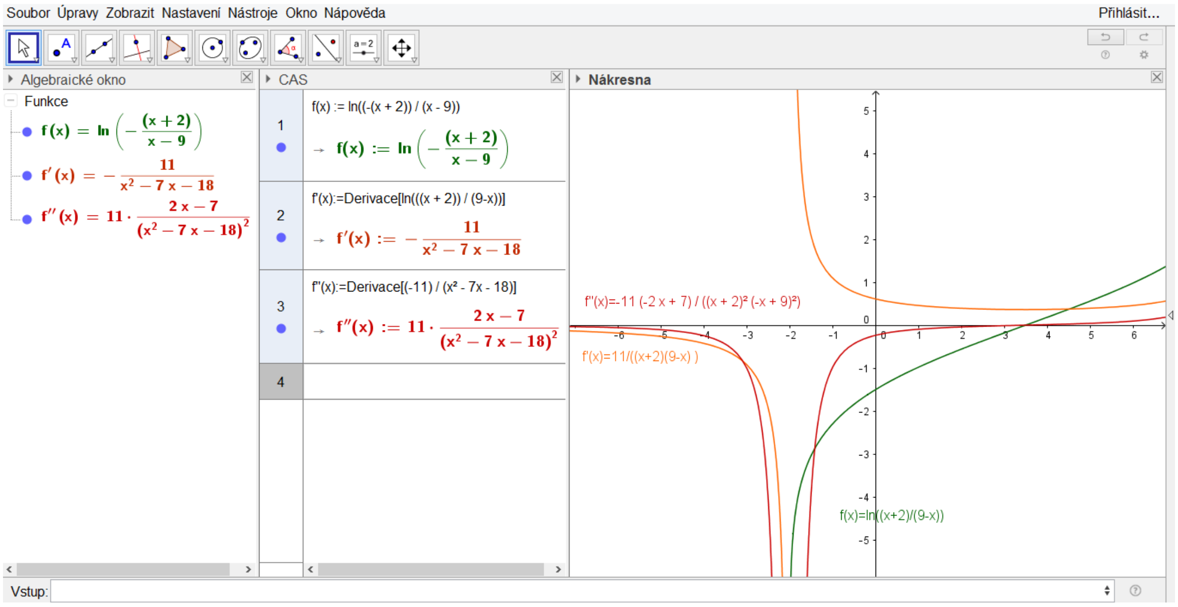
Řešení: Definiční obor určíme z podmínek $\frac{x-2}{9-x} > 0$ a $9 - x \neq 0$.

Proto $D(f) = (-2{,}9)$.

Vypočítáme první derivaci funkce $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{9-x}} \cdot \frac{9-x+x+2}{(9-x)^2} = \frac{11}{(x+2)(9-x)}$. Vypočítáme si druhou derivaci $f''(x) = \frac{-11(9-2x-2)}{(x+2)^2(9-x)^2} = \frac{-11(7-2x)}{(x+2)^2(9-x)^2}$. Druhou derivaci položíme rovnu nule $\frac{-11(7-2x)}{(x+2)^2(9-x)^2} = 0$, $x = \frac{7}{2}$. Určíme znaménka druhé derivace.



Funkce je konvexní na intervalu $\left\langle\frac{7}{2}, 9\right)$ a konkávní na intervalu $\left(-2, \frac{7}{2}\right\rangle$. Inflexní bod má pouze v bodě $x = \frac{7}{2}$. Na Grafu č. 36 si můžeme přestavit tuto situaci.



Graf č. 36

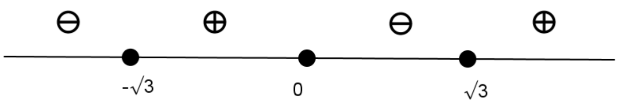
5) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ konvexní či konkávní, určete inflexní body.

Řešení: Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Nyní si vypočítáme první a druhou derivaci funkce $f'(x) = \frac{5\cdot(1+x^2)-5x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{5+5x^2-10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$,

$$f''(x) = \frac{-10x^2\cdot(1+x^2)^2-(5-5x^2)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-10x-10x^3-20x+20x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{10x^3-30x}{(1+x^2)^3}.$$

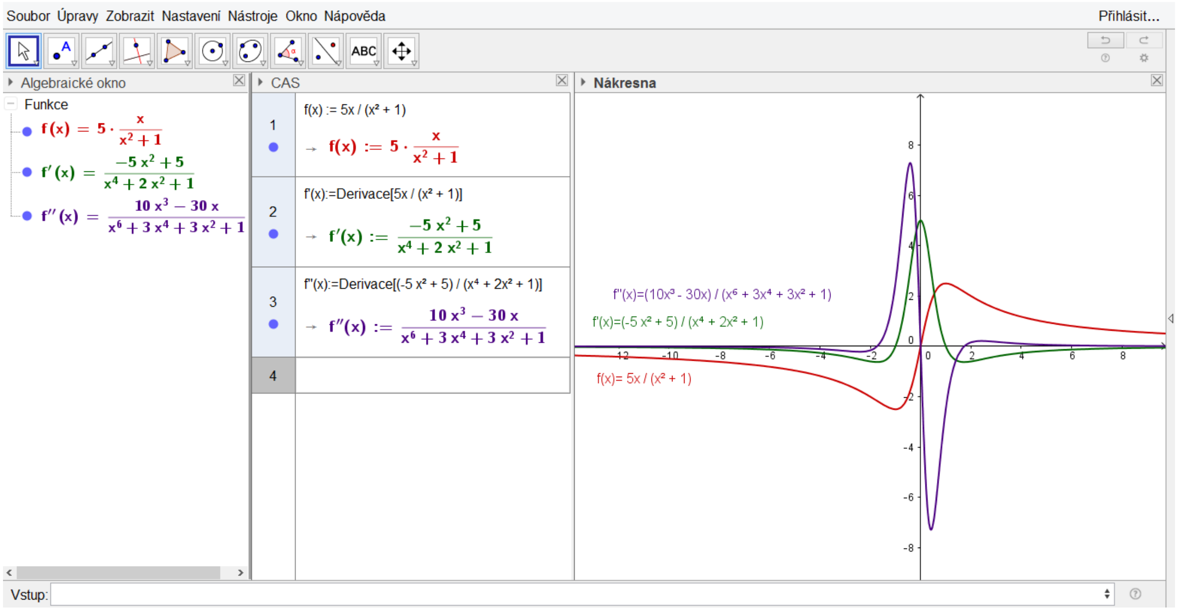
Položíme druhou derivaci rovnou nule, $\frac{10x^3-30x}{(1+x^2)^3} = 0$, jelikož ve jmenovateli je neznámá v druhé mocnině, proto vždy jmenovatel bude vycházet jako kladné číslo. Pro náš výpočet budeme brát v úvahu jen čitatel.

Proto položíme čitatel roven nule $10x^3 - 30x = 0$, $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$. Určíme znaménka druhé derivace.



Funkce je konvexní na intervalech $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a $\langle\sqrt{3}, \infty)$ a konkávní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$. Inflexní body jsou v bodech $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$.

Výpočet znázorněn na Grafu č. 37.



Graf č. 37

6) Nalezněte, na kterých intervalech je funkce $f(x) = e^{4-4x-2x^2}$ konvexní či konkávní a určete inflexní body.

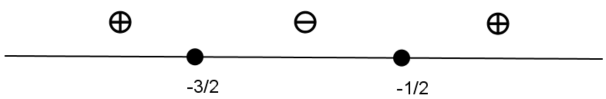
Řešení: Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla.

Nyní si vypočteme první a druhou derivaci $f'(x) = \left(e^{4-4x-2x^2}\right) \cdot (-4-4x)$,

$f''(x) = e^{4-4x-2x^2}(-4-4x)^2 + e^{4-4x-2x^2}(-4) = e^{4-4x-2x^2}(16x^2+32x+12)$.

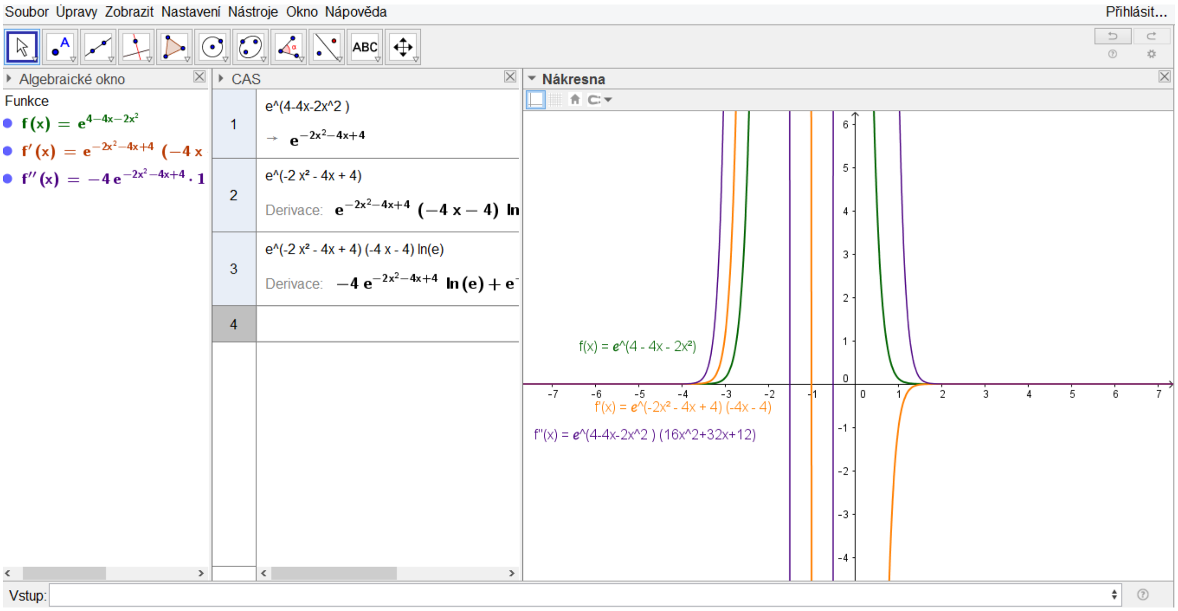
Položíme druhou derivaci rovnu nule tj. $e^{4-4x-2x^2}(16x^2+32x+12) = 0$, druhá derivace bude rovna nule, pokud výraz $16x^2+32x+12$ bude roven nule tj. $16x^2+32x+12 = 0$. Po vyřešení této rovnice dostáváme kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Určíme znaménka druhé derivace.



Funkce je na intervalu $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$ a $\left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right)$ konvexní a konkávní je intervalu $\left\langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Situace je vyobrazena na následujícím grafu Graf č. 38.

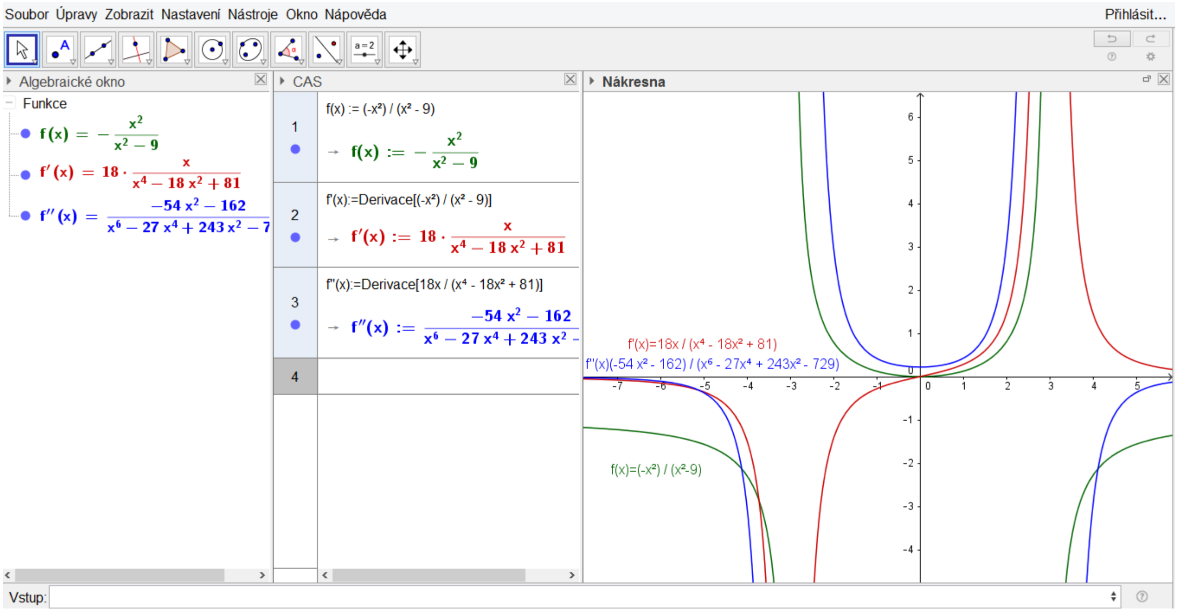


Graf č. 38

7) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}$.

Řešení: Definiční obor $D(f) = R - \{-3,3\}$. Nyní si učíme průsečíky s osami souřadnými. Dosadíme za $y = 0$ do funkčního předpisu a dostáváme, $x = 0$, tj. bod $[0,0]$, který je jediným průsečíkem. Nyní určíme první derivaci funkce

$f'(x) = \frac{2x(9-x^2)-x^2(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$. Položíme první derivaci rovnu nule tj. $\frac{18x}{(9-x^2)^2} = 0$. Z této rovnice dostáváme $x = 0$ a zjistíme, e $f'(x) > 0$ pro kladná x a $f'(x) < 0$ pro záporná x. To znamená, že funkce je rostoucí na intervalech $\langle 0,3)$ a $(3,\infty)$, klesající na intervalech $(-\infty,-3)$ a $(-3,0\rangle$. Funkce má ostré lokální minimum v bodě $x = 0$. Teď si vypočítáme druhou derivaci $f''(x) = \frac{18(9-x^2)^2-18x\cdot 2(9-x^2)(-2x)}{(9-x^2)^4} = \frac{18(9-x^2)+72x^2}{(9-x^2)^3} = \frac{162+54x^2}{(9-x^2)^3}$. Položíme druhou derivaci rovnu nule. Čitatel je vždy kladný a jmenovatel je kladný pro $|x| < 3$. Proto je funkce konvexní na intervalu $(-3,3)$ a konkávní na intervalech $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$. Funkce nemá žádný inflexní bod. Situace je znázorněna na Grafu č.39.



Graf č. 39

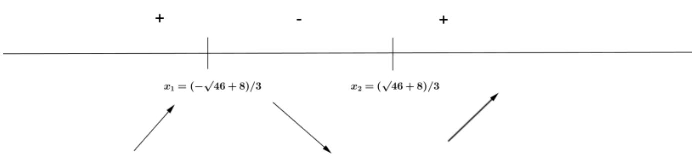
8) Určete monotonii funkce, lokální extrémy a inflexní body u funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 6x - 14.$$

Řešení: Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla, dále si vypočítáme první derivaci funkce $f'(x) = 3x^2 - 16x + 6$. Stacionární body $x_1 = \frac{-\sqrt{46}+8}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{46}+8}{3}$.

To jsou podezřelé body z lokálních extrémů.

Na Obrázku č. 2 můžeme zaznamenat chování daného příkladu po derivaci, podle toho si určíme stacionární body.



Obrázek č. 2

Funkce f roste na intervalu $\left(-\infty; \frac{-\sqrt{46}+8}{3}\right)$, v intervalu $\left(\frac{-\sqrt{46}+8}{3}; \frac{\sqrt{46}+8}{3}\right)$ funkce klesá a v intervalu $\left(\frac{\sqrt{46}+8}{3}; \infty\right)$ roste.

Druhá derivace je určena tímto předpisem $f''(x) = 6x - 16$.

Po dosazení stacionárních bodů do druhé derivace dostáváme:

$$f''\left(\frac{-\sqrt{46}+8}{3}\right) = 6 \cdot \frac{-\sqrt{46}+8}{3} - 16 = -2\sqrt{46}\,.\,-2\sqrt{46} < 0.$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{46}+8}{3}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{46}+8}{3} - 16 = 2\sqrt{46}.\,2\sqrt{46} > 0.$$

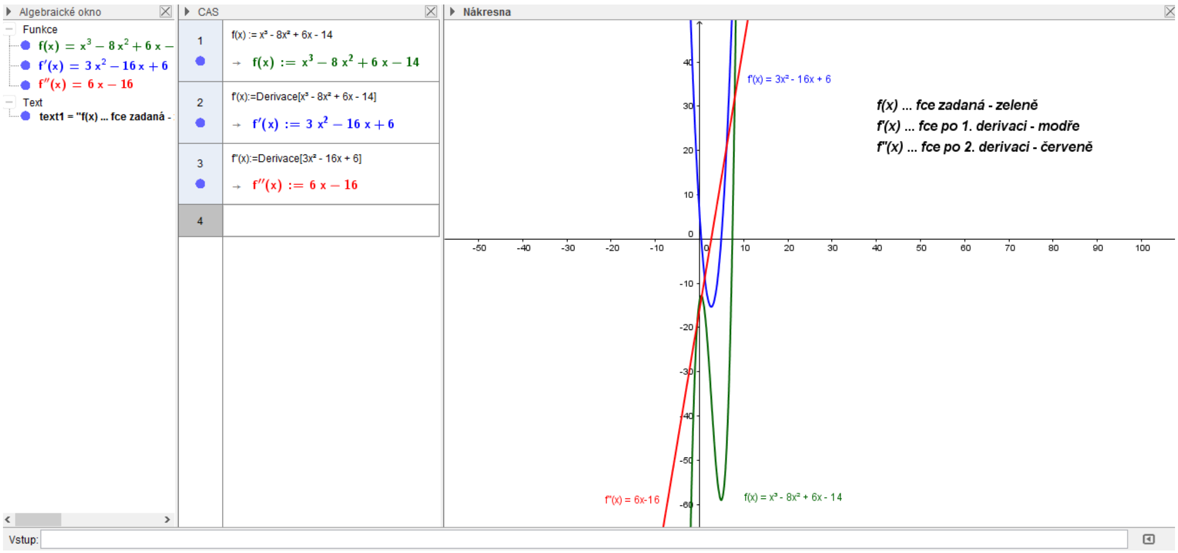
V $x = \frac{-\sqrt{46}+8}{3}$ je lokální maximum a v $x = \frac{\sqrt{46}+8}{3}$ je lokální minimum.

Druhá derivace je v celém intervalu rostoucí. Funkce je konvexní.

$$f\left(\frac{-\sqrt{46}+8}{3}\right) = \left(\frac{-\sqrt{46}+8}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{-\sqrt{46}+8}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{-\sqrt{46}+8}{3} - 14 = -12{,}8157$$

$$f\left(\frac{\sqrt{46}+8}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{46}+8}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{46}+8}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{\sqrt{46}+8}{3} - 14 = -59.0360$$

Inflexní body funkce nemá. Situace je znázorněna na Grafu č.40.



Graf č. 40

Výsledky

Výsledky příkladů **2.6.**

1) $f'(x) = 4x^3,\ x \in R$
2) $f'(x) = 3x^2, x \in R$
3) $f'(x) = 2x - 4, x \in R$
4) $f'(x) = 12x^3, x \in R$
5) $f'(x) = 2x + 3x^2, x \in R$
6) $f'(x) = 5x^4, x \in R$
7) $f'(x) = 2\pi x, x \in R$
8) $f'(x) = 2x + 2, x \in R$
9) $f'(x) = 8x - 1, x \in R$
10) $f'(x) = 12x - 3x^2, x \in R$
11) $f'(x) = 12x^2 - 6x + 2, x \in R$
12) $f'(x) = 13x^{12} - 11x^{10} + 4x - 1,\ x \in R$
13) $f'(x) = -4x^{-5} - 7x^{-8} - 11x^{-12},\ x \in R, x \neq 0$
14) $f'(x) = 35x^4 - 20x^3 + 12x^2 - 4x,\ x \in R$
15) $f'(x) = 2\ (6x^3 - 3x^2 + 5x + 3),\ x \in R$
16) $f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ x \in R, x \neq 0$
17) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^4},\ x \in R, x \neq 0$
18) $f'(x) = x^2 + x - 2,\ x \in R$
19) $f'(x) = x\ (x^2 + x + 1),\ x \in R$
20) $f'(x) = 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{5}, x \in R$
21) $f'(x) = -\frac{40x^7}{7} - \frac{56x^6}{11} - 2x^5, x \in R$
22) $f'(x) = -\frac{64}{x^7} + \frac{36}{x^5} - \frac{16}{x^3} + \frac{4}{x}, x \in R,\ x \neq 0$
23) $f'(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{12x^3}{5} + \frac{7x^2}{2} - x,\ x \in R$
24) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in R,\ x > 0$
25) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ x \in R, x > 0$
26) $f'(x) = \frac{9x^2}{\sqrt{6x^3}},\ x \in R,\ x > 0$

27) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3},\ x \in R, x > 0$

28) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1, x \in R, x > 0$

29) $f'(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3} - \frac{5\sqrt[4]{x}}{4} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}, x \in R, x > 0$

30) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}, x \in R, x \neq 0$

31) $f'(x) = 5 - \frac{7}{2\sqrt{x}}, x \in R, x > 0$

32) $f'(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} - 2x, x \in R, x > 0$

33) $f'(x) = \frac{7\sqrt{x^5}}{2} - \frac{9\sqrt[4]{x^5}}{4}, x \in R, x > 0$

34) $f'(x) = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{25\sqrt[5]{x^4}} - \frac{5}{6\sqrt[6]{x^{11}}}, x \in R, x > 0$

35) $f'(x) = \frac{7\sqrt[6]{x}}{6} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}, x \in R, x > 0$

36) $f'(x) = \frac{29x^{\frac{21}{8}}}{8}, x \in R, x > 0$

37) $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{35\sqrt[5]{x^3}}, x \in R, x > 0$

38) $f'(x) = -\frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4)^4}} + \frac{4x}{5\sqrt[5]{(2x^2)^6}}, x \in R, x \neq 0$

39) $f'(x) = 9\,x^8 - 2x, x \in R$

40) $f'(x) = 5(6x - 4), x \in R$

41) $f'(x) = \sqrt{2} \cdot (21x^6 - x^4 - 6x), x \in R$

42) $f'(x) = x^3 - 3\sqrt{5}\, x^2 + \frac{8x}{5}, x \in R$

Výsledky příkladů **3.7.**

1) $f'(x) = 2x + 4, x \in R$

2) $f'(x) = -3 \cdot (1 - x)^2, x \in R$

3) $f'(x) = 9 \cdot (3x - 5)^2, x \in R$

4) $f'(x) = 15x^2 \cdot (x^3 - 5)^4, x \in R$

5) $f'(x) = 24x^2 \cdot (4x^3 + 5), x \in R$

6) $f'(x) = (12x^3 - 24x) \cdot (x^4 - 4x^2 + 9)^2, x \in R$

7) $f'(x) = x^3 - 2x, x \in R$

8) $f'(x) = \frac{7x^2 - 20}{5\sqrt[5]{(x^2-4)^4}}, x < -2; x > 2$

9) $f'(x) = 5x^4 - 1, x \in R$

10) $f'(x) = -12 \cdot (2x^2 + 2x - 1), x \in R$

11) $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 36x^2 - 5, x \in R$

12) $f'(x) = -4x^3 + 9x^2 - 14x + 25, x \in R$

13) $f'(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - x + 1)^2 \cdot (10x^3 - 7x^2 + 10x - 3), x \in R$

14) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 23, x \in R$

15) $f'(x) = -8x \cdot (x^2 + 1)^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1, x \in R, x > 0$

16) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, x \in R, x \neq -1$

17) $f'(x) = -\frac{3}{(2x-1)^2}, x \in R, x \neq \frac{1}{2}$

18) $f'(x) = \frac{2x}{(9-x^2)^2}, x \in R, x \neq \pm 3$

19) $f'(x) = \frac{16}{(1-x)^5}, x \in R, x \neq 1$

20) $f'(x) = \frac{6x^6+3}{x^4}, x \in R, x \neq 0$

21) $f'(x) = \frac{21x^4-52x^3}{(7x-13)^2}, x \in R, x \neq \frac{13}{7}$

22) $f'(x) = \frac{4x^7-15x^4-18x^2+20x}{(x^3-2)^2}, x \in R, x \neq \sqrt[3]{2}$

23) $f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x^3}}, x \in R, x > 0$

24) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x \in R$

25) $f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \cdot \sqrt{x}}}, x \in R, x > 0$

26) $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}+2x}{8x \cdot \sqrt[4]{\left(\sqrt{x^3}+x\right)^3}}, x \in R, x > 0$

27) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (5x^2+3)}{2 \cdot \sqrt{x^5+x^3}}, x \in R, x > 0$

28) $f'(x) = -\frac{12}{x^2 \cdot \sqrt{6-x^2}}, x \in R, -\sqrt{6} < x < 0, 0 < x < \sqrt{6}$

29) $f'(x) = -\frac{5(x+1)}{\sqrt{(x^2+5)^3}}, x \in R$

30) $f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{(x^3-1)^3}}, x \in R, x > 1$

31) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}, x \in R, -1 < x < 1$

32) $f'(x) = -\frac{1}{2+x^2+x \cdot \sqrt{2+x^2}}, x \in R$

Výsledky příkladů **4.13.**

1) $f'(x) = x^2 \cdot (3 \cdot \sin x + x \cdot \cos x)\,, x \in R$

2) $f'(x) = 2 \cdot \cos 2x\,, x \in R$

3) $f'(x) = -3 \cdot x^2 \cdot \sin x^3\,, x \in R$

4) $f'(x) = -3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x\,, x \in R$

5) $f'(x) = \cos x - x \cdot \sin x\,, x \in R$

6) $f'(x) = 2x \cdot \cos x^2\,, x \in R$

7) $f'(x) = -6x \cdot \sin x^2 \cdot \cos^2 x^2\,, x \in R$

8) $f'(x) = -\sin(x+1)\,, x \in R$

9) $f'(x) = (x^3+1) \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \sin x\,, x \in R$

10) $f'(x) = -\sin x\,, x \in R$

11) $f'(x) = 2\cos x \cdot 3\sin x\,, x \in R$

12) $f'(x) = \frac{4\cos^2 x}{(\cos 2x+1)^2} - 2, x \in R, \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) < x < \pi\left(n+\frac{3}{2}\right), n \in Z$

13) $f'(x) = \cos x + 3, x \in R$

14) $f'(x) = 7 \cdot (x^6 + \sin x), x \in R$

15) $f'(x) = \frac{4\cos^2 x}{(\cos 2x+1)^2} - \frac{48\sin^2 x}{(\cos 2x-1)^2}, x \in R, \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) < x < \pi(n+1), n \in Z$

16) $f'(x) = -\frac{8\cos x}{3\sin x - \sin 3x}, x \in R, \pi n < x < \pi(n+1), n \in Z$

17) $f'(x) = \sin x + \frac{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x}{(\cos 2x+1)^2}, x \in R, \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) < x < \pi\left(n+\frac{3}{2}\right), n \in Z$

18) $f'(x) = -\frac{160\sin^5 x \cdot \sin 2x}{(\cos 2x-1)^6}, x \in R, \pi n < x < \pi(n+1), n \in Z$

19) $f'(x) = \frac{8x \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{(x^2+1)^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{2}{x^2+1}\right)-1\right)^2}, x \in R$

20) $f'(x) = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}, x \in R, -\frac{3\pi}{2} < x - 2\pi n < \frac{\pi}{2}, n \in Z$

21) $f'(x) = -\sin x - \cos x\,, x \in R$

22) $f'(x) = \frac{2\cos 2x}{\cos x+2} + \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{(\cos x+2)^2}, x \in R$

23) $f'(x) = -\frac{3\sin 2x}{(\sin^2 x+2)^2}, x \in R$

24) $f'(x) = \frac{4\cos 1 \cdot \cos^2 x}{(\cos 2x+1)^2}, x \in R, \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) < x < \pi\left(n+\frac{3}{2}\right), n \in Z$

25) $f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}, x \in R, \pi\left(n-\frac{1}{4}\right) < x < \pi\left(n+\frac{1}{4}\right), n \in Z$

26) $f'(x) = \frac{7\cos(7x+3)}{2\sqrt{\sin(7x+3)}}, x \in R, -3 < 7x - 2\pi n < \pi - 3, n \in Z$

27) $f'(x) = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{5\cdot\sqrt[5]{(\sin^2 x+2)^4}}, x \in R$

28) $f'(x) = \frac{2\cos 6x}{\sqrt[3]{(\sin 6x+1)^2}}, x \in R, 12x + \pi > 4\pi n, 12x < \pi(4n + 3), n \in Z$

29) $f'(x) = -\frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{(\cos 4x+4)^3}}, x \in R$

30) $f'(x) = \frac{4\cos(4x)+4}{2\cdot\sqrt{4x+\sin 4x}}, x \in R, x > 0$

31) $f'(x) = -\frac{2\sin 2x}{5\sqrt[5]{(\cos 2x+3)^4}}, x \in R$

32) $f'(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{\cos 4x + 2} - \frac{4x^2\sin 4x}{3\sqrt[3]{(\cos(4x)+2)^2}}, x \in R$

33) $f'(x) = -\frac{4\sin x\cdot\cos^3 x}{5\cdot\sqrt[5]{(\cos^4(x)+1)^4}}, x \in R$

34) $f'(x) = -2\cos 2x - \frac{4\sin^2 x}{(\cos(2x)-1)^2}, x \in R, \pi n < x < \pi(n + 1), n \in Z$

35) $f'(x) = \frac{4x\cdot\sin\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)}{x^2+1} + \frac{4x(1-x^2)\cdot\sin\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)}{(x^2+1)^2}, x \in R$

Výsledky příkladů **5.7.**

1) $f'(x) = 5e^x + 7^x \cdot \log 7, x \in R$

2) $f'(x) = -4e^x + 2^x \log 2 - 6^x \log 6, x \in R$

3) $f'(x) = 9^x \log (9), x \in R$

4) $f'(x) = 2^{3^x} \cdot 3^x \cdot \log 2 \cdot \log 3, x \in R$

5) $f'(x) = -7e^x + 4^x \cdot \log 4 - \frac{39}{5}, x \in R$

6) $f'(x) = e^x \cdot \left(x^{e^x-1} + x^{e^x} \cdot \log x\right), x \in R, x > 0$

7) $f'(x) = 2x^{2x} + 2x^{2x} \cdot \log x - 2^x \cdot \log 2, x \in R, x > 0$

8) $f'(x) = 6 \cdot e^{3x^8+18x+9} \cdot (4x^7 + 3), x \in R$

9) $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (5x^4 - 2x^6), x \in R$

10) $f'(x) = \frac{2e^{\frac{x^3}{x^2+3}}\cdot x^3\cdot(x^2+6)}{(x^2+3)^2}, x \in R$

11) $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}}, x \in R$

12) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\cdot(x+\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}, x \in R, x > 0$

13) $f'(x) = \frac{27\cos(3x)}{(3-27x)^2} - \frac{3\cdot\sin(3x)}{3-27x}, x \in R, x \neq \frac{1}{9}$

14) $f'(x) = -\frac{2x\cdot(e^4x-x^4)}{3(x^2-1)\sqrt[3]{x^2-1}} + \frac{e^4-4x^3}{\sqrt[3]{x^2-1}} + 4^x \cdot \log 4, x \in R$

Výsledky příkladů **6.5.**

1) $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in R, x \neq 0$

2) $f'(x) = \frac{4x+7}{x+2}, x \in R, x \neq -2$

3) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \log 4}, x \in R, x \neq 0$

4) $f'(x) = \frac{2\log x}{x} - 20x^4, x \in R, x > 0$

5) $f'(x) = \log x + 1, x \in R, x > 0$

6) $f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\,, x \in R, x > 0$

7) $f'(x) = \frac{3}{3x+5}, x \in R, x \neq \frac{5}{3}$

8) $f'(x) = -2\mathrm{tg}(2x), x \in R, 4x > 2\pi n + \pi, 4x < \pi(2n+3), n \in R$

9) $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}, x \in R, x > e, 1 < x < e$

10) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (3\ln(x) - 1)}{\ln^2 x}, x \in R, x > 1{,}0 < x < 1$

11) $f'(x) = \frac{-x^2 + (x^2+1) \cdot \ln(x) + 1}{(1-x^2)^2}, x \in R, 0 < x < 1, x > 1$

12) $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^5 + (3-2x^5) \cdot \ln(x) + 1}{(x^5+1)^2}, x \in R, x > 0$

13) $f'(x) = \frac{\frac{8x^7+x^4+4}{x} + \left(56x^6 + 4x^3\right) - \ln x}{3 \cdot \sqrt[3]{((8x^7+x^4+4) \cdot \ln x)^2}}, x \in R, 0 < x < 1, x > 1$

Závěr

Bakalářská práce si kladla za cíl sestavit ucelenou a smysluplnou sbírku na procvičení derivací různých typů s využitím programu GeoGebra. Sbírka byla sestavena s myšlenkou jejího pozdějšího využití, hlavně pro studenty přicházející ze středních škol na vysoké školy. Studentům práce může dopomoci k doplnění znalostí z oblasti derivací.

V první, sedmé a osmé kapitole se nachází teorie k problematice derivací funkcí, následně je tato teorie ukázána na modelových příkladech, na které navazuje sada příkladů vhodných k procvičení látky. Celá práce je rozdělena do 8 kapitol. Kapitoly jsou logicky uspořádané podle náročnosti jednotlivých typů příkladů, takže se postupuje od nejjednodušších po složitější typy. Toto řazení napomůže i k efektivnější fixaci učiva. V závěru práce se nacházejí výsledky příkladů na procvičení. Nebo si studenti své výpočty mohou také zkontrolovat s využitím programu GeoGebra. U modelových příkladů v celé práci jsou přidány grafy funkcí tak, aby student mohl názorně vidět zobrazení jednotlivých příkladů.

Použitá literatura a zdroje

1) *Derivace funkce* [online]. 2016 [cit. 2016-06-19]. Dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/analyza/kap5.html
2) PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Hana ŠTĚPÁNKOVÁ. *Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2014, 132 s. ISBN 978-80-7394-473-5
3) http://www.glouny.cz/matematika/mat_sem/priklady/index.htm
4) HLAVÁČEK, Antonín. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky: pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách*. 1. Praha: SPN, 1964.
5) POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2
6) http://www.talnet.cz/documents/18/14ecc9e9-c57f-4b64-8d6f-7770a2a7281b.
7) Hejný, M., Kuřina, F. Dítě, škola a matematika. 2. vydání, Portál, s.r.o., Praha, 2009.
8) Petáková, J. Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha, 2008.
9) Petrášková, V., Štěpánková, H.: Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2014.
10) Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. 8. vydání, Prometheus, Praha, 2005.
11) HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. Matematika pro gymnázia. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 210 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-363-9.
12) KUBEŠOVÁ, Naděžda a Eva CIBULKOVÁ. Matematika: přehled středoškolského učiva. 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2007, 239 s. Maturita (Petra Velanová). ISBN 978-80-86873-05-3.
13) KOPÁČEK, Jiří. Integrály. 2., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2008, 99 s. ISBN 978-80-7378-043-2.
14) ZAJÍČEK, Luděk. Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2005, 93 s. ISBN 80-86732-58-4.
15) HOLICKÝ, Petr a Ondřej KALENDA. Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. až 4. semestr. Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2002, 131 s. ISBN 80-85863-85-5.

16) VOPĚNKA, Petr. Calculus infinitesimalis. 1. vyd. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni ve spolupráci s OPS, 2011, 70 s. Badatelský seminář. ISBN 978-80-261-0005-8.
17) BITTNEROVÁ, Daniela a Gerta PLAČKOVÁ. Louskáček. Vyd. 2., nezměn. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009, 154 s. ISBN 978-80-7372-531-0.
18) DVOŘÁKOVÁ, Šárka. Řešené příklady k Matematice I. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, 2004. ISBN 80-213-1215-7.
19) HENZLER, Jiří. Matematika pro ekonomy. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1284-6.