Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Odhady v matematice na základní škole

Vypracoval: Bc. Antonín Hraníček
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Odhady v matematice na základní škole jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č.111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ………………………….

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl zcela upřímně poděkovat vedoucí mé diplomové práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., za její vstřícný přístup, za rady a připomínky, které jsem v práci využil, za čas, který mi věnovala a i za velkou trpělivost, kterou se mnou měla po celou dobu psaní této práce.

Mé poděkování patří i mé rodině, přítelkyni a vůbec všem, kteří mě podporovali nejen při psaní této práce, ale i během celého studia na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity.

Anotace

Tato diplomová práce s názvem Odhady v matematice na základní škole je vytvořena jako pomocný výukový materiál. Seznamuje čtenáře s pojmem matematický odhad a předkládá mu jeho základní dělení. Poskytuje názorné návody, jak odhady vytvářet a obsahuje i množství příkladů, které slouží k systematickému procvičování a trénování schopnosti odhadovat. Podoba jednotlivých příkladů navíc ukazuje, kde všude je možné, ale i vhodné odhadování rozvíjet. Ke konci celé práce jsou uvedeny i badatelsky orientované úlohy s požadavky odhadu.

Klíčová slova: odhad, matematika, základní škola, procvičování, výukový materiál, badatelsky orientovaná výuka.

Abstract

This diploma thesis called *Estimations in Mathematics at Elementary School* is created as an auxiliary teaching material. It acquaints the readers with the concept of *mathematical estimation* and presents its basic divisions. It also provides graphic instructions how to make estimations and it contains plenty of problems which serve as a systematic practicing and training of the ability of estimating. In addition, the form of individual problems shows spheres in which estimating is convenient to develop. At the end of the work there are presented research-oriented problems with the need of estimation.

Key words: Estimation, Mathematics, Elementary School, Practicing, Teaching Material, Inquiry Based Education.

Obsah

1 Úvod

Tématem mé diplomové práce jsou Odhady v matematice na základní škole, což je zároveň i název této práce. Vybral jsem si ho z toho důvodu, že jeho problematika zasahuje do běžného života, a to jak do prostředí školního, tak výrazně i mimo něj.

Zásadní vliv na podobu této práce měla rešeršní činnost, která se uskutečnila hned na samotném počátku zpracování dané problematiky a jejímž záměrem bylo zmapovat, jak je problematika odhadování obsažena v učebnicích matematiky pro základní školu.

Cílem této práce je objasnit pojem matematický odhad, zdůraznit jeho užitečnost a seznámit s rozdělením matematických odhadů na tři základní skupiny, kterými jsou odhad počtu objektů ve skupině, odhad výsledku početní operace a odhad metrických vlastností geometrických útvarů.

Převážná část této práce je pak zaměřena právě na tyto dvě poslední skupiny. U každé jsou uvedena specifika odhadů k ní náležících, podrobnější dělení, ale především postupy, jak je možné dané odhady vytvářet. Ty jsou pro lepší pochopení vždy aplikovány na ukázkových příkladech. Součástí této práce jsou i příklady na procvičování odhadů, které by měly vést k rozvoji schopnosti odhadovat.

Takové příklady jsem se snažil vytvářet tak, aby vytvořily co možná nejširší pole uplatnění daných postupů odhadování. Navíc takto pojaté příklady svým obsahem ukazují i vhodný způsob, jak začlenit problematiku odhadování do učiva matematiky základní školy. Drtivá většina z nich je mou vlastní tvorbou a jen velmi malá část vznikla inspirací z odborné literatury. Poslední kapitola obsahuje takové úlohy, které do určité míry propojují problematiku odhadu a badatelsky orientovanou výuku matematiky.

Tato práce je určena učitelům matematiky na základních školách, ale i každému, kdo má o tuto problematiku zájem.

2 Vymezení pojmu matematický odhad a jeho definice

Hned na začátku této práce by bylo příhodné formulovat obecnou definici matematického odhadu tak, aby byla vhodná pro užití na základní škole. To znamená, aby byla srozumitelná žákům základní školy a zohledňovala tak jejich rozumovou vyspělost v zákonitostech poznatků vývojové psychologie. Měla by tedy obsahovat taková slova, kterým žáci rozumí a znají jejich význam nebo s kterými budou během výuky na základní škole seznámeni.

Při procházení odborné česky psané literatury a hledání definice v požadované podobě se mi nepodařilo nikde objevit její uspokojivou formulaci. Setkal jsem se sice s různými vymezeními pojmu odhad, ale pro účel této práce byly těžko použitelné. Buď se jednalo o výklad odhadu z pohledu statistického, kde k jeho pochopení byla potřeba znalost středoškolských až vysokoškolských pojmů a výpočetních postupů, jako je tomu například v publikaci *Úvod do teorie odhadu* (Kahounová, 2009)[1], nebo se jednalo již o konkrétní specifické odhady opět zaměřené na matematiku vyšší úrovně, než je probírána na základní škole. Takto vymezené odhady a jejich užití je možné nalézt například v *Přehledu užité matematiky II* (Rektorys, 2000)[2].

Obecný výklad pojmu odhad podává *Slovník současné češtiny* vydaný nakladatelsvím Lingea (2011, s. 477) takto: „*Odhad ~u m (6. j. ~u) 1. přibližné určení, zjištění, stanovení nějakého rozměru, počtu, hodnoty, ceny; + odhadnutí, ocenění, 2. odhadnutí; zhodnocení; pochopení*.“ Příklady užití toho pojmu ve frázích uvedených v bodě 1. jsou: „*odhad vzdálenosti/výsledku, hrubý/subjektivní/chybný odhad, předvolební odhady, Přišlo odhadem přes sto lidí., práv. odhad nemovitosti/pozemku/ předmětu dražby = znalecké posouzení, zhodnocení*“ a v bodě 2. jsou: „*správný odhad situace/znalostí/schopností, mít odhad na lidi*“. V elektronické podobě tohoto slovníku dostupného na internetu[3] je navíc u výkladu odhadu v bodě 1. uvedena v závorce poznámka: „*(úsudkem, bez měření, počítání ap.)“.* Z toho plyne, že pojem odhad, a to především v první části, je chápán většinou jako přibližný číselný údaj, který je výstupní

[1] Bodový odhad str. 36, Intervalový odhad str. 78.

[2] Celkem uvedeno 43 druhů odhadů, například aposteriorní v metodě sítí, dvoustranný prvního vlastního čísla diferenciální rovnice, chyby Eulerovy metody, Lagrangeův polohy kořenů algebraických rovnic a mnohé další.

[3] Lingea: Odhad. *nechybujte.cz - Slovník současné češtiny*. [online]. © 2014 [cit. 7. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nechybujte.cz/slovnik-soucacne-cestiny.

hodnotou procesu odhadování, kde proces odhadování je závislý na předmětu odhadování.

Zajímavý, a mé představě definice matematického odhadu velmi blízký, byl výklad pojmu odhad na české webové encyklopedii Wikipedie[4] který zní: „*Odhad je vypočítané nebo jen ze zkušenosti předpovězené více či méně přibližné určení výsledku nebo informace, která je využitelná, i když jsou vstupní data nekompletní, nejistá, nebo zašumělá.*“ Bohužel není uveden autor ani odkaz na příslušnou literaturu, což značně snižuje věrohodnost a spolehlivost takového výkladu.

Při hledání vhodné definice jsem navíc zjistil, že české odborné literatury zabývající se matematickým odhadem, obzvlášť pak tím vhodným pro prostředí základní školy, je velice málo. Snažil jsem se najít obecnou definici matematického odhadu i v některých dalších publikacích encyklopedicky pojatých (Bartsch, 1996; Průcha, Walterová a Mareš, 2003; Sedláček, 1981), ale bez úspěchu.

Z těchto důvodů jsem se rozhodl při svém hledání a sestavování vhodné definice matematického odhadu zaměřit se i na zahraniční zdroje a literaturu. V ní je matematický odhad popsán například takto:

- „*Poučený pokus uhodnout neznámé množství nebo výsledek, a to na základě známých informací.*“ (Weisstein, cit. podle Samková, 2013, s. 324)

Také ve sborníkovém článku s původním názvem *Primary teacher' approach to measurement estimation activities* byl uveřejněn následující souhrn různých výkladů matematického odhadu[5]:

- „*Postup k dosažení délky, rozměrů bez použití měřidel. Souvisí to s mentálním procesem, který zahrnuje vizuální nebo manipulační aspekty.*“ (Bright, 1976, s. 89, cit. podle Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2015, s. 3228)
- „*Schopnost posoudit, zda-li výsledek počítání, kterého bylo dosaženo nebo délka, jenž byla naměřena, se zdá být odpovídající, a schopnost dělat subjektivní úsudky o celé škále měření.*“ (Cockcroft Report, 1982, s. 22-23, cit. podle Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2015, s. 3228)

---

[4] Odhad. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2006 [cit. 9. 12. 2014]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Odhad.

[5] Volně přeloženo Mgr. Michalem Kadochem, za což mu děkuji.

- „*Vyhodnocení hodnoty výsledku numerického počítání množství jako funkce jednotlivých podmínek, které ho určují.*“ (Segovia a kol. 2009, s. 466, cit. podle Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2015, s. 3228)
- „*Schopnost učinit blízký (nenahodilý) odhad hodnot vzdálenosti, ceny, velikosti atd. nebo aritmetického počítání*.“ (Clayton, 1996, s. 87, cit. podle Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2015, s. 3228)
- „*Odkazuje na číslo, které je vhodným, blízkým odhadem přesného čísla v daném kontextu.*“ (Van de Walle a kol., 2010, s. 241, cit. podle Pizarro, Gorgorió, Albarracín, 2015, s. 3228)

V návaznosti na různá pojetí a výklady odhadu vidím jako vhodné uvést také rozdíl (resp. vztah) mezi odhadem a hádáním, který, jak se domnívám, je pro pochopení a vymezení odhadu podstatný. Tento rozdíl (resp. vztah) těchto dvou pojmů je dobře vnímatelný v následujícím úryvku textu, který předkládá návod, jak ho vysvětlovat (Liedtke,1993, s. 234):

„*Použij příběh nebo dramatizaci k ilustraci rozdílů mezi hádáním a odhadováním. „Kolik tak jízdních kol si myslíš, že je tady ve škole?“ A jedno dítě může odpovědět: „Hodně, kolem stovky.“ A další dítě může odpovědět: „No, já myslím, že na jedné straně je 20 kol a na druhé taky dvacet. To je 40 jízdních kol.“ Pomoz studentům porozumět tomu, že druhá odpověď je odhadem, protože zahrnuje náznak myšlenky a mentální aktivity. Hádání je stanovisko udělané na základě zkušenosti, která je často vyvolaná bez předchozího myšlení.*“[6]

Tento úryvek chápu následovně. Pokud bude jedinci položena nějaká otázka, tak na ni může odpovědět bez hlubšího zamyšlení se nad souvislostmi, pouze jen na základě své předešlé zkušenosti a tím se dopouští hádání. Pokud však ke své zkušenosti přidá i zamyšlení (myšlenku, odůvodnění) nad danou problematikou, tak již dosahuje odhadu. Rozhodnout, kdy je odpověď na otázku hádáním a kdy už odhadem je někdy značně složité. Jak je vidět, závisí to převážně na osobě, která odpovídá, konkrétně na tom, na základě jakých informací odpověď zformulovala. Navíc nemusí být často ani jasné, zda otázka vybízí k odhadu nebo hádání. Osobně se domnívám, že hádání je

[6] Na základě volného překladu.

předstupněm odhadu stejně tak jako je konkrétní myšlení předstupněm myšlení abstraktního.

Na základě výše popsaných výkladů a charakteristik odhadu bych se rád pokusil o formulaci své definice matematického odhadu vhodnou pro použití na základní škole: *Matematický odhad je snaha o více či méně přibližné určení množství, výsledku početní operace nebo velikosti měřitelného údaje na základě dostupných informací a předešlé zkušenosti*.

Na závěr této kapitoly je potřeba ještě zmínit, že i když bylo hned na začátku statistické vysvětlení odhadu zavrhnuto pro jeho složitost, tak teorie odhadu vychází především ze statistiky. To je dobré mít na mysli pro lepší pochopení některých situací.

2.1 Odhady v RVP ZV a ŠVP

Odhady v matematice na základní škole se zabývá závazný pedagogický dokument s názvem *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (RVP ZV)[7], který je jedním z kurikulárních dokumentů a jeho postavení je ukotveno v zákoně *č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání* (tzv. školský zákon)[8].

Požadavky zabývat se odhady v matematice nalezneme v RVP ZV v jedné z devíti vzdělávacích oblastí s názvem *Matematika a její aplikace*, a to konkrétně ve stejnojmenném vzdělávacím oboru *Matematika a její aplikace*. Hned v popisu obsahu prvního tematického okruhu tohoto oboru s názvem *Čísla a početní operace, Číslo a proměnná* (název pro 1. a 2. stupeň) je mimo jiné uvedeno, že by se zde žáci měli naučit získávat číselné údaje nejen měřením, výpočtem a zaokrouhlováním, ale právě i odhadem. Podobně je formulován požadavek i ve třetím tematickém oboru s názvem *Geometrie v rovině a prostoru*, kde se vyžaduje, aby se žáci učili porovnávat, měřit a také i odhadovat. Dále je uvedeno, že využívání odhadů vede k rozvoji klíčových kompetencí. Jednou z takových možností rozvoje například klíčové

[7]Národní ústav pro vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *nuv.cz* [online]. 2013 [cit. 5. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433. (Aktuální znění RVP ZV k 1. 9. 2013)
[8] Česká republika. Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In: *Zákony pro lidi* [online]. [cit. 9. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561.

kompetence pracovní může být využití odhadu konečného výsledku při rozboru problému, při plánování jeho řešení nebo při kontrole správnosti řešení.[9]

S požadavkem umět v matematice na základní škole odhadovat se navíc výslovně setkáme i ve formulacích očekávaných výstupů pro 1. i 2. stupeň v RVP ZV[10] (s. 27-31), kde je uvedeno, že žák:

- M-5-1-03 *zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel*
- M-3-3-02 *porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky*
- M-9-1-02 *zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor*
- M-9-3-04 *odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů*
- M-9-3-10 *odhaduje a vypočítá objem a povrch těles*

Jak je vidět, potřeba zabývat se odhady v matematice na základní škole je vyžadována na základě závazného dokumentu a žáci by tedy měli být k odhadování záměrně vedeni. Na základě RVP ZV sestavují jednotlivé základní školy své vlastní školské vzdělávací programy. Otázkou ale je, do jaké míry do nich odhady zahrnují, a pokud ano, jestli je skutečně vyučují a jakým způsobem, tedy jak naplňují zamýšlené a realizované kurikulum z pohledu matematických odhadů. Z mé vlastní, i když zatím jen velmi slabé zkušenosti mi přijde, že je zde výuka odhadů v matematice značně podceňovaná, často opomíjená, nepromyšlená a nesystematická.

Pomoc při zařazování odhadů do výuky matematiky v rámci ŠVP můžeme hledat například i na internetových stránkách s názvem *Metodický portál RVP.CZ* (www.rvp.cz), a to zejména v modulu DUM (*digitální učební materiály*), kde se nacházejí materiály ve formě pracovních listů, prezentací, testů, apod. U každého materiálu je uvedena anotace a upřesňující údaje jako například stupeň a typ vzdělání, pro který je určen, očekávaný výstup, klíčová slova a další. I zde však musím upozornit, že výskyt materiálů se zaměřením na matematický odhad je slabý vzhledem k celkovému rozsahu materiálů.[11]

---

[9] Národní ústav pro vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *nuv.cz* [online]. 2013 [cit. 5. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433. (Aktuální znění RVP ZV k 1. 9. 2013)
[10] Národní ústav pro vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *nuv.cz* [online]. 2013 [cit. 5. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433. (Aktuální znění RVP ZV k 1. 9. 2013)
[11] Aktuální k 10. 1. 2015.

2.2 Pozitiva, negativa matematického odhadu a cíl odhadování

Při vytváření odhadů a zacházení s nimi je důležité si uvědomit, že s odhadem je spojena určitá míra nepřesnosti oproti přesně vypočítané, změřené nebo určené hodnotě. Samozřejmě může být vytvořený odhad s touto hodnotou totožný, to je ale ideální stav, který je při odhadování nejistý a dochází k němu zpravidla jen zřídka.

Za hlavní pozitivum odhadu považuji jeho využití v situacích, kdy přesný způsob řešení není z nejrůznějších důvodů možný. Příkladem může být určení odmocniny z čísla 5 nebo také určení výšky věže nebo šířky řeky v případě, že k tomu nemáme potřebné vybavení.

Odhad je, jak již bylo řečeno, charakteristický určitou nepřesností, a to může být považováno za negativum. Tato nepřesnost je ale vyvažována úsporou času, které je při odhadování většinou dosaženo, než kdyby se určovala přesná hodnota. Tato úspora času je dalším a asi hlavním pozitivem odhadu a k jejímu ocenění dochází především v reálných situacích běžného života. Ne vždy je totiž čas na to, aby se požadovaná hodnota přesně určila, a i když je někdy potřebný čas k dispozici, tak není zájem se zaobírat postupy, které by vedly k jejímu přesnému určení. Někteří lidé navíc potřebují daný postup k přesnému určení hodnoty pro svoji složitost realizovat v písemné podobě a za pomoci výpočetní techniky, a to není vždy v běžném životě možné nebo účelné. V tu chvíli nabývá na důležitosti role odhadu. Asi nejběžnějším příkladem takového užití odhadu je orientační určení ceny nákupu nějakého množství zboží nebo přibližné určení rozměru nějakého objektu.

Mezi pozitiva odhadu můžeme uvést i již naznačenou možnost, tedy to, že odhad může sloužit jako přibližná kontrola vyžadované přesné hodnoty nebo ke stanovení postupu řešení, jak takové hodnoty dosáhnout. Kladně ohodnocená může být i ta skutečnost, že většinu odhadů požadované hodnoty lze provést více způsoby. Navíc, pokud máme řešit matematickou úlohu, kde je nabídnuto několik možných výsledků, můžeme na základě odhadu rovnou některé možnosti vyloučit. Posledním uvedeným pozitivem se budeme zabývat i dále, a to v podkapitole *Způsob požadavku odhadu*.

Cíl odhadování vychází z uvedených definic a pozitiv, tedy nalézt přibližné řešení v situaci, kdy není možné využít přesný postup, dále šetřit čas a námahu (mentální i fyzickou). Při vytváření odhadu by však nemělo být cílem odstranit výpočet za každou cenu a vyhnout se tak jakémukoliv počítání, ale spíše daný výpočet zjednodušit popřípadě nahradit ho jednodušším. Záměrem odhadování by mělo být vytvořit takový odhad, který by byl co možná nejvíce blízký přesné hodnotě, a proto by bylo vhodné využít, i když ve zjednodušené a upravené podobě, některý z postupů, který vede k získání přesné hodnoty.

3 Základní dělení matematických odhadů

Hned na začátek můžeme obecně odhady rozdělit na matematické a nematematické. Nematematické mohou být např. z oboru společenských věd. Třeba požadavek, abychom odhadli osobnostní charakteristiky konkrétního jedince nebo jeho schopnosti. Dalším příkladem nematematického odhadu může být odhad, jak se bude vyvíjet určitá situace, například zda bude mít malý chlapec radost z nové školní tašky darované k narozeninám. Nematematické odhady nejsou obsahem této práce, a to bez ohledu na to, zda jsme schopni takový odhad provést nebo ne. Navíc takto položené otázky vedou spíše k hádání než odhadování. Záměrem této práce je zabývat se odhady v rozsahu učiva matematiky základní školy.

Základní dělení odhadů, s kterými se můžeme setkat v matematice na základní škole, provedla například Samková (2013: s. 234)[12], kde uvedla tři druhy odhadů:

- *Odhad počtu objektů ve skupině (množstevní odhad)*
- *Odhad výsledku početní operace (početní odhad)*
- *Odhad metrických vlastností geometrických útvarů (rozměrový odhad)*

S prvním druhem odhadů se žáci základních škol setkají zpravidla nejdříve. Je zaměřen, jak již vyplývá z jeho názvu, na odhad počtu (množství) objektů v nějaké skupině. Tento druh odhadů můžeme dále dělit podle rozložení objektů na tři typy, a to na 1-dimenzionální (např. odhad počtu kolíčků na šňůře na prádlo, počtu lidí stojících v řadě vedle sebe), 2-dimenzionální (např. odhad počtu hvězd na vlajce Evropské unie, počtu lidí na tanečním parketu) a 3-dimenzionální (např. odhad počtu jablek v bedně, počtu zavařených třešní ve sklenici). Do tohoto druhu odhadů spadají i složitější množstevní odhady, kde se požaduje odhadem určit, jaká část objektů z nějaké skupiny (počtu) má určitou vlastnost, například jaká část bonbónů na obrázku 1 má žlutou barvu. (Samková, 2013)

Tento druhu odhadu by bylo vhodné rozvíjet, samozřejmě v přiměřené podobě, již v předškolním věku při rozvoji tzv. předmatematických představ, kdy je snahou vytvořit u dětí představy o určitém množství. Další možností, jak s tímto druhem

[12] Předkládané rozdělení zaznělo nejprve na přednáška konference *Užití počítačů ve výuce matematiky* pořádané 7. – 9. listopadu 2013 v Č. Budějovicích katedrou matematiky PF JČU a Společností učitelů matematiky JČMF. Později bylo toto rozdělení uvedeno i ve sborníku příspěvků této konference. (*Sborník příspěvků 6. konference – Užití počítačů ve výuce matematiky*).

odhadů pracovat, je zvýšit jeho obtížnost a tím prohloubit i podstatu odhadování takovým způsobem, že se stanoví časový limit, a to buď tak, že se určí čas potřebný na odpověď (odhad), nebo že se stanoví čas, po který je jedinci daná skupina objektů zobrazena a po uplynutí stanoveného času dojde k ukončení vizuálního kontaktu, např. bude zakryta. Způsob vytvoření odhadu tohoto druhu je založen z velké části na předešlé zkušenosti (nácviku), na schopnosti vnímat množství ve zmíněných dimenzích nebo případně na vhodném vytváření podskupin.

Obrázek 1: Barevné bonbóny

Dalším druhem odhadů jsou odhady výsledků početních operací, zkráceně též početní odhady. Opět je již z názvu jasný záměr. Jde o vytvoření odhadu výsledku početní operace. Na základní škole má tento výsledek převážně podobu číselnou. Početní operací je ve většině případů násobení, dělení, sčítání, odčítání, umocňování a odmocňování.[13] Do tohoto druhu spadají také odhady výsledků výpočtů s více početními operacemi (jejich kombinacemi), a i třeba specifický odhad výsledku aritmetického průměru. (Samková, 2013)

Tento druh odhadů je možné využít až v době, kdy jsou žáci seznámeni s danými početními operacemi a vědí, co znamenají a jak se s nimi pracuje. Vhodné využití tohoto druhu odhadu je možné hned v několika případech. Může posloužit jako kontrola snahy o přesný výpočet před nebo po jeho vykonání, nebo jako vytvoření přibližného výsledku v situacích, kdy je přesný výpočet příliš složitý nebo dokonce nemožný. Důležité postavení tohoto druhu odhadů je vnímáno například při zavádění postupů

[13] Vyjmenované početní operace jsou typické pro matematiku základní školy.

zmíněných početních operací v různých oborech čísel a jejich tvarů (př. zlomky, desetinná čísla), kdy se žáci teprve seznamují s postupy, jak dosáhnout přesného výsledku, ale zároveň již mají možnost si předem utvořit přibližnou představu o výsledku právě pomocí odhadu, a tak částečně kontrolovat, ale i objevovat nově zaváděný postup výpočtu. Strategie a způsoby vytváření tohoto druhu odhadu jsou různé, ve většině případů jsou však založeny na zjednodušení výpočtu, a to převážně vhodným zaokrouhlením.

Třetím druhem odhadů z uvedeného výčtu jsou odhady metrických vlastností geometrických útvarů, někdy nazývané také jako rozměrové odhady. Co je záměrem tohoto druhu odhadů, je patrné opět přímo z názvu. Metrické vlastnosti můžeme rozdělit také do tří dimenzí a spolu s nimi i patřičné odhady: 1-dimenzionální (např. odhad vzdálenosti, obvodu, výšky, šířky, délky atd.), 2-dimenzionální (např. odhad obsahu, výměry, povrchu, ale třeba i velikosti úhlů), 3-dimenzionální (např. odhad objemu). Navíc můžeme k tomuto druhu odhadů zaujmout dva navzájem obrácené přístupy. Jednak můžeme nechat žáka odhadnout například vzdálenost dvou bodů v rovině, nebo naopak vyžadovat odhadem vyznačit dva body v rovině, které budou od sebe vzdálené například 3 cm. Do 1-dimenzionálních odhadů spadají i úlohy, které se zaměřují na orientaci na číselné ose, kde se vyžaduje odhad polohy čísla na číselné ose a úlohy k nim obrácené. (Samková, 2013)

Aplikace jednotlivých typů tohoto druhu odhadů je podmíněna již probraným učivem seznamujícím s příslušnými metrickými vlastnostmi, jinak by bylo jejich vyžadování bezpředmětné. Strategie a způsoby vytváření odhadů tohoto druhu jsou rozličné, záleží na dimenzi metrického údaje i na předešlé zkušenosti. Mnohdy se také využívají nejrůznější pomůcky.

Je potřeba si uvědomit, že uvedené rozdělení odhadů do třech druhů není zcela vyčerpávající, ale spadá do něj drtivá většina odhadů vyskytujících se v matematice základní školy. Za zcela specifické případy by bylo možné považovat například odhady času, hmotnosti, rychlosti atd., které svým pojetím náleží do skupiny odhadů metrických vlastností.

Jako vhodné by se mohlo zdát roztřídit odhady v matematice i podle jednotlivých ročníků základní školy. Toho však nelze úplně dosáhnout, protože v rámci školního vzdělávacího programu mají základní školy možnost si do určité míry samy volit tematickou skladbu učiva v jednotlivých ročnících.

Ještě je potřeba upozornit, že není zcela jednoznačný vztah náčrtku a odhadu. Často se v úlohách vyžaduje náčrtek hlavně proto, aby zpřehlednil situaci. Náčrtek sám o sobě odhadem nebývá, ale při jeho tvorbě se odhad využívá, například u náčrtku podle zadaných parametrů jako jsou rozměry, úhly apod. Zvlášť velký význam získávají takovéto náčrtky v geometrii, a to především u konstrukčních úloh, kde je snahou načrtnout, jak by situace mohla vypadat na základě známých informací. Mnohdy je velmi těžké rozhodnout, zda považovat požadavek náčrtku za odhad. Já osobně ho v drtivé většině případů za odhad nepovažuji, protože jeho smysl nevidím ve tvorbě odhadu, ale právě ve zpřehlednění zadané úlohy a jejímu lepšímu pochopení. Pokud by ho však někdo chtěl za odhad považovat, spadal by pravděpodobně mezi odhady metrických vlastností geometrických útvarů, do jednotlivých skupin vždy podle dimenzí parametrů, které by byly zadány.

Někdy bývá obtížné ze zadání úlohy určit, zda se v ní vyžaduje odhad nebo ne, tedy zda je záměrem úlohy tvorba a procvičování odhadů. V některých případech pro identifikaci požadavku odhadu může být indicií slovo „přibližně“, např. určete přibližnou hodnotu výsledku.

3.1 Přesnost odhadu a jeho kontrola

Jak již bylo několikrát uvedeno, odhad je charakteristický určitou mírou nepřesnosti. Při odhadování se snažíme přiblížit se přesné hodnotě, přesto jí odhadem dosáhneme jen zřídka. Proto je důležité mít možnost určit (zkontrolovat), jak přesný byl provedený odhad. Ne vždy je to možné, například nemusíme znát všechny údaje potřebné ke kontrole, ale v případech, kdy to možné je, je dobré vědět, jak na to.

Vhodný návod, jak určovat přesnost odhadů poskytuje opět Samková (2013), která podotýká, že zvolit vhodnou metodu není úplně snadné, protože přesnost každého konkrétního odhadu je potřeba posoudit individuálně v závislosti na uvedeném kontextu úlohy. Nicméně za pomoci odborných článků (Levine, 1982; Siegel, Goldsmith, Madson 1982), předkládá následující postupy učení přesnosti odhadu pro výše uvedené tři druhy odhadů a s nimi i pravidla pro klasifikaci přesnosti.

Přesnost množstevního odhadu se určuje přes relativní chybu odhadu vzhledem k přesné odpovědi (hodnotě), a to podílem, kde dělencem je absolutní hodnota z rozdílu odhadu (O) a přesné odpovědi (PO) a dělitelem je přesná odpověď, tedy

$$\frac{|O - PO|}{PO}.$$

Pokud se navíc vynechá absolutní hodnota, tak je možné podle znaménka určit, zda byl odhad nadhodnocený (znaménko plus) nebo naopak podhodnocený (znaménko minus) než skutečná hodnota. Hodnocení přesnosti odhadu závisí na konkrétní úloze a obecně i na jednotlivých hodnotitelích. Názory na hranici přesnosti jsou proto různé. Podle některých autorů (Siegel, Goldsmith, Madson, 1982), je možné odhad považovat za přesný, pokud chyba v odhadování je menší než 50 %. To znamená, že pokud je například přesný počet jablek v krabici 20 kusů, bude pak možné za přesný odhad považovat počet jablek v rozmezí 10 – 30 kusů, jiný počet je pak považován za nepřesný odhad.

Při určování přesnosti početního odhadu se postupuje stejným způsobem, opět se určuje relativní chyba odhadu vzhledem k přesné odpovědi (hodnotě). Vzoreček pro výpočet této relativní chyby odhadu proto zůstává stejný. Při hodnocení přesnosti se ale doporučuje užít propracovanější postup založený na bodování, které je následující (Weisstein, 1982, cit. podle Samková, 2013, s. 327):

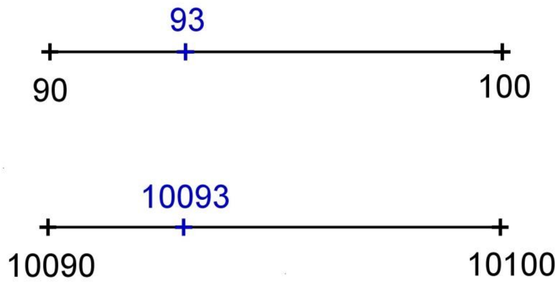
- *chyba do 10 % ... 3 body*
- *chyba do 20 % ... 2 body*
- *chyba do 30 % ... 1 bod*
- *chyba nad 30 % ... 0 bodů*

Tedy početní odhad, jehož relativní chyba přesáhla 30 %, je už považován za nepřesný.

U rozměrových odhadů se určuje přesnost odhadu v závislosti na tom, jestli jsou stanoveny hranice (meze), mezi kterými se nachází odhadovaná hodnota, tedy zda je rozměrový odhad nějak omezen nebo ne, a proto jsou zde dva způsoby, jak určovat chybu odhadu. Pro určení přesnosti odhadu z neomezené situace se opět zjišťuje relativní chyba odhadu vzhledem k přesné odpovědi (hodnotě) podle příslušného vzorečku, jako tomu bylo u množstevních a početních odhadů. Příkladem takového odhadu může být určení vzdálenosti dvou dopravních značek. Jinak je tomu při určení přesnosti odhadu z omezené situace. Zde se zjišťuje relativní chyba odhadu vzhledem k rozsahu mezí, a to podílem, kde dělencem je absolutní hodnota z rozdílu odhadu (O) a přesné odpovědi (PO) a dělitelem je rozdíl (resp. rozsah) horní meze odhadu (HM) a dolní meze odhadu (DM), tedy

$$\frac{|O-PO|}{HM-DM}.$$

Přesnost odhadu se pak klasifikuje pomocí bodového ocenění jako v případě klasifikace přesnosti početního odhadu. Důvod změny postupu výpočtu uvádí Samková (2013, s. 328) na tomto příkladě: „*Odhadnout pozici čísla 93 na stupnici mezi 90 a 100 je stejně obtížné jako odhadnout pozici čísla 10093 na stupnici mezi 10090 a 10100.*“ A to dokládá i názornou ukázkou (obrázek 2).



Obrázek 2: Omezený rozměrový odhad (převzato z publikace Samková, 2013, s. 328)

Jak je zřejmé, pro kontrolu přesnosti odhadu je zapotřebí znát přesnou hodnotu. Ta však nemusí být známá nebo dostupná, a proto není vždy zaručeno, že bude možné kontrolu provést. Při určování přesnosti odhadů by bylo možné využít kromě relativní chyby odhadu i absolutní chybu odhadu, tedy absolutní hodnotu z rozdílu odhadu (O) a přesné odpovědi (PO), ta však nemá vhodnou vypovídající hodnotu, a proto se používá jen zřídka.

4 Odhady v matematice na základní škole

Jako učitel s aprobací matematika pro 2. stupeň základní školy se zaměřuji v této práci na odhady právě z této oblasti, pro kterou jsem absolvoval didaktickou přípravu. S odhadováním se samozřejmě začíná v matematice a nejen v ní již dříve, a proto zde uvádím i odhady využitelné a používané na 1. stupni základní školy.

Vzhledem k plánovanému rozsahu a pojetí této práce jsem se rozhodl zaměřit se jen na odhady výsledku početní operace a na odhady metrických vlastností geometrických útvarů, i přesto, že v předchozích kapitolách pojednávám o všech třech druzích odhadů. S třetí skupinou odhadů, tedy s odhady počtu objektů ve skupině, se již tedy nebudeme dále v této práci zabývat, o to podrobněji se ale zaměříme na zbylé dva druhy odhadů, u kterých si vždy uvedeme jejich specifika, postupy jak jich dosáhnout, a vždy i příklady na procvičování.

5 Odhad výsledku početní operace

Odhad výsledku početní operace je důležitý pro výuku matematiky, ale snad ještě důležitější je pro běžný život, protože právě v něm nám při rozhodování v nejrůznějších situacích stačí znalost často jen přibližné tedy odhadnuté hodnoty výsledku početní operace nebo více početních operací. Asi nejtypičtějším příkladem jsou situace spojené s finančním plánováním tedy takové, kdy je zapotřebí určit přibližnou celkovou cenu, která je právě výsledkem jedné nebo několika početních operací se stanovenými prvky (cenami). Mnohdy je navíc žádoucí znát informaci, zda je vytvořený odhad nadhodnocený nebo podhodnocený, a proto se budeme v případech, kde to bude možné a vhodné, zabývat také tím.

U odhadu výsledku početních operací se zaměříme především na početní operace sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, protože právě toto jsou zřejmě nejdůležitější početní operace zaváděné na základní škole. Postupy, kterými budeme odhadovat výsledky jednotlivých početních operací a další náležitosti s tím související si uvedeme vždy u konkrétní početní operace. Ukázkové příklady slouží k základní demonstraci daného postupu a jsou zaměřeny vždy na jednotlivé početní operace, protože odhad výsledku příkladu, kde se kombinuje několik početních operací, mnohdy navíc za využití závorek, bývá většinou založen na postupném odhadu jednotlivých početních operací vždy mezi dvěma prvky, nebo nejprve na zjednodušující úpravě daného příkladu a až poté na odhadu.

Při odhadu výsledku početní operace může být tento odhad vyžadován u numericky zadaného příkladu nebo u příkladu, který má podobu slovní úlohy. Pokud se jedná o případ slovní úlohy, musí její řešitel nejprve, byť jen v mysli, provést její matematizaci. To znamená převést slovní úlohu do numerické podoby, aby mu bylo zřejmé, na základě jaké početní operace (popř. více operací) odhaduje výsledek.

5.1 Zaokrouhlování

Na základě mé zkušenosti i podle postupů uvedených v různých publikacích například *Matematika pro 5. ročník základních škol* (Justová, 2011), *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia* (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009) a dalších je postup odhadu výsledku početní operace ve velké míře založen na vhodném zaokrouhlení zadaných prvků konkrétní početní operace. Z toho důvodu si zde pouze pro přehled uvedeme pravidla pro zaokrouhlování používaná na základní škole (Odvárko, Kadleček 1997a, a Půlpán, Čihák 2007):

- Nejprve zvolíme řád čísla (desetiny, jednotky, desítky, stovky apod.) nebo počet cifer (platných číslic), na který chceme zaokrouhlit.
- Poté se zaměříme na první následující řád čísla (číslici) vpravo od zvoleného řádu nebo od poslední platné číslice, na kterou chceme zaokrouhlit.
    - Je-li tato číslice menší než pět, tedy některá z číslic 0, 1, 2, 3 nebo 4, pak se číslice na zvoleném řádu nebo poslední platná číslice nijak nezmění a všechny následující číslice vpravo se nahradí číslicí 0.[14]
    - Je-li tato číslice větší nebo rovna pěti, tedy některá z číslic 5, 6, 7, 8 nebo 9, pak se číslice na zvoleném řádu nebo poslední platná číslice zvětší o hodnotu 1 a všechny následující číslice vpravo se nahradí číslicí 0.[15]

Jaký zvolíme řád čísla nebo na kolik platných číslic budeme zaokrouhlovat, záleží vždy na konkrétním odhadu, na kontextu, v kterém je zasazen a na přesnosti (resp. nepřesnosti), kterou chceme docílit. Pokud budeme například sčítat dvě přirozená čtyřciferná čísla, např. $7\,491$ a $8\,937$, bude nás nejspíše zajímat přibližná hodnota nejvyššího řádu provedeného součtu, a proto by bylo značně nepraktické zaokrouhlovat v tomto případě na desítky, $7\,491 \doteq 7\,490$ a $8\,937 \doteq 8\,940$. Takovéto zaokrouhlení by nám k odhadu výsledku asi moc nepomohlo. Mnohem praktičtější by bylo, kdybychom zaokrouhlili rovnou na tisíce, $7491 \doteq 7\,000$ a $8\,937 \doteq 9\,000$ a dostali tak poměrně rychle představu o tom, jak přibližně velký tento součet bude. Odhad výsledku součtu $7\,491 + 8\,937$ bychom pak získali vypočtením součtu $7\,000 + 9\,000$, který lze

[14] V oboru kladných čísel říkáme, že zaokrouhlujeme směrem dolů a tímto postupem číslo zmenšíme nebo zachováme. Zachováme v případě, že všechny další číslice napravo od určeného řádu, na který chceme zaokrouhlovat jsou již nulové.

[15] V oboru kladných čísel říkáme, že zaokrouhlujeme směrem nahoru a tímto postupem číslo zvětšíme.

provést rychle zpaměti na hodnotu $16\,000$, protože jde o pouhé sečtení čísel 7 a 9 a připsání patřičného počtu nul.

Pro přesnější odhad by bylo vhodné zaokrouhlovat nejen na celé řády čísla, ale někdy i na jejich poloviny, tedy na číslo 5 u řádu o stupeň nižšího než provádíme zaokrouhlování. Pravidla pro takové zaokrouhlování by mohla být třeba následující:

- Zvolíme řád čísla (desetiny, jednotky, desítky, stovky apod.), na který chceme zaokrouhlit.
- Poté se zaměříme na první následující řád čísla (číslici) vpravo od zvoleného řádu.
    - Je-li tato číslice menší než tři, tedy některá z číslic 0, 1, nebo 2, pak se číslice na zvoleném řádu nijak nezmění a všechny následující číslice vpravo se nahradí číslicí 0.
    - Je-li tato číslice větší nebo rovna třem a zároveň menší nebo rovna sedmi, tedy číslice 3, 4, 5, 6, nebo 7 pak je nahrazena číslicí 5 (popřípadě pětkou zůstává) a všechny následující číslice vpravo se nahradí číslicí 0.
    - Je-li tato číslice větší než sedm, tedy některá z číslic 8 nebo 9, pak se číslice na zvoleném řádu zvětší o hodnotu 1 a všechny následující číslice se nahradí číslicí 0.

Jako vzorový příklad takového zaokrouhlování při odhadování výsledku si uvedeme opět součet čísel $7\,491$ a $8\,937$. Zde bychom při zaokrouhlování „na tisíce“ podle popsaného zaokrouhlili číslo $7\,491$ na $7\,500$ a číslo $8\,937$ na $9\,000$. Odhad výsledku zadaného součtu by byl tedy $7\,500 + 9\,000 = 16\,500$.

Tento postup zaokrouhlování by měl vést k zpřesnění odhadu, jak je například vidět v uvedeném příkladu, ale je náročnější než běžné zaokrouhlování na „celé“ řády. Jeho aplikace záleží vždy na konkrétní situaci, např. na počtu takto zaokrouhlených čísel, na početní operaci mezi těmito čísly, na schopnostech odhalovatele apod. V prostředí základní školy by byl proto vhodný spíše pro matematicky nadanější žáky.

5.2 Způsob požadavku odhadu

Požadavek odhadu bývá většinou zadán přímo některou formulací typu: Odhadněte výsledek. V tom případě rovnou odhadujeme výsledek jedné nebo několika početních operací. Příkladem může být: Odhadněte výsledek součtu čísel $370\,142$ a $813\,961$. Ten můžeme provést například zaokrouhlením obou sčítanců na statisíce. Odhadem pak bude součet $400\,000 + 800\,000 = 1\,200\,000$.

Požadavek odhadu ale může vypadat i jinak například: Odhadněte, která z uvedených možností je výsledek. Zde můžeme pomocí odhadu buď rovnou vybrat správnou odpověď, nebo alespoň některé z nabízených možností vyřadit. V principu to na samotném postupu odhadování nic nemění, protože opět nejprve provedeme odhad výsledku početní operace a teprve následně ho porovnáme s nabízenými možnostmi. Konkrétní příklad je třeba tento: Odhadněte výsledek součtu čísel $1\,759$, 852 a 631, pokud jsou dány tyto možnosti: a) $2\,852$, b) $3\,032$, c) $3\,242$, d) $3\,412$. Odhad provedeme třeba sečtením všech činitelů zaokrouhlených na stovky, $1\,800 + 900 + 600 = 3\,300$. Nejblíže tomuto odhadu je nabízená možnost c) $3\,242$. Pro kontrolu můžeme provést výpočet přesné hodnoty, kde zjistíme, že jsme pomocí odhadu vybrali správnou možnost. Efektivnost odhadu u takto pojatých příkladů (s výběrem výsledku) záleží mimo jiné i na tom, jaké jsou rozdíly mezi nabízenými hodnotami. Pobud by se třeba v našem příkladu lišily jednotlivé možnosti jen v řádu několika desítek, tak by nám uvedený odhad s výběrem výsledku moc nepomohl.

Další způsob požadavku odhadu může vypadat tak, že je vyžadováno, abychom pomocí odhadu určili, zda výsledek konkrétního příkladu bude větší nebo menší, než zvolené číslo. I zde se bude vycházet opět z odhadu výsledku početní operace, který bude porovnán s určeným číslem. Často ale bude potřeba využít specifický způsob zaokrouhlování, aby došlo k vytvoření nadhodnoceného nebo podhodnoceného odhadu[16]. Takové odhady jsou potřeba pro určení, zda bude výsledek zadaného příkladu větší nebo menší než zvolené číslo. Pokud nám totiž vyjde nadhodnocený odhad výsledku, který bude menší než zvolené číslo, pak budeme moci určit, že přesný

[16] Určováním popřípadě vytvářením nadhodnoceného a podhodnoceného odhadu se budeme zabývat u jednotlivých početních operací. Zde je uvedena jen nutná ukázka potřebná k podložení řešení možného způsobu požadavku odhadu.

výsledek je menší než zvolené číslo a naopak pokud nám vyjde podhodnocený odhad výsledku, který bude větší než zvolené číslo, pak můžeme určit, že přesný výsledek je větší než zvolené číslo. Uvedeme si jeden názorný příklad: Pomocí odhadu určete, zda výsledek součtu $287 + 431 + 569$ je větší nebo menší než $1\,000$. Pokud sčítance zaokrouhlíme na stovky, ale všechny směrem dolu, a to i tehdy, když to bude proti klasickým pravidlům zaokrouhlování, tak získáme podhodnocený odhad, který bude $200 + 400 + 500 = 1\,100$. Nyní můžeme určit, že skutečný (původní) výsledek je větší než $1\,100$, protože víme, že podhodnocený odhad je větší než $1\,000$. Existují ale případy (příklady), kde to takto přesně určit nelze, a to tehdy vychází-li nadhodnocený odhad větší než určené číslo a zároveň podhodnocený odhad menší než určené číslo. Například pokud máme pomocí odhadu určit, zda výsledek součtu $225 + 387 + 450$ je větší nebo menší než $1\,000$. Nejprve zaokrouhlíme i zde všechny sčítance na stovky směrem dolu, a tak získáme podhodnocený odhad $200 + 300 + 400 = 900$, který je ale menší než $1\,000$. Naopak, pokud zaokrouhlíme všechny sčítance opět na stovky, ale tentokrát všechny směrem nahoru, tak získáme nadhodnocený odhad $300 + 400 + 500 = 1\,200$, který je ale zase větší než $1\,000$. Jak je vidět, ani jeden z odhadů nám neumožňuje rozhodnout, zda bude přesný výsledek větší nebo menší než $1\,000$.

5.3 Obory čísel

Již jsme si uvedli, u kterých početních operací budeme odhadovat výsledek. Nyní je však ještě potřeba určit pro jaké číselné obory, tedy jaká čísla mohou být prvky dané početní operace. To je z pohledu formování postupů odhadování dosti zásadní úkol. Z principu věci mohou být prvky dané početní operace všechna taková čísla, která jsou pro ni definována, na druhou stranu je potřeba vzít v úvahu záměr odhadování. Při odhadování nám jde totiž především o určení velikosti výsledku početní operace ve smyslu absolutní hodnoty výsledku. To bychom měli mít na paměti. Určení znaménka výsledku je pak již věcí druhotnou a již není v drtivé většině případů předmětem odhadování, protože je možné ho určit aplikací naučených pravidel. Z toho důvodu, aby bylo možné formulovat do určité míry univerzální postupy odhadování, jsou pro záměry této práce za prvky daných početních operací uvažovány pouze nezáporná čísla taková, aby i výsledkem bylo vždy nezáporné číslo. Třeba u operace odčítání musí být menšenec i menšitel kladné číslo a přitom menšenec větším z nich. Při vhodném užití pravidel počítání s přirozenými čísly lze navíc podle dále zavedených postupů odhadovat i výsledky příkladů, které budou mít prvky početních operací záporná čísla nebo jejichž výsledkem bude záporné číslo, protože takové příklady je možné s vědomím a užitím těchto pravidel před samotným číselným počítáním nebo v jeho průběhu upravovat tak, aby prvky početních operací v něm obsažených byla kladná čísla.

Při respektování uvedeného požadavku, aby za prvky početních operací byla uvažována pouze nezáporná čísla taková, aby i výsledkem bylo vždy nezáporné číslo, se pokusíme v následujících podkapitolách formulovat postupy odhadování výsledků početních operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování pro přirozená čísla a desetinná čísla. U zlomků, jak si pak zdůvodníme, si uvedeme postupy jen pro odhad výsledku početní operace sčítání a odčítání.

Jak už je asi zřejmé záměrem této práce je uvést několik (relativně malý počet) postupů odhadování výsledku početní operace, které bude snadné si zapamatovat a natrénovat, je to však na úkor rozmanitosti možných příkladů, na které je možné je uplatnit, což plyne například již z požadavku, že prvky dané početní operace musejí být kladná čísla.

U jednotlivých cvičení na procvičení odhadování je vyžadován vždy nejprve odhad a až poté přesný výpočet v případě, že je možný. Dále, a to již v zadání výslovně nevyžaduji, by byla vhodná kontrola přesnosti odhadu podle příslušného vzorce (viz kapitola *Přesnost odhadu a jeho kontrola*).

5.4 Přirozená a desetinná čísla

U těchto dvou skupin čísel budeme využívat při formování postupů odhadování výsledků početních operací především zaokrouhlování, a to jak v jeho klasické podobě, jak jsme si uvedli začátkem této kapitoly, tak i v podobě upravené podle aktuálních požadavků. Jednotlivé postupy odhadování zde budeme formulovat tak, aby byly do určité míry univerzální a byly tak platné pro obě skupiny čísel. Vycházet budeme hlavně z čísel přirozených. V některých případech, a to především u desetinných čísel, pak bude někdy nutné daný příklad před uplatněním samotného postupu odhadování upravit podle potřeby uplatnění daného postupu, a to například podle běžných pravidel pro počítání s desetinnými čísly nebo i podle nestandardních pravidel jako například u odhadu dělení desetinného čísla dělitelem, který je větší než dělené desetinné číslo, je mnohdy potřeba před uplatněním postupu odhadování dané dělené desetinné číslo vynásobit takovým číslem 10, 100, 1000 atd., aby dělenec byl větší než dělitel. Činíme tak ale s tím vědomím, že skutečný výsledek podílu je 10-krát, 100-krát, 1000-krát, atd. menší a tedy i konečný odhad bude tolikrát menší. Takovéto příklady jsou ale pro odhad v matematice na základní škole spíše již „extrémními“ případy, a proto nejsou zařazeny ani do procvičovacích částí. Názorné ukázky postupů odhadování budou pro snadnější pochopení uvedeny zpravidla na příkladech s přirozenými čísly.

5.4.1 Odhad výsledku sčítání a odčítání

Při odhadování výsledků početních operací sčítání, odčítání nebo jejich kombinací pomocí zaokrouhlování je z praktických důvodů vhodné zaokrouhlovat u všech prvků těchto operací (čísel) na stejný řád, přičemž by se mělo většinou jednat o nejvyšší nenulový[17] řád nejmenšího z čísel. V zásadě můžeme zaokrouhlit i na řád nižší nebo vyšší, to ale s sebou přináší různé komplikace. Nevýhodou zaokrouhlení na nižší řád je, že nejspíš nedojde k dostatečnému zjednodušení. Při zaokrouhlování na řád vyšší, může být za nevýhodu považováno možné úplné vynulování některého z prvků daného příkladu. To ale v případě, kdy je některý vzhledem k ostatním prvkům mnohonásobně menší, nemusí být vůbec na škodu. V případě, že je jedno z čísel o několik řádů větší, pak je celkový odhad značně orientovaný na toto větší číslo. Jako příklad můžeme uvést součet čísel $102\,749$ a 813. Po zaokrouhlení obou čísel na tisíce, které je zde vhodné pro přehlednější a snadnější počítání zpaměti, dostaneme čísla $103\,000$ a $1\,000$. Původní součet tedy můžeme odhadnout pomocí součtu $103\,000 + 1\,000 = 104\,000$. Pokud bychom zaokrouhlili každé z čísel na jiný řád, tak bychom ztratili určitou vnitřní stabilitu odhadu a hlavně by bylo složité formulovat a zapamatovat si pravidla podle, kterých by se tak činilo.

[17] Slovo „nenulový“ je zde uvedeno hlavně kvůli desetinným číslům, protože nejvyšší zapsaný řád například v čísle 0,00314 je nula na pozici jednotek, ale často je potřeba zaokrouhlovat i na některou pozici v desetinné části čísla.

Užitečnou skutečností je, že pokud při součtu, a to i více sčítanců zaokrouhlíme pro odhad výsledku všechny stejným směrem, nebo jen některé, ale stále stejným směrem, tak pak můžeme o odhadu rovnou říci, že je nadhodnocený po zaokrouhlování směrem nahoru nebo podhodnocený po zaokrouhlování směrem dolů. Opět si to ukážeme na příkladu. Mějme za úkol odhadnout součet čísel 783 a 491. Obě čísla zaokrouhlíme na stovky a dostaneme tak 800 a 500. Obě čísla byla zaokrouhlena podle pravidel zaokrouhlování, a to směrem nahoru. Odhad součtu pak bude $800 + 500$ tedy 1300. O tomto odhadu můžeme říci, že je nadhodnocený. To vyplývá ze skutečnosti, že jsme oba sčítance zvětšili. Odhadovaný součet bude proto větší než původní. Na stejném principu by fungovalo i zaokrouhlení několika sčítanců směrem dolů s tím rozdílem, že odhad by byl naopak podhodnocený.

Zkušenější odhadovatelé si této skutečnosti jsou již vědomi a můžou na to reagovat v případě nadhodnoceného odhadu mírným zmenšením odhadovaného součtu nebo naopak v případě podhodnoceného odhadu jeho mírným zvětšením. Mírným snížením a zvýšením je myšleno maximálně o jednonásobek řádu, na který zaokrouhlujeme. Současně záleží vždy na tom, o kolik byly jednotlivé prvky operací při zaokrouhlování sníženy popř. zvýšeny. U předloženého příkladu vidíme, že při odhadu jsme první číslo zvětšili o 17 a druhé o 9, dohromady o necelé tři desítky, proto bychom mohli končený odhad upravit na $1\,280$. V rámci základní školy bych se o této možnosti zpřesnění odhadu raději nezmiňoval, protože je náročnější na představivost a pochopení a mohlo by to způsobit spíše zmatek a narušit tak již vybudovanou schopnost odhadovat. Spokojil bych se proto jen s vytvořením odhadu součtu pomocí vhodného zaokrouhlení sčítanců a v případě jejich stejnosměrného zaokrouhlení s určením, zda je odhad součtu nadhodnocený nebo podhodnocený. V případě zaokrouhlení všech nebo jen některých sčítanců, ale různými směry, je již toto určení komplikovanější a záleží, o kolik byly jednotlivé sčítance zvětšeny a zmenšeny.

Složitější situace je i při určování nadhodnocení nebo podhodnocení odhadu výsledku rozdílu dvou čísel nebo odhadu výsledku příkladu, kde se vyskytuje operace sčítání spolu s operací odčítání. Uvažujeme přitom, že tyto odhady vznikly na základě zaokrouhlení vždy alespoň jednoho prvku početní operace. V těchto případech by o tom bylo možné rozhodnout pomocí přesného výsledku, který by byl porovnán s odhadem, ale v tu chvíli by byl odhad značně zbytečný, když bychom se vzápětí dožadovali přesného výsledku jen pro toto určení. Proto se pokusíme najít jiný postup. U rozdílu dvou čísel se můžeme zaměřit na to, jak byly zaokrouhleny menšenec a menšitel, tedy zda se při zaokrouhlování zvětšily nebo zmenšily, nebo zda některý z nich nebyl změněn vůbec, pak totiž můžeme opět v některých případech rovnou rozhodnout o nadhodnocení nebo podhodnocení odhadu. Celkem může nastat osm případů, jak ukazuje tabulka 1. U variant 1. až 6. můžeme hned podle směru zaokrouhlení určit, zda je odhad nadhodnocený nebo podhodnocený. U varianty 7. a 8. to však nelze určit jen podle směru zaokrouhlení, ale bylo by zapotřebí znát, o jakou hodnotu se menšenec i menšitel při zaokrouhlování zvětšily nebo zmenšily.

Případ	Menšenec	Menšitel	Odhad rozdíl
1.	zvětší se	zmenší se	nadhodnocený
2.	zvětší se	nezmění se	nadhodnocený
3.	nezmění se	zmenší se	nadhodnocený
4.	zmenší se	zvětší se	podhodnocený
5.	zmenší se	nezmění se	podhodnocený
6.	nezmění se	zvětší se	podhodnocený
7.	zvětší se	zvětší se	nejednoznačné
8.	zmenší se	zmenší se	nejednoznačné

Tabulka 1: Nad(pod)hodnocený odhad rozdílu

Jak můžeme vidět, o nadhodnocení nebo podhodnocení odhadu součtu nebo rozdílu můžeme rovnou rozhodnout podle směru zaokrouhlení u jednotlivých prvků těchto operací jen v některých, tzv. „příznivých“ případech. U součtu v případě, jsou-li zaokrouhlované sčítance zaokrouhleny stejným směrem a u rozdílu, jsou-li menšenec a menšitel zaokrouhleny opačným směrem nebo je zaokrouhlen pouze jeden z nich. V ostatních případech potřebujeme k tomuto určení další informace, a to je u odhadu, který nám má celou situaci zjednodušit často nežádoucí. Z toho důvodu je někdy lepší obejít popsaná pravidla zaokrouhlování a zaokrouhlovat tak, aby vyšly uvedené „příznivé“ případy. Pravděpodobně to bude na úkor přesnosti odhadu, na druhou stranu ale budeme vědět, že získáme nadhodnocený nebo podhodnocený odhad, což může být v některých situacích právě zásadní informace. Ukážeme si i zde příklad, jak je to myšleno. Mějme určit odhad rozdílu $783 - 491$. Podle běžných pravidel zaokrouhlování na řád stovek bychom dostali odhad $800 - 500 = 300$, ale nejsme rovnou schopni určit, zda je nadhodnocený nebo podhodnocený. Pokud bychom však třeba menšitele zaokrouhlili proti klasickým pravidlům zaokrouhlování na 400, a provedli pak odhad $800 - 400 = 400$, tak bychom se dostali na jednu z uvedených příznivých situací a mohli bychom o takovém odhadu rovnou říci, že je nadhodnocený. Tuto informaci jsme ale získali na úkor přesnosti odhadu. Naopak, pokud bychom potřebovali získat odhad podhodnocený, mohli bychom třeba číslo 783 zaokrouhlit proti klasickým pravidlům zaokrouhlování na 700 a pak provést odhad $700 - 500 = 200$. Stejný princip upraveného zaokrouhlování můžeme využít i u operace sčítání, abychom získali „příznivé“ případy.

5.4.2 Procvičování A

Cvičení A-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $11 + 23 =$	b) $15 + 37 =$	c) $27 + 28 =$
d) $32 + 46 =$	e) $28 + 47 =$	f) $39 + 54 =$
g) $14 + 78 =$	h) $26 + 95 =$	i) $71 + 88 =$

Cvičení A-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $8 + 9 + 14 =$	b) $2 + 16 + 36 =$	c) $5 + 28 + 63 =$
d) $19 + 44 + 78 =$	e) $29 + 57 + 92 =$	f) $44 + 51 + 18 =$
g) $41 + 50 + 77 =$	h) $39 + 65 + 97 =$	i) $60 + 83 + 99 =$

Cvičení A-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $7 + 198 =$	b) $23 + 247 =$	c) $54 + 349 =$
d) $147 + 258 =$	e) $357 + 654 =$	f) $459 + 521 =$
g) $367 + 710 =$	h) $782 + 834 =$	i) $811 + 987 =$

Cvičení A-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $7 + 43 + 126 =$	b) $17 + 96 + 209 =$	c) $56 + 319 + 743 =$
d) $176 + 326 + 864 =$	e) $225 + 387 + 450 =$	f) $301 + 648 + 911 =$
g) $444 + 641 + 962 =$	h) $687 + 752 + 999 =$	i) $919 + 937 + 999 =$

Cvičení A-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $14\,283 + 594 =$	b) $273 + 43\,506 =$	c) $761 + 32\,593 =$
d) $83 + 45\,078 =$	e) $8\,071 + 43 =$	f) $59 + 171\,488 =$
g) $743 + 96 + 1\,571 =$	h) $6\,419 + 47 + 200 =$	i) $31 + 10\,915 + 78 =$

Cvičení A-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $697 + 9\,104 + 75\,836 =$	b) $82\,400 + 453 + 7\,640 =$
c) $312 + 3\,095 + 93\,642 =$	d) $191 + 8\,000 + 73\,100 =$

Cvičení A-7. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}17 + 0{,}25 =$	b) $0{,}25 + 0{,}27 =$	c) $1{,}53 + 0{,}92 =$
d) $0{,}31 + 0{,}54 =$	e) $0{,}89 + 0{,}43 =$	f) $1{,}91 + 1{,}52 =$
g) $0{,}07 + 0{,}78 =$	h) $0{,}43 + 0{,}09 =$	i) $2{,}07 + 0{,}88 =$

Cvičení A-8. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}087 + 0{,}187 =$	b) $0{,}507 + 0{,}758 =$	c) $0{,}765 + 0{,}428 =$
d) $1{,}121 + 0{,}978 =$	e) $2{,}753 + 0{,}781 =$	f) $4{,}103 + 2{,}614 =$
g) $5{,}168 + 1{,}020 =$	h) $8{,}749 + 7{,}165 =$	i) $1{,}097 + 9{,}289 =$

Cvičení A-9. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $4{,}26 + 2{,}9 =$	b) $0{,}23 + 7{,}7 =$	c) $0{,}35 + 3 =$
d) $5{,}71 + 0{,}8 =$	e) $3{,}07 + 6{,}03 =$	f) $4{,}9 + 5{,}21 =$
g) $34{,}7 + 7{,}10 =$	h) $18{,}2 + 83{,}4 =$	i) $81{,}1 + 9{,}87 =$

Cvičení A-10. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}057 + 0{,}34 =$	b) $0{,}014 + 0{,}116 =$	c) $0{,}057 + 0{,}193 =$
d) $0{,}216 + 0{,}021 =$	e) $0{,}78 + 1{,}004 =$	f) $0{,}508 + 0{,}07 =$
g) $1{,}044 + 0{,}962 =$	h) $0{,}229 + 0{,}145 =$	i) $2{,}013 + 0{,}42 =$

Cvičení A-11. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}49 + 1{,}45 + 0{,}628 =$	b) $0{,}751 + 0{,}015 + 0{,}376 =$
c) $2{,}365 + 3{,}095 + 0{,}142 =$	d) $0{,}962 + 0{,}024 + 0{,}369 =$

5.4.3 Procvičování B

Cvičení B-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $24 - 16 =$	b) $33 - 17 =$	c) $52 - 29 =$
d) $61 - 35 =$	e) $55 - 28 =$	f) $77 - 53 =$
g) $87 - 23 =$	h) $94 - 61 =$	i) $99 - 42 =$

Cvičení B-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $101 - 67 =$	b) $122 - 19 =$	c) $109 - 41 =$
d) $135 - 54 =$	e) $107 - 82 =$	f) $154 - 73 =$
g) $148 - 39 =$	h) $194 - 42 =$	i) $187 - 91 =$

Cvičení B-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $357 - 89 =$	b) $589 - 97 =$	c) $723 - 51 =$
d) $241 - 174 =$	e) $896 - 634 =$	f) $852 - 409 =$
g) $789 - 254 =$	h) $534 - 210 =$	i) $662 - 482 =$

Cvičení B-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $1\,452 - 715 =$	b) $1\,389 - 247 =$	c) $1\,533 - 970 =$
d) $1\,926 - 1\,374 =$	e) $1\,804 - 1\,531 =$	f) $1\,911 - 1\,094 =$
g) $3\,821 - 2\,197 =$	h) $4\,444 - 3\,721 =$	i) $2\,914 - 590 =$

Cvičení B-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $9\,347 - 3\,369 =$	b) $7\,245 - 6\,101 =$	c) $6\,812 - 2\,098 =$
d) $5\,432 - 4\,931 =$	e) $8\,741 - 954 =$	f) $4\,763 - 3\,048 =$

Cvičení B-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $84\,357 - \;\; 503 =$	b) $72\,961 - 51\,963 =$
c) $12\,796 - 8\,632 =$	d) $45\,049 - 23\,987 =$
e) $78\,962 - 72\,852 =$	f) $91\,357 - 14\,650 =$
g) $782\,987 - 52\,741 =$	h) $582\,936 - 418\,972 =$
i) $907\,458 - 753\,159 =$	j) $741\,861 - 75\,308 =$

Cvičení B-7. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}48 - 0{,}35 =$	b) $0{,}85 - 0{,}27 =$	c) $1{,}13 - 0{,}22 =$
d) $0{,}91 - 0{,}54 =$	e) $0{,}59 - 0{,}33 =$	f) $1{,}31 - 1{,}02 =$
g) $0{,}55 - 0{,}18 =$	h) $0{,}43 - 0{,}19 =$	i) $2{,}07 - 0{,}88 =$

Cvičení B-8. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}387 - 0{,}141 =$	b) $0{,}637 - 0{,}755 =$	c) $0{,}712 - 0{,}428 =$
d) $1{,}521 - 0{,}917 =$	e) $2{,}053 - 0{,}781 =$	f) $5{,}913 - 3{,}024 =$
g) $6{,}105 - 1{,}020 =$	h) $8{,}749 - 7{,}165 =$	i) $9{,}097 - 5{,}209 =$

Cvičení B-9. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $3{,}26 - 2{,}9 =$	b) $9{,}23 - 3{,}7 =$	c) $5 - 3{,}14 =$
d) $5{,}01 - 0{,}8 =$	e) $7{,}97 - 5{,}03 =$	f) $4{,}9 - 2{,}21 =$
g) $14{,}7 - 7{,}12 =$	h) $11{,}2 - 3{,}4 =$	i) $8{,}13 - 8{,}07 =$

Cvičení B-10. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}957 - 0{,}34 =$	b) $0{,}614 - 0{,}056 =$	c) $0{,}457 - 0{,}193 =$
d) $0{,}216 - 0{,}021 =$	e) $0{,}781 - 0{,}004 =$	f) $0{,}508 - 0{,}07 =$
g) $1{,}044 - 0{,}962 =$	h) $0{,}269 - 0{,}145 =$	i) $2{,}013 - 0{,}42 =$

5.4.4 Odhad výsledku násobení

Při odhadování výsledku násobení je dobré si uvědomit, že při zaokrouhlení činitele se nepřesnost vzniklá tímto zaokrouhlením několikrát vynásobí. Z tohoto důvodu je důležité způsob zaokrouhlování vždy pečlivě zvážit. Zde by bylo vhodné navázat na myšlenku nadhodnoceného a podhodnoceného odhadu. Zaokrouhlíme-li činitele mechanicky podle klasických pravidel zaokrouhlování, pak v případě, kdy při součinu, a to i více činitelů, zaokrouhlíme pro odhad výsledku všechny stejným směrem, nebo jen některé, ale stále stejným směrem, tak pak můžeme o odhadu rovnou říci, že je nadhodnocený po zaokrouhlování směrem nahoru nebo podhodnocený po zaokrouhlování směrem dolů. V případě, že jednotlivé činitele zaokrouhlíme, ale různými směry, bude komplikované určit, zda je odhad nadhodnocený nebo podhodnocený. Proto je v některých situacích užitečné zaokrouhlit všechny nebo jen některé činitele, ale pouze jedním směrem i přesto, že to bude někdy vyžadovat opět obejít stanovená pravidla zaokrouhlování podobně, jako jsme si ukázali v podkapitole *Odhad výsledku sčítání a odčítání*. Na oplátku tak získáme odhad výsledku, o kterém budeme moci říci, zda je nadhodnocený nebo podhodnocený.

Vždy je navíc potřeba se zamyslet i nad řádem, na který se budou jednotlivé činitele zaokrouhlovat. Oproti sčítání zde totiž neplatí, že je vhodné zaokrouhlit všechny činitele na stejný řád. Naopak pro zjednodušení se zaokrouhluje zpravidla každý člen součinu na některý z jeho nejvyšších nenulových řádů. Výjimku zde tvoří jednociferní činitelé, u kterých je často žádoucí nezaokrouhlovat vůbec[18]. Na ukázku mějme za úkol odhadnout součin $7\,846 \cdot 439$. V tomto případě by bylo vhodné pro zjednodušení zaokrouhlit prvního činitele na tisíce a druhého na stovky. Prvním postupem, tedy při zachování klasických pravidel zaokrouhlování bychom dostali odhad výsledku jako $8\,000 \cdot 400 = 3\,200\,000$. Druhým postupem můžeme dojít k několika různým odhadům. Buď můžeme oba činitele zaokrouhlit dolů, u prvního tedy proti pravidlům zaokrouhlování, a získat tak odhad $7\,000\ \cdot 400 = 2\,800\,000$, o kterém můžeme rovnou říci, že je podhodnocený, nebo naopak můžeme oba činitele zaokrouhlit směrem nahoru, u druhého činitele tedy proti pravidlům zaokrouhlování a získat tak odhad $8\,000 \cdot 500 = 4\,000\,000$, o kterém můžeme rovnou říci, že je nadhodnocený.

[18] Především se jedná o tyto činitele: 1, 2, 3, 4.

Já osobně bych při odhadu výsledku součinu několika činitelů v případě, že nepotřebuji znát informaci o nadhodnocení nebo podhodnocení odhadu, volil úplně první způsob zaokrouhlování, tedy každého činitele podle klasických pravidel zaokrouhlování. Ten je podle mého názoru nejsnáze pochopitelný a zapamatovatelný pro žáky základní školy.

5.4.5 Procvičování C

Cvičení C-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $17 \cdot 4 =$	b) $7 \cdot 13 =$	c) $19 \cdot 6 =$
d) $28 \cdot 6 =$	e) $9 \cdot 41 =$	f) $63 \cdot 7 =$
g) $171 \cdot 3 =$	h) $2 \cdot 557 =$	i) $679 \cdot 5 =$
j) $5\,351 \cdot 8 =$	k) $4 \cdot 38\,052 =$	l) $203\,571 \cdot 9 =$

Cvičení C-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $23 \cdot 14 =$	b) $39 \cdot 17 =$	c) $67 \cdot 33 =$
d) $79 \cdot 41 =$	e) $56 \cdot 88 =$	f) $97 \cdot 58 =$
g) $411 \cdot 17 =$	h) $376 \cdot 45 =$	i) $621 \cdot 78 =$
j) $137 \cdot 718 =$	k) $754 \cdot 963 =$	l) $542 \cdot 401 =$

Cvičení C-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $9\,785 \cdot 74 =$	b) $11\,948 \cdot 23 =$	c) $43\,057 \cdot 174 =$
d) $8\,478 \cdot 4\,103 =$	e) $4\,527 \cdot 3\,741 =$	f) $9\,153 \cdot 4\,209 =$
g) $56\,741 \cdot 333 =$	h) $73\,501 \cdot 814 =$	i) $42\,379 \cdot 910 =$
j) $487\,475 \cdot 18 =$	k) $971\,058 \cdot 251 =$	l) $420\,642 \cdot 617 =$
m) $803\,917 \cdot 79 =$	n) $562\,112 \cdot 745 =$	o) $663\,147 \cdot 2\,182 =$

Cvičení C-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $9\,278\,475 \cdot 78 =$	b) $2\,345\,012 \cdot 223 =$
c) $1\,045\,267 \cdot 4\,197 =$	d) $7\,153\,729 \cdot 53\,719 =$
e) $5\,429\,753 \cdot 159\,267 =$	f) $8\,075\,695 \cdot 3\,751\,953 =$

Cvičení C-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $78 \cdot 45 \cdot 91 =$	b) $31 \cdot 87 \cdot 64 =$
c) $51 \cdot 957 \cdot 47 =$	d) $69 \cdot 679 \cdot 132 =$
a) $187 \cdot 991 \cdot 47 =$	b) $450 \cdot 232 \cdot 157 =$
c) $7\,234 \cdot 49 \cdot 209 =$	d) $682 \cdot 123 \cdot 7\,840 =$
e) $87\,208 \cdot 456 \cdot 369 =$	f) $4\,753 \cdot 258 \cdot 5\,802 =$

Cvičení C-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}26 \cdot 4 =$	b) $0{,}67 \cdot 13 =$	c) $19{,}45 \cdot 7 =$
d) $0{,}618 \cdot 6 =$	e) $0{,}265 \cdot 11 =$	f) $61{,}03 \cdot 15 =$
g) $3{,}511 \cdot 8 =$	h) $1{,}632 \cdot 57 =$	i) $94{,}22 \cdot 23 =$
j) $7{,}591 \cdot 11 =$	k) $4{,}751 \cdot 38 =$	l) $123{,}91 \cdot 3 =$

Cvičení C-7. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}63 \cdot 1{,}4 =$	b) $39 \cdot 65{,}12 =$	c) $6{,}15 \cdot 0{,}133 =$
d) $0{,}39 \cdot 9{,}1 =$	e) $16 \cdot 80{,}91 =$	f) $0{,}89 \cdot 58{,}1 =$
g) $4{,}11 \cdot 8{,}7 =$	h) $476 \cdot 4{,}55 =$	i) $6{,}21 \cdot 0{,}98 =$
j) $9{,}37 \cdot 7{,}68 =$	k) $754 \cdot 9{,}63 =$	l) $5{,}42 \cdot 0{,}741 =$

Cvičení C-8. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}785 \cdot 2{,}4 =$	b) $14{,}236 \cdot 4{,}3 =$	c) $4{,}357 \cdot 0{,}74 =$
d) $0{,}478 \cdot 47{,}03 =$	e) $48{,}127 \cdot 7{,}41 =$	f) $9{,}753 \cdot 0{,}09 =$
g) $0{,}196 \cdot 3{,}53 =$	h) $23{,}201 \cdot 3{,}44 =$	i) $5{,}319 \cdot 0{,}063 =$
j) $0{,}475 \cdot 18{,}9 =$	k) $97{,}058 \cdot 0{,}51 =$	l) $42{,}601 \cdot 0{,}517 =$
m) $0{,}037 \cdot 19 =$	n) $76{,}212 \cdot 9{,}18 =$	o) $86{,}002 \cdot 0{,}181 =$

Cvičení C-9. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}007\,5 \cdot 9 =$	b) $0{,}017 \cdot 2{,}3 =$
c) $0{,}001\,269 \cdot 4{,}97 =$	d) $0{,}000\,751 \cdot 50{,}19 =$
e) $0{,}000\,614 \cdot 0{,}38 =$	f) $0{,}000\,452 \cdot 27{,}09 =$

Cvičení C-10. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}000\,078 \cdot 0{,}000\,45 =$	b) $0{,}001\,401 \cdot 0{,}064\,24 =$
c) $0{,}000\,51 \cdot 0{,}079\,7 =$	d) $0{,}000\,119 \cdot 0{,}006\,619 =$
e) $0{,}021\,85 \cdot 0{,}900\,18 =$	f) $0{,}000\,805 \cdot 0{,}000\,157 =$
g) $0{,}000\,034 \cdot 0{,}001\,523 =$	h) $0{,}000\,023 \cdot 0{,}000\,846 =$
i) $0{,}008\,208 \cdot 0{,}000\,471\,39 =$	j) $0{,}000\,041 \cdot 0{,}000\,055 =$

5.4.6 Odhad výsledku dělení

Odhad u početní operace dělení je zásadní a ve velké míře vychází ze znalosti násobení, přesněji ze znalosti násobků čísel. Na rozdíl od odhadu výsledku početní operace sčítání, odčítání nebo násobení, je zde odhad často nutnou součástí přesného výpočtu. Tedy nejen že můžeme před samotným přesným dělením odhadovat velikost výsledného podílu, ale odhad potřebujeme většinou i při samotném postupu přesného výpočtu.

Nejprve si ukážeme, jak odhadovat velikost výsledného podílu. Postupy, které zde budu prezentovat pro tento odhad, jsem se inspiroval v příručkách pro učitele k sadě učebnic *Houghton Mifflin math central* autora L. Boswella a kol. (1999f Level 3. Volume 2., 1999h Level 4. Volume 2., 1999i Level 5. Volume 1.). I zde budeme při vytváření odhadu využívat zaokrouhlování, a to jak klasické, tak i jeho upravenou formu. To, zda budeme zaokrouhlovat pouze dělence nebo i dělitele, zaleží vždy na počtu cifer obou těchto čísel. Pro přehlednost si ukážeme zvlášť postup pro případ jednociferného dělitele a zvlášť pro případ víceciferného dělitele.

V případě, že budeme mít jednociferného dělitele, stačí, když zaokrouhlíme pouze dělence, a to upravenou formou zaokrouhlování tak, abychom získali vhodný násobek dělitele. Postup takového zaokrouhlování, který vede k vhodnému násobku dělitele, je následující. Pokud u dělence bude cifra jeho nejvyššího nenulového řádu větší než dělitel, pak ji nahradíme takovým celým číslem, které je svou velikostí nejblíže této cifře a zároveň je násobkem dělitele[19]. Zbylé číslice nahradíme nulami. Jako příklad si můžeme uvést podíl $7\,139 : 6$. Zde bychom podle uvedeného

[19] V tomto a dalších případech je vhodné využít číselnou osu, na které je dobře vidět vzdálenosti čísel.

zaokrouhlili dělence na číslo 6 000 a odhadovaným podílem by byl tedy 1 000. Pokud však u dělence bude cifra jeho nejvyššího nenulového řádu menší než dělitel, pak místo ní vezmeme v úvahu dvojčíslí tvořené touto cifrou a první následující cifrou (první číslicí od ní napravo). I v tomto případě nahradíme toto dvojčíslí takovým celým číslem, které je mu svou velikostí nejblíže a zároveň je násobkem dělitele. Zbylé číslice opět nahradíme nulami. Jako příklad si můžeme uvést podíl 2 375 : 6. Zde bychom dělence zaokrouhlili na číslo 2 400 a odhadovaným podílem by bylo 400. V čem spočívá upravená forma zaokrouhlení dělitele oproti klasickému zaokrouhlování, vyplývá z uvedeného postupu a příkladů. V příručkách pro učitele k sadě učebnic *Houghton Mifflin math central* se takto upravený dělenec spolu s dělitelem příhodně nazývají kompatibilní čísla. Smyslem jejich tvorby je, aby vznikla taková čísla, dělenec a dělitel, jejichž podíl by bylo možné určit z paměti a která by byla zároveň svojí velikostí blízká dělenci a děliteli v původním zadaném podílu.

Určení vhodné podoby zaokrouhleného dělence popsaným způsobem nemusí být vždy zřejmé hned na první pohled jako v uvedených příkladech. Mohou se nám totiž nabízet dva možné vhodné dělence. Jeden menší než zadaný dělenec a druhý větší. Například v případě podílu 1 501 : 6. Pokud se zaměříme podle popsaného postupu na patnáctku, tak násobky šesti, které jsou jí svou velikostí nejbližší, jsou 12 a 18, oba dva jsou od ní svou velikostí stejně daleko, jak by bylo možné vidět například při vyznačení čísel 12, 15 a 18 na číselné ose. Nabízejí se nám proto dva vhodné dělence 1 200 a 1 800. Pokud by bylo potřeba vybrat jednoho jako pro odhad absolutně nejvhodnějšího, tak by to byl ten, který by byl svojí velikostí nejblíže původnímu dělenci, v našem případě by to byl tedy dělenec 1 800. Pokud by v nějakém případě nebylo možné určit ani to, pak by bylo jasné, že hodnota původního podílu leží přesně uprostřed mezi podíly oněch dvou vhodných dělenců. To vše však platí za předpokladu, že vytváříme odhad s původním dělitelem.

To, že se nám při odhadu podílu s jednociferným dělitelem nabízejí dva možné vhodné dělence, nemusí být vůbec na škodu, naopak někdy je vhodné záměrně určit popsaným postupem nejbližšího menšího a nejbližšího většího dělence, protože v tu chvíli získáváme dvojici odhadů podílu, kde jeden je nadhodnocený a druhý podhodnocený. Z toho zákonitě vyplývá, že hodnota původního podílu s jednociferným dělitelem se musí nacházet někde mezi těmito dvěma hodnotami. Navíc tato dvojice nadhodnoceného a podhodnoceného odhadu podílu, přesněji jejich rozmezí, nám dává informaci o tom, kolika ciferný bude původní podíl a mnohdy i jaká bude jeho první nenulová cifra jeho nejvyššího řádu.

V případě podílu s víceciferným dělitelem se vychází z postupu s jednociferným dělitelem. Nejprve se však zaokrouhlí podle klasických pravidel zaokrouhlování dělitel, a to na jeho nejvyšší nenulový řád, tím získáme v děliteli pouze jednu nenulovou číslici, kterou následně využíváme stejně jako dělitele v případě jednociferného dělitele. Nesmíme ale zapomenout vzít v úvahu pozici (řád) v čísle, na kterém se tato číslice nachází a podle toho upravit výsledný odhadovaný podíl. Jako příklad si uvedeme třeba podíl 8 194 : 28. Po zaokrouhlení dělitele 28 na hodnotu 30 hledáme obdobně jako v postupu s jednociferným dělitelem násobek čísla 3, který je blízký svou velikostí číslu 8. Takovým násobkem je číslo 9, a proto pro odhad původního podílu zaokrouhlíme upravenou formou dělence 8 194 na hodnotu 9 000. Odhad původního podílu provedeme výpočtem 9 000 : 30, jehož výsledná hodnota je 300.

I u odhadu výsledku početní operace dělení je možné v některých případech ihned po jeho provedení rozhodnout, zda je nadhodnocený nebo podhodnocený. Stejně jako u odhadů předchozích operací se vychází z informace, zda se jednotlivé prvky operace (dělenec a dělitel) při zaokrouhlování a dalších úpravách při vytváření odhadu zvětšily nebo zmenšily. Jak je tomu u operace dělení ukazuje přiložená tabulka 2.

Případ	Dělenec	Dělitel	Odhad podílu
1.	zvětší se	zmenší se	nadhodnocený
2.	zvětší se	nezmění se	nadhodnocený
3.	nezmění se	zmenší se	nadhodnocený
4.	zmenší se	zvětší se	podhodnocený
5.	zmenší se	nezmění se	podhodnocený
6.	nezmění se	zvětší se	podhodnocený
7.	zvětší se	zvětší se	nejednoznačné
8.	zmenší se	zmenší se	nejednoznačné

Tabulka 2: Nad(pod)hodnocený odhad rozdílu

Na základě uvedené tabulky je potřeba věnovat zvýšenou pozornost při určování, ale i záměrném vytváření nadhodnoceného a podhodnoceného odhadu v případech s víceciferným dělitelem, protože je v nich většinou zaokrouhlován jak dělenec, tak i dělitel. V kontextu této tabulky totiž vyplývá, že nejbližší menší dělenec určený popsaným způsobem nemusí vždy spolu se zaokrouhleným dělitelem vytvářet podhodnocený odhad původního podílu a naopak nejbližší větší dělenec určený popsaným způsobem nemusí spolu se zaokrouhleným dělitelem vytvářet nadhodnocený odhad původního podílu.

Jak už bylo napsáno, odhad je často potřeba i při samotném přesném výpočtu, protože u písemného dělení postupně odhadujeme, kolikanásobek dělitele je obsažen v číslech vytvořených z dělence. Tuto myšlenku si ukážeme na dělení dvojciferným dělitelem. Mějme vypočítat například podíl 7 241 : 23. Na začátku výpočtu písemného dělení vyznačujeme, tzv. zatrháváme v dělenci zleva číslo, které je větší nebo rovno děliteli a zároveň je menší než desetinásobek dělitele. V našem případě si zatrhneme číslo 72. Dále určujeme, a to právě většinou odhadem, takové jednociferné číslo, aby součin tohoto čísla a dělitele (v našem případě 23) byl největší násobek dělitele, který je menší nebo roven zatrženému číslu. Zjednodušeně řečeno odhadujeme, kolikrát „se vejde" číslo 23 do čísla 72. Jak je vidět na provedeném výpočtu (obrázek 3), odhad byl proveden na trojnásobek čísla 23 (trojka na místě stovek v podílu). Nyní je potřeba ověřit, jak byl tento odhad přesný. To provedeme odečtením součinu dělitele (23) a odhadovaného čísla (3) od zatrženého čísla (72). Pokud je tento rozdíl záporné číslo (nižší ročníky základní školy tento rozdíl neumějí provést) je potřeba zmenšit odhadované jednociferné číslo, nebo naopak, pokud je tento rozdíl větší než dělitel (23), je zapotřebí ho zvětšit. V našem případě vychází tento rozdíl 3, což je zbytek po dělení čísla 72 číslem 23 (číslo 3 napsané pod rozdílem čísla 72 a 69). Následně sepíšeme k vzniklému zbytku (3) následující číslici z dělence (4) a celý uvedený postup opakujeme s tím rozdílem, že místo zatrženého čísla máme nyní číslo vzniklé sepsáním zbytku a následující číslice z dělence, tedy v našem případě získáváme číslo 34. Takto postupujeme až na žádoucí řád podílu.

7 241 : 23 = 314 zb. 19 72 : 23 = 3 zb. 3
-(69)
034 34 : 23 = 1 zb. 11
-(23)
111 111 : 23 = 4 zb. 19
-(92)
19

Obrázek 3: Dělení dvojciferným dělitelem

Odhad popsaného jednociferného čísla, můžeme v jednotlivých krocích dělení provést tak, jak uvádějí Blažková, Matoušková a Vaňurová, (2009) nebo obdobně i Justová (2011), tedy tak, že si nejprve pro zjednodušení zaokrouhlíme dělitele i dělené číslo, každého na některý z jeho nejvyšších nenulových řádů. V našem případě zaokrouhlíme po prvním zatržení (v prvním kroku) u obou čísel na desítky, $23 \doteq 20$ a $72 \doteq 70$. Následně se pokusíme určit kolikanásobkem zaokrouhleného dělitele je zaokrouhlené dělené číslo. Tím provedeme požadovaný odhad. K tomu určení lze využít například postupné odříkání násobků zaokrouhleného dělitele, které je snadnější než odříkání násobků nezaokrouhleného, z čehož vyplývá význam provedeného zaokrouhlování. U dělení s jednociferným dělitelem se při odhadu kolikanásobkem dělitele je dělené číslo zaokrouhlování většinou nepoužívá, protože je možné ono číslo určit pouhým odříkáním násobků dělitele, které se pohybují v rámci malé násobilky.

Jako jiný z mého pohledu výhodnější postup pro určení popsaného jednociferného čísla v jednotlivých krocích dělení je využití již uvedeného odhadu velikosti výsledného podílu vždy pro daný krok dělení. Tento postup se od postupu uvedených autorek liší pouze ve způsobu úpravy děleného čísla. Takto bylo poměrně náročně popsáno, jak se využívá odhad při postupu přesného výpočtu písemného dělení.

5.4.7 Procvičování D

Cvičení D-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $17 : 3 =$	b) $23 : 8 =$	c) $49 : 6 =$
d) $33 : 2 =$	e) $78 : 5 =$	f) $81 : 7 =$
g) $189 : 4 =$	h) $557 : 9 =$	i) $679 : 8 =$
j) $303 : 7 =$	k) $631 : 4 =$	l) $987 : 5 =$
m) $5\,351 : 8 =$	n) $4\,052 : 3 =$	o) $7\,571 : 9 =$

Cvičení D-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $73 : 14 =$	b) $39 : 17 =$	c) $67 : 23 =$
d) $179 : 11 =$	e) $256 : 28 =$	f) $297 : 58 =$
g) $1\,411 : 17 =$	h) $2\,376 : 45 =$	i) $3\,621 : 24 =$
j) $4\,137 : 71 =$	k) $7\,354 : 63 =$	l) $8\,542 : 41 =$

Cvičení D-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $19\,785 : 74 =$	b) $21\,948 : 23 =$	c) $43\,057 : 54 =$
d) $38\,478 : 41 =$	e) $54\,527 : 70 =$	f) $79\,150 : 82 =$
g) $156\,741 : 13 =$	h) $273\,501 : 34 =$	i) $542\,379 : 91 =$
j) $487\,475 : 58 =$	k) $971\,058 : 61 =$	l) $420\,642 : 77 =$
m) $803\,917 : 79 =$	n) $562\,112 : 85 =$	o) $963\,147 : 87 =$

Cvičení D-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $8\,475 : 178 =$	b) $5\,012 : 223 =$
c) $45\,267 : 297 =$	d) $63\,729 : 384 =$
e) $82\,753 : 567 =$	f) $75\,695 : 753 =$
g) $248\,753 : 307 =$	h) $724\,649 : 481 =$
i) $904\,367 : 821 =$	j) $870\,456 : 387 =$

Cvičení D-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $75\,021 : 2\,128 =$	b) $44\,932 : 4\,397 =$
c) $245\,460 : 9\,192 =$	d) $683\,759 : 8\,024 =$
e) $892\,793 : 6\,527 =$	f) $756\,695 : 7\,583 =$

Cvičení D-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $19{,}4 : 3 =$	b) $87{,}9 : 8 =$	c) $76{,}3 : 6 =$
d) $21{,}78 : 9 =$	e) $76{,}39 : 5 =$	f) $98{,}71 : 7 =$
g) $174{,}921 : 4 =$	h) $463{,}027 : 9 =$	i) $856{,}679 : 8 =$
j) $335{,}4 : 37 =$	k) $603{,}1 : 14 =$	l) $987{,}7 : 41 =$
m) $535{,}195 : 57 =$	n) $925{,}201 : 30 =$	o) $157{,}061 : 59 =$

Cvičení D-7. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $71 : 1{,}7 =$	b) $99 : 3{,}8 =$	c) $67 : 2{,}5 =$
d) $879 : 8{,}6 =$	e) $256 : 4{,}8 =$	f) $897 : 1{,}8 =$
g) $191 : 1{,}7 =$	h) $376 : 7{,}5 =$	i) $321 : 2{,}4 =$
j) $4\,137 : 7{,}41 =$	k) $7\,354 : 3{,}93 =$	l) $8\,542 : 4{,}82 =$

Cvičení D-8. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $78{,}5 : 6{,}4 =$	b) $94{,}8 : 1{,}3 =$	c) $43{,}57 : 4{,}4 =$
d) $384{,}78 : 8{,}1 =$	e) $545{,}27 : 9{,}5 =$	f) $79{,}150 : 3{,}3 =$
g) $74{,}51 : 1{,}23 =$	h) $27{,}01 : 6{,}24 =$	i) $54{,}29 : 4{,}91 =$
j) $487{,}475 : 5{,}62 =$	k) $971{,}058 : 1{,}51 =$	l) $420{,}642 : 5{,}7 =$
m) $803{,}917 : 29{,}9 =$	n) $562{,}112 : 68{,}2 =$	o) $963{,}147 : 63{,}4 =$

Cvičení D-9. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem vypočítaným s přesností na 2 desetinná místa:

a) $8{,}475 : 0{,}078 =$	b) $5{,}012 : 0{,}003 =$
c) $45{,}567 : 0{,}009\,7 =$	d) $63{,}729 : 0{,}007\,14 =$
e) $82{,}6531 : 0{,}000\,67 =$	f) $75{,}695 : 0{,}000\,53 =$
g) $248{,}753 : 0{,}000\,307 =$	h) $724{,}649 : 0{,}000\,281 =$

5.4.8 Odhad výsledku umocňování

Umocňování a odmocňování jsou další dvě důležité početní operace, které tvoří podstatnou část učiva základní školy. Podrobněji se s nimi žáci zabývají až na druhém stupni, i když indicie o jejich existenci získávají již dříve například prostřednictvím vzorečků pro výpočet obsahu čtverce a objemu krychle z délek jejich stran a hran a prostřednictvím příslušných jednotek obsahu a objemu („čtverečních“ a „krychlových“), u kterých se vyskytuje dvojka nebo trojka jako horní index, který tvoří součást zápisu dané jednotky.

První z těchto dvou početních operací, tedy umocňování, není většinou pro žáky z principu věci nic nového, protože se jedná o součin několika stejných čísel. Nově se však žáci seznamují především se zápisem, například zápis 9^3 udává, že číslo 9 (základ mocniny) se vyskytuje v součinu třikrát. Trojka je mocnitel (exponent). Platí tedy následující rovnost: $9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$. (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009)

Jelikož umocňování je v zásadě vícenásobné násobení, tak by bylo možné a i vhodné vycházet při odhadování výsledku početní operace umocňování právě z postupu pro odhadování výsledku početní operace násobení. Ten byl již uveden v jedné z předchozích podkapitol a vyplývá z něj, že základ mocniny by měl být zpravidla zaokrouhlen na některý z jeho nejvyšších nenulových řádů.

U odhadu druhé mocniny nějakého čísla, která je na základní škole patrně nejvíce procvičována, by bylo příhodné daný postup upřesnit následujícími pravidly. Ta jsou implicitně vyjádřena v učebnici s názvem *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia* (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009), odkud jsem se jimi inspiroval. V případě, že nejvyšší nenulový řád základu mocniny tvoří číslice jiná než jedna, pak by měl být základ mocniny zaokrouhlen právě na tento řád. V případě, že je však nejvyšší nenulový řád základu mocniny číslice jedna, pak by měl být základ mocniny zaokrouhlen na řád následující. To vše proto, aby bylo možné při odhadování využít druhých mocnin přirozených čísel od 1 do 20, které by žáci měli znát z praktických důvodů nazpaměť.[20] Základ mocniny zaokrouhlený podle takto popsaných pravidel bude mít totiž na nejvyšším nenulovém řádu buď číslici od 2 do 9, přičemž ostatní

[20] U druhých mocnin desetinných čísel menších než 2 se pak využívá navíc i znalost druhých mocnin čísel 0,1, 0,01, 0,001 atd. a znalost vzorce $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, podle kterého lze druhou mocninu základu zapsat jako součin druhých mocnin některého z těchto čísel a čísla přirozeného.

číslice budou nulové, nebo na něm bude číslice 1 a následující číslice bude jakákoli z rozmezí 0 až 9, přičemž všechny ostatní budou opět nulové. Pro doplnění zbývá podotknout, že v případě, kdy se základ mocniny při odhadování zvětší, vzniká odhad nadhodnocený a naopak v případě, kdy se základ mocniny při odhadování zmenší, vzniká odhad podhodnocený.

Uvedeme si dva příklady demonstrující upřesněný postup, každý pro jednu z dvou možných variant. Nejprve mějme odhadnout druhou mocninu čísla 584. Základ mocniny, tedy číslo 584, zaokrouhlíme na řád stovek, protože se na nejvyšším nenulovém řádu základu mocniny vyskytuje číslice 5. Takto zaokrouhlený základ bude 600. Jeho druhá mocnina bude již požadovaný odhad. Ten lze určit již z paměti, pokud si uvědomíme následující rovnosti[21] $600^2 = (6 \cdot 100)^2 = 6^2 \cdot 100^2 = 36 \cdot 10\,000 = 36\,000$. Jako druhý názorný příklad mějme odhadnout druhou mocninu čísla 163. Základ mocniny, tedy číslo 163, zaokrouhlíme na řád desítek, protože se na nejvyšším nenulovém řádu základu mocniny vyskytuje číslice 1. Takto zaokrouhlený základ bude 160. Jeho druhá mocnina bude již požadovaný odhad. Ten lze určit opět z paměti, pokud si uvědomíme následující rovnosti $160^2 = (16 \cdot 10)^2 = 16^2 \cdot 10^2 = 256 \cdot 100 = 25\,600$.

Ve snaze dosáhnout lepšího (přesnějšího) odhadu druhé mocniny nějakého čísla je navíc mnohdy dobré, při respektování uvedených pravidel zaokrouhlování, zaokrouhlit základ mocniny nejen jedním směrem, ale oběma, tedy směrem nahoru i dolů. Dostaneme tak dvojici zaokrouhlených základů, mezi nimiž se nachází zadaný základ. Umocněním druhou mocninou zaokrouhlených základů získáme dvě hodnoty mocnin, mezi nimiž se logicky nachází i hodnota druhé mocniny zadaného základu. (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009)

Následně se zaměříme na pozici (polohu) zadaného základu mezi zaokrouhlenými základy, protože v přibližně stejné pozici (poloze) mezi mocninami zaokrouhlených základů se bude nacházet i mocnina zadaného základu, kterou takto odhadneme. Jinak řečeno uvedeme do poměru přibližné velikosti absolutních hodnot rozdílů zadaného základu a zaokrouhlených základů, například vizuálně za využití číselné osy nebo jen zkusmo. Dále využijeme tento poměr tak, že v přibližně stejném

[21] Vycházejí se vzorce $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

poměru by měly být i velikosti absolutních hodnot rozdílů mocniny zadaného základu a mocnin zaokrouhlených základů. Na základě této informace se pokusíme odhadnout velikost mocniny zadaného základu. Zde je nutné upozornit, že takto popsané zpřesňování odhadu pomocí poměrů je pouze jen přibližné a někdy se může i minout účinkem, protože se umocňováním vzájemné poměry změní. Například druhá mocnina čísla, které se nachází přesně uprostřed mezi dvěma čísly, se nerovná číslu, které se nachází uprostřed mezi druhými mocninami těchto dvou čísel. Z toho vyplývá, že dané poměry u mocnin a základů nejsou stejné, ale jen přibližně stejné. To můžeme vidět například na trojici čísel 2, 3 a 4, kde je trojka svojí velikostí uprostřed mezi čísly dva a čtyři, ale druhá mocnina trojky, tedy devítka již není svojí velikostí uprostřed mezi druhými mocninami čísel dva a čtyři, tedy mezi čtyřkou a šestnáctkou. Ještě jednou bych chtěl proto zdůraznit, že popsané využití poměrů je založeno pouze na jejich přibližně stejné hodnotě. To je však podle mého názoru pro tvorbu odhadu, u kterého se počítá s nepřesností, přijatelné. Tento postup zpřesnění odhadu má za následek, že po jeho uplatnění je často obtížné určit, zda je vytvořený odhad nadhodnocený nebo podhodnocený, a proto by toto určení již nemělo být vyžadováno.

Opět si uvedeme ukázkový příklad. Pokusíme se podle uvedeného popisu o vytvoření přesnějšího odhadu druhé mocniny čísla 163, než jsme zatím vytvořili. Základ mocniny, tedy číslo 163 zaokrouhlíme opět na řád desítek, ale tentokrát směrem dolů i nahoru a získáme tak dva zaokrouhlené základy 160 a 170. Jejich umocnění druhou mocninou nám dá hodnoty 25 600 a 28 900, mezi nimiž se nachází i přesná hodnota druhé mocniny čísla 163. Pozice čísla 163 je přibližně v jedné třetině mezi čísly 160 a 170, o čemž svědčí i poměr rozdílů $|163 - 160|$ a $|163 - 170|$, tedy $3 : 7$. Přibližně ve stejné pozici mezi čísly 25 600 a 28 900 se bude nacházet i druhá mocnina čísla 163, respektive v přibližně stejném poměru by měly být i velikosti absolutních hodnot rozdílů mocniny zadaného základu a hodnot 25 600 a 28 900. Proto je příhodné odhadnout druhou mocninu čísla 163 třeba na hodnotu 26 700. Pokud si dáme tu práci a vypočítáme přesnou hodnotu druhé mocniny čísla 163, tedy hodnotu 26 569, tak zjistíme, že se nám odhad podařilo zpřesnit, ale na úkor jaké námahy.

Takto byl poměrně složitě popsán a demonstrován postup zpřesňující odhad, který se však v běžné praxi provádí méně formálně, a to na základě vlastního citu a již získané zkušenosti s danou početní operací. Do jaké míry by žáci základní školy měli být seznámeni s tímto zpřesňujícím postupem odhadu právě v této podobě zůstává otázkou. Já osobně bych se zpřesňujícím postupem seznámil jen nadanější žáky.

U mocniny s mocnitelem (exponentem) vyšším než dva bych v případě, že je potřeba vytvořit odhad výsledku, doporučoval převést si mocninu čísla na patřičný vícenásobný součin a dále již postupovat jako při odhadu výsledku početní operace násobení. Tedy zaokrouhlit základ mocniny na některý jeho nejvyšší nenulový řád. Podstatná je ale informace, že čím vyšší bude mocnina, tím více se bude odhad výsledku vzdalovat od přesné hodnoty právě v důsledku zaokrouhlení. Z toho důvodu je odhad vhodný a efektivní jen v případech, kdy dojde při zaokrouhlování jen k nepatrnému zvětšení nebo zmenšení hodnoty základu mocniny.

5.4.9 Procvičování E

Cvičení E-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $9^3 =$	b) $18^3 =$	c) $62^3 =$
d) $8^4 =$	e) $11^4 =$	f) $78^4 =$
g) $9^5 =$	h) $51^5 =$	i) $82^5 =$
j) $9^6 =$	k) $42^7 =$	l) $51^8 =$

Cvičení E-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $24^2 =$	b) $38^2 =$	c) $67^2 =$
d) $102^2 =$	e) $123^2 =$	f) $191^2 =$
g) $270^2 =$	h) $386^2 =$	i) $449^2 =$
j) $501^2 =$	k) $698^2 =$	l) $722^2 =$
m) $864^2 =$	n) $908^2 =$	o) $991^2 =$

Cvičení E-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $1\,205^2 =$	b) $1\,970^2 =$	c) $2\,975^2 =$
d) $3\,214^2 =$	e) $4\,702^2 =$	f) $5\,146^2 =$
g) $5\,781^2 =$	h) $6\,258^2 =$	i) $6\,656^2 =$
j) $7\,117^2 =$	k) $7\,589^2 =$	l) $8\,410^2 =$
m) $8\,713^2 =$	n) $9\,671^2 =$	o) $9\,876^2 =$

Cvičení E-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $17\,682^2 =$	b) $27\,902^2 =$
c) $56\,471^2 =$	d) $62\,157^2 =$
e) $77\,250^2 =$	f) $81\,574^2 =$
g) $126\,471^2 =$	h) $248\,075^2 =$
i) $471\,024^2 =$	j) $745\,919^2 =$

Cvičení E-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}21^2 =$	b) $0{,}37^2 =$	c) $0{,}52^2 =$
d) $0{,}65^2 =$	e) $0{,}69^2 =$	f) $0{,}74^2 =$
g) $0{,}81^2 =$	h) $0{,}93^2 =$	i) $0{,}98^2 =$

Cvičení E-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}012^2 =$	b) $0{,}102^2 =$	c) $0{,}201^2 =$
d) $0{,}045^2 =$	e) $0{,}405^2 =$	f) $0{,}504^2 =$
g) $0{,}327^2 =$	h) $0{,}511^2 =$	i) $0{,}614^2 =$
j) $0{,}741^2 =$	k) $0{,}198^2 =$	l) $0{,}722^2 =$
m) $0{,}464^2 =$	n) $0{,}902^2 =$	o) $0{,}491^2 =$

Cvičení E-7. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}002\,4^2 =$	b) $0{,}005\,2^2 =$	c) $0{,}006\,3^2 =$
d) $0{,}000\,74^2 =$	e) $0{,}000\,51^2 =$	f) $0{,}000\,93^2 =$
g) $0{,}020\,907^2 =$	h) $0{,}409\,021^2 =$	i) $0{,}060\,606^2 =$
j) $2{,}11^2 =$	k) $3{,}54^2 =$	l) $8{,}13^2 =$
m) $76{,}5^2 =$	n) $35{,}4^2 =$	o) $97{,}6^2 =$

Cvičení E-8. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s přesným výsledkem:

a) $0{,}148\,682^2 =$	b) $0{,}478\,902^2 =$
c) $0{,}471\,345^2 =$	d) $0{,}815\,712^2 =$
e) $0{,}972\,559^2 =$	f) $0{,}178\,642^2 =$
g) $1{,}264^{\,2} =$	h) $2{,}075^2 =$
i) $4{,}714\,24^2 =$	j) $8{,}435\,19^2 =$

5.4.10 Odhad výsledku odmocňování

Početní operace odmocňování je opačnou přesněji inverzní operací k operaci umocňování. Proto je vhodné při jejím zavádění vycházet z operace umocňování. Obecně hledáme takové číslo, které po umocnění určitou mocninou dá číslo zadané. Například víme, že $4^3 = 64$, pak pokud zjišťujeme třetí odmocninu z čísla 64, tak zjišťujeme číslo, jehož trojnásobný součin dá výsledek 64, a to je v našem případě právě číslo 4. Požadavek, kterým hledáme toto číslo, zapíšeme takto: $\sqrt[3]{64}$, kde číslo 64 je odmocněnec, znak √ se nazývá odmocnítko a index v jeho přední části určuje, o jakou odmocninu se jedná, v našem případě o třetí odmocninu. Zde je potřeba upozornit, že v případě pokud se jedná o druhou odmocninu, tak se dvojka v podobě indexu u odmocnítka většinou vynechává, například $\sqrt{36}$ je to samé jako $\sqrt[2]{36}$. Uvedené pravidlo platí jen a pouze pro druhou odmocninu. (Binterová, Fuchs, Tlustý, 2009)

Odhad u početní operace odmocňování je důležitý z několika důvodů. Hlavním je asi skutečnost, že výsledek nelze ve většině případů přesně vyčíslit, protože se jedná o iracionální číslo. Z toho důvodu je často zaokrouhlen a je tedy jen přibližný, např. $\sqrt{2} \doteq 1{,}414\ 213\ 562$ (zaokrouhleno na miliardtinu). Dále je zde odhad důležitý také proto, že ne vždy máme po ruce kalkulačku nebo tabulky, které by nám pomohly najít přesnou nebo i jen přibližnou hodnotu.

Na základní škole se žáci zabývají především druhou odmocninou, a proto se jí budeme zabývat podrobněji také my. Při odhadování výsledku této početní operace se využívá opět znalost nazpaměť naučených druhých mocnin čísel od jedné do dvaceti,[22] dále se využívá i znalost různých vzorců pro úpravu mocnin, mezi nimiž je asi nejpodstatnější tento: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, kde a a b jsou nezáporná čísla. Z tohoto vzorce lze pro některé případy odvodit i pravidlo pro odvozování počtu nul na konci celé části dané odmocniny nebo pravidlo pro odvozování počtu desetinných míst v odmocnině.[23] Uvedeme si několik názorných příkladů uplatnění tohoto vzorce. Mějme například $\sqrt{1\ 600}$, kterou můžeme podle uvedeného vzorce upravit na součin dvou odmocnin takto, $\sqrt{16} \cdot \sqrt{100}$, z toho plyne, že výsledek je $4 \cdot 10$ tedy 40. Nebo jiný příklad, pokud

[22] V postupu, který si uvedeme si, vystačíme navíc pouze jen s druhými mocninami čísel od 1 do 10.
[23] V obou případech jde tedy vlastně o pozici desetinné čárky.

máme třeba $\sqrt{0{,}81}$, tak i tu můžeme upravit podle uvedeného vzorce na součin dvou odmocnin takto, $\sqrt{0{,}01} \cdot \sqrt{81} = 0{,}1 \cdot 9 = 0{,}9$.

Nyní se podrobněji zaměříme na počet nul u následujících odmocnin a příslušných odmocněnců, které představují sudé mocniny čísla 10, tedy $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10\,000} = 100$, $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ apod. Jak je vidět v případech, kdy měl odmocněnec sudý počet nul, měla odmocnina poloviční počet nul. „Nepěkně“ vycházející jsou ale odmocniny, kde odmocněnec je lichá mocniny čísla 10, například $\sqrt{1000} \doteq 31{,}623$. Obdobně jako s počtem nul je tomu i s desetinnými místy. Zaměříme se proto nyní i na počet desetinných míst u následujících odmocnin a příslušných odmocněnců, které představují sudé mocniny čísla $0{,}1$, tedy $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, $\sqrt{0{,}000\,1} = 0{,}01$, $\sqrt{0{,}000\,001} = 0{,}001$ apod. V případě, odmocněnců se sudým počtem desetinných míst, měla odmocnina poloviční počet desetinných míst. I zde jsou „nepěkné“ odmocniny, kde odmocněnec je lichá mocniny čísla $0{,}1$, například $\sqrt{0{,}001} \doteq 0{,}031\,623$. Získané informace využijeme při odhadování výsledku početní operace druhá odmocnina.

Odhad výsledku početní operace druhá odmocnina uvádíme jako racionální číslo, většinou v podobě přirozeného nebo desetinného čísla. Postupů, jak ho získat je několik a často se do značné míry prolínají. Navíc většinou platí, že čím přesnější odhad chceme získat, tím složitější postup musíme zvolit.

Postupem, který si uvedeme, jsem se inspiroval na českých stránkách webové encyklopedie Wikipedie, v článku s názvem Druhá odmocnina v kapitole Odhad druhé odmocniny[24], kde jsou odmocněnci, kteří mají smysl, tedy nezáporná čísla, rozděleni do tří skupin. První základní skupinu tvoří odmocněnci větší nebo rovno 1 a menší nebo rovno 100. V takovém případě buď bude druhá odmocnina rovnou rovna některému přirozenému číslu od 1 do 10, jejichž mocniny by žáci měli znát nazpaměť, nebo odhad druhé odmocniny provedeme následovně. Nejprve určíme vzhledem k odmocněnci dvě přirozená čísla taková, aby druhá mocnina prvního z nich byla k němu nejbližší menší mocninou přirozeného čísla a druhá mocnina druhého z nich byla k němu nejbližší větší mocninou přirozeného čísla. Mezi těmito přirozenými čísly se nachází přesná hodnota druhé odmocniny zadaného odmocněnce. Určená přirozená čísla mají navíc tu vlastnost,

[24] Druhá odmocnina. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2008 [cit. 3. 11. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina.

že jsou přímo následující, tedy to druhé je o jedna větší než první. Z toho vyplývá, že u odhadu druhé odmocniny zadaného odmocnitele bude mít jeho celočíselná část velikost prvního z určených přirozených čísel. Pak už jen zbývá určit přibližně velikost desetinné části odhadované odmocniny.

To můžeme provést opět pomocí poměrů, jimiž se snažíme určit pozici odmocniny zadaného čísla mezi dvěma určenými přirozenými čísly. Postupujeme zde analogicky s postupem, který jsme si uvedli pro zpřesnění odhadu druhé mocniny. Nejprve uvedeme do poměru přibližné velikosti absolutních hodnot rozdílů zadaného odmocněnce a druhých mocnin určených přirozených čísel. To můžeme provést za využití číselné osy nebo opět jen zkusmo. Následně využijeme tento poměr již k vytvoření odhadu, protože i zde vycházíme z toho, že pozice zadaného odmocněnce mezi druhými mocninami určených přirozených čísel je přibližně stejná jako pozice odmocniny mezi určenými přirozenými čísly. Stejně jako u mocnin je potřeba i zde upozornit, že takto popsané určení desetinné části odhadovaného čísla je opravdu již jen přibližné, neboť u operace odmocňování se nerovná například odmocnina čísla, které leží uprostřed mezi dvěma čísly, číslu, které se nachází uprostřed mezi odmocninami těchto dvou čísel. Pro vytvoření odhadu, je to však snad i zde postačující. V tomto kontextu je ale potřeba upozornit, že i zde je tím značně znesnadněno oproti odhadům předchozích početních operací určení, zda je odhad nadhodnocený nebo podhodnocený. Uvedeme si názorný příklad popsaného postupu. Mějme odhadnout třeba odmocninu z 55. Číslo 55 není mocninou žádného přirozeného čísla. K němu nejbližší menší a nejbližší větší mocnina přirozeného čísla jsou 49 a 64, Odmocnina z čísla 55 se tedy bude nacházet někde mezi přirozenými čísly 7 a 8. Jelikož je číslo 55 svou velikostí blíže číslu 49, pak by bylo možné provést odhad na takovou hodnotu, která je bližší svou velikostí číslu 7 než číslu 8. Odhad tedy můžeme provést například na hodnotu 7,3. Určení desetinné části odhadu bylo provedeno s vědomím pozice čísla 55 mezi čísly 49 a 64, takže intuitivně za využití popsaného poměru.

Další skupinu odmocněnců tvoří čísla větší než 100. Odmocněnce této skupiny pro odhad nejprve upravíme tak, že u něho od zapsané nebo pomyslné desetinné čárky, tedy od pravého konce celé části čísla, oddělíme v jeho celé části číslice postupně do skupinek po dvou, přičemž poslední skupinka může být neúplná. Počet vzniklých skupinek u takto upraveného odmocněnce určuje počet cifer odhadované druhé odmocniny tohoto odmocněnce. Odhad provedeme tak, že na číslo tvořené poslední skupinkou (první zleva) uplatníme předchozí postup, tedy postup pro odhad druhé odmocniny čísla většího nebo rovno 1 a menšího nebo rovno 100 a takto určené číslo pak vynásobíme číslem 10^x, kde x je počet dalších skupinek vytvořených v odmocněnci, tedy zjednodušeně u určeného čísla posuneme desetinnou čárku o x míst doprava. Tvorbou skupinek zde implicitně využíváme odmocniny ze sudých mocnin čísla 10, tedy $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10\,000} = 100$, $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ apod. Jako příklad mějme určit druhou odmocninu z čísla $654\,971$. Nejprve provedeme popsané oddělení číslic do skupinek po dvou, to zde vyznačíme třeba pomocí apostrofů. U čísla $654\,971$ bude vypadat takto $65'49'71$. Poslední skupinku zleva tvoří dvojčíslí 65. Po aplikaci předchozího postupu na toto dvojčíslí dostáváme číslo třeba $8{,}1$ jako jeho odhadovanou druhou odmocninu. Odhadem druhé odmocniny z čísla $654\,971$ je pak $8{,}1 \cdot 10^2$. Číslo $8{,}1$ násobíme číslem 10^2 právě proto, že zbylé skupinky byly dvě. Odhad $\sqrt[2]{654\,971}$ je tedy v tomto případě číslo 810.[25]

Poslední skupinu odmocněnců tvoří kladná čísla menší než jedna, tedy čísla větší než nula a menší než 1. Zde se postupuje obdobně jako u předchozí skupiny odmocněnců, jen je zapotřebí provést určitou úpravu, aby byl zachován smysl odhadu, tedy snaha o určení co možná nepřesnější velikosti výsledku početní operace. Odmocněnce z této skupiny pro odhad nejprve upravíme tak, že u něho od zapsané desetinné čárky, tedy od pravého konce celé části čísla, která je zde nulová, oddělíme v jeho desetinné části číslice postupně do skupinek po dvou, přičemž poslední skupinka, pokud bude neúplná, je zprava doplněna nulou. Zde je potřeba upozornit, že počet takto vytvořených skupinek v odmocněnci neurčuje vždy počet desetinných cifer odhadované druhé odmocniny tohoto odmocněnce, jak vyplývá z následujícího. Dále postupujeme tak, že od desetinné čárky směrem doprava hledáme takovou první skupinku, která bude mít alespoň jednu cifru nenulovou. Na číslo tvořené touto skupinkou pak aplikujeme opět postup pro odhad druhé odmocniny čísla většího nebo rovno 1 a menšího nebo rovno 100 a takto určené číslo pak vynásobíme číslem $0{,}1^y$, kde y je počet vytvořených skupinek v odmocněnci od desetinné čárky směrem doprava až po hledanou skupinku (včetně ní), která bude mít alespoň jednu cifru nenulovou, tedy zjednodušeně řečeno

[25] Druhá odmocnina. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2008 [cit. 3. 11. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina.

posuneme desetinnou čárku u určeného čísla o y míst doleva a tak získáme požadovaný odhad. Tvorbou skupinek tak implicitně využíváme odmocniny tentokrát ze sudých mocnin čísla $0{,}1$, tedy $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, $\sqrt{0{,}000\,1} = 0{,}01$, $\sqrt{0{,}000\,001} = 0{,}001$ apod. Pro názornou ukázku případu z této skupiny se pokusíme určit odhad druhé odmocniny třeba z čísla $0{,}528\,34$. Nejprve si desetinnou část zadaného odmocněnce rozdělíme do skupinek po dvou podle uvedeného postupu. K vyznačení můžeme opět využít apostrofy, které u čísla $0{,}528\,34$ budou rozmístěny takto: $0{,}52'83'40$. Z toho můžeme vidět, že onou hledanou první skupinkou od desetinné čárky, která bude mít alespoň jednu cifru nenulovou, je hned první skupinka za desetinnou čárkou tvořená dvojčíslím 52. Na číslo 52 proto aplikujeme postup pro první skupinu odmocněnců, tedy postup pro odhad druhé odmocniny z čísla většího nebo rovno 1 a menšího nebo rovno 100. Tak získáváme číslo například $7{,}2$, které je zapotřebí ještě vynásobit číslem $0{,}1^1$, tedy číslem $0{,}1$, abychom získali odhad $\sqrt[2]{0{,}528\,34}$. Číslo $7{,}2$ násobíme první mocninou čísla $0{,}1$, protože číslo 52 leží hned v první skupince vpravo od desetinné čárky. Odhad $\sqrt[2]{0{,}528\,34}$ je v tomto případě určen jako číslo $0{,}72$.[26]

Už jen pro doplnění bych rád upozornil, že některé postupy odhadu druhé odmocniny čísla, které si již uvádět nebudeme, využívají v některých případech kromě jedné „hlavní“ skupinky vytvořené v odmocněnci popsaným způsobem i skupinu následující. Pomocí těchto dvou skupin pak vytvářejí podle určitých pravidel trojčíslí proto, aby mohly být při vytváření odhadu využity druhé mocniny přirozených čísel nejen od 1 do 10 ale i od 11 do 20. Z principu jde ale jen o rozšíření a zpřesnění uvedeného postupu.

[26] Druhá odmocnina. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2008 [cit. 3. 11. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina.

5.4.11 Procvičování F

Cvičení F-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{2} =$	b) $\sqrt[2]{7} =$	c) $\sqrt[2]{11} =$
d) $\sqrt[2]{19} =$	e) $\sqrt[2]{23} =$	f) $\sqrt[2]{35} =$
g) $\sqrt[2]{41} =$	h) $\sqrt[2]{50} =$	i) $\sqrt[2]{62} =$
j) $\sqrt[2]{78} =$	k) $\sqrt[2]{83} =$	l) $\sqrt[2]{95} =$

Cvičení F-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{101} =$	b) $\sqrt[2]{239} =$	c) $\sqrt[2]{299} =$
d) $\sqrt[2]{341} =$	e) $\sqrt[2]{508} =$	f) $\sqrt[2]{782} =$
g) $\sqrt[2]{920} =$	h) $\sqrt[2]{1\,283} =$	i) $\sqrt[2]{1\,918} =$
j) $\sqrt[2]{3\,571} =$	k) $\sqrt[2]{5\,016} =$	l) $\sqrt[2]{8\,933} =$
m) $\sqrt[2]{17\,579} =$	n) $\sqrt[2]{30\,145} =$	o) $\sqrt[2]{79\,415} =$

Cvičení F-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{147\,253} =$	b) $\sqrt[2]{297\,545} =$	c) $\sqrt[2]{421\,652} =$
d) $\sqrt[2]{693\,017} =$	e) $\sqrt[2]{799\,058} =$	f) $\sqrt[2]{854\,738} =$
g) $\sqrt[2]{927\,132} =$	h) $\sqrt[2]{1\,695\,591} =$	i) $\sqrt[2]{3\,232\,594} =$
j) $\sqrt[2]{3\,871\,526} =$	k) $\sqrt[2]{52\,095\,816} =$	l) $\sqrt[2]{98\,913\,730} =$

Cvičení F-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{0{,}2} =$	b) $\sqrt[2]{0{,}7} =$	c) $\sqrt[2]{0{,}9} =$
d) $\sqrt[2]{0{,}22} =$	e) $\sqrt[2]{0{,}37} =$	f) $\sqrt[2]{0{,}42} =$
g) $\sqrt[2]{0{,}48} =$	h) $\sqrt[2]{0{,}56} =$	i) $\sqrt[2]{0{,}72} =$
j) $\sqrt[2]{0{,}81} =$	k) $\sqrt[2]{0{,}84} =$	l) $\sqrt[2]{0{,}91} =$

Cvičení F-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{0,111} =$	b) $\sqrt[2]{0,259} =$	c) $\sqrt[2]{0,301} =$
d) $\sqrt[2]{0,351} =$	e) $\sqrt[2]{0,594} =$	f) $\sqrt[2]{0,682} =$
g) $\sqrt[2]{0,825} =$	h) $\sqrt[2]{0,148\ 1} =$	i) $\sqrt[2]{0,291\ 8} =$
j) $\sqrt[2]{0,395\ 1} =$	k) $\sqrt[2]{0,501\ 6} =$	l) $\sqrt[2]{0,681\ 9} =$
m) $\sqrt[2]{0,775\ 95} =$	n) $\sqrt[2]{0,830\ 52} =$	o) $\sqrt[2]{0,919\ 51} =$

Cvičení F-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem na kalkulačce:

a) $\sqrt[2]{0,147\ 253} =$	b) $\sqrt[2]{0,321\ 045} =$	c) $\sqrt[2]{0,521\ 611} =$
d) $\sqrt[2]{0,602\ 317} =$	e) $\sqrt[2]{0,781\ 409} =$	f) $\sqrt[2]{0,810\ 542} =$
g) $\sqrt[2]{0,951\ 932} =$	h) $\sqrt[2]{0,125\ 893\ 5} =$	i) $\sqrt[2]{0,378\ 594\ \ 9} =$
j) $\sqrt[2]{0,569\ 416\ 1} =$	k) $\sqrt[2]{0,752\ 095\ 06} =$	l) $\sqrt[2]{0,910\ 791\ 87} =$

5.5 Zlomky

Dříve než se přistoupí k početním operacím se zlomky a tedy i k odhadu výsledku těchto početních operací, tak je zapotřebí, aby žáci pochopili, co je zlomek a co vyjadřuje. Zlomky podobně jako desetinná čísla slouží k vyjádření necelých čísel, u zlomků je navíc dobře vidět vztah části a celku. Pro lepší představivost a názornost části celku vyjádřené zlomkem se používají modely, které se využívají i při zavádění některých početních operací. Převažují tři typy modelů nazývané podle nejčastějších příkladů užití: a) koláčový, b) tyčový a c) čokoládový (viz obrázek 4).

Obrázek 4: Modely zlomků: a) koláčový, b) tyčový a c) čokoládový

Pokud se zaměříme na zlomky jako na vyjádření číselného oboru, pak zlomky slouží především k vyjádření racionálních čísel[27]. Obecně však zlomek $\frac{a}{b}$ může vyjadřovat podíl libovolných dvou čísel a a b, přičemž číslo b nesmí být rovno nule.[28] Jak je vidět, zápis zlomku je zpravidla ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde se číslu a, tedy horní části zlomku, říká čitatel a číslu b, tedy spodní části zlomku, se říká jmenovatel.

I zde pro zjednodušení zaváděných postupů odhadovaní výsledku a do určité míry i pro jejich univerzálnost budeme za prvky daných početních operací uvažovat pouze nezáporné zlomky takové, aby i výsledkem bylo vždy nezáporné číslo stejně tak, jako bylo uvažováno i u odhadu výsledku početních operací u přirozených a desetinných čísel. Navíc se ještě omezíme jen na zlomky, které budou mít čitatele i jmenovatele přirozená čísla.

U zlomků, jak už bylo zmíněno, si uvedeme postup jen pro odhad výsledku početních operací sčítání a odčítání. Domnívám se totiž, že u ostatních početních operací se zlomky lze pro odhad výsledku s určitou obezřetností využít postupy, které jsme si uvedli pro přirozená a desetinná čísla. Nejprve je však nutné provést úpravy stanovené pro dané početní operace se zlomky. Například pokud počítáme součin dvou zlomků, tak víme, že výsledkem bude zlomek[29], který má v čitateli součin čitatelů zlomků, které násobíme a ve jmenovateli součin jmenovatelů zlomků, které násobíme. Pro odhad výsledku součinu daných dvou zlomků nám proto stačí, když provedeme odhad výsledku součinu čitatelů a odhad výsledku součinu jmenovatelů. Získáme tak čitatele a jmenovatele zlomku, který je požadovaným odhadem. Obdobně lze postupovat i u početních operací dělení, umocňování a odmocňování vždy však při dodržení stanovených úprav pro danou početní operaci se zlomky. Tyto postupy odhadování vycházejí do určité míry i z toho, že na zlomek můžeme pohlížet jako na zápis podílu dvou čísel (čitatele a jmenovatele). Početní operace se zlomky je pak tedy možné chápat jako příklad s více početními operacemi. U takto popsaných postupů odhadování výsledku je však potřeba, abychom byli obezřetní při zaokrouhlování, protože při automatickém uplatňování postupů řešíme zvlášť čitatele a zvlášť

---

[27] *„Racionální číslo je každé reálné číslo, které lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo.“* (Polák, 1995: s. 55)

[28] Zlomek můžeme považovat i jako naznačené dělení, a proto v podílu nemůže být dělitel roven nule.

[29] V nezkrácené podobě.

jmenovatele a tak se může stát, že se odhadovaný výsledek v podobě zlomku může značně lišit svojí velikostí od přesného výsledku. K pochopení této problematiky nám opět pomůže, pokud budeme pohlížet na zlomek jako na naznačené dělení, jehož odhad s sebou opět nese určitá pravidla, která mohla být při odhadování velikosti zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele vlivem průběžného zaokrouhlování porušena. Možností, jak se této problematice z velké části vyhnout je, že hned na začátku odhadování výsledku převedeme zadané zlomky alespoň přibližně na desetinné číslo tak, že vydělíme čitatele jmenovatelem.[30] To však může být hodně pracné a odhad tak často ztrácí svůj význam.

Odhadování výsledku početních operací se zlomky je v mnoha směrech komplikované. Ještě komplikovanější pak bývá určení, zda je vytvořený odhad nadhodnocený nebo podhodnocený. Na druhou stranu nás může částečně uklidnit, že se takovéto odhady v matematice na základní škole ani v běžném životě zase až tolik nevyskytují, respektive nejsou vyžadovány.

5.5.1 Odhad výsledku sčítání a odčítání

V předchozí podkapitole zaměřené na zlomky bylo uvedeno, že při odhadování výsledků většiny početních operací se nejprve provedou úpravy stanovené pro dané početní operace se zlomky a až pak se postupuje dál ve vytváření odhadu výsledku. Při sčítání popřípadě odčítání zlomků jsou ony úpravy stanoveny takto: Zlomky s různými jmenovateli sečteme popřípadě odečteme tak, že je nejprve převedeme na společného jmenovatele. (Půlpán a kol. 2008). Tato úprava bývá sama o sobě náročná, protože nejprve vyžaduje nalezení společného jmenovatele a pak tomu odpovídající úpravu čitatelů, což může být pracné. Pokud toho dosáhneme, tak k získání přesného výsledku v podobě zlomku zbývá už jen provést součet popřípadě rozdíl čitatelů takto upravených zlomků a společného jmenovatele opsat. Dosažení přesného výsledku už je tedy vzhledem k předchozím krokům relativně jednoduché a odhad tak pozbývá smysl.

[30] Po takovémto dělení vycházejí čísla buď ve tvaru konečného desetinného rozvoje, nebo ve tvaru nekonečného periodického desetinného rozvoje (Polák, 1995). Z toho důvodu je vhodné je přiměřeně zaokrouhlit a tím získat přibližné hodnoty.

Z tohoto důvodu si uvedeme postup odhadování výsledku početních operací sčítání a odčítání zlomků, který je na této úpravě nezávislý. Tento postup jsem převzal z příruček pro učitele k sadě učebnic *Houghton Mifflin math central* autora L. Boswella a kol. (1999h Level 4. Volume 2., 1999j Level 5. Volume 2., 1999k Level 6. Volume 1., 1999l Level 6 Volume 2). Jeho výstupem je většinou poměrně hrubý odhad. I přesto nám však poskytuje alespoň přibližnou představu o velikosti výsledku a může tak sloužit jako určitý způsob kontroly.

Tento postup odhadování výsledku, jak si ukážeme, je založen na zaokrouhlování kladných zlomků menších než jedna. Z toho důvodu potřebujeme, aby prvky početních operací sčítání a odčítání byly zlomky právě této velikosti. V principu mohou nastat dvě možnosti. Buď je tato podmínka splněna, což poznáme na daném zlomku tak, že v čitateli bude menší číslo než ve jmenovateli, nebo daná podmínka splněna nebude. V takovém případě převedeme onen zlomek na smíšené číslo, u kterého už bude jeho zlomková část této podmínce vyhovovat. Například zlomek $\frac{17}{6}$ převedeme na smíšené číslo $2\frac{5}{6}$. Následně pak pokračujeme zaokrouhlováním zlomků popřípadě zlomkových částí u smíšených čísel (dále jen patřičný zlomek). I v tomto postupu se využívá oproti klasickému zaokrouhlování opět jeho upravená podoba, protože patřičný zlomek zaokrouhlíme na jednu ze tří hodnot, kterými jsou 0, $\frac{1}{2}$, nebo 1 podle toho, ke které hodnotě je svojí velikostí nejblíže. K tomuto určení můžeme opět využít číselnou osu, kde vyznačíme obraz patřičného zlomku v rozmezí hodnot od 0 do 1. Mnohdy je však dostačující, když porovnáme velikost čitatele a jmenovatele jen takto (L. Boswella a kol., 1999l, Level 6. Volume 2: s. 334-335)[31]:

- „*Čitatel je o moc menší než jmenovatel* $\rightarrow 0$“
- „*Jmenovatel je přibližně dvojnásobek čitatele* $\rightarrow \frac{1}{2}$“
- „*Čitatel je blízký jmenovateli* $\rightarrow 1$“

Možná lépe pochopitelná budou tato tvrzení, když je naformulujeme takto:

- Jestliže je čitatel oproti jmenovateli malé číslo, pak takový zlomek zaokrouhlíme na hodnotu 0.

[31] Volně přeloženo.

- Jestliže je čitatel přibližně velký jako polovina jmenovatele, pak takový zlomek zaokrouhlíme na hodnotu $\frac{1}{2}$.
- Jestliže je čitatel přibližně stejně velký jako jmenovatel, pak takový zlomek zaokrouhlíme na hodnotu 1.

U druhého tvrzení je prakticky jedno, zda se bude porovnávat dvojnásobek čitatele se jmenovatelem nebo polovina jmenovatele s čitatelem. Volba je ponechána již na osobě, která bude odhadovat.

Ještě je potřeba upozornit na případy, u kterých je nejednoznačné, ke které hodnotě (0, $\frac{1}{2}$, 1) patřičný zlomek zaokrouhlit, protože ten je svou velikostí přesně uprostřed mezi zadanými hodnotami. Jedná se o zlomky $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ a zlomky, které mají stejnou hodnotu. Zde se proto domluvíme, že takové zlomky budeme zaokrouhlovat směrem nahoru, tedy $\frac{1}{4} \doteq \frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4} \doteq 1$.

Nyní si uvedeme opět několik názorných příkladů. Nejprve třeba zaměřené na početní operaci sčítání. Pro odhad výsledku příkladu $\frac{12}{19} + \frac{2}{27}$ zaokrouhlíme popsaným způsobem takto, $\frac{12}{19} \doteq \frac{1}{2}$ a $\frac{2}{27} \doteq 0$. Odhad výsledku je potom $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$. Další příklad si zadáme s čísly, která musíme převést na čísla smíšená, $\frac{38}{11} + \frac{20}{7}$. Nejprve si převedeme sčítance na čísla smíšená, $3\frac{5}{11} + 2\frac{6}{7}$. Nyní ponecháme celé části a zlomkové zaokrouhlíme, $\frac{5}{11} \doteq \frac{1}{2}$ a $\frac{6}{7} \doteq 1$. Odhad výsledku je potom $3\frac{1}{2} + 3 = 6\frac{1}{2}$. U odhadování výsledku početní operace odčítání využíváme stejný postup. Například výsledek příkladu $\frac{64}{70} - \frac{11}{27}$ odhadneme jako $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ještě si uvedeme příklad na odčítání se zlomky, které je potřeba převést na smíšená čísla, $\frac{17}{3} - \frac{28}{9} = 5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{9}$. Odhad výsledku je potom $5\frac{1}{2} - 3 = 2\frac{1}{2}$.

Pokud by bylo potřeba dosahovat větší přesnosti je možné „zjemnit“ zaokrouhlování i na hodnoty $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$. Patřičný zlomek by pak byl zaokrouhlen na některou z hodnot: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ nebo 1 takovou, ke které by byl svojí velikostí nejblíže. Takové rozšíření hodnot, ke kterým je možné zaokrouhlit, podle mého názoru činí odhad komplikovanější. Na druhou stranu, jak už bylo řečeno, je možné tak dosáhnout přesnější hodnoty. Pro názornost si opět uvedeme ukázkový příklad. Mějme odhadnout výsledek příkladu $\frac{12}{19} + \frac{2}{27}$, který jsme už odhadovali. Nyní ale využijeme „zjemněné“ zaokrouhlování. Odhad tak bude proveden jako součet $\frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$. Pokud si dáme tu práci a vypočítáme přesnou hodnotu součtu $\frac{12}{19} + \frac{2}{27} = \frac{362}{513}$, tak zjistíme, že se nám opravdu podařilo získat odhad přesnější. Obtížnější však bylo určit, ke kterým hodnotám zadané sčítance zaokrouhlit.

Při hledání odpovědi na otázku, zda je vytvořený odhad nadhodnocený nebo podhodnocený si zde můžeme vypomoci závěry, ke kterým jsme došli při řešení stejného problému u operace sčítání a odčítání přirozených a desetinných čísel. Tedy, že o nadhodnocení nebo podhodnocení odhadu součtu nebo rozdílu můžeme rovnou rozhodnout podle směru zaokrouhlení u jednotlivých prvků těchto dvou operací jen v některých případech. U součtu v případě, jsou-li zaokrouhlované sčítance zaokrouhleny stejným směrem a u rozdílu v případě jsou-li menšenec a menšitel zaokrouhleny opačným směrem nebo je zaokrouhlen pouze jeden z nich. Odhad součtu je pak nadhodnocený, jsou-li zaokrouhlované zlomky zaokrouhleny směrem nahoru a podhodnocený, jsou-li zaokrouhlované zlomky zaokrouhleny směrem dolů. U rozdílu pak rozhodujeme o nadhodnoceném a podhodnoceném odhadu opět tak, jak znázorňovala tabulka 1. Celé rozhodování je zde ale zkomplikováno tím, že podle uvedeného postupu zaokrouhlujeme ke třem (popř. více) různým hodnotám, na což nejsou žáci běžně zvyklí, a proto jim může dělat obtíže určit, jakým směrem bylo zaokrouhleno. Z toho důvodu je potřeba zvážit, zda je vhodné vyžadovat informaci o nadhodnocení nebo podhodnocení při odhadování.

5.5.2 Procvičování G

Cvičení G-1. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{3}{5} + \frac{7}{8} =$	b) $\frac{6}{10} + \frac{2}{13} =$	c) $\frac{5}{7} + \frac{4}{5} =$
d) $\frac{3}{12} + \frac{9}{17} =$	e) $\frac{11}{28} + \frac{30}{35} =$	f) $\frac{22}{27} + \frac{3}{19} =$
g) $\frac{6}{40} + \frac{37}{41} =$	h) $\frac{78}{89} + \frac{43}{91} =$	i) $\frac{33}{55} + \frac{13}{96} =$

Cvičení G-2. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{3}{9}+\frac{5}{6}+\frac{4}{5}=$	b) $\frac{7}{15}+\frac{9}{10}+\frac{1}{8}=$	c) $\frac{2}{5}+\frac{12}{13}+\frac{6}{11}=$
d) $\frac{9}{15}+\frac{17}{34}+\frac{18}{19}=$	e) $\frac{11}{15}+\frac{3}{17}+\frac{23}{26}=$	f) $\frac{2}{30}+\frac{27}{61}+\frac{36}{77}=$

Cvičení G-3. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{7}{5}+\frac{19}{8}=$	b) $\frac{24}{10}+\frac{15}{13}=$	c) $\frac{32}{7}+\frac{18}{5}=$
d) $\frac{43}{12}+\frac{49}{17}=$	e) $\frac{81}{28}+\frac{54}{35}=$	f) $\frac{29}{27}+\frac{81}{19}=$
g) $\frac{52}{40}+\frac{87}{41}=$	h) $\frac{98}{89}+\frac{23}{91}=$	i) $\frac{34}{55}+\frac{101}{96}=$

Cvičení G-4. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{12}{9}+\frac{25}{6}+\frac{32}{5}=$	b) $\frac{22}{15}+\frac{44}{10}+\frac{10}{8}=$	c) $\frac{12}{5}+\frac{12}{13}+\frac{36}{11}=$
d) $\frac{23}{15}+\frac{5}{34}+\frac{38}{19}=$	e) $\frac{11}{15}+\frac{30}{17}+\frac{73}{26}=$	f) $\frac{2}{30}+\frac{97}{61}+\frac{86}{77}=$

Cvičení G-5. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{9}{10}-\frac{3}{8}=$	b) $\frac{6}{10}-\frac{3}{11}=$	c) $\frac{9}{10}-\frac{1}{5}=$
d) $\frac{2}{12}-\frac{1}{17}=$	e) $\frac{20}{28}-\frac{24}{35}=$	f) $\frac{22}{27}-\frac{3}{19}=$
g) $\frac{36}{40}-\frac{27}{41}=$	h) $\frac{78}{89}-\frac{3}{71}=$	i) $\frac{33}{55}-\frac{44}{96}=$

Cvičení G-6. Výsledek nejprve odhadněte a pak odhad porovnejte s výsledkem přesně vypočítaným nebo určeným pomocí kalkulačky:

a) $\frac{19}{5}-\frac{17}{8}=$	b) $\frac{85}{10}-\frac{32}{13}=$	c) $\frac{17}{7}-\frac{11}{5}=$
d) $\frac{43}{12}-\frac{39}{17}=$	e) $\frac{36}{28}-\frac{30}{35}=$	f) $\frac{52}{27}-\frac{1}{19}=$
g) $\frac{96}{40}-\frac{37}{41}=$	h) $\frac{99}{89}-\frac{93}{91}=$	i) $\frac{133}{35}-\frac{33}{13}=$

6 Odhad metrických vlastností geometrických útvarů

Metrické vlastnosti geometrických útvarů, a tedy i k nim příslušné odhady, lze až na specifické výjimky rozdělit do tří skupin podle příslušné dimenze.[32] Jedná se o 1-dimenzionální odhad, kam patří např. odhad vzdálenosti, délky, obvodu, dále 2-dimenzionální odhad, např. odhad obsahu, povrchu, velikosti úhlů a nakonec 3-dimenzionální odhad, kam patří odhad objemu. Odhady metrických vlastností geometrických útvarů spadají především do oblasti geometrie a do témat s ní souvisejících. (Samková, 2013)

Jak už bylo řečeno v kapitole *Základní dělení matematických odhadů*, u odhadu metrických vlastností geometrických útvarů se setkáváme s dvěma obrácenými požadavky na vytvoření odhadu. Buď se vyžaduje odhad velikosti metrické vlastnosti geometrického útvaru, ten bývá častější, nebo se vyžaduje na základě znalosti velikosti metrické vlastnosti tento geometrický útvar odhadem vytvořit.

I zde platí, že v případě, kdy je to možné a vhodné by měla být provedena kontrola přesnosti odhadu, viz kapitola *Přesnost odhadu a jeho kontrola*, nebo alespoň určité porovnání, aby byla zajištěna zpětná vazba odhadující osobě.

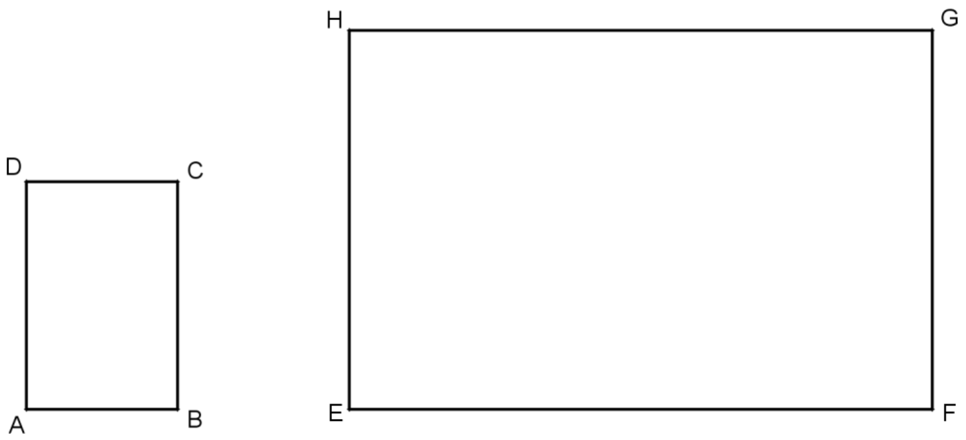
Při odhadování metrické vlastnosti geometrického útvaru, nehledě na její dimenzi, je nutné, aby žáci znali její jednotky. Žáci by rovněž měli mít s danými jednotkami metrické vlastnosti i vlastní zkušenost, například využívají je při měření, převádí je apod. Jde o to, aby měli vytvořenou představu o velikosti dané jednotky a tuto představu následně využívali při odhadu.

Přesnost odhadu metrické vlastnosti závisí mimo jiné i na vhodně zvolené jednotce, ve které odhadujeme, tedy přesněji na její velikosti. Předpokládejme, že existuje nějaká vhodná jednotka pro konkrétní případ odhadu. Pak zpravidla čím větší použijeme jednotku vzhledem k oné vhodné jednotce, k tím větší nepřesnosti se odsuzujeme, protože většinou odhadujeme na celé části jednotek, ale málokdy je ona metrická vlastnost skutečně celočíselným násobkem dané jednotky. Naopak pokud použijeme jednotku menší vzhledem k vhodné jednotce, tak se tomuto problému sice vyhneme, ale nemáme zaručeno, že náš odhad bude přesnější, navíc zde vzniká problém

[32] V matematice na základní škole se můžeme setkat i s dalšími metrickými vlastnostmi (fyzikálními veličinami), které je možné odhadovat jako například hmotnost, čas, rychlost, apod. V této práci se s jimi ale zabývat nebudeme.

jiný a to, že při užití menší jednotky bude číselný údaj zbytečně velké číslo a tedy i vytvoření odhadu v této jednotce bude značně náročné. Pro představu, pokud bude vyobrazen obdélník, jehož rozměry budou 2 dm a 3 dm, tedy s obsahem 6 dm^2, bude jistě náročné pokoušet se hned o odhad jeho obsahu v jednotce mm^2, protože z obráceného pohledu si asi jen málokdo dokáže představit plochu o velkosti 60 000 mm^2 bez převodu na jinou jednotku, oproti tomu je plocha o velikosti 6 dm^2 spíše představitelná, i když se v obou případech jedná o stejně velké plochy. O problematice představitelnosti velikostí různých jednotek se budeme zabývat u jednotlivých druhů odhadů. Zde je podstatné si uvědomit tu skutečnost, že volba velikosti jednotky při vytváření odhadu metrické vlastnosti geometrického útvaru by měla být přiměřená především velikosti geometrického útvaru. Tu sice většinou neznáme v číselné podobě, ale vnímáme ji vizuálně. Dále je pak vhodné výběr jednotky přizpůsobit i samotnému postupu vytváření odhadu, jehož volba je zásadně ovlivněna tvarem daného geometrického útvaru a dalšími informacemi o něm. Obecně bych doporučil volbu takové jednotky, aby odhadovaná velikost byla maximálně dvojciferné celé číslo. Takovou jednotku bych považoval za vhodnou. Jak ale již bylo uvedeno, vždy záleží na různých podmínkách, které je potřeba při výběru vhodné jednotky odhadu zvážit.

Postupy vytváření odhadu metrické vlastnosti geometrického útvaru mohou být různé, závisí vždy na dimenzi metrické vlastnosti, na množství informací, které máme k dispozici a v neposlední řadě i na samotné osobě, která odhad vytváří. Mezi směrodatné informace patří především zadané rozměry a jejich počet, zadané obrázky, modely a podobně. U tělesa je například podstatné, zda je k dispozici ono samotné, jeho model, zda je vyobrazeno na obrázku, nebo pouze popsáno. Existuje velké množství postupů vytváření odhadů, a proto si uvedeme jen ty, které považuji za nejběžnější, a to vždy u odhadů metrické vlastnosti konkrétní dimenze. Hned zde bych však chtěl upozornit na dva obecné postupy, které je možné za určitých podmínek uplatnit u odhadů metrických vlastností geometrických útvarů všech tří dimenzí. První je specifický, protože se v principu jedná o odhad výsledku početní operace, kde výsledkem je číselná hodnota požadované metrické vlastnosti. Jde o to, že odhadujeme metrickou vlastnost geometrického útvaru, u kterého známe vzoreček pro její přesný výpočet a údaje potřebné do vzorečku. Ty ale mohou být v „nepěkných“ číslech buď přímo zadány, nebo určeny například měřením. Následně postupujeme tak, že do vzorečku pro přesný výpočet dosadíme hodnoty vhodně zaokrouhlené, aby bylo možné určit výpočet ideálně z paměti. Tak získáme odhad metrické vlastnosti daného geometrického útvaru. Jako příklad si uvedeme určení obsahu obdélníku, který má rozměry 7,3 cm a 12,8 cm. Do vzorečku pro výpočet obsahu obdélníku dosadíme zaokrouhlené hodnoty, 7 cm a 13 cm a získáme tak odhad jeho obsahu, 91 cm^2. Tento postup je možné využít i v případech, kdy hodnoty dosazované do vzorečku pouze odhadneme. Tedy například, pokud by byl daný obdélník vyobrazen, mohli bychom jeho rozměry odhadnout a dosadit do patřičného vzorečku. Druhý obecný postup je založen na porovnání dvou geometrických útvarů stejné dimenze, konkrétně na porovnání jejich metrické vlastnosti. Tu u jednoho známe a u druhého odhadujeme. V principu zde pomocí představivosti odhadujeme, kolikrát nebo o kolik je požadovaná metrická vlastnost u jednoho geometrického útvaru větší nebo menší než u druhého. Tento údaj pak využijeme k dopočítání odhadované metrické vlastnosti u druhého geometrického útvaru. Tento postup je možné využít například v případě, kdy máme dva obdélníky jako na obrázku 5. O obdélníku *ABCD* víme, že má obsah 6 cm^2 a máme odhadnout obsah obdélníku *EFGH*. Můžeme odhadnout, že jeho obsah je šestkrát větší než obsah obdélníku *ABCD*. Odhad obsahu obdélníku *EFGH* je tedy $6 \cdot 6$ cm^2 tedy 36 cm^2.



Obrázek 5: Porovnání obsahů

U „obrácených“ odhadů, tedy u takových, kde se vyžaduje na základě znalosti velikosti metrické vlastnosti tento geometrický útvar odhadem vytvořit, nepovažuji za vhodné zavádět konkrétní postupy. Domnívám se, že v těchto případech se vychází především z již získané zkušenosti s metrickými vlastnostmi u různých geometrických útvarů. Obecně je však potřeba stanovit alespoň rámcově nějaká pravidla postupu. I přesto, že se jedná „jen“ o odhad, by tu měla být snaha dosáhnout ideálu, tedy vytvoření přesného geometrického útvaru požadovaných vlastností při zachování principů odhadování. Tuto myšlenku si vysvětlíme opět názorně. Pokud bude například zadáno: „Načrtněte odhadem úsečku délky 7 cm.“, tak se nám nabízejí dvě hlavní možnosti, jak postupovat. Buď můžeme danou úsečku načrtnout zcela od ruky, tedy pouze za použití tužky nebo jiné psací potřeby, ale s tím rizikem, že nevytvoříme přímou čáru, tedy že se budeme snažit při črtání o odhad požadované délky, ale i o vytvoření přímého směru čáry. Druhá možnost je, že můžeme využít nějaký předmět s přímou hranou bez vyznačené stupnice délky a podle ní vytvořit přímou čáru odhadem dané délky. V tomto případě zachováme jednu z vlastností úsečky a tou je její přímý tvar. Tyto dvě možnosti postupů, respektive jejich myšlenky, se dají zobecnit na tvorbu odhadů geometrických útvarů různých dimenzí při zadání konkrétních metrických vlastností. Osobně bych při tvorbě odhadu upřednostňoval druhou možnost, ale uvědomuji si, že se někdy může příčit principům odhadování, protože snaha o zachování nejrůznějších (dalších) vlastností geometrického útvaru, jako zde byl například přímý směr nebo jinde třeba i rovnoběžnost, velikost úhlů apod., může tvorbu odhadu značně zkomplikovat, ve smyslu technické i časové náročnosti. Na druhou stranu, čím více vlastností daného geometrického útvaru bude zachováno, tím spíše bude snadnější provést alespoň přibližnou kontrolu.

Na základě vlastní zkušenosti s vytvářením odhadů metrických vlastností geometrických útvarů i z pozorování žáků při jejich tvorbě během výuky, je množné formulovat pro tyto tři skupiny odhadů tato tvrzení. Tvorba odhadu je tím obtížnější:

- čím více dimenzionální metrickou vlastnost odhadujeme;
- čím více dimenzionální geometrický útvar odhadem vytváříme;
- čím je členitější, nepravidelnější nebo jinak složitější daný geometrický útvar.

U jednotlivých cvičení v následujících podkapitolách doporučuji, pokud je to možné, užít několik různých postupů odhadů a následně porovnat jejich efektivnost[33] v konkrétních případech. Dále je potřeba upozornit na to, že v jednotlivých cvičení jsou rozměry geometrických obrazců záměrně zadány tak, aby naměřené délky při užití

[33] obtížnost, rychlost, přesnost apod.

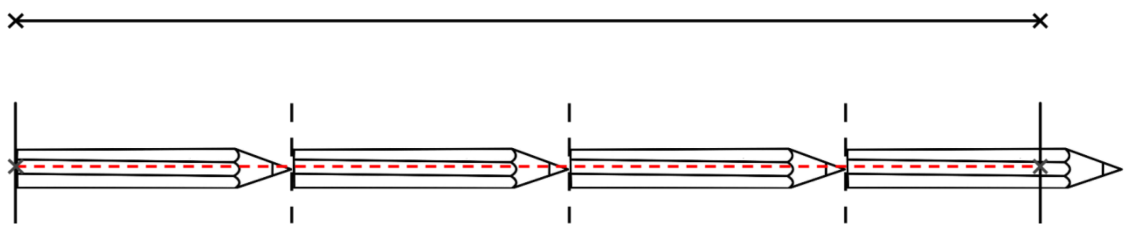
jednotky milimetr nebyly vždy celočíselné a bylo potřeba je zaokrouhlit k nejbližší celé hodnotě.

6.1 1-dimenzionální odhad

V této skupině odhadů se de facto odhaduje délka ohraničené křivky (její části) nebo uzavřené křivky, a to v nejrůznějších variantách, tedy viditelné např. úsečka, ne přímo viditelné např. vzdálenost dvou bodů, přímé např. úsečka a lomené nebo zakřivené např. lomená čára, kružnice.

Patrně nejrychlejší postup při odhadování délky popsaných případů křivek je ten, kdy na základě vizuálního vnímání odhadujeme kolikanásobkem zvolené jednotky je délka dané křivky, tedy z kolika jednonásobků zvolené jednotky je délka dané křivky vytvořena. Laicky řečeno kolikrát se do délky dané křivky vejde jednonásobek zvolené jednotky. Využívá se při tom právě představa velikosti vybrané jednotky délky. Jednotky délky si představujeme tak, jak jsou ve výuce, ale i v běžném životě zaváděny a znázorňovány, tedy jako příslušné délky úseček, jako vzdálenosti dvou bodů nebo jako vzdálenosti dvou čar, částí rovnoběžek, které představují velikost dané jednotky na měřidle délky. Z toho vyplývá, že danou jednotku délky a v závislosti na ní i její několikanásobek si představujeme jako nějakou přímou vzdálenost. Proto při odhadování délek lomených nebo zakřivených křivek je vhodné v závislosti na konkrétním případě volit takový postup, kde si délku těchto křivek nejprve převedeme na přímou křivku tedy úsečku a teprve až poté odhadujeme její délku. U lomené čáry toho docílíme například složením (grafickým součtem) délek všech úseček, z kterých se lomená čára skládá, na polopřímku. V tomto případě je zapotřebí být vybaven kružítkem nebo jiným vhodným předmětem na přenášení délky. U zakřivených křivek využijeme pomůcku jinou, a to tenký nepružný provázek, který co možná nejpřesněji přiložíme na zakřivenou křivku a označíme na něm počáteční a koncový bod dané křivky. Následně provázek napneme (napřímíme) a odhadneme délku na něm vyznačenou. Postup je náročnější na manuální zručnost odhadovatele. Oba „napřimovací“ postupy při vytváření odhadu nepřímých křivek budou sice náročnější nebo minimálně zdlouhavější než úplně první popsaný postup, ale přínosem by měl být přesnější odhad, protože na přímé, narovnané křivce si lépe představíme právě několikanásobek dané jednotky délky.

Další možností, jak v některých případech postupovat, jsem se inspiroval v příručkách pro učitele k sadě učebnic *Houghton Mifflin math central* autora L. Boswella a kol. (1999b Level 1. Volume 2., 1999f Level 3. Volume 2., 1999h Level 4. Volume 2.). Využívá se zde předmět, u kterého můžeme přibližně změřit nebo i jen odhadnout některý jeho rozměr. Tímto rozměrem pak předmět pokládáme postupně podél odhadované délky patřičné křivky od jednoho jejího konce k druhému tak, aby jednotlivá položení předmětu na sebe navazovala a nepřekrývala se. Takto postupujeme do té doby, než druhý konec křivky dosáhneme nebo překročíme. Následně určíme počet položení předmětu, kterými ještě nedošlo k překročení a přičteme k němu odhad části rozměru předmětu při překračujícím položení, která je ještě zapotřebí k dosažení druhého konce křivky. Nakonec toto číslo vynásobíme zvoleným přibližným rozměrem předmětu a dosáhneme tak požadovaného odhadu. Celý postup je ukázán na následujícím obrázku 6, kde je zobrazena úsečka červenou čárkovanou čarou, jejíž délku máme odhadnout. Stejně dlouhá i stejně orientovaná úsečka je pro porovnání zobrazena v horní části obrázku. Jak je vidět zvoleným předmětem k odhadování byla tužka a využita byla její délka. Tužka byla položena celkem čtyřikrát, přičemž při posledním položení bylo zapotřebí k dosažení druhého konce úsečky odhadem jen $\frac{3}{4}$ její délky. Délka tužky je přibližně 4 cm. Z uvedeného vyplývá, že odhad délky úsečky by mohl být $4 \cdot 3\frac{3}{4} = 15$ cm. Pro přehled i přesnost je vhodné jednotlivá položení oddělovat čárkou, stejně jako je vyznačeno v obrázku. Dále je také vhodné volit předměty jednoduchého tvaru, u kterých je poměrně snadné přibližně určit žádoucí rozměr a které lze snadno tímto rozměrem umísťovat podél odhadované délky. Volba předmětu závisí vždy i na velikosti odhadované délky.



Obrázek 6: Použití tužky

6.1.1 Procvičování H

Cvičení H-1. Mezi bříšky prstů ukazováčku a palce pravé ruky vytvořte odhadem mezeru požadované délky. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte přiložením k vhodnému měřidlu délky.

a) 1 mm	b) 4 mm	c) 7 mm	d) 15 mm	e) 28 mm
f) 1 cm	g) 3 cm	h) 5 cm	i) 8 cm	j) 1 dm

Cvičení H-2. Mezi bříšky prstů ukazováčku pravé ruky a ukazováčku levé ruky vytvořte odhadem mezeru požadované délky. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte přiložením k vhodnému měřidlu délky.

a) 15 cm	b) 18 cm	c) 23 cm	d) 35 cm	e) 72 cm
f) 2 dm	g) 4 dm	h) 9 dm	i) 14 dm	j) 1 m

Cvičení H-3. Načrtněte do sešitu odhadem úsečku požadované délky. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.

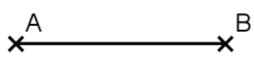
a) 7 mm	b) 4 cm	c) 18 mm	d) 14 cm	e) 3 dm

Cvičení H-4. Načrtněte do sešitu odhadem dva body, které budou mít od sebe požadovanou vzdálenost. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.

a) 5 mm	b) 7 cm	c) 22 mm	d) 12 cm	e) 2 dm

Cvičení H-5. Na obrázku 7 je vyobrazena úsečka *AB*, bez měření její délky načrtněte do sešitu odhadem úsečku, která bude mít požadovaný násobek její délky. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte tak, že nejprve sestrojíte požadovaný násobek délky dané úsečky a pak vše přeměříte pomocí vhodného měřidla délky.

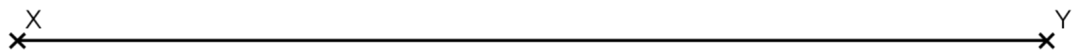
$\|CD\| = 2 \cdot \|AB\|$	$\|EF\| = 3 \cdot \|AB\|$	$\|GH\| = 5 \cdot \|AB\|$	$\|KL\| = 8 \cdot \|AB\|$



Obrázek 7: Úsečka *AB*

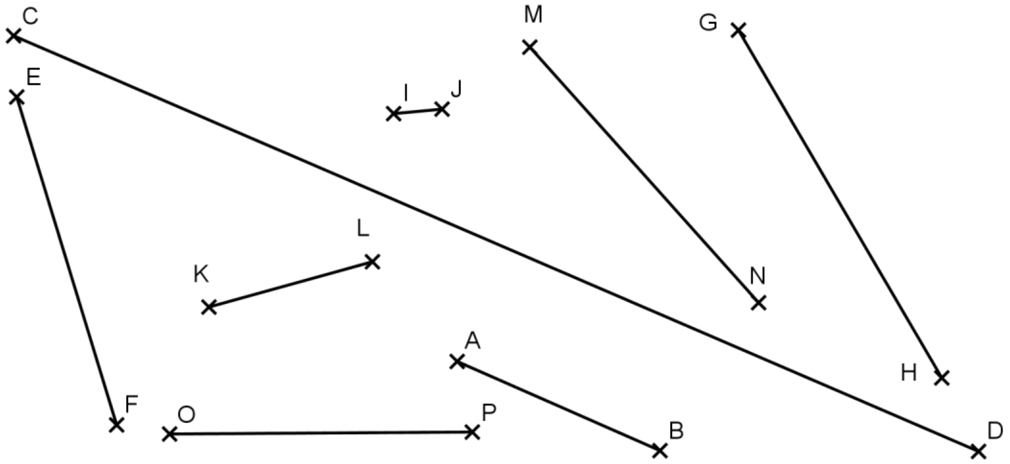
Cvičení H-6. Na obrázku 8 je vyobrazena úsečka XY, bez měření její délky načrtněte do sešitu odhadem úsečku, která bude mít požadovaný násobek její délky. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte tak, že nejprve sestrojíte požadovaný násobek délky dané úsečky a pak vše přeměříte pomocí vhodného měřidla délky.

$\lvert OP\rvert = \frac{1}{2} \cdot \lvert XY\rvert$	$\lvert QR\rvert = \frac{1}{3} \cdot \lvert XY\rvert$	$\lvert ST\rvert = \frac{1}{4} \cdot \lvert XY\rvert$	$\lvert UV\rvert = \frac{1}{5} \cdot \lvert XY\rvert$



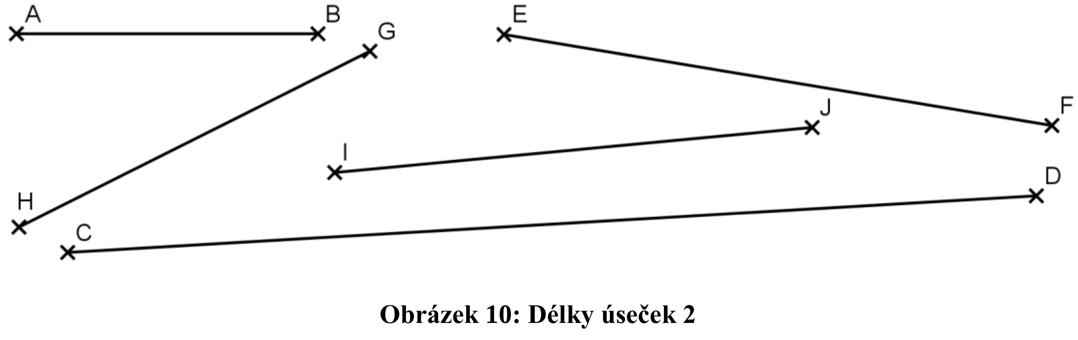
Obrázek 8: Úsečka XY

Cvičení H-7. Odhadněte, jakou délku mají úsečky na obrázku 9. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



Obrázek 9: Délky úseček

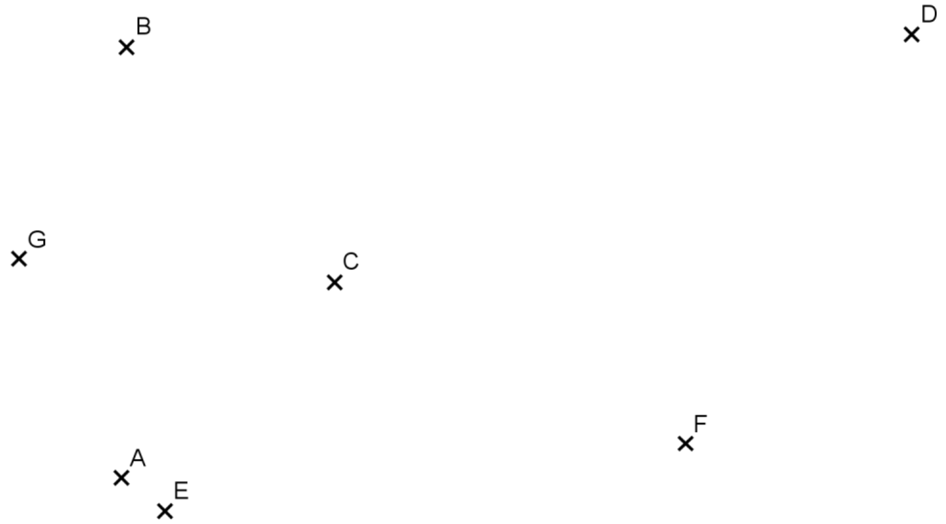
Cvičení A-8. Odhadněte, o kolik jsou delší úsečky na obrázku 10 než úsečka *AB*. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



Obrázek 10: Délky úseček 2

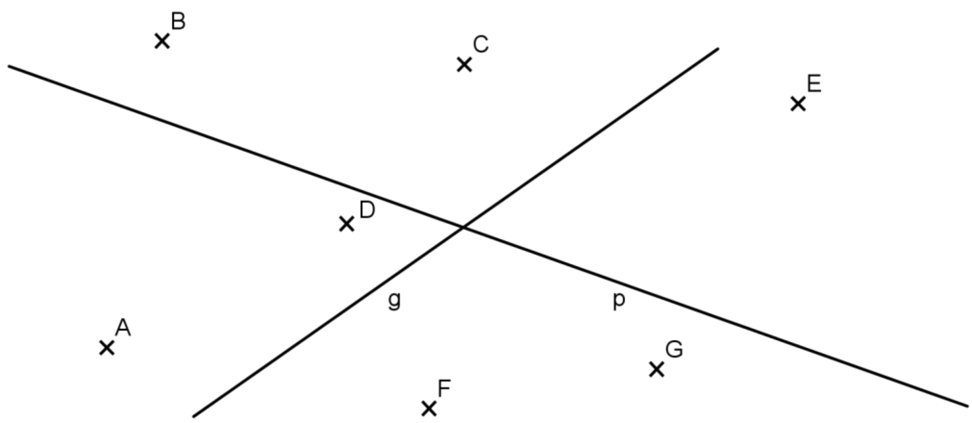
Cvičení H-9. Odhadněte vzdálenost zadaných dvojic bodů na obrázku 11. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.

a) A, B	b) C, D	c) E, F	d) G, B	e) F, D
f) D, G	g) A, E	h) F, B	i) C, G	j) G, D



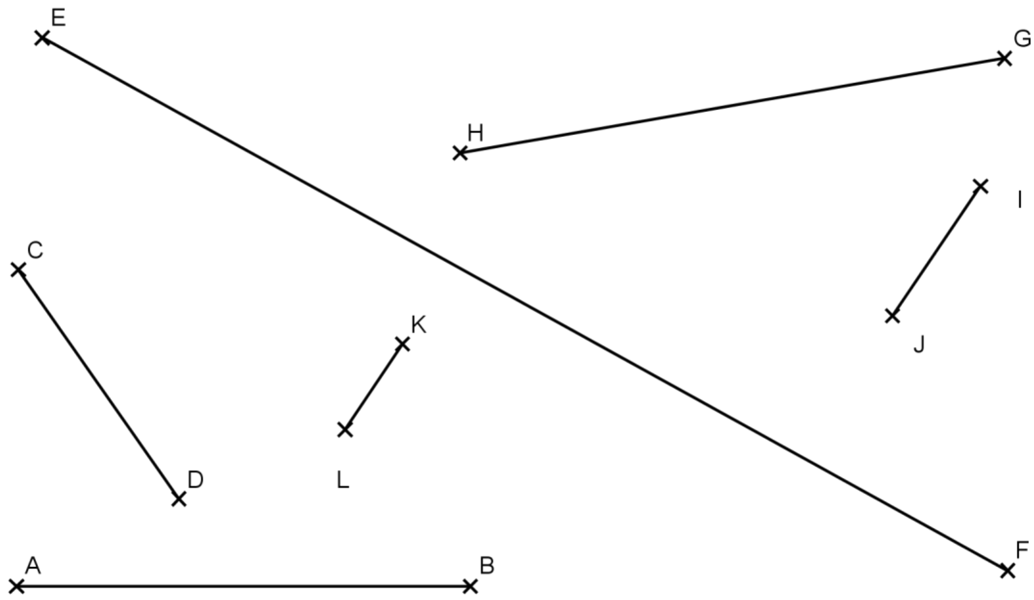
Obrázek 11: Vzdálenost bodů

Cvičení H-10. Odhadněte vzdálenosti jednotlivých bodů od přímky p a q (obrázek 12). Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



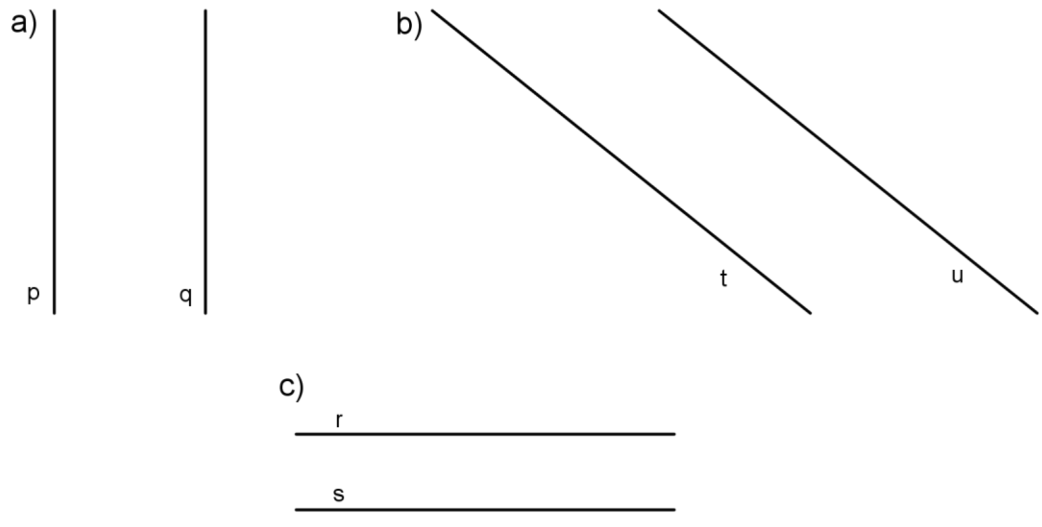
Obrázek 12: Body a přímka

Cvičení H-11. Úsečky z obrázku 13 přerýsujte do sešitu. Odhadem vyznačte jejich středy. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte sestrojením středů úsečky a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného středu pomocí vhodného měřidla délky.



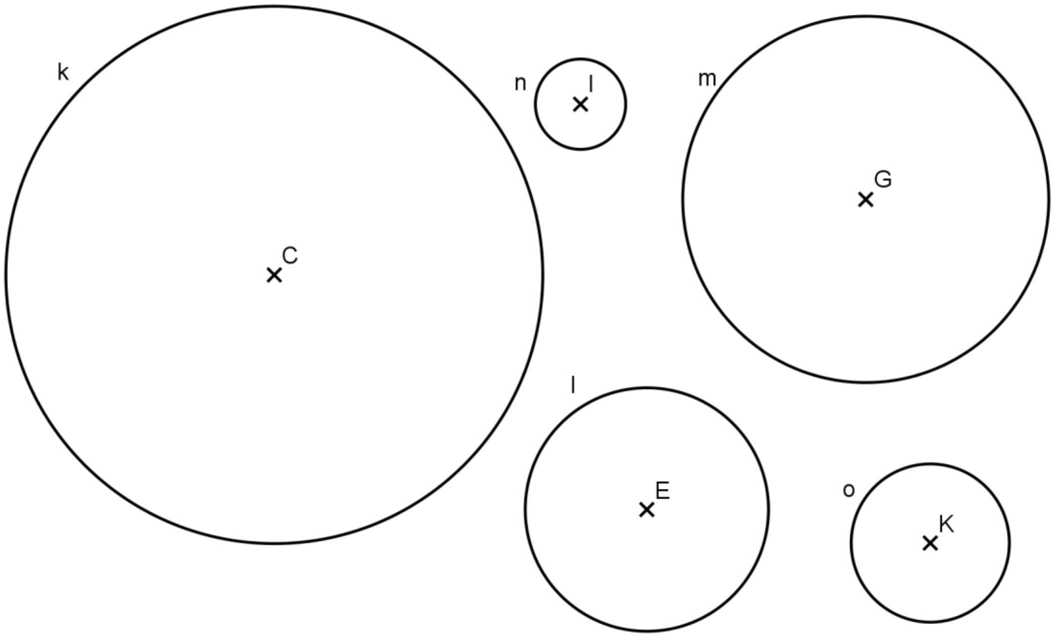
Obrázek 13: Středy úseček

Cvičení H-12. Odhadněte vzdálenost rovnoběžek na obrázku 14. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



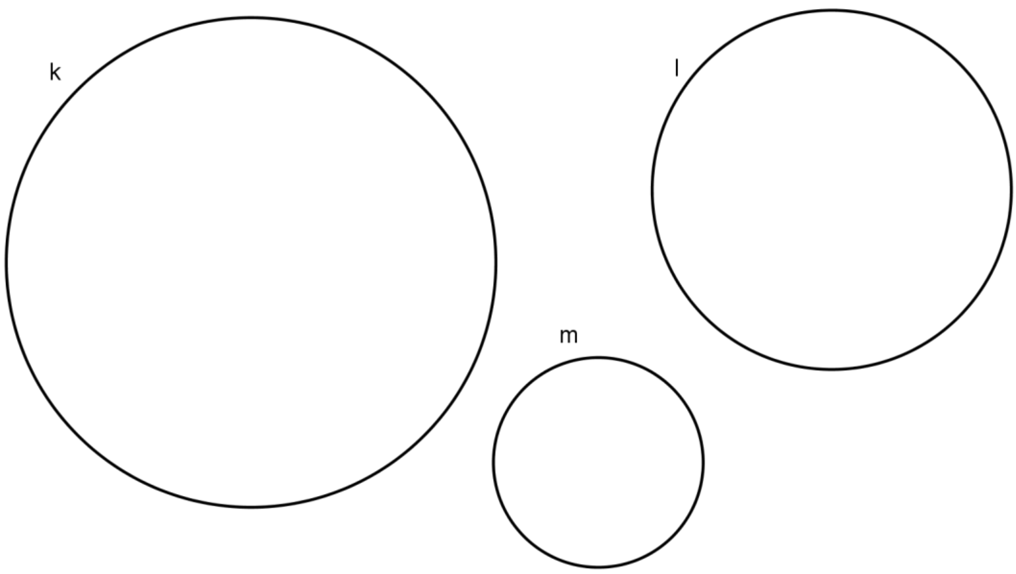
Obrázek 14: Vzdálenost rovnoběžek

Cvičení H-13. Odhadněte poloměry kružnic na obrázku 15. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



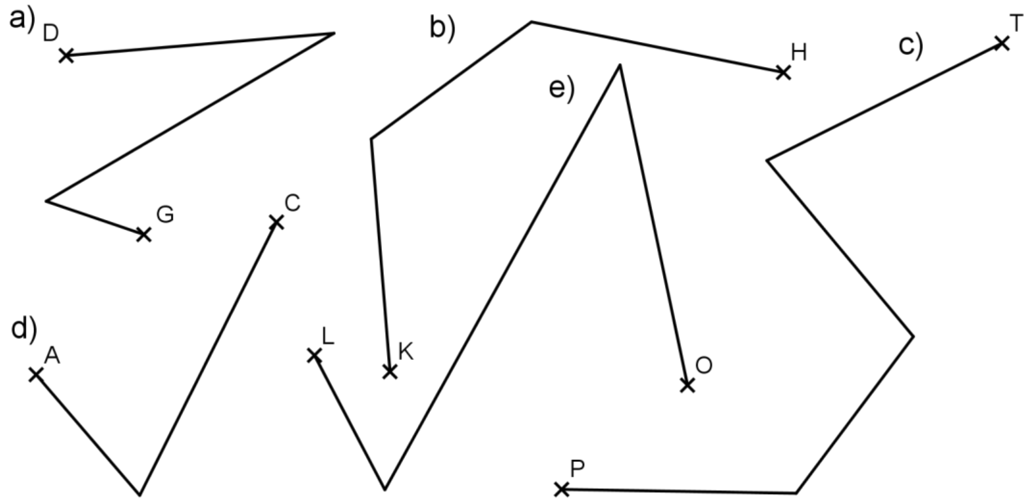
Obrázek 15: Poloměr kružnice

Cvičení H-14. Kružnice z obrázku 16 okopírujte na papír. Odhadem vyznačte jejich středy. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte sestrojením středů kružnic a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného středu každé kružnice. K sestrojování středů využijte znalosti o kružnici opsané trojúhelníku.



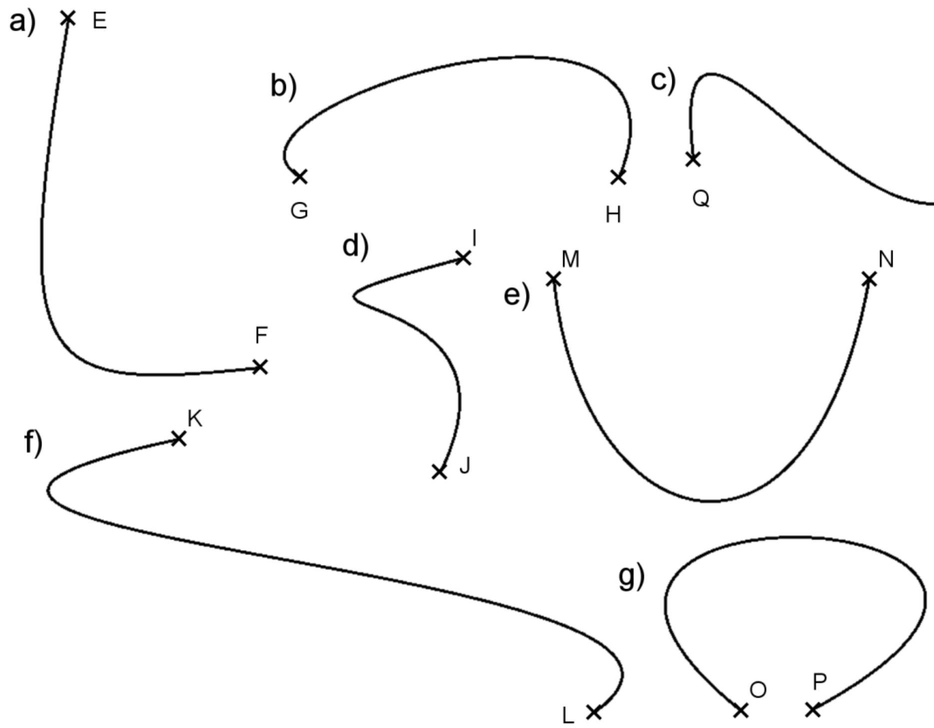
Obrázek 16: Středy kružnic

Cvičení H-15. Odhadněte délky lomených čar na obrázku 17. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



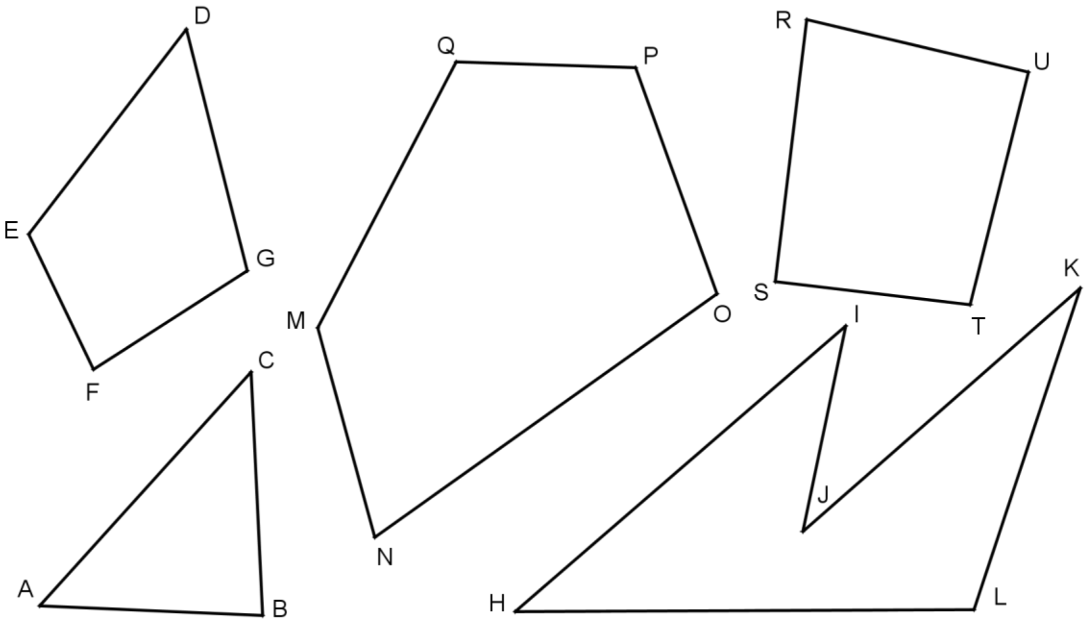
Obrázek 17: Lomené čáry

Cvičení H-16. Odhadněte délky zakřivených čar na obrázku 18. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte co možná nejpřesnějším přiložením tenkého nepružného provázku, který následně narovnejte a změřte jeho délku pomocí vhodného měřidla délky.



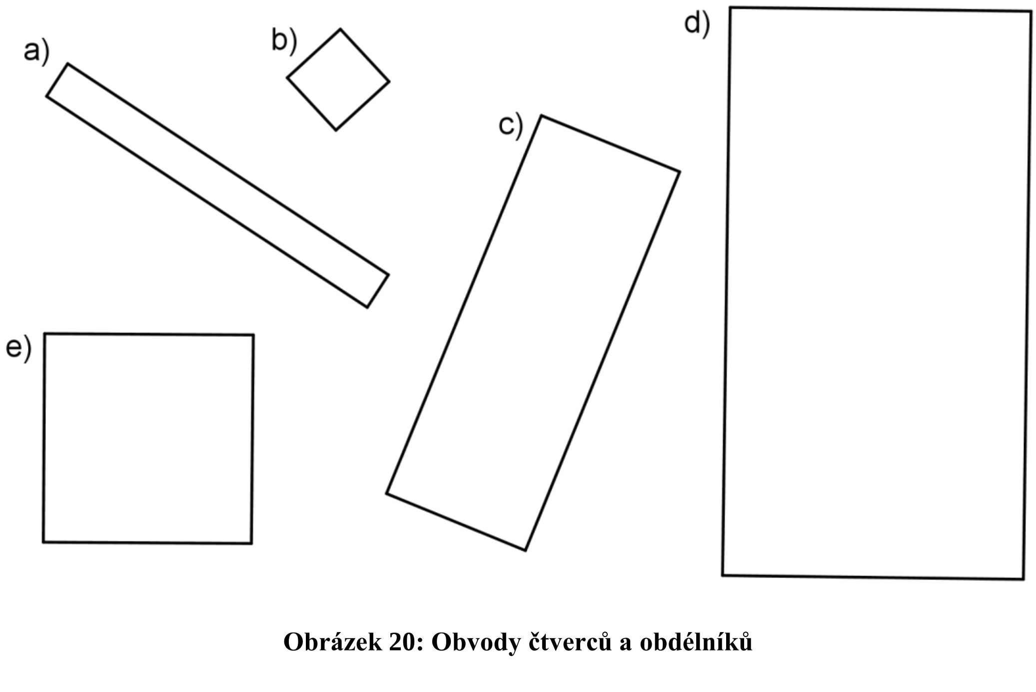
Obrázek 18: Lomené čáry 2

Cvičení H-17. Odhadněte, která ze stran daného mnohoúhelníku je nejdelší a která nejkratší (obrázek 19). Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



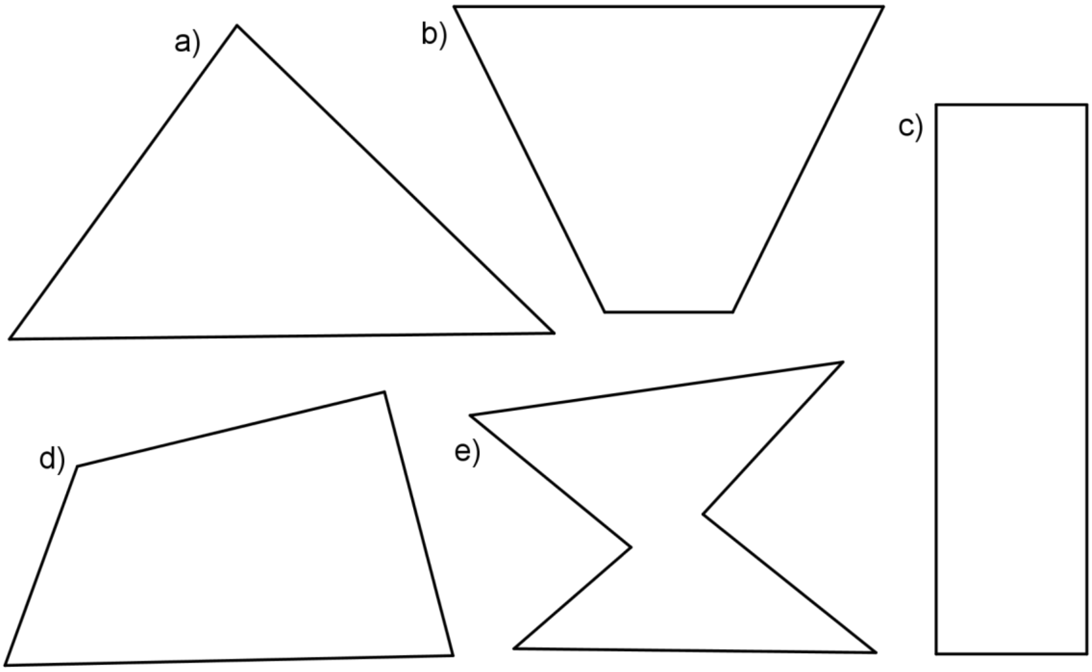
Obrázek 19: Strany mnohoúhelníků

Cvičení H-18. Odhadněte velikosti obvodů jednotlivých čtverců a obdélníků z obrázku 20. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



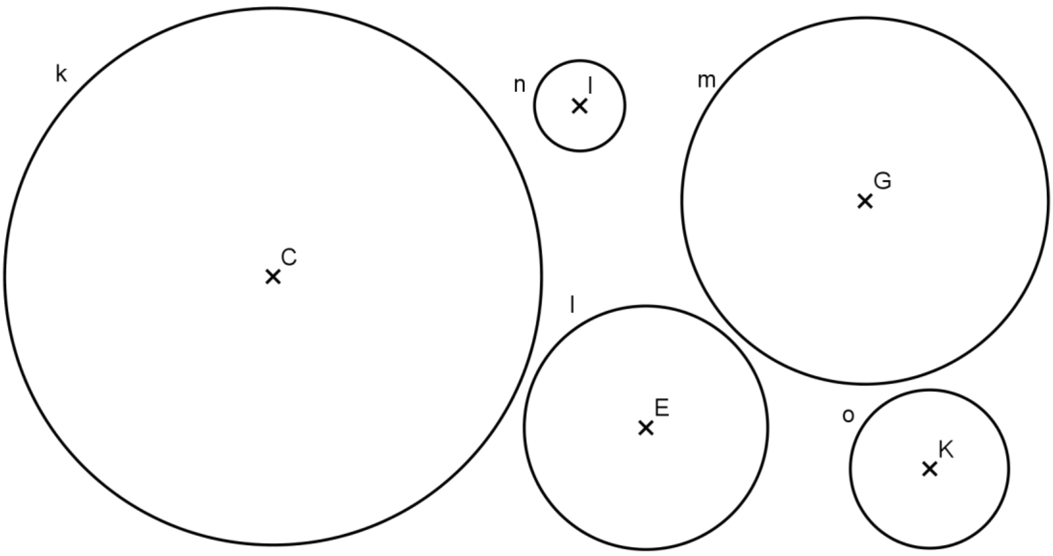
Obrázek 20: Obvody čtverců a obdélníků

Cvičení H-19. Odhadněte, který z mnohoúhelníků na obrázku 21 má největší obvod. Pak odhadněte velikosti obvodů jednotlivých mnohoúhelníků. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky.



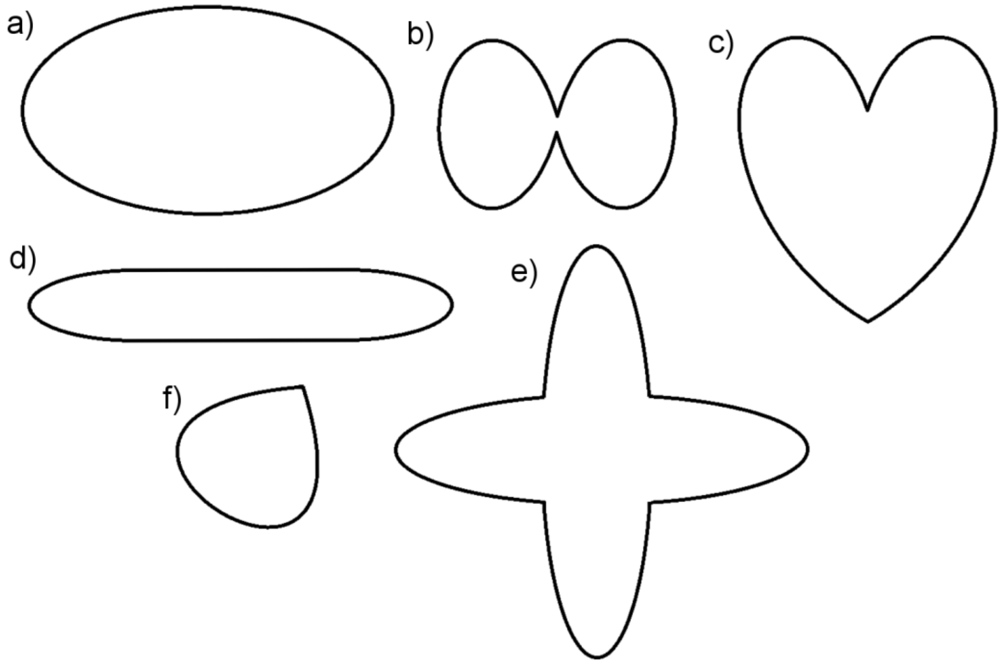
Obrázek 21: Obvod mnohoúhelníku

Cvičení H-20. Odhadněte délky kružnic na obrázku 22. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte změřením poloměrů pomocí vhodného měřidla délky a dosazením naměřených hodnot do příslušného vzorečku.



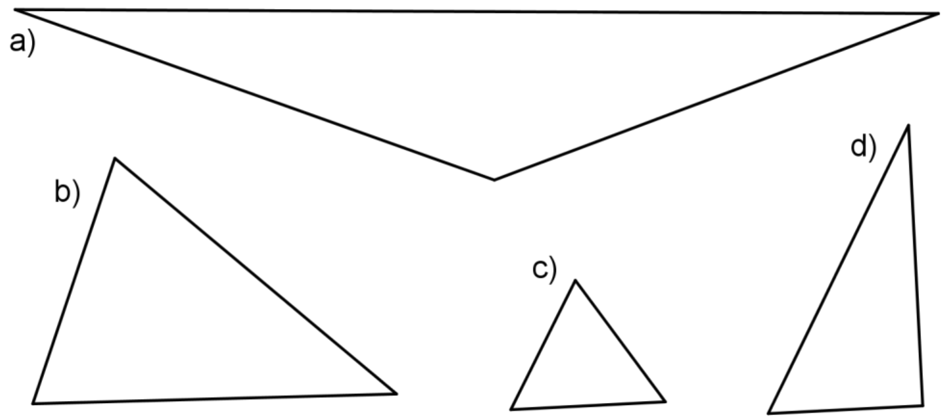
Obrázek 22: Délka kružnice

Cvičení H-21. Odhadněte velikosti obvodů oblých obrazců z obrázku 23. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte co možná nejpřesnějším přiložením tenkého nepružného provázku, který následně narovnejte a změřte jeho délku pomocí vhodného měřidla délky



Obrázek 23: Oblé obrazce

Cvičení H-22. Trojúhelníky z obrázku 24 přerýsujte do sešitu. U každého vyznačte odhadem těžiště. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte sestrojením všech těžnic u každého trojúhelníku a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného těžiště.



Obrázek 24: Těžiště trojúhelníku

Cvičení H-23. Přerýsujte trojúhelníky z předcházejícího cvičení (H-22) do sešitu. U každého vyznačte odhadem střed kružnice opsané. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte sestrojením těchto středů a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného středu každé kružnice.

Cvičení H-24. Vraťte se k některým obrázkům v této podkapitole, a odhadem vytvořte úsečku takové délky, jako je délka nebo obvod příslušného geometrického útvaru. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky a případně i dosazením do příslušného vzorečku.

Cvičení H-25. Odhadněte délku, šířku a výšku učebnice matematiky, kterou používáte. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.

Cvičení H-26. V případě, že je neznáte, odhadněte rozměry listu papíru formátu A4 kromě jeho tloušťky. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky nebo tyto rozměry vyhledejte na internetu popřípadě v encyklopedii.

Cvičení H-27. Odhadněte délku, šířku a výšku alespoň osmi předmětů ve vašem okolí. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí vhodného měřidla délky.

Cvičení H-28. Udělejte jeden krok v přímém směru a odhadněte jeho délku (vzdálenost od špičky palce jedné nohy ke špičce palce druhé nohy). Odhad zapište do sešitu. Pak tuto délku změřte pomocí vhodného měřidla délky a porovnejte s odhadem. Byl váš odhad nadhodnocený nebo podhodnocený? Následně udělejte deset kroků v přímém směru, změřte ušlou vzdálenost a vypočítejte průměrnou délku jednoho kroku. Tu porovnejte s odhadem.

Cvičení H-29. Využijte informaci o průměrné délce vašeho kroku z předešlého cvičení (H-28) a pokuste se odkrokováním příslušného počtu kroků odhadnout délku 20 metrů. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte pomocí vhodného měřidla délky. Doporučuje se využít měřící pásmo.

Cvičení H-30. Odhadněte výšky osob ve vaší domácnosti. Odhad zapište do sešitu. Následně jejich výšku změřte a proveďte kontrolu a porovnání odhadu. Při měření výšky jednotlivých členů domácnosti se doporučuje vynést jejich výšku na rovnou plochu a až poté změřit.

Cvičení H-31. Odhadněte výšku věže nebo rozhledny ve vašem okolí. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte dohledáním údaje výšky dané stavby. Doporučené zdroje požadovaného údaje jsou internet, encyklopedie, informační centrum, kulturní středisko, obecní úřad, správce objektu apod. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte s dohledaným údajem. Je možné, že dohledaný údaj o výšce je zaokrouhlený na celé uvedené jednotky, a proto pouze přibližný.

6.2 2-dimenzionální odhad

V této skupině odhadů se odhaduje obsah nebo povrch geometrických útvarů nebo jejich částí. Za specifický případ této skupiny odhadů lze považovat odhad velikosti úhlu protože, jak plyne z definice úhlu[34], jedná se o část roviny. U 1-dimenzionálního odhadu jsme odhadovali de facto délku, zde budeme odhadovat většinou velikost plochy,[35] a to buď přímo tvořenou obsahem dvojrozměrného geometrického útvaru v rovině, nebo povrchem tělesa. U některých těles[36] probíraných na základní škole je navíc možné využít obsah sítě daného tělesa a tak zaměnit povrch za obsah.

Postupy pro odhadování velikosti plochy závisejí mimo jiné na tom, zda se odhaduje obsah nebo povrch. V obou případech je patrně opět nejrychlejší postup takový, kdy na základě vizuálního vnímání odhadujeme kolikanásobkem zvolené jednotky obsahu je obsah popřípadě povrch daného geometrického útvaru, tedy z kolika jednonásobků zvolené jednotky obsahu je vytvořen. Využíváme zde představu velikosti zvolené jednotky, tu si můžeme představit opět tak, jak je většinou zaváděna, a to přes obsah jednotkového čtverce, tedy například 1 cm^2 si představíme jako obsah čtverce s délkou strany 1 cm, 1 dm^2 jako obsah čtverce s délkou strany 1 dm apod. Nejenže si

[34] „*Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem*.“ (Půlpán, Čihák, 2007: s. 26)
[35] V celé této práci je pro zjednodušení popisů pojem plocha chápán ve smyslu plošného rozsahu, tedy jako nadřazený pojem pojmům obsah a povrch.
[36] Především se jedná o hranoly (krychle a kvádr, …), jehlan, kužel, válec a koule.

tyto čtverce můžeme představit, ale prospěšné pro přesnost odhadu by mělo být i jejich vytvoření, kde je pak možnost přímo vizuálního porovnání velikosti tohoto čtverce a odhadované velikosti plochy jednotlivých geometrických útvarů. Vytvoření těchto jednotkových čtverců může proběhnout buď odhadem, to ale většinou vede k dvojí[37] nepřesnosti, nebo nejlépe přesným rýsováním za předpokladu, že máme k dispozici rýsovací potřeby.

Dalším možným postupem odhadování je využití čtvercové sítě[38]. Tento postup do určité míry navazuje na odhad velikosti plochy přes jednotkový čtverec, protože využívá množinu většinou jednotkových čtverců vhodně seskupenou právě do podoby čtvercové sítě. Lze ji využít pro odhad obsahu dvojrozměrného geometrického útvaru v rovině nebo obsahu sítě tělesa (v této kapitole dále jen „geometrický útvar“).

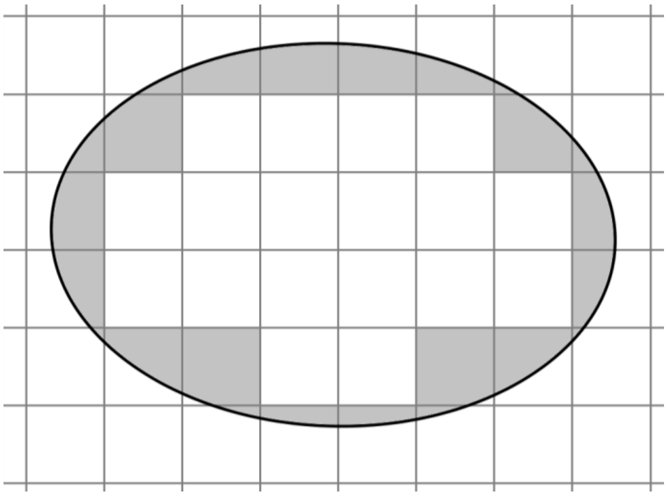
Odhad provádíme tak, že nejprve umístíme čtvercovou síť na daný geometrický útvar za předpokladu, že čtvercovou síť máme již vytvořenou na dostatečně průsvitné podložce, aby pod ní byl vidět nebo pokud je to možné a žádoucí, ji můžeme přes daný geometrický útvar přímo narýsovat. Následně pak odhadneme, kolik by obsah daného geometrického útvaru vyplnil čtverců dané čtvercové sítě. Využijeme k tomu právě s ním překrývající se čtvercovou síť, kde můžeme vidět různé možnosti částečně a zcela vyplněných čtverců daným geometrickým útvarem. K počtu zcela vyplněných čtverců přičteme odhadem vytvořený počet čtverců, které by byly zcela vyplněny, pokud bychom pomyslně (někdy i skutečně) složili části geometrického útvaru z částečně vyplněných čtverců. Výsledný součet pak vynásobíme obsahem čtverce, který známe nebo po změření velkosti jeho strany vypočítáme a získáme tak odhad požadovaného obsahu. Při skládání částí geometrického útvaru z částečně vyplněných čtverců je pro přehlednost vhodné si již použité části vybarvit.

Pro zjednodušení celé situace se používají nejčastěji čtvercové sítě s jednotkovými čtverci, ale nemusí to být vždy pravidlem. Ukázku užití čtvercové sítě můžeme vidět na následujícím obrázku 25, kde se pomocí ní snažíme vytvořit odhad obsahu elipsy. Jak je vidět plně vyplněných čtverců je 18. Částečně vyplněných čtverců je 24. Z těch by pomyslným složením částí geometrického útvaru (šedivě vybarveny)

[37] První vzniká nedokonalým vytvořením jednotkového čtverce. Druhá pak nepřesným určením jeho násobku při určování odhadované plochy.

[38] Čtvercová síť je tvořena dvěma množinami rovnoběžek, kde rovnoběžky z první množiny jsou kolmé na rovnoběžky druhé množiny a vzdálenost sousedních rovnoběžek v obou množinách je stejná. (vlastní definice)

odhadem vzniklo 10 zcela vyplněných čtverců. Konečný odhad obsahu je tedy 28 čtverců. Pokud bude navíc zadáno, že jeden čtverec představuje 1 cm^2, odhad obsahu pak bude 28 cm^2.



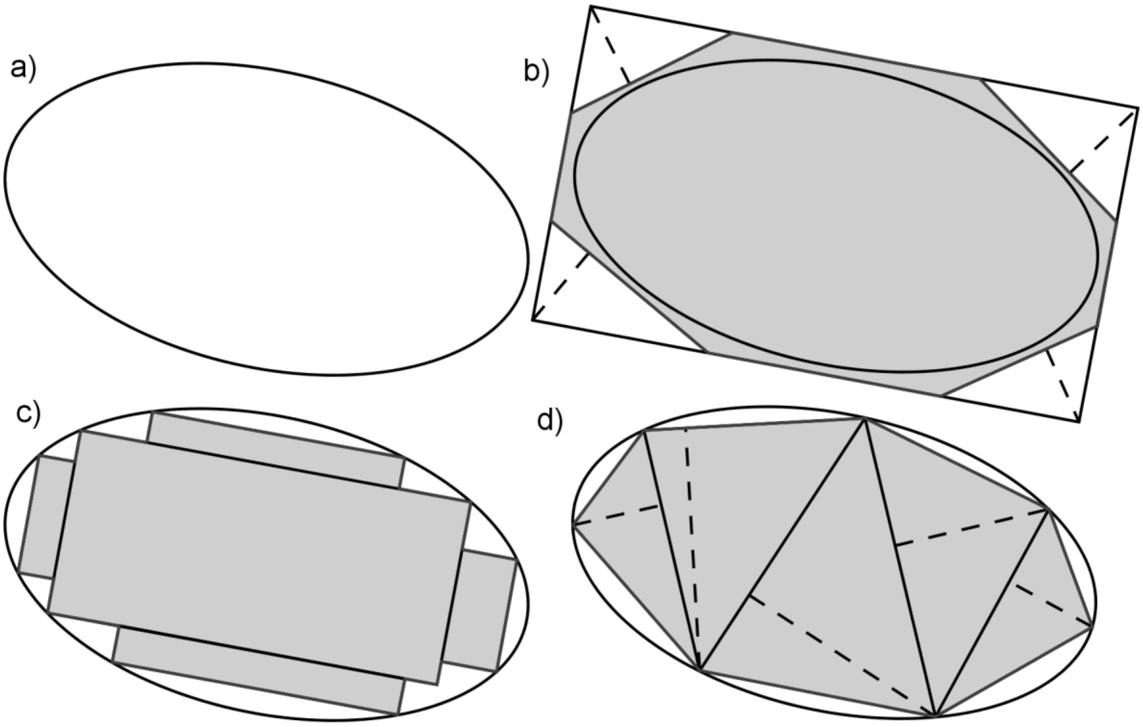
Obrázek 25: Elipsa a čtvercová síť

Jiná možnost postupu odhadování je přes vhodně zvolené a vytvořené geometrické útvary, které pro přehlednost označíme přívlastkem pomocné. Určením jejich obsahu nebo povrchu dojde k vytvoření odhadu. Geometrický útvar, jehož povrch nebo obsah odhadujeme, označíme přívlastkem zadaný. Pomocný i zadaný geometrický útvar jsou vždy stejné dimenze. Pomocné geometrické útvary musí splňovat právě jednu z následujících dvou vlastností. Buď bude celý pomocný geometrický útvar náležet zadanému geometrickému útvaru, nebo naopak bude celý zadaný geometrický útvar náležet pomocnému geometrickému útvaru. Specifickým případem jsou pomocné vepsané a opsané geometrické útvary. Termínem vhodně zvolené jsou myšleny takové, aby bylo snadné určit jejich obsah nebo povrch, tedy obecně velikost plochy a ta, aby byla co možná nejvíce blízká svou velikostí velikosti odhadované plochy zadaného geometrického útvaru.

Tímto postupem máme možnost získat odhad nadhodnocený v případě, že zadaný geometrický útvar náleží pomocnému geometrickému útvaru nebo odhad podhodnocený v případě, že pomocný geometrický útvar náleží zadanému geometrickému útvaru. Toto tvrzení platí pro dvojrozměrné geometrické útvary v rovině, u trojrozměrných, tedy těles, to vždy platit nemusí. Zde by bylo dobré si připomenout, že vytvořením nadhodnoceného a zároveň i podhodnoceného odhadu vzniká rozmezí, ve kterém se nachází přesná hodnota a toto rozmezí tak může sloužit částečně i jako kontrola vytvořeného odhadu jiným postupem.

Pomocný geometrický útvar jako celek může být složen z několika geometrických útvarů, což je mnohdy žádoucí. K tomu nám mohou posloužit například při tvorbě odhadu obsahu dvojrozměrného geometrického útvaru v rovině čtverce, obdélníky, trojúhelníky apod., které se mohou i různě kombinovat. Jejich užití a tedy i ukázku tohoto postupu můžeme vidět na následujícím obrázku 26, kde jsou v případech a) – d) zobrazeny shodné elipsy[39]. V případě a) je ponechána čistě jen vzorová elipsa, jejíž obsah máme určit. V případě b) je již aplikován postup odhadu přes pomocný geometrický útvar, kterému náleží elipsa a který vznikl tak, že jsme nejprve kolem elipsy vytvořili obdélník a následně jsme z něho odebrali rohové trojúhelníky s čárkovaně vyznačenými některými výškami. V případě c) je odhad proveden přes vytvořený pomocný geometrický útvar, který náleží elipse a je složen z pěti obdélníků. V případě d) je k odhadu využit pomocný geometrický útvar, uvnitř elipsy, složený z pěti vytvořených trojúhelníků se všemi vrcholy na elipse a s čárkovaně vyznačenými některými výškami. K určení odhadů v jednotlivých případech, tedy k zjištění obsahů vytvořených pomocných geometrických útvarů je už jen zapotřebí si změřit z obrázků patřičné délky a dosadit je do vzorečku pro výpočet obsahu obdélníku nebo trojúhelníku. V případě b) bude vytvořený odhad nadhodnocený a v případech c) a d) odhad podhodnocený. V uvedených případech byly k vytvoření pomocného útvaru využity obdélníky nebo trojúhelníky, ale je možné užít i jiné geometrické útvary, například užití čtverců se přímo nabízí při manipulaci se čtvercovou sítí. Dále je možné vytvořit pomocné geometrické útvary složením většího počtu geometrických útvarů, které přesněji pokryjí zadaný geometrický útvar a poslouží tak k vytvoření přesnějšího odhadu. Na druhou stranu, čím více jich bude, tím déle bude trvat daný odhad vytvořit, nehledě na to, že čím menší budou jejich rozměry, tím hůře budou změřitelné. Na mysli by proto měla být stále zásada, že tvorba odhadu by neměla být příliš složitá.

[39] Elipsa není běžně zařazena do učiva základních škol, žáci by tedy výpočet jejího obsahu podle vzorečku ve většině případů neměli umět.



Obrázek 26: Elipsy a vhodné geometrické útvary

Tento postup odhadu přes vhodně zvolený geometrický útvar lze v zásadě použít i při odhadování povrchu trojrozměrných geometrických útvarů (v tomto odstavci dále jen „těles“). Je to však mnohem komplikovanější, protože i zde se vyžaduje, aby pomocné těleso splňovalo již popsané podmínky vhodnosti, tedy aby mělo takový tvar, aby bylo snadné určit jeho povrch a zároveň, aby velikost tohoto povrchu byla svou velikostí co možná nejvíce blízká velikosti povrchu zadaného tělesa. Vytvoření nebo nalezení takového pomocného tělesa není snadné. U žáků základní školy se domnívám, že je to dokonce nad jejich síly. Navíc oproti odhadu obsahu dvojrozměrného geometrického útvaru v rovině nemají běžně možnost si pomocné těleso zobrazit.[40] O to více obtížné je to na jejich představivost. I kdyby žáci dokázali vytvořit v mysli představu takového pomocného tělesa, které by bylo svou velikostí blízké velikosti zadaného tělesa, bude pro ně velmi náročné určit jeho rozměry a výsledně i obsah. Navíc další problém se objevuje při snaze vytvořit nadhodnocený a podhodnocený odhad, protože ne každé pomocné těleso náležící zadanému tělesu, musí mít větší povrch a naopak. Z toho důvodu bych tento postup při vytváření odhadu povrchu tělesa

[40] Je sice možné využít příslušný počítačový program, například při vhodném použití to umožňuje i GeoGebra (Grafický náhled 3D), ale zvládnutí jeho obsluhy v takovém rozsahu je opět pro žáky základní školy velice obtížné.

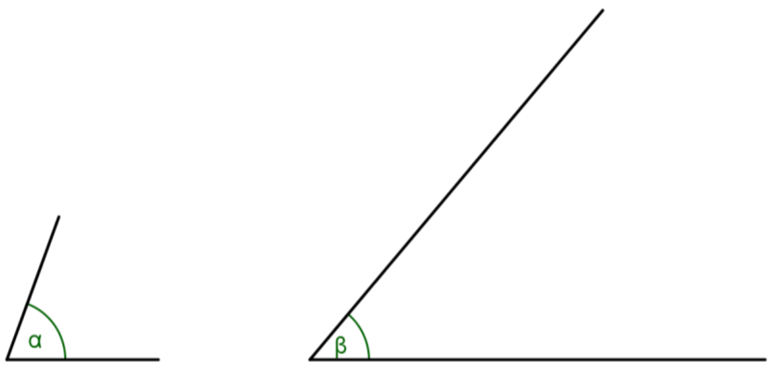
raději nezaváděl a spíše bych uplatnil postup jiný nebo bych alespoň, jak už bylo naznačeno, v případech, v kterých je to možné, převedl povrch na obsah prostřednictvím sítě tělesa a vyhnul se tak značným komplikacím.

Postupy odhadování přes čtvercovou síť a přes pomocné geometrické útvary jsou vhodné především u takových geometrických útvarů, u kterých neumíme obsah popřípadě povrch přesně vypočítat. To znamená v případech, kdy vzoreček pro přesný výpočet neexistuje nebo ho žáci zatím neznají.

Jak bylo uvedeno, odhadovat povrch tělesa je možné buď na základě pouhého vizuálního vnímání, nebo postupem, který využívá síť daného tělesa. U druhé možnosti je potřeba si uvědomit, že ne u všech těles lze jejich síť sestrojit a nebo že sestrojení sítě je v některých případech velmi pracné, zdlouhavé a tedy pro odhad nevhodné. U těles probíraných na základní škole, u kterých lze síť sestrojit, tak můžeme učinit dvěma způsoby. Buďto podle zadaných, změřených nebo dopočítaných rozměrů a úhlů síť narýsujeme nebo zvolíme méně formální postup a síť fyzického tělesa obkreslíme při postupném převalování (převracení) přes jeho hrany na všechny jeho stěny v případě krychle, kvádru, dalších hranolů a jehlanu nebo odvalováním a postavením na podstavy v případě válce a kužele. Nejproblematičtější odhad povrchu tělesa probíraného na základní škole je podle mého názoru v případě koule. Domnívám, že jeho vytvoření je tak náročné, že by na základní škole ani nemělo být vyžadováno.

Odhad velikosti úhlu je specifický případ skupiny dvojdimenzionálního odhadu. Podstatné pro jeho zařazení do této skupiny je informace, že úhel je část roviny, jak vyplývá například z následující definice Půlpána a Čiháka (2007: s. 26): „*Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem*.“ Samotné zavedení pojmu úhel a jeho jednotky stupeň je na základní škole problematické, protože se s ním a jeho jednotkou žáci seznamují většinou až v době, kdy už umějí u částí rovin, přesněji u rovinných geometrických obrazců jako jsou například obdélník a čtverec, určovat míry jako obvod a obsah. Najednou jim jsou představeny takové části rovin, u kterých se obvod ani obsah neurčuje a místo toho je k jejich měření a popisu zavedena nová veličina úhel s jednotkou stupeň. Z těchto důvodů se domnívám, že pro správné pochopení pojmu úhel a tedy i pro odhadování jeho velikosti je důležité, aby se ho žáci naučili vnímat nejen jako část roviny, ale především i jako veličinu (rovinný úhel[41]).

Na nesprávné chápání úhlu může upozornit například úloha, kde se vyžaduje bez měření, tedy odhadem určit, který ze dvou různých vyobrazených úhlů má větší velikost, přičemž ten s větší velikostí bude mít vyobrazené části ramen kratší než ten, který má menší velikost. Ukázku takových úhlů můžeme vidět na následujícím obrázku 27, kde $\alpha = 70°$ a $\beta = 50°$. Žáci by si měli být vědomi toho, že velikost úhlu nezávisí na vyobrazených částí jeho ramen. Ramena úhlu totiž nejsou úsečky, jak by se mohlo z obrázku zdát, ale polopřímky.



Obrázek 27: Dvojice úhlů

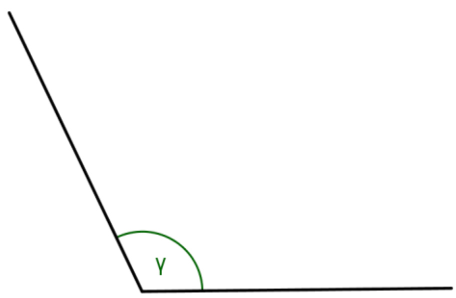
Inspiraci k následujícímu postupu odhadování velikosti úhlu jsem získal převážně v příručkách pro učitele k sadě učebnic *Houghton Mifflin math central* autora L. Boswella a kol. (1999f Level 3. Volume 2., 1999g Level 4. Volume 1., 1999j Level 5. Volume 2. a 1999k Level 6. Volume 1.). Zatímco se u většiny uvedených postupů odhadování délek a velikostí ploch vycházelo z velikosti jednonásobku zvolené jednotky, u odhadování velikosti úhlů bude vhodnější užít spíše několikanásobek jednoho stupně, a to už jen z toho důvodu, že je těžké si představit úhel o velikosti pouze jeden stupeň. Vhodným násobkem by mohl být úhel 90°, jehož podobu už žáci dobře znají prostřednictvím kolmic v geometrii i z běžného života. Podstatné však je, aby si k němu zapamatovali velikost 90° a uvědomili si skutečnost, že je složen z devadesáti stejně velkých dílků o velikosti 1°. Při samotném odhadování velikosti konkrétního úhlu jsou využity jeho násobky, ale i jeho části a jejich skládání. Významnými násobky jsou úhly o velikostech 0°, 90°, 180°, 270° a 360°, které jsou

[41] Odvozená fyzikální veličina soustavy jednotek SI s hlavní jednotkou radián zn. rad a vedlejší jednotkou stupeň zn.° (Mikulčák J. a kol., 1995).

zároveň důležité i pro správné pojmenovaní úhlů[42]. Volba velikosti části pravého úhlu může být různá, je však vhodné, aby byla určena zlomkem a aby bylo možné si tuto část dobře představit, případně ji i snadno sestrojit bez použití úhloměru. Osobně bych doporučoval dvě základní části o velikostech 45° a 22,5°, tedy polovinu a čtvrtinu úhlu 90°.

V prvním kroku tohoto postupu odhadujeme, jestli je zadaný úhel větší nebo menší než 0°, 90°, 180°, 270° a 360°. Z toho důvodu je potřebné mít představu velikostí těchto úhlů. V případě, že je těžké rozhodnout, zda má zadaný úhel velikost větší nebo menší než je některá z těchto hodnot, protože je svou velikostí jí blízký, je jeho velikost odhadnuta právě na tuto hodnotu. Pokud však tomu tak není, tak určíme, ve kterém ze čtyř intervalů vymezených právě těmito pěti hodnotami, se zadaný úhel nachází. Ony intervaly jsou (0°; 90°), (90°; 180°), (180°; 270°), (270°; 360°). Následně odhadneme, ke které z krajních hodnot daného intervalu má blíže a na závěr pak jaký díl nebo jaké díly z velikosti 90° je vhodné k vybrané krajní hodnotě přičíst nebo odečíst, abychom dostali přibližně velikost zadaného úhlu. Takto vytvoříme jeho odhad.

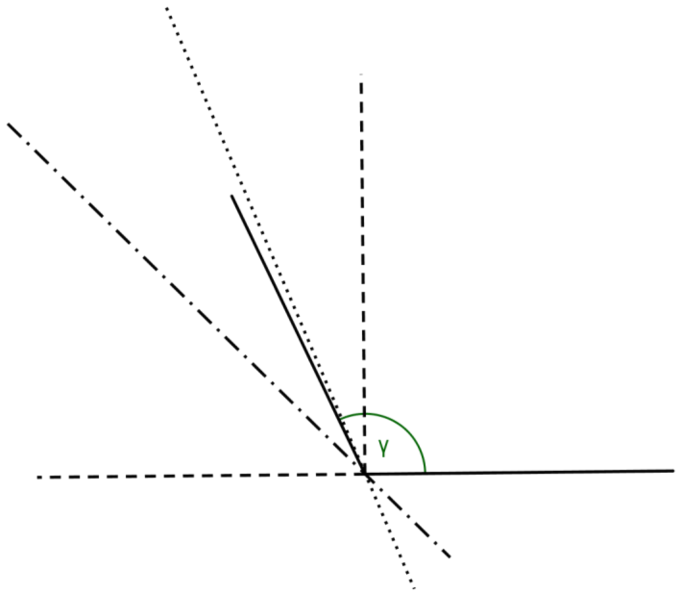
Uplatnění tohoto postupu si ukážeme na odhadování velikosti úhlu γ, který můžeme vidět na následujícím obrázku 28. Prvně podle popsaného postupu určíme, že velikost úhlu γ se bude nacházet někde mezi hodnotami 90° a 180°. Následně provedeme odhad, že je svou velikostí blíže k hodnotě 90°. Z toho plyne, že úhel γ je o nějakou část úhlu 90° větší než úhel 90°. Ona část by mohla mít odhadem velikost o něco menší než je polovina z 90° a zároveň o něco větší než čtvrtina z 90°. Odhadem by tedy zadaný úhel γ[43] mohl mít velikost 120°.



Obrázek 28: Odhad velikosti úhlu

[42] Úhel ostrý, pravý, tupý, plný, konvexní a nekonvexní.
[43] Jeho skutečná velikost je 115°.

Uvedený postup odhadování velikosti úhlu je popsán tak, že jednotlivé kroky provádíme v mysli na základě vizuálního vnímání zadaného úhlu a představ velikostí násobků a dílů pravého úhlu a jejich skládáním. Můžeme si ho však upravit tak, že některé jeho kroky si místo myšlenkových představ k zadanému úhlu γ buď načrtneme, nebo narýsujeme, ovšem bez použití úhloměru[44]. Dorýsované některé kroky můžeme vidět na následujícím obrázku 29, kde jsme nejprve z vrcholu úhlu γ vedli dvě čárkované polopřímky tak, aby s jedním jeho ramenem (vodorovným) vytvořily úhly o velikostech 90° a 180°. Tím jsme si ukázali, že velikost úhlu γ se nachází mezi těmito dvěma hodnotami. Dále jsme sestrojili čerchovanou osu úhlu, jehož ramena tvoří čárkované polopřímky, abychom si upřesnili, jestli je velikost úhlu γ blíže k hodnotě 90° nebo 180°. Nakonec jsme sestrojili tečkovanou přímku jako osu úhlu, jehož jedno rameno tvoří čárkovaná polopřímka úhlu 90° a druhé čerchovaná polopřímka vycházející z vrcholu úhlu γ. Zamyslíme-li se nad jednotlivými kroky, tak bychom měli dojít k závěru, že v posledním jsme sestrojili osu úhlu 45°, která tento úhel rozděluje na dva stejné úhly o velikosti 22,5°. Na obrázku 29 můžeme tedy vidět, že zadaný úhel je složen z úhlů o velikosti 90°, 22,5° a ještě z malého úhlu, který můžeme v porovnání s ostatními úhly odhadnout na 8,5°. Součtem těchto úhlů získáme již vyřčený odhad úhlu γ, 120°.



Obrázek 29: Odhad velikosti úhlu s grafickým znázorněním

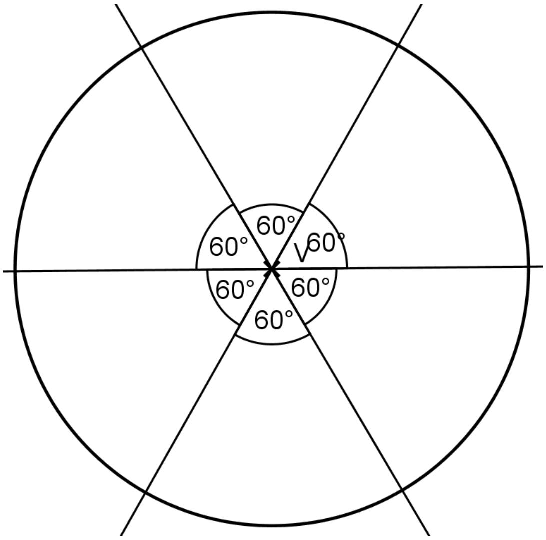
[44] Pouze použitím kružítka a pravítka s vědomím například toho, že lze provést rozdělení úhlu na dvě stejné poloviny pomocí osy úhlu.

Popsaný postup odhadování velikostí úhlů a jeho úpravy črtáním či rýsováním lze použít pro všechny úhly probírané na základní škole tedy pro úhly v rozsahu od 0° do 360°. U odhadování velikosti úhlů větších než 180° a menší než 360° (nekonvexní úhly v tomto rozsahu) je navíc možné nejprve odhadnout tímto postupem velikost konvexního úhlu, který má s nekonvexním úhlem stejný vrchol i ramena a tudíž s ním tvoří plný úhel. Pak už stačí jen odečíst od hodnoty 360° odhad tohoto konvexního úhlu a dostaneme odhad velikosti zadaného nekonvexního úhlu.

Možnou alternativou k uvedenému postupu odhadování velikosti úhlu pomocí násobků a částí úhlu 90° by bylo využití místo rozdělení úhlu 90° na poloviny, jeho rozdělení na třetiny, protože by se pak dále pracovalo s velikostí úhlu 30°, která je násobkem deseti. Problematické by však bylo ono dělení úhlu 90° na třetiny (tzv. trisekce úhlu). Z mého pohledu nejsnadnější cestou, jak toho dosáhnout, je využití úhlu 60°, který je poměrně snadno konstruovatelný. Ten by byl vytvořen uvnitř úhlu 90° tak, že by s ním měl společný vrchol a jedno rameno. Tento postup mi ale přijde komplikovanější a z toho důvodu považuji předchozí postup jako vhodnější.

Další alternativou by bylo dokreslení (dorýsování) kružnice se středem ve vrcholu odhadovaného úhlu a využití již uvedeného úhlu 60° tak, že by tato kružnice byla tímto úhlem rozdělena na stejně dlouhé díly, jak ukazuje obrázek 30. Došlo by tedy k rozdělení plného úhlu (360°) na šest úhlů o velikosti 60°. Tomu rozdělení by odpovídalo i rozdělení dané kružnice na šest stejně dlouhých dílů. Vychází se totiž z té myšlenky, že délka části kružnice (kruhového oblouku) je přímo úměrná velikosti úhlu, jehož vrchol je ve středu kružnice a jehož ramena tuto délku vymezují vzniklými průsečíky s kružnicí (Mikulčák, 1995). Následně se vytvoří odhad velikosti zadaného úhlu podle uvedené myšlenky tak, že se porovná délka části kružnice, kterou vymezuje zadaný úhel s délkou části kružnice, kterou vymezuje úhel 60° popřípadě některý jeho násobek.[45]

[45] Takovéto využití kružnice, respektive jejích částí při odhadu velikosti úhlu je možné i v předchozích postupech.

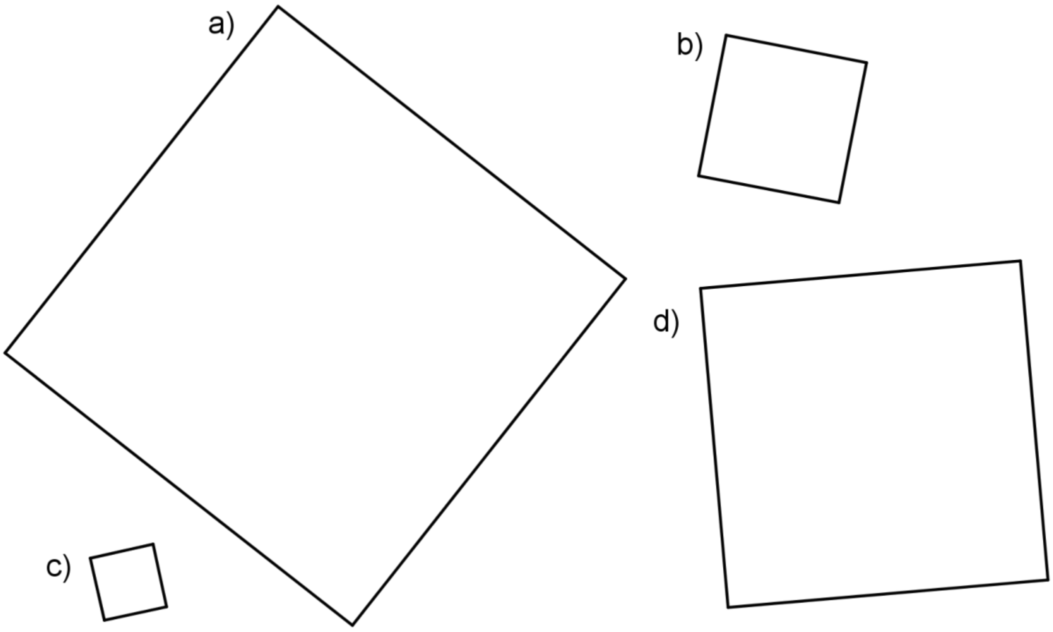


Obrázek 30: Rozdělení kružnice

Pro odhadování velikosti úhlu je podle mého názoru ještě dobré, když jsou vyobrazené části ramen přibližně stejně dlouhé, a proto bych doporučil v případech, kdye je to možné, kratší rameno přiměřeně prodloužit. Zároveň považuji za zbytečné vyžadovat nebo se snažit o odhad v jednotce menší než stupeň. Dále bych u „obrácených“ odhadů, kde se vyžaduje odhadem vytvořit úhel požadované velikosti, viděl jako nutné při vytváření ramen úhlu využít například pravítko nebo jiný předmět, pomocí kterého je možné narýsovat polopřímku (přímou čáru).

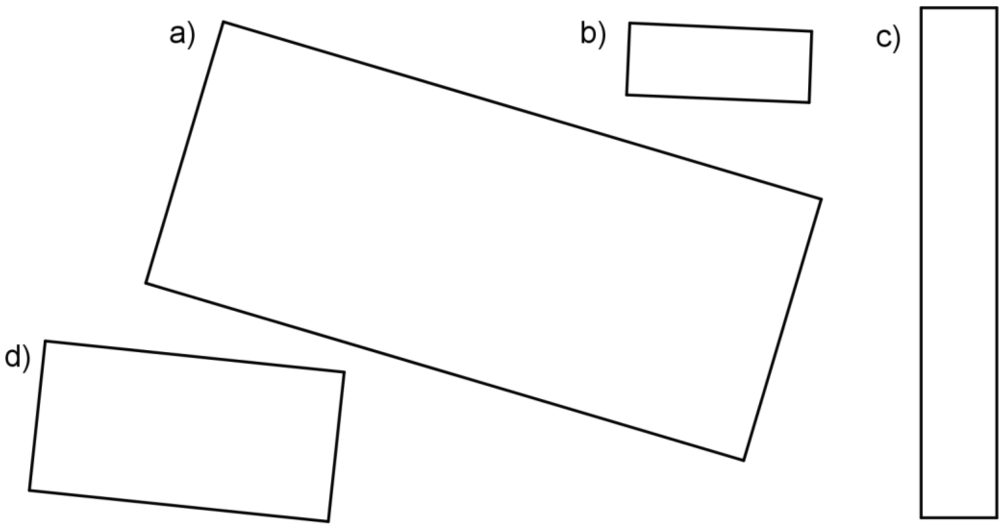
6.2.1 Procvičování I

Cvičení I-1. Odhadněte obsahy jednotlivých čtverců na obrázku 31. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



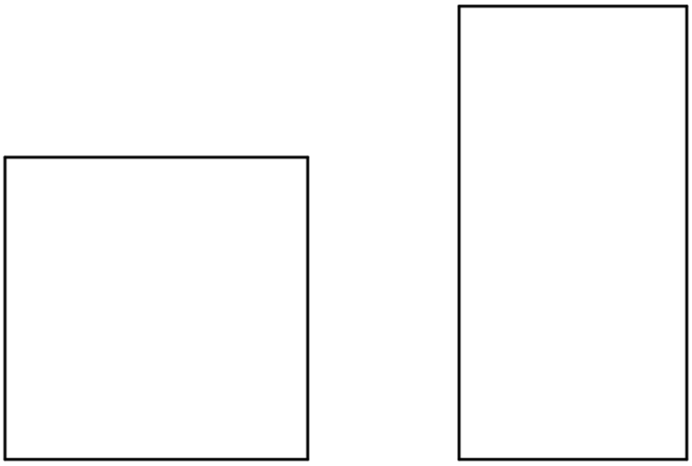
Obrázek 31: Obsahy čtverců

Cvičení I-2. Odhadněte obsahy jednotlivých obdélníků z obrázku 32. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



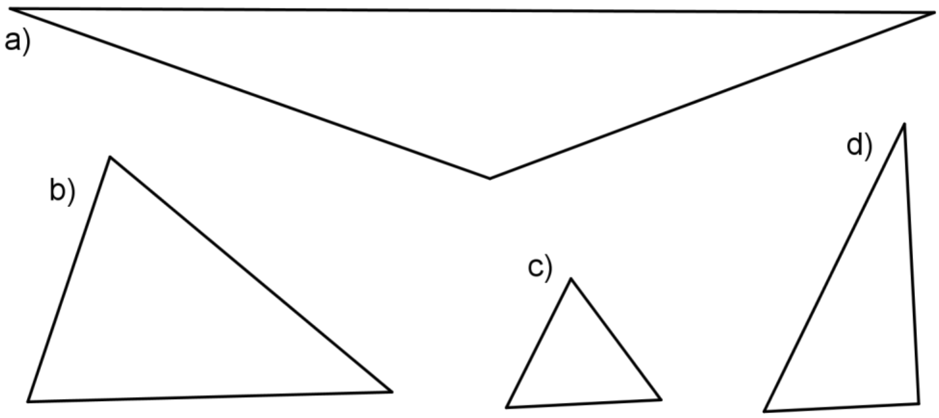
Obrázek 32: Obsahy obdélníků

Cvičení I-3. Na obrázku 33 je čtverec a obdélník. Odhadněte, který z obrazců má větší obsah a o kolik, pak odhadněte jejich obsahy. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



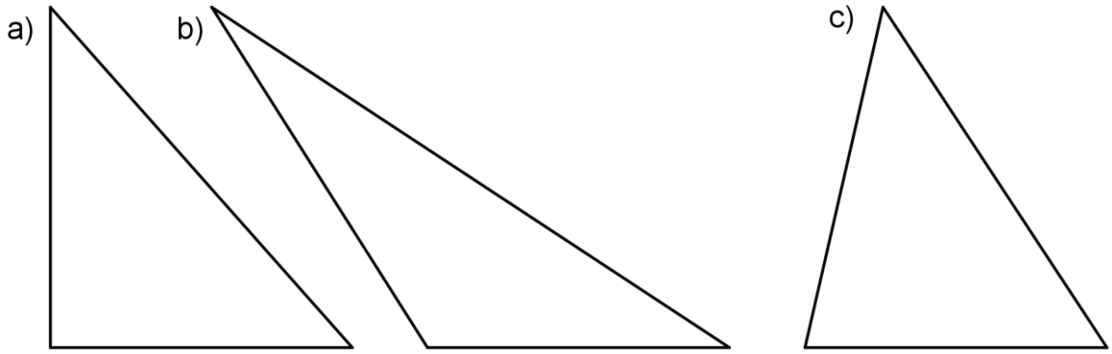
Obrázek 33: Obsah čtverce a obdélníku

Cvičení I-4. Odhadněte obsahy jednotlivých trojúhelníků (obrázek 34). Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



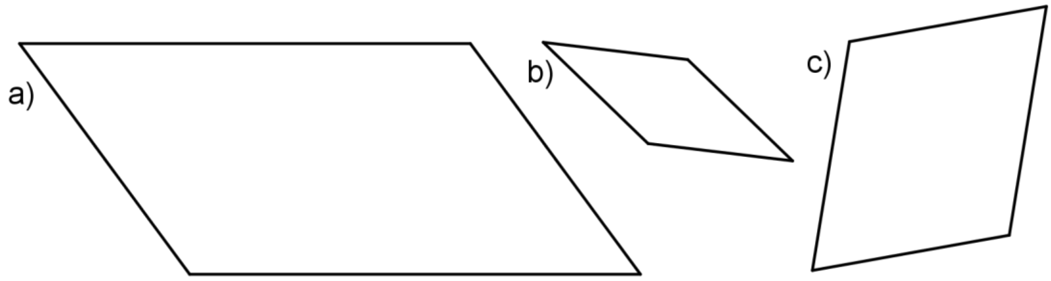
Obrázek 34: Obsah trojúhelníků

Cvičení I-5. Odhadněte, který z trojúhelníků na obrázku 35 má největší obsah a který nejmenší. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



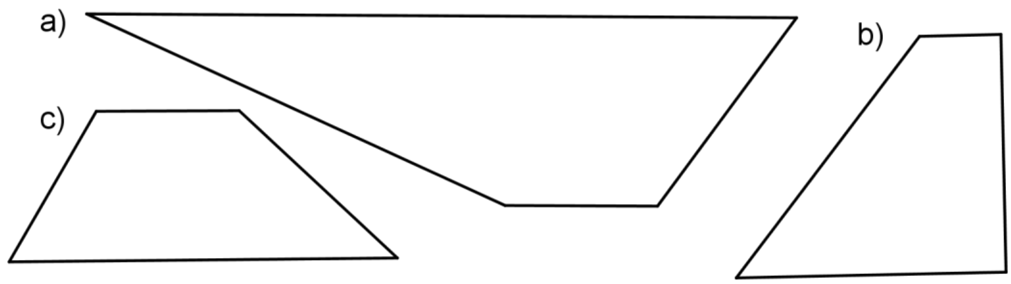
Obrázek 35: Tři trojúhelníky

Cvičení I-6. Odhadněte obsahy jednotlivých rovnoběžníků z obrázku 36. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



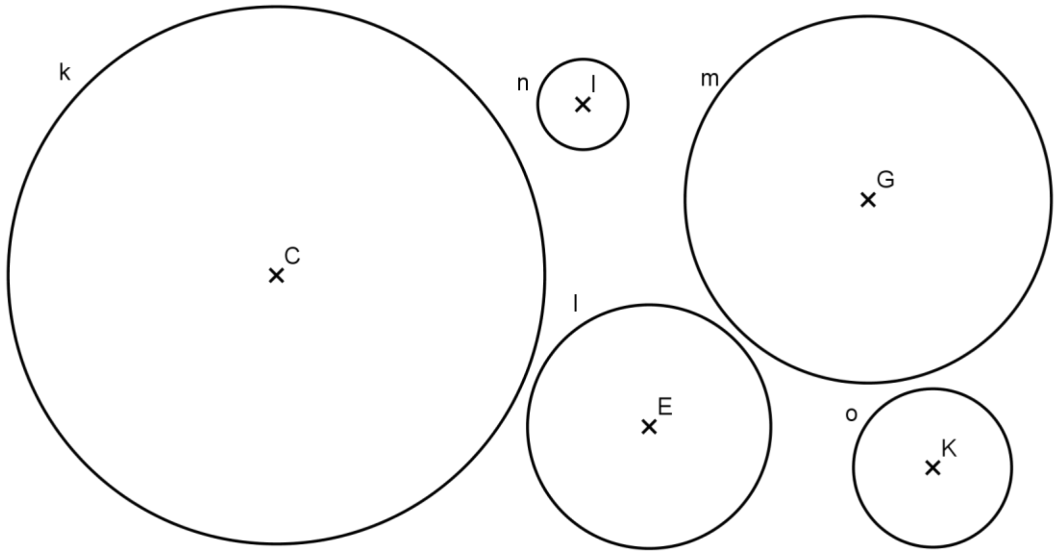
Obrázek 36: Obsah rovnoběžníků

Cvičení I-7. Odhadněte obsahy jednotlivých lichoběžníků z obrázku 37. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.



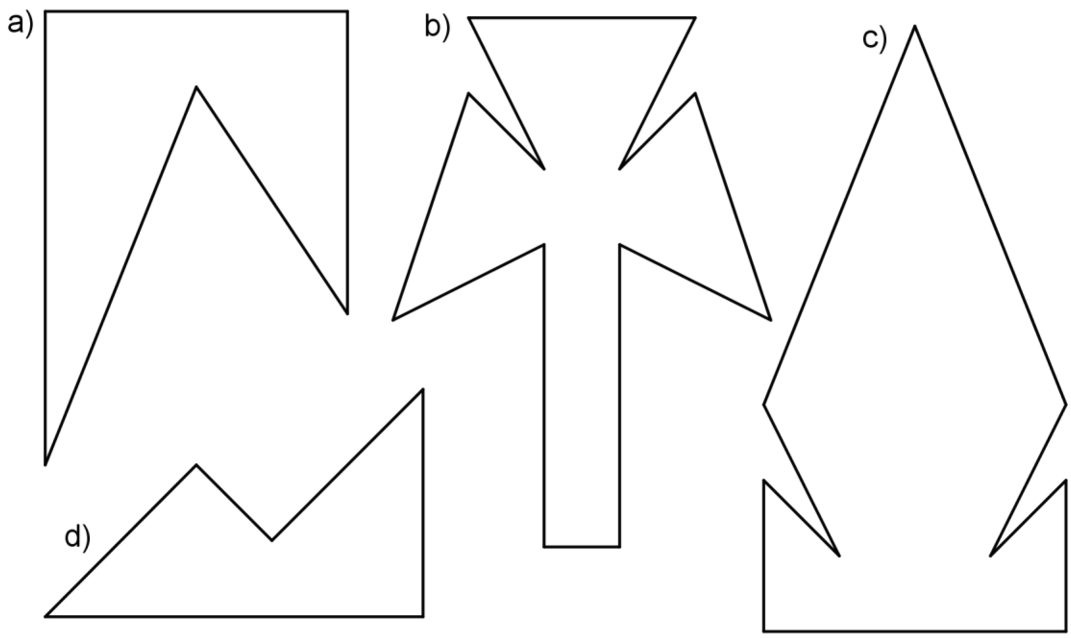
Obrázek 37: Obsah lichoběžníků

Cvičení I-8. Odhadněte obsahy jednotlivých kruhů (obrázek 38). Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením poloměru a dosazením do příslušného vzorečku.



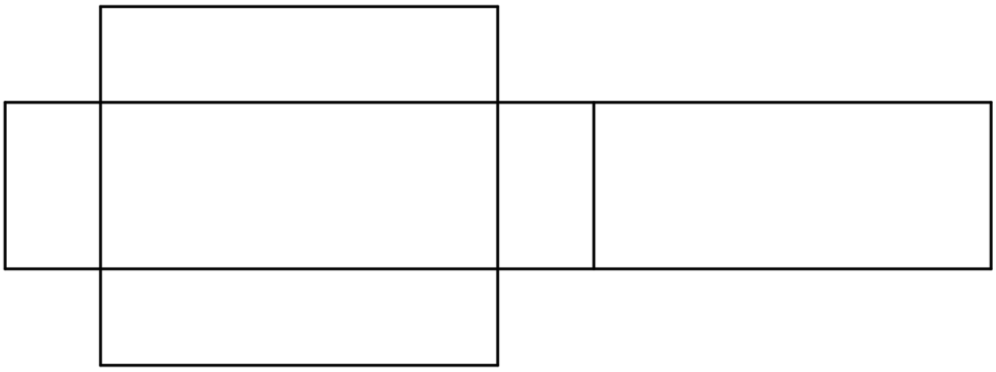
Obrázek 38: Obsah kruhů

Cvičení I-9. Odhadněte obsahy jednotlivých obrazců z obrázku 39. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



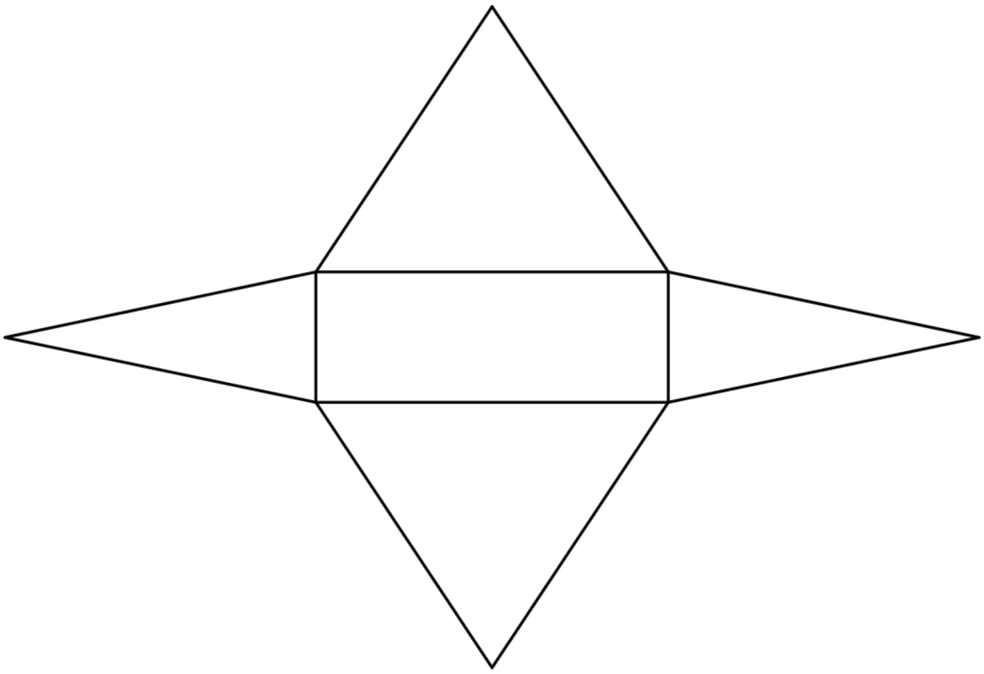
Obrázek 39: Obsahy obrazců

Cvičení I-10. Odhadněte obsah sítě kvádru, která je vyobrazena na obrázku 40. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



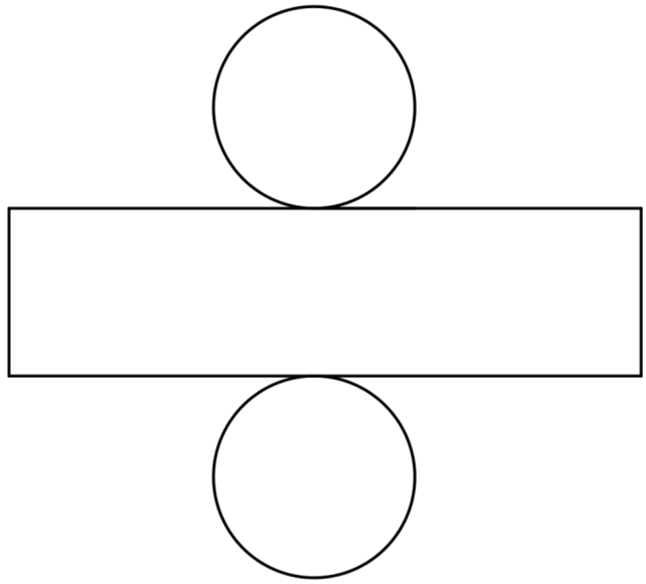
Obrázek 40: Síť kvádru

Cvičení I-11. Odhadněte obsah sítě jehlanu, která je vyobrazena na obrázku 41. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



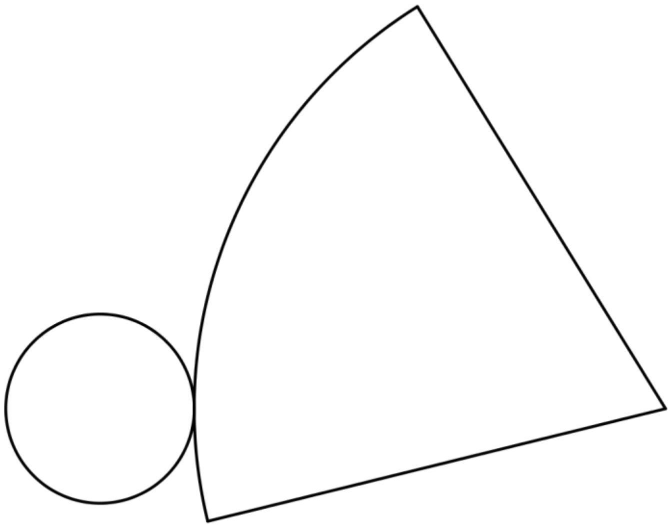
Obrázek 41: Síť jehlanu

Cvičení I-12. Odhadněte obsah sítě válce, která je vyobrazena na obrázku 42. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



Obrázek 42: Síť válce

Cvičení I-13. Odhadněte obsah sítě kužele, která je vyobrazena na obrázku 43. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.



Obrázek 43: Síť kužele

Cvičení I-14. Vytvořte odhadem do sešitu čtverec s požadovaným obsahem. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

a) 6 cm^2	b) 10 cm^2	c) 38 cm^2	d) 77 cm^2	e) 110 cm^2

Cvičení I-15. Vytvořte odhadem do sešitu vždy 3 různé obdélníky s požadovaným obsahem. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

a) 9 cm^2	b) 15 cm^2	c) 26 cm^2	d) 61 cm^2	e) 97 cm^2

Cvičení I-16. Vytvořte odhadem do sešitu trojúhelníky s požadovaným obsahem. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

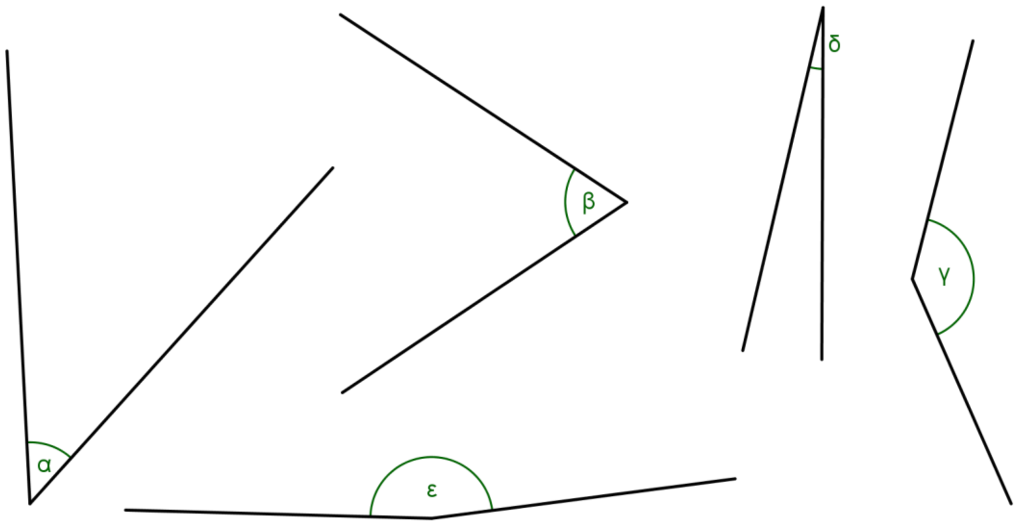
a) 5 cm^2	b) 8 cm^2	c) 19 cm^2	d) 34 cm^2	e) 57 cm^2

Cvičení I-17. Odhadněte obsah horní plochy u alespoň dvou stolů ve vašem okolí. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.

Cvičení I-18. Odhadněte postupně obsahy všech stěn místnosti tvaru kvádru. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte měřením délek a dosazením do příslušných vzorečků.

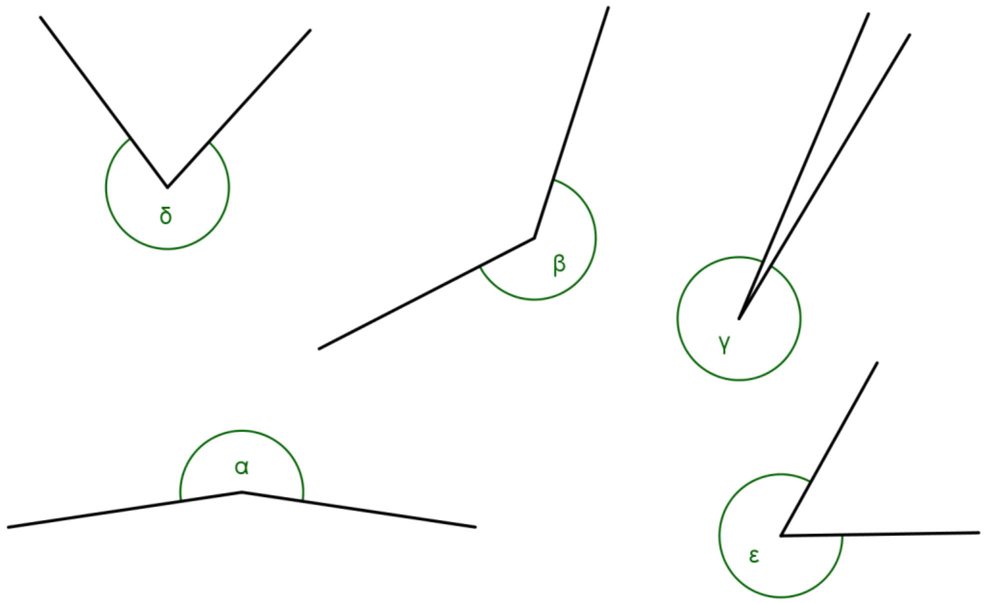
Cvičení I-19. Odhadněte rozlohu stadionu, náměstí nebo rybníku ve vašem okolí. Odhad zapište do sešitu. Dále se pokuste dohledat údaj o rozloze daného objektu. Doporučené zdroje jsou internet, encyklopedie, informační centrum, kulturní středisko, obecní úřad, správce objektu apod. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte s dohledaným údajem. Je možné, že dohledaný údaj o rozloze je zaokrouhlený, a proto pouze přibližný.

Cvičení I-20. Odhadněte velikosti jednotlivých úhlů z obrázku 44. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí měření úhloměrem.



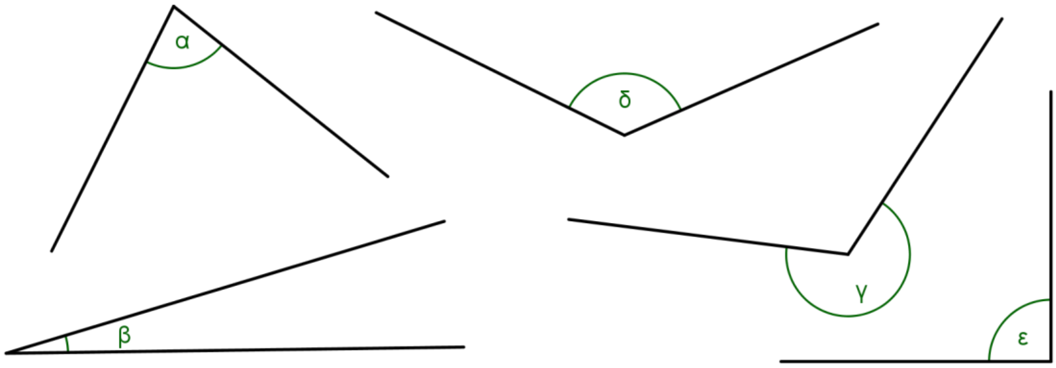
Obrázek 44: Velikost úhlů 1

Cvičení I-21. Odhadněte velikosti jednotlivých úhlů z obrázku 45. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadů proveďte pomocí měření úhloměrem.



Obrázek 45: Velikost úhlů 2

Cvičení I-22. Úhly z obrázku 46 přerýsujte do sešitu. Odhadem vyznačte podle pravítka jejich osy. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte sestrojením os úhlů a přeměřením úhlu, jehož ramena tvoří odhadnutá osa a skutečná osa uvnitř zadaného úhlu.

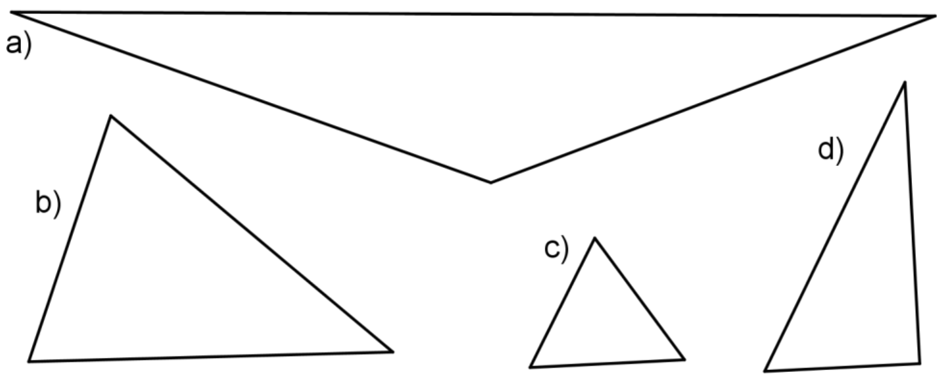


Obrázek 46: Osa úhlu

Cvičení I-23. Vytvořte odhadem do sešitu úhel požadované velikosti. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte pomocí měření úhloměrem.

a) 7°	b) 19°	c) 33°	d) 60°	e) 71°
f) 99°	g) 124°	h) 153°	i) 189°	j) 204°
k) 240°	l) 265°	m) 300°	n) 321°	o) 350°

Cvičení I-24. Trojúhelníky z obrázku 47 přerýsujte do sešitu. U každého vyznačte odhadem bod, kde se protínají všechny jeho výšky. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte sestrojením všech výšek u každého trojúhelníku a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného průsečíku výšek.



Obrázek 47: Průsečík výšek

Cvičení I-25. Přerýsujte trojúhelníky z předcházejícího cvičení (I-24) do sešitu. U každého vyznačte odhadem střed kružnice vepsané. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte sestrojením těchto středů a přeměřením vzdálenosti odhadovaného a skutečného středu každé kružnice vepsané.

Cvičení I-26. Vytvořte odhadem do sešitu úhly stejné velikosti, jako jsou na obrázku 44 a na obrázku 45. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte pomocí měření úhloměrem sobě odpovídajících úhlů z obrázků a v sešitě.

Cvičení I-27. Vezměte si papír formátu A4 a narýsujte na něm jednu jeho úhlopříčku. Odhadněte, jak velký úhel vytváří tato úhlopříčka jak s jednou, tak i druhou hranou listu papíru s vrcholem v jeho rohu. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením vzniklého úhlu úhloměrem.

Cvičení I-28. Alespoň pětkrát různě rozevřete ruční nůžky na papír a odhadněte velikost úhlu, který vznikne mezi ostřím obou jejich čepelí. Odhady zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením vzniklých úhlů úhloměrem.

Cvičení I-29. Podívejte se na ručičkové hodiny a odhadněte úhel, který vymezí sekundová rafička za 8 sekund (stejný úhel vymezí i minutová rafička za 8 minut). Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte výpočtem.

6.3 3-dimenzionální odhad

Třetí skupinu odhadů metrických vlastností geometrických útvarů tvoří odhady objemu, tedy prostoru, který je vyplněn tělesem. Tato skupina odhadů je podle mého názoru nejvíce obtížná ze všech tří skupin, a to hned z několika důvodů. První důvod je ten, že je zde potřeba prostorová představivost, jejíž vývoj je do značné míry vázán na vývoj biologický. Za druhé je komplikovanější i samotná prezentace objemu v učebnicích, kde je objem v podobě nějakého tělesa prezentován dvojrozměrným obrázkem[46], který je navíc většinou pouze zmenšeným modelem skutečného objektu (tělesa) a je tedy náročnější vnímat skutečnou velikost objemu. Třetím důvodem jsou jednotky objemu.

[46] Ten využívá většinou vhodného druhu zobrazení.

Objem jako odvozená fyzikální veličina má hlavní jednotku metr krychlový (m^3) a z ní vytvořené násobky a díly pomocí předpon jako např.: kilo-, mili-, centi- a deci-. Tyto jednotky jsou nejčastěji používány při výpočtech objemů těles probíraných na základní škole, protože vycházejí z jednotek délky většinou dosazovaných do příslušných výpočetních vzorců. Jejich velikosti si lze představit opět tak, jak jsou většinou zaváděny, a to přes objemy jednotkových krychlí, jak je slyšet již názvů těchto jednotek, tedy například 1 cm^3 si představíme jako objem krychle s délkou hrany 1 cm, 1 dm^3 jako objem krychle s délkou hrany 1 dm apod. Naproti tomu stojí zkušenost žáků z běžného života, kde se většinou setkávají s jinými jednotkami, mezi nimiž dominuje jednotka litr[47], kterou znají například z obalů nápojů a která s sebou přináší opět své násobky a díly tvořené pomocí předpon jako např.: mili-, centi-, deci- a hekto-. Přibližnou představu o velikosti těchto jednotek mají žáci právě prostřednictvím obalů nápojů, které ale mají v současné době rozmanité tvary, většinou však blízké tvaru válce. Tato paralelní dvojitost jednotek objemu a zkušenost s nimi v nejrůznějších tvarech je tedy třetím důvodem, proč považuji odhad objemu za obtížnější než odhady metrických vlastností předešlých dvou dimenzí. Jak je asi už zřejmé, velkou roli při odhadování objemu těles hraje vlastní zkušenost s různými jednotkami objemu ve fyzické podobě. S ohledem na popsanou náročnost se domnívám, že samotné pochopení, ukotvení a používání objemu jakožto veličiny a jeho různých jednotek je samo o sobě náročné, proto by odhadování objemu, které v tomto případě považuji za nadstavbu, mělo být na základní škole vyžadováno jen v základní rovině a rozšiřovat by se mělo až ve vyšších stupních vzdělání, kde se dále rozvíjí prostorové myšlení, představivost, ale i zkušenost.

Výběr postupu odhadování objemu tělesa závisí na mnoha podmínkách jako třeba zda je k dispozici přímo ono těleso, jeho model, jeho obrázek, nebo je jen popsáno rozměry a tvarem. Také záleží i na tom, jak s ním žáci mohou manipulovat nebo co s ním mohou dělat. I v této skupině odhadů je asi nejuniverzálnější a nejrychlejší postup takový, kdy na základě vizuálního vnímání odhadujeme kolikanásobkem zvolené jednotky objemu je objem daného tělesa, tedy z kolika jednonásobků zvolené jednotky objemu je vytvořen. Využíváme zde představu velikosti zvolené jednotky. Tato

[47] Vedlejší jednotka objemu.

představa je však u veličiny jako je objem problematická z důvodů, které byly popsány a u mnoha žáků zůstává pouze ve formální rovině.

Jiný významnější postup, který na předchozí navazuje a o kterém bylo zmíněno již na začátku celé kapitoly, je založen na vizuálním porovnání objemů dvou těles, kde u jednoho objem známe a u druhého ho právě na základě porovnání s prvním odhadujeme. Zde je však nebezpečí, že v případě, kdy budou obě tělesa tvarově příliš rozličná, bude nesnadné provést porovnání právě kvůli ztížené možnosti představit si objem jednoho tělesa v druhém. Proto by bylo u tohoto postupu vhodné, aby se jím porovnávaly objemy těles pokud možno přibližně stejných tvarů.

Ještě jiný možný postup odhadování objemu tělesa je idealizovat si jeho tvar na tvar krychle, kvádru, hranolu, válce, jehlanu, kužele nebo koule s přibližně stejným objemem. Následným měřením nebo i jen odhadem pak určíme rozměry idealizovaného tělesa, které následně dosadíme do příslušného vzorečku pro výpočet objemu a získáme tak požadovaný odhad.

Další postupy by mohly být jako zobecnění postupů dvojdimenzionálního odhadu velikosti plochy, kde se využívalo čtvercové sítě nebo pomocných geometrických útvarů. V případě čtvercové sítě by místo čtverců bylo při odhadování objemu těles užito shodných krychliček. V případě pomocného geometrického útvaru by jím bylo těleso a důraz by byl kladen na jeho objem. Zásadním problémem u těchto zobecněných postupů je však jejich praktická realizace.

V neposlední řadě by bylo možné použít i postup, kterým se přesouváme spíše do oblasti fyziky. Šlo by o využití objemu kapaliny tělesem vytlačené v nádobě tvaru válce, krychle nebo kvádru. Těleso úplně ponoříme a odhadneme rozdíl výšek hladin v nádobě před a po ponoření. Následně odhadneme nebo dopočítáme obsah podstavy nádoby. Součinem těchto dvou hodnot získáme odhad objemu zadaného tělesa. Tento postup je vhodný především pro odhad nepravidelných a tvarově složitých těles, jejichž objem tímto přeneseme do podoby tvaru válce, krychle nebo kvádru. Jak je vidět možných postupů je hodně, ale většina je na poměry základní školy náročná.

6.3.1 Procvičování J

Na základě popsané problematiky se zobrazováním těles v učebnicích (obecně knihách) jsem se rozhodl zde žádná cvičení s vyobrazenými tělesy nevytvářet, a proto uvedu jen několik málo příkladů, které jsou zaměřené na odhad objemů těles ze školního i domácího prostředí žáků.

Cvičení J-1. Odhadněte objem nějaké krabice tvaru kvádru. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

Cvičení J-2. Odhadněte objem nějaké skříně tvaru kvádru. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

Cvičení J-3. Odhadněte objem nějaké skleničky ve vaší domácnosti, u které neznáte její objem. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte pomocí kuchyňské odměrky.

Cvičení J-4. Odhadněte objem fotbalového, basketbalového nebo volejbalového míče. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením obvodu a určením poloměru, který dosaďte do příslušného vzorečku.

Cvičení J-5. Vyberte si doma jedno slepičí vajíčko a odhadněte jeho objem. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte pomocí kuchyňské odměrky, do které nalijte dostatek vody, aby v ní bylo možné ponořit celé vajíčko. Jeho objem určíte odečtením objemu vody před ponořením a vody s vajíčkem po ponoření.

Cvičení J-6. Odhadněte objem celé „kostky“ másla. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání odhadu proveďte měřením délek a dosazením do příslušného vzorečku.

Cvičení J-7. Odhadněte objem chladícího prostoru vaší ledničky nebo mrazáku. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte dohledáním tohoto údaje na internetu podle označení spotřebiče nebo v prospektech o spotřebiči. Je možné, že dohledaný údaj o objemu je zaokrouhlený, a proto pouze přibližný.

Cvičení J-8. V případě, že ho neznáte, odhadněte objem plné tuby zubní pasty. Odhad zapište do sešitu. Kontrolu a porovnání svého odhadu proveďte s údajem uvedeným na tubě.

7 Odhad a badatelsky orientovaná výuka matematiky

V této poslední kapitole si uvedeme úlohy, které jsou vytvořeny tak, aby byly zaměřeny na badatelsky orientovanou výuku matematiky[48]. Tyto úlohy navíc obsahují ve větší či menší míře i požadavek odhadu nebo odhad při svém řešení nějakým způsobem využívají. Domnívám se, že takto pojaté úlohy vedou k utváření a rozvoji nejrůznějších klíčových kompetencí, jejichž rozvoj je podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní[49] vzdělávání považován za jeden z hlavních cílů výchovně vzdělávacího procesu. Rozvíjena je zde pak především kompetence k řešení problémů.

7.1 Náměty úloh a jejich možné řešení

Představeny jsou zde celkem 4 úlohy, které jsem sám vymýšlel a sestavoval, pouze u druhé úlohy jsem si inspiroval v diplomové práci pana Mgr. Jaroslava Pátka (2014). Zadání prvních tří úloh bylo již uveřejněno v publikaci Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015). Tato publikace vznikla, jak je uvedeno v její předmluvě (s. 5-10), jako: „*kolektivní dílo autorů v rámci grantového projektu GAJU*.“ V některých uvedených úlohách se vyžaduje při jejich řešení využití dynamického matematického programu GeoGebra, konkrétně jeho prostředí nesoucí název *Nákresna*. Dozvědět se více o tomto programu je možné například na webové stránce www.geogebra.org/home.

7.2 Úloha 1. – Zajímavé geometrické obrazce

Tato úloha je rozdělena na dvě části (část A a část B).

Zadání úlohy (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 163-164 a 166):

Část A

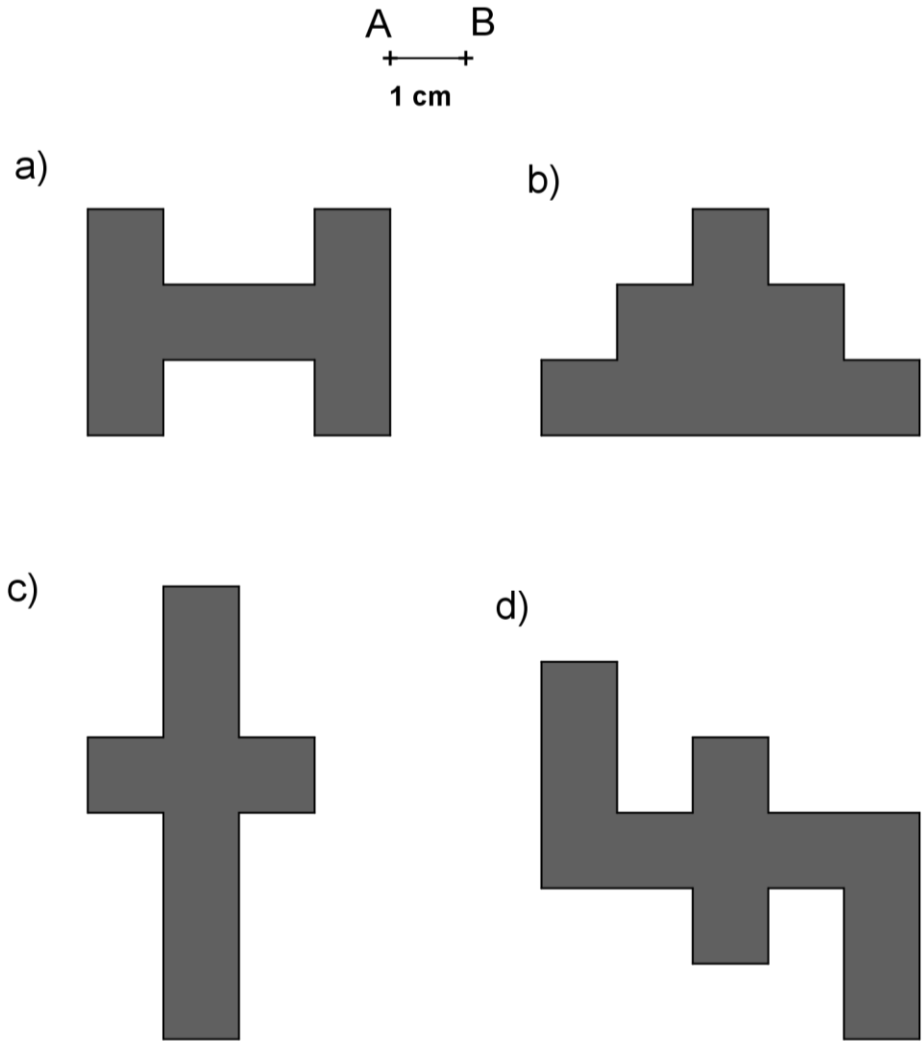
Na obrázku 48 jsou pravoúhlé geometrické obrazce a), b), c), d):

- Odhadněte, který z nich má největší obsah a který nejmenší.

[48] O tom, co je to badatelsky orientovaná výuka matematiky, se můžeme dozvědět například v úvodu publikace Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií (Pech, Činčurová, Günzel a kol, 2015).

[49] Národní ústav pro vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *nuv.cz* [online]. 2013 [cit. 5. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433.

- Odhadněte velikost obsahů jednotlivých obrazců, jestliže úsečka *AB* má délku 1 cm.
- Pro kontrolu odhadu nalezněte postup, jak u každého obrazce obsah přesně vypočítat, a vypočítejte ho podle něho. Potřebné délky si změřte z obrázku. Zápis výpočtu podrobně rozepište, nevynechávejte žádné kroky v postupu a kreslete si náčrtky.
- Určete, kolik os souměrnosti má daný obrazec. Osy souměrnosti načrtněte. Kontrolu proveďte v programu GeoGebra.

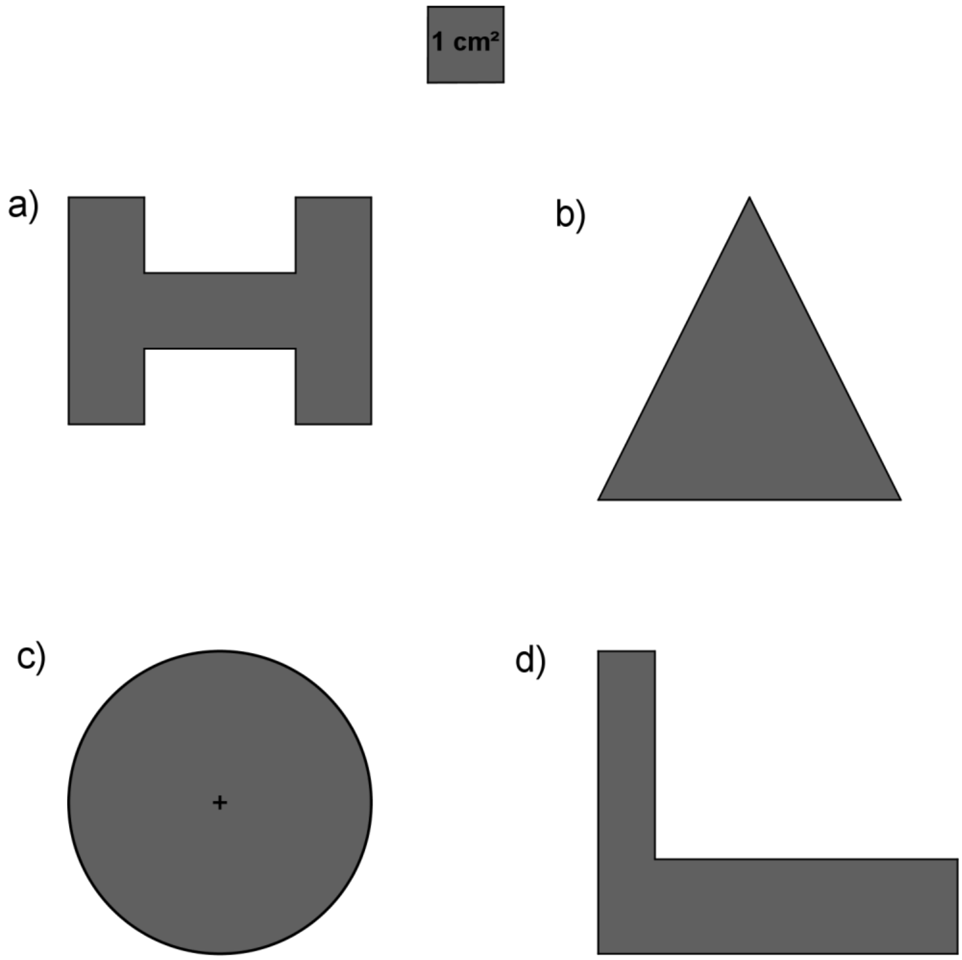


Obrázek 48: Zajímavé obrazce 1 (převzato z publikace Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 164)

Část B

Na obrázku 49 jsou geometrické obrazce a), b), c), d):

- Odhadněte velikosti obsahů jednotlivých obrazců, jestliže tento čtvereček[50] má obsah 1 cm^2.
- Dané obrazce okopírujte na čistý papír a vystřihněte je. Dále pomocí rozstříhaní obrazců do čtvercové sítě s velikostí strany čtverce 1 cm se pokuste určit jejich obsah.



Obrázek 49: Zajímavé obrazce 2 (převzato z publikace Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 166)

[50] Myšlen je čtvereček, který je vyobrazen u obrazců.

7.3 O možném řešení úlohy 1.

Při řešení této úlohy je vhodné u obou částí (A i B) využít u požadavků odhadu postupy, které jsme si uvedli v kapitole *Odhad měrné vlastnosti geometrického útvaru*, konkrétně postupy pro 2-dimenzionální odhad. Pro snadnější tvorbu odhadu je v části A uvedena úsečka délky 1 cm a v části B čtvereček s obsahem 1 cm^2. Tyto mohou být využity například u postupů odhadování, které jsou založeny na porovnávání. Třetí úkol části A je zadán tak, aby z jeho řešení bylo patrné, jaký postup byl zvolen. Může být zvolen například některý z těchto tří postupů (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 168-169):

1. *Rozdělení obrazce na obdélníky a následný výpočet součtu jejich obsahů.*
2. *Rozdělení obrazce na čtverečky o obsahu 1 cm^2 a určení jejich počtu.*
3. *Dokreslení (doplnění) obrazce na obdélník nebo čtverec, vypočtení jeho obsahu a odečtení obsahu útvarů, které netvoří obsah požadovaného obrazce.*

Pro snadnější kontrolu řešení posledního úkolu části A by bylo vhodné, aby tyto obrazce byly již vytvořeny i v prostředí *Nákresny* programu Geogebra. Ke kontrole určeného počtu a poloh os souměrnosti pak může posloužit vhodně užitý nástroj tohoto programu nesoucí název *Osová souměrnost*. Řešení posledního úkolu části B, které je do značné míry experimentální, má v zásadě opět podobu tvorby odhadu, kde se využívá čtvercové sítě. Pro doplnění si uvedeme, jaké jsou obsahy jednotlivých obrazců v části A: a) 8 cm^2, b) 9 cm^2, c) 8 cm^2, d) 11 cm^2 a v části B: a) 8 cm^2, b) 12,57 cm^2 (zaokrouhleno na setiny), c) 8 cm^2, d) 8 cm^2. (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015)

7.4 Úloha 2. – Plocha rybníku

Při vytváření této úlohy jsem se inspiroval v diplomové práci pana Mgr. Jaroslava Pátka (2014).

Zadání úlohy (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015: s. 170-172):

Tvorba plánku:

1. Na internetovém portálu www.mapy.cz v maximalizovaném okně internetového prohlížeče vyhledejte rybník s názvem Závratský, ležící u vesničky s názvem Závraty, která se nachází jihovýchodně od Českých Budějovic. GPS souřadnice přibližného středu rybníku jsou 48°56.52785’N, 14°23.00055’E.

2. Zobrazte daný rybník na obrazovce počítače tak, aby na ní byl celý, velikost dvou dílků grafického měřítka byla 100 m a rybník nebyl daleko od grafického měřítka, které se nachází v levém dolním rohu zobrazeného plánu.
3. Pomocí tlačítka Print screen zaznamenejte plán tohoto rybníku spolu s odpovídajícím grafickým měřítkem v popsané podobě a vyvolejte ho jako obrázek formátu PNG v programu Malování (popř. Gimp, atd.). Obrázek nijak dále neupravujte.
4. Tento obrázek (plánek) vložte do programu GeoGebra. (Úpravy – Vložit obrázek z ...).

Úkoly k plánku:

- Odhadněte skutečnou výměru rybníku.
- Pokuste se o další odhad této výměry pomocí programu GeoGebra s vloženým plánkem rybníku.

Pracovní část úlohy:

Část A

- Vytiskněte si vytvořený plánek rybníku s daným měřítkem na papír a ten přilepte na připravenou desku tvaru hranolu tak, aby celá plocha plánu rybníku byla na jedné její stěně.
- Vyřízněte z této desky kolmé těleso s podstavami tvaru rybníku.
- Navrhněte a zrealizujte postup, jak vypočítat výměru rybníku pomocí tohoto tělesa.

Část B

- Nyní jsou k dispozici vytištěné plánky (obrázek 50 a obrázek 51) dvou rybníků se stejným grafickým měřítkem. První rybník je již známý Závratský a druhý (nepřeškrtnutý) je nějaký rybník z Českých Budějovic. Nejprve odhadněte, který z rybníků má větší výměru a pak navrhněte postup, jak pomocí těchto plánků odhad ověřit. Můžete opět využít princip kolmého tělesa s podstavami tvaru rybníku jako v první části.
- Pokuste se dohledat název druhého rybníku.

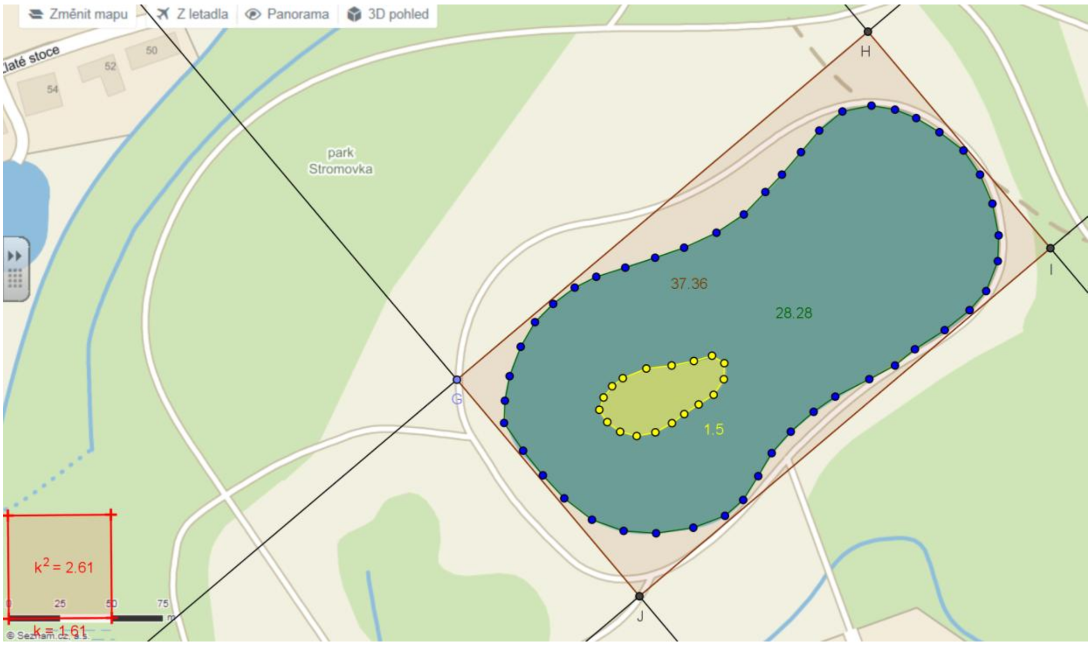
Obrázek 50: Závratský rybník (převzato z publikace Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 172)

Obrázek 51: Neznámý rybník (převzato z publikace Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015, s. 172)

7.5 O možném řešení úlohy 2.

Popsaný způsob tvorby plánku rybníku učí řešitele postupovat krok po kroku podle návodu. Vytvořený plánek je nutným předpokladem pro další úkoly, proto by se osoba, která zadala úlohu měla ujistit, zda každý řešitel dospěl k popsanému cíli.

Řešitel se podle zadaných úkolů nejprve pokusí odhadnout skutečnou výměru tohoto rybníku při znalosti měřítka plánku. Pak navrhne a zrealizuje postup, jak by šla tato výměra odhadnout pomocí programu GeoGebra. Zde spatřuji jeden z badatelských aspektů této úlohy. Osobně mě napadají 3 postupy, které do značné míry využívají uvedené postupy pro odhad obsahu geometrických útvarů. Zaprvé využít obsahy dvou obrazců vytvořených na principu opsaného a vepsaného (respektive obsaženého a obsahujícího) obrazce, za druhé využít čtvercovou síť, kterou je možné v GeoGebře zobrazit a za třetí využít nástroj *Mnohoúhelník*, pomocí kterého se po obvodu rybníku vytvoří množství bodů, které budou vrcholy mnohoúhelníku. Třetí variantou jsem se inspiroval v diplomové práci pana Mgr. Jaroslava Pátka (2013). Za nejobtížnější moment při řešení této úlohy považuji převod číselné hodnoty velikosti plochy vyjádřené v GeoGebře na velikost plochy ve skutečnosti. Zde je zapotřebí využít délkového grafického měřítka v zobrazeném plánu a vytvořit nad úsečkou odpovídající délce 100 m čtverec. Takto vzniklý čtverec bude mít obsah v jednotkách GeoGebry a přitom bude odpovídat ve skutečnosti ploše 10 000 m^2, tedy jednomu hektaru. Myšlenku prvního a třetího postupu i tvorbu čtverce potřebného k převodu jednotek zachycuje obrázek 52.



Obrázek 52: Obsahující obrazec, mnohoúhelník a čtverec

Dále následuje popsaná pracovní část A úlohy, která opět představuje badatelský záměr. Řešitel s pomocí kolmého tělesa s podstavami tvaru rybníku navrhne a zrealizuje postup, kterým vypočítá výměru rybníku. Opět je více postupů, jak toho dosáhnout, například může změřit objem vody tělesem vytlačené, pokud celé těleso ponoří. Tak zjistí jeho objem. Pak změří jeho výšku a vypočítá z těchto údajů obsah podstavy. Podobně může využít i výšku, váhu a hustotu materiálu tělesa. Nebo může těleso zvážit a vyříznout ze stejné desky hranol se stejnou výškou jako dané těleso a s podstavami tvaru čtverce s hranou délky např. jednoho dílku grafického měřítka. Tím zjistí, kolik „váží“ jeden čtvereček s délkou strany jednoho dílku grafického měřítka a pak může na základě těchto údajů vypočítat obsah podstavy. Postupy navrhované pro pracovní část (A) této úlohy využívají znalosti i z oblasti fyziky, a proto je možné pomocí této úlohy rozvíjet i mezipředmětové vztahy. V situaci, kdy by bylo náročné nebo nežádoucí od žáků požadovat vytvoření zmíněných modelů těles, je možné, aby jim byly předloženy již hotové.

Druhá pracovní část (B) této úlohy navazuje na část první, na které je do určité míry závislá. Vyhledání názvu druhého rybníku se předpokládá na základě indicií vyplývajících z plánku (názvy okolních ulic, tvar rybníku atd.). Na samý závěr by bylo vhodné zařadit diskusi nad výsledky řešení a zhodnotit různé postupy. Zaměřit by se mělo hlavně na to, kde a jak vznikají v jednotlivých postupech nepřesnosti (odchylky). „*Kontrolu, jak přesné byly odhady, lze provést vyhledáním výměr příslušných rybníků a to například na webových stránkách Českého úřadu zeměměřického a katastrálního - www.cuzk.cz*“ (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015: s. 171).

7.6 Úloha 3. – Kolo auta

Zadání úlohy (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015: s. 173):

Vyberte si takový osobní automobil ve vaší rodině (popř. u známého s jeho souhlasem), aby na něm byla celá přední kola, tedy ráfky s pneumatikami a aby na pneumatikách byly vyznačeny jejich údaje ve standardizovaném formátu např. 205/55 R16[51] (formát používaný v technickém průkazu vozidla). Tyto údaje si opište.

Úkoly:

- Odhadněte poloměr předního kola i jeho obvod.
- Změřte obvod kola pomocí provázku, který pak přiložte k měřidlu délky. Dopočítejte poloměr kola. Porovnejte vypočítané a naměřené hodnoty s vaším odhadem.

[51] Pneumatika. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2006. [cit. 22. 5. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pneumatika.

- Zjistěte, co znamená značení na pneumatice ve formátu např. 205/55 R16.
- Určete výpočtem obvod a poloměr vámi vybraného kola s novou pneumatikou z vyznačených údajů na pneumatice.
- A nyní se zaměřte na to, jak sjetí vzorku pneumatiky zkresluje naměřenou ujetou vzdálenost na počítadle ujeté vzdálenosti. Nejprve odhadněte, zda při jízdě se sjetou pneumatikou bude naměřená ujetá vzdálenost počítadlem větší nebo menší než skutečně ujetá vzdálenost, pokud je počítadlo nastaveno na obvod nové pneumatiky. Dále navrhněte a zrealizujte postup, kterým zjistíte, o kolik metrů více nebo méně bude na tomto měřiči ujeté vzdálenosti při ujetí 1 000 km, pokud je vzorek pneumatiky sjetý o 0,5 cm. Použijte k výpočtu údaje uvedené na pneumatice vámi zvoleného auta.

7.7 O možném řešení úlohy 3.

Řešitel by měl pomocí vhodné literatury a internetu dospět k tomu, že značení na pneumatice ve formátu např. 205/55 R16[52] znamená:

- *205 - nominální šířka pneumatiky v milimetrech, od bočnice k bočnici (205 mm),*
- *55 - poměr nominální výšky pneu k nominální šířce v procentech,*
- *R - typ konstrukce kostry:*
  - *R - radiální,*
  - *D - diagonální,*
  - *B - bias belted*
- *16 - nominální průměr příslušného disku v palcích[53] - vnitřní průměr pneu.*

Na základě těchto informací by měl řešitel pak vypočítat obvod a poloměr neopotřebované pneumatiky, kterou si vybral. Provedení výpočtu při určování rozdílu naměřené a skutečné ujeté vzdálenosti může mít například následující podobu. Mějme pneumatiku s uvedeným značením 205/55 R16. Přibližný poloměr kola s novou pneumatikou je tedy $(205 \cdot 0{,}55 + (16 : 2) \cdot 25{,}4) = 112{,}75 + 203{,}2 = 315{,}95$ mm. Po zaokrouhlení 316 mm. Obvod kola je pak $3{,}14 \cdot 2 \cdot 316 = 1\,984$ mm, zaokrouhleno$1\,984$ mm. Při ujetí $1\,000\,000\,000$ mm (1 km) se otočí přibližně

[52] Pneumatika. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online], 2006. [cit. 22. 5. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pneumatika.

[53] 1 palec = 25,4 mm.

$504\,032{,}26$-krát. Přibližný poloměr kola se sjetou pneumatikou o $0{,}5$ cm je $315{,}95 - 5 = 310{,}95$ mm, zaokrouhleno 311 mm. Obvod kola je pak tedy $3{,}14 \cdot 2 \cdot 311 = 1\,953{,}08$ mm, zaokrouhleno $1\,953$ mm. Při ujetí $1\,000\,000\,000$ mm se otočí přibližně $512\,032{,}77$-krát. Při jízdě se sjetou pneumatikou se tedy kolo otočí o $(512\,032{,}77 - 504\,032{,}26) = 8\,000{,}51$-krát, zaokrouhleně o $8\,000$-krát víc než při jízdě s novou pneumatikou. Naměřená vzdálenost na tachometru bude tedy přibližně o $8\,000 \cdot 1{,}984 = 15\,872$ metrů větší (cca 16 km), protože počítadlo ujeté vzdálenosti je většinou nastavené na obvod nové pneumatiky.

Na závěr nebo během této úlohy by bylo jistě vhodné zařadit další doplňující a rozšiřující informace k této podobě technického vzdělávání, a to formou buď výkladu, nebo úkolů. Měly by být zaměřeny například na specifickou terminologii vztahující se k popisu kola, na to, jaké další informace lze z pneumatiky vyčíst, jaký je rozdíl mezi letními a zimními pneumatikami a jaká je k tomu příslušná zákonná úprava jejich používání, kdy a jak se provádí výměna pneumatiky, jaké jsou tvary dezénu, jaké jsou závady pneumatik, čím jsou způsobeny atd. Jak je vidět, tak i v této úloze je velké množství příležitostí uplatnit mezipředmětové vztahy.

7.8 Úloha 4. – Tloušťka papíru

Touto úlohou jsem se inspiroval v učebnici fyziky (Rauner, 2004, s.25), kde se přibližná tloušťka drátku, která byla menší než 1 mm, určovala pomocí několikanásobku této tloušťky, který byl vytvořen navinutím drátku na tužku tak, že jednotlivé závity byly v těsné blízkosti a pomocí evidování počtu těchto závitů.

Zadání:

Vezměte si od vašeho vyučujícího připravený balík, který obsahuje 500 listů stejných papírů formátu A4 a proveďte tyto úkoly:

- Pohledem na jeden list papíru z toho balíku odhadněte jeho tloušťku. Odhad uveďte v podobě desetinného čísla v jednotce milimetr.
- Dále se pokuste vymyslet a zrealizovat postup, kterým by bylo možné ověřit tento odhad tloušťky, pokud máte k dispozici celý balík těchto papírů.

7.9 O možném řešení úlohy 4.

Tato úloha vychází ze z faktu, že i tenký papír formátu A4 je ve skutečnosti kvádr s jedním rozměrem mnohonásobně menším, než jsou zbylé dva[54]. První úkol, tedy odhad může být proveden na základě porovnání tloušťky papíru s představou délky jednoho milimetru. Již při tomto porovnávání může řešitele napadnout klíčová myšlenka, tedy kolik papíru by bylo potřeba položit na sebe, aby vytvořily tloušťku například 1 mm. Rozvinutí a zrealizování této myšlenky je už vlastně řešení druhého úkolu. K tomu se jim nabízí několik možností. Například mohou naskládat na vodorovnou plochu jednotlivé papíry na sebe tak, aby dosáhli jimi požadované výšky, která je tvořena tloušťkami listů papíru. Požadovaná výška muže být třeba 1 mm, vhodnější by však bylo, aby byla větší, například 1 cm, 2 cm atd. Určení tloušťky jednoho listu papíru pak provedou, když vydělí tuto výšku počtem papírů potřebných k jejímu vytvoření. Rychlejší postup založený na stejném princip je, že nejprve změří rozměr celého balíku (500 listů), který je tvořen tloušťkami jednotlivých listů papíru, a pak takto zjištěný rozměr vydělí počtem listů v balíku, tedy číslem 500. Po případném zaokrouhlení výsledku tak získají přibližně velikost tloušťky jednoho papíru.

[54] 210 mm a 297 mm.

8 Výzkumné šetření

Dne 7. 1. 2015 byla otestována část A *Úlohy 1. – Zajímavé geometrické obrazce* na výběrové třídě sedmého ročníku základní školy Matice školské v Českých Budějovicích.[55] Počet žáků v této třídě v době testování byl 18. Testování proběhlo v 45-minutové hodině matematiky. Na samotné vypracování prvních třech úkolů měli žáci 20 minut. Testování proběhlo anonymně, a to tak, že každý žák dostal náhodně zadání, v jehož pravém horním rohu bylo zapsáno některé z čísel od 1 do 18, které pouze opsali i do pravého horního rohu přiloženého papíru, na který zadané úlohy vypracovávali.

Pro upřesnění celé situace je potřeba ještě zmínit, že žáci dopředu věděli pouze to, že v dané hodině matematiky přijde pro ně dosud neznámá osoba, která jim předloží úlohy. Budou je muset vypracovat, ale nebudou hodnoceny známkou a jejich vypracování nebude mít žádný vliv na známku udělovanou na vysvědčení. Dopředu tedy žáci neznali ode mě, ale ani od jejich paní učitelky matematiky tu skutečnost, že dané úlohy budou zaměřeny na odhad. Navíc jsem hned při sjednávání testování požádal, aby žáci nebyli na odhad nijak připravováni v souvislosti s tímto testováním.

8.1 Výběr úlohy a cíl výzkumného šetření

Část A první úlohy byla vybrána k testování jednak vzhledem k časovému limitu, o kterém jsem dopředu věděl, že mi bude poskytnut, jednak proto, abych si prakticky ověřil, jaké odhady žáci základní školy vytvářejí a také (především) i proto, abych zjistil, jaké postupy jsou schopni vymyslet a realizovat, aby přesně vypočítali obsahy jednotlivých obrazců. Tyto poslední dva požadavky na výběr úlohy se staly zároveň i hlavními cíly tohoto malého výzkumného šetření. Malého proto, že si uvědomuji, že testovaný vzorek je příliš malý na jakékoli zobecňování nebo vyvozování obecně platných závěrů. To ale ani není záměrem, tím je spíše jen prostá konfrontace teorie s praxí. Jistě zajímavé by bylo pokusit se zmapovat i postupy, které využívají žáci při odhadování, to ale nebylo záměrem tohoto testování. Ani by to nebylo možné

[55] Testování na této škole bylo umožněno prostřednictvím Mgr. Terezy Suchopárové, za což jí děkuji.

ze získaných materiálů zjistit, protože žáci zapisovali jen odhady velikostí obsahů obrazců.

8.2 Průběh testování

Na začátku hodiny proběhlo uvítání a seznámení s průběhem testování. To trvalo cca 10 minut, během kterých bylo každému žákovi rozdáno zadání, které mělo výše popsanou podobu. Zadání bylo žákům vysvětleno a byli upozorněni na skutečnost, že se jedná o anonymní a neznámkované cvičení, kde je cílem vyzkoušet jejich schopnost odhadovat a bádat. Slovům jako test nebo prověrka jsem se záměrně vyhnul, protože se domnívám, že by mohla některé žáky vlivem předchozí zkušenosti stresovat a směřovat tak k určitému stereotypnímu chování. K dispozici měli kromě zadání ještě čistý papír, psací a rýsovací potřeby. Byli obeznámeni s tím, že do zadání i na čistý papír si mohou kreslit náčrtky a že všechny prováděné výpočty mají zapisovat na papír. Jednotlivé úkoly měli vypracovat v zadaném pořadí a pro přehlednost je oddělovat souvislou čarou. Dále se k nim již nesměli vracet. Takové pokyny jsem zvolil proto, aby neopravovali své odhady podle vypočítaných hodnot, i přesto se domnívám, že se tak v některých případech stalo a že někteří hned na začátku vypočítali přesné hodnoty, aniž by se pokusili o odhad.

Po zadání instrukcí k úloze a po zodpovězení vyskytnuvších se dotazů dostali pokyn k řešení. Na žácích hned na začátku bylo vidět, že nejsou zvyklí na požadavek odhadu a že jim dělá problém. Ve fázi, kdy vymýšleli a aplikovali postupy výpočtu obsahů jednotlivých obrazců jim bylo několikrát zdůrazněno, aby své postupy podrobně rozepisovali, nevynechávali žádné kroky v postupu a kreslili si náčrtky. To z toho důvodu, že jsem viděl, jak někteří žáci zapisují pouze některé mezivýpočty nebo rovnou pouze jen výsledky. Během hodiny jsem zaznamenal a napomenul i několik žáků, kteří měli snahu si radit. Částečně problematické bylo rozdílné pracovní tempo jednotlivých žáků. Zároveň však musím podotknout, že všichni žáci na dané úloze pracovali a snažili se vymyslet nějaká řešení. Všichni testovaní byli s prací hotovi cca 15 minut před koncem hodiny a již si jen své řešení procházeli. Proto bylo testování ukončeno. Vybral jsem zadání i k nim přiložené papíry s výpočty a náčrty. Následně jsme si na tabuli ukázali několik postupů, jak by se mohly počítat obsahy daných obrazců a krátce jsme o nich diskutovali. Některé navrhli sami žáci.

Jelikož zbyl ještě nějaký čas, vyzval jsem žáky, aby se pustili i do rozšiřujícího úkolu, kterým bylo ověření počtu a poloh os souměrnosti jednotlivých geometrických útvarů. K dispozici měli tablety s nainstalovaným programem GeoGebra. Do úkolu se opět pustili všichni žáci s velkým nadšením, ale bylo vidět, že je pro ně náročný i přesto, že osovou souměrnost již znali z 6. třídy a osově souměrné útvary a osu souměrnosti zopakovali předchozí hodinu matematiky. Nejprve si žáci načrtli osy do zadání a pak si sami v GeoGebře ve čtvercové síti vytvořili dané obrazce. Následně, jelikož si už nevěděli rady, jsem jim musel na interaktivní tabuli ukázat nástroj „*Osová souměrnost*“ v tomto programu a i postup, jak ho využít při hledání os souměrnosti daných útvarů. I když jsem postup vysvětloval po částech, tak nikoho z žáků nenapadla v průběhu vysvětlování další část nebo konečné využití tohoto nástroje. Na druhou stranu přiznávám, že již nebylo mnoho času a chtěl jsem, aby si žáci požadované ověření vyzkoušeli alespoň na několika obrazcích. Pro ukázku jsem zvolil postup, kdy se vytvoří libovolně umístěná přímka a přes ni jako osu souměrnosti se zobrazí daný útvar. Dále se pak pohybem této přímky hledalo a ověřovalo takové její umístění, aby byla osou souměrnosti daného útvaru. Další možností by bylo zvolit prvně přímku v místě, kde se předpokládá osa souměrnosti daného útvaru a pak přes ni v osové souměrnosti sestrojit obraz daného útvaru.

Práce s žáky (testování) byla poměrně klidná. Během testování jsem se pohyboval po třídě, kontroloval jejich činnost a upřesňoval zadání, jak na vyžádání, tak z vlastní iniciativy. Aktivita žáků byla na vysoké úrovni. Během testování, hlavně na jeho začátku, bylo na žácích vidět, že na požadavek odhadu nejsou moc zvyklí a nejsou ho tedy zvyklí ani vytvářet.

8.3 Výsledky testování

Výsledky tohoto testování jsou uvedeny popisnou formou v publikaci *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií* (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015), přesněji v podkapitole 12.2.3 s názvem *Testování části A*, a proto si zde uvedeme jen stručnější popis výsledků prvních třech úkolů této části, které jsou zaměřeny na odhad a jeho kontrolu. Na začátek si ještě připomeňme, že danou část (A) úlohy *Zajímavé geometrické obrazce* řešilo 18 žáků.

Tabulka 3 ukazuje, jak žáci řešili první úkol, tedy u kterého obrazce odhadli, že má největší obsah (označeno – O) a u kterého odhadli, že má nejmenší obsah (označeno – X). Jak je vidět, tak všech 18 žáků odhadlo shodně, že největší obsah má obrazec d). Dále pak za obrazec s nejmenším obsahem odhadlo 8 žáků pouze obrazec a), 7 žáků pouze obrazec c) a jen 3 žáci současně obrazce a) i c).

Tabulka 3: Výsledky řešení prvního úkolu

Obrazec	Řešitel																	
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**
a)	X	X	X	X		X	X	X		X		X		X	X			
b)																		
c)			X		X				X	X	X	X	X			X	X	X
d)	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Tabulka 2 ukazuje, jak žáci řešili druhý úkol, tedy jaké hodnoty obsahů v cm^2 odhadovali u jednotlivých obrazců. Devět žáků odhadlo přesné hodnoty[56] u všech čtyř obrazců. Zajímavé je ale to, že u třech žáků (11., 16. a 17.) byl odhad provedený v prvním úkolu částečně v rozporu s odhadovanými velikostmi obsahů obrazců v druhém úkolu, protože číselně nejmenší hodnotu obsahu určili tito žáci u jiného obrazce, než u kterého v prvním úkolu odhadli, že má nejmenší obsah.

Tabulka 4: Výsledky řešení druhého úkolu

Obrazec	Řešitel																	
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**
a)	6	8	8	8	8	8	8	8	8	8	18	8	8	8	8	16	18	14
b)	8	9	9	11	10	9	9	9	9	9	16	9	9	8	9	18	15	17
c)	8	8	8	9	7	8	8	8	8	8	18	8	8	8	8	20	18	12
d)	11	11	11	12	11	10	11	11	11	11	24	11	11	11	11	25	24	18

[56] Obsahy jednotlivých obrazců, v části A: a) 8 cm^2, b) 9 cm^2, c) 8 cm^2, d) 11 cm^2.

Záměrem třetího úkolu byla kontrola řešení předchozích dvou úkolů, ale také i částečně badatelská činnost, neboť žáci sami vymýšleli vhodný postup, jak u každého obrazce obsah přesně vypočítat, právě za účelem požadované kontroly. Z testování vyplynulo, že žáci využívali různé postupy, nejčastěji však ony 3 postupy, které byly uvedeny v podkapitole *O možném řešení úlohy 1.* (Pech, Činčurová, Günzel a kol., 2015: s. 168-169):

1. *Rozdělení obrazce na obdélníky a následný výpočet součtu jejich obsahů.*
2. *Rozdělení obrazce na čtverečky o obsahu 1 cm^2 a určení jejich počtu.*
3. *Dokreslení (doplnění) obrazce na obdélník nebo čtverec, vypočtení jeho obsahu a odečtení obsahu útvarů, které netvoří obsah požadovaného obrazce.*

Při aplikaci některého z těchto třech postupů bylo dosaženo, až na jedno uplatnění, vždy správných velikostí obsahů. Dále byly využívány další postupy, které nevedly k určení správných velikostí obsahů. Ty můžeme rozdělit do dvou kategorií:

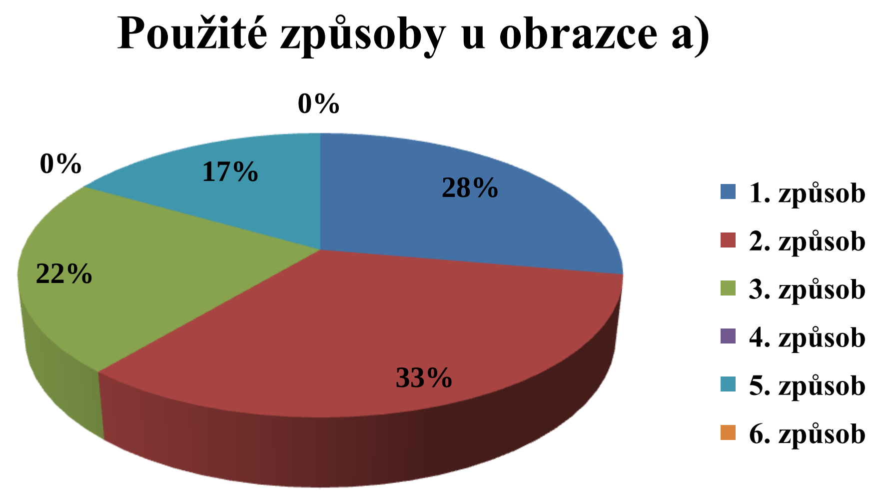
4. Záhadný nejednoznačně interpretovatelný postup.
5. Součin délek všech stran daného obrazce.

Do celkového výčtu všech možností je potřeba uvést ještě poslední možnost, tedy že nebyl zaznamenán žádný postup ani velikosti obsahu:

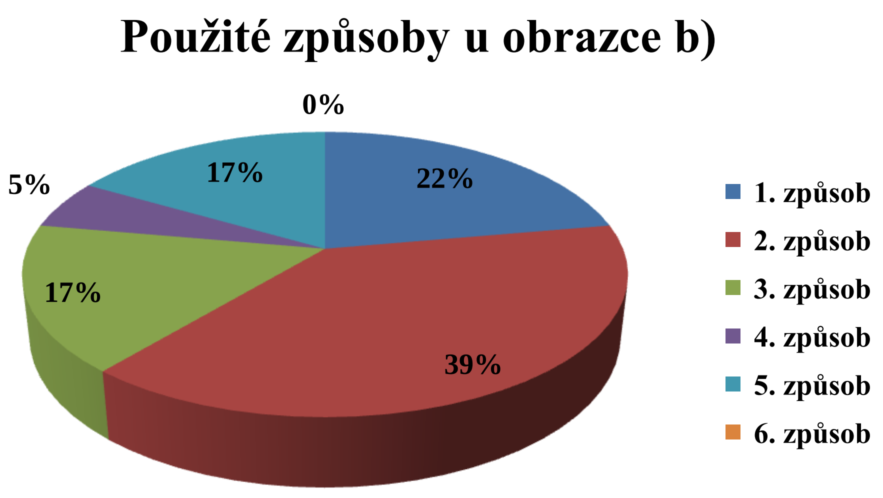
6. Žádný.

Tabulka 5: Četnost výskytu jednotlivých postupů

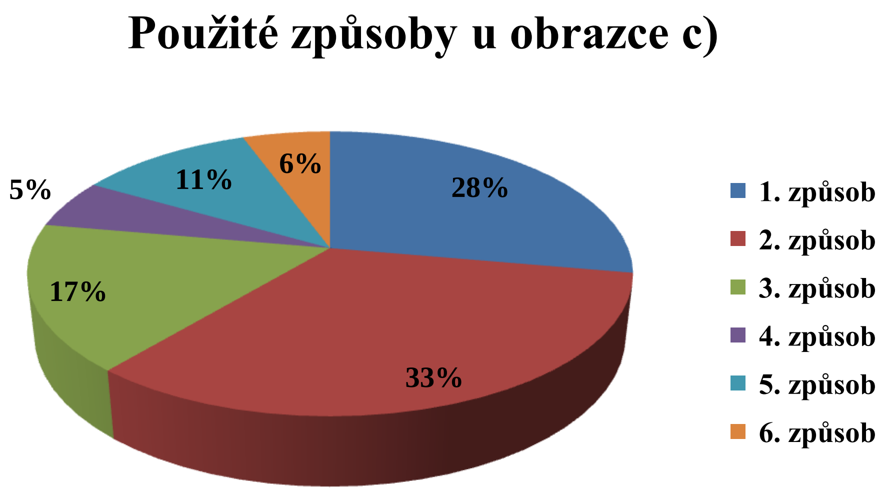
Způsob	Obrazec				Souhrnně
	a)	b)	c)	d)	
1.	5	4	5	3	17
2.	6	7	6	9	28
3.	4	3	3	2	12
4.	0	1	1	1	3
5.	3	3	2	2	10
6.	0	0	1	1	2



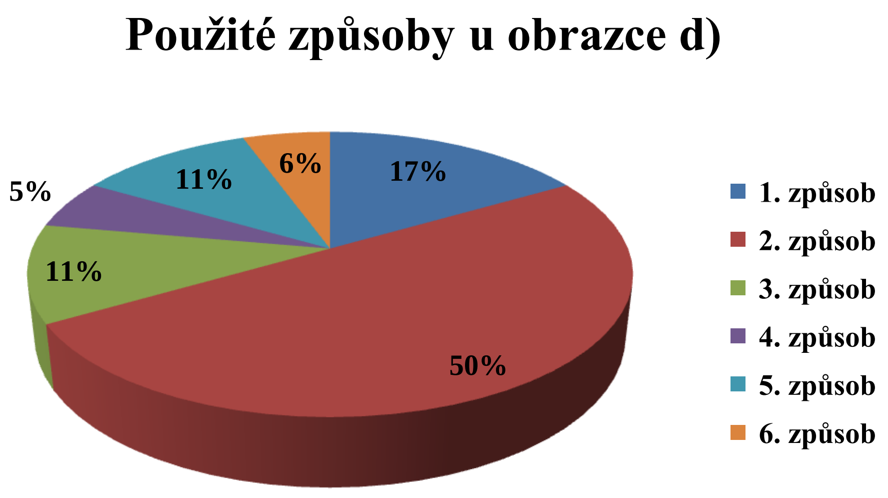
Graf 1: Použité způsoby u obrazce a)



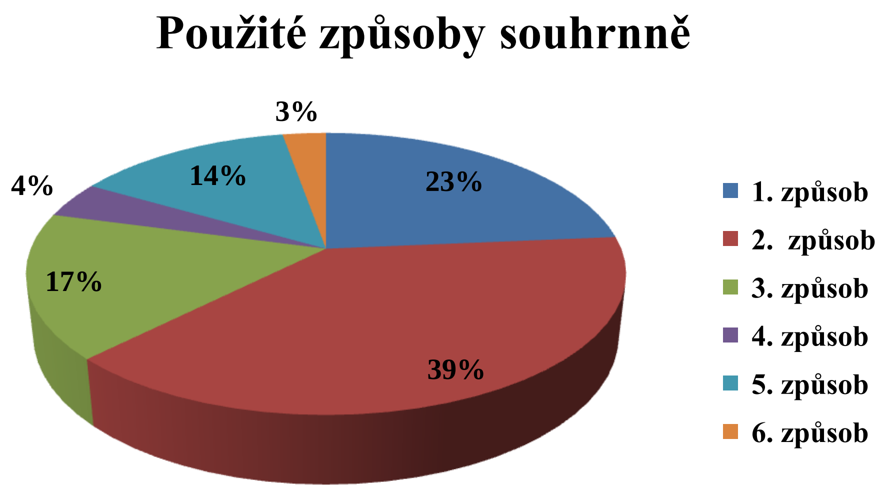
Graf 2: Použité způsoby u obrazce b)



Graf 3: Použité způsoby u obrazce c)



Graf 4: Použité postupy u obrazce d)

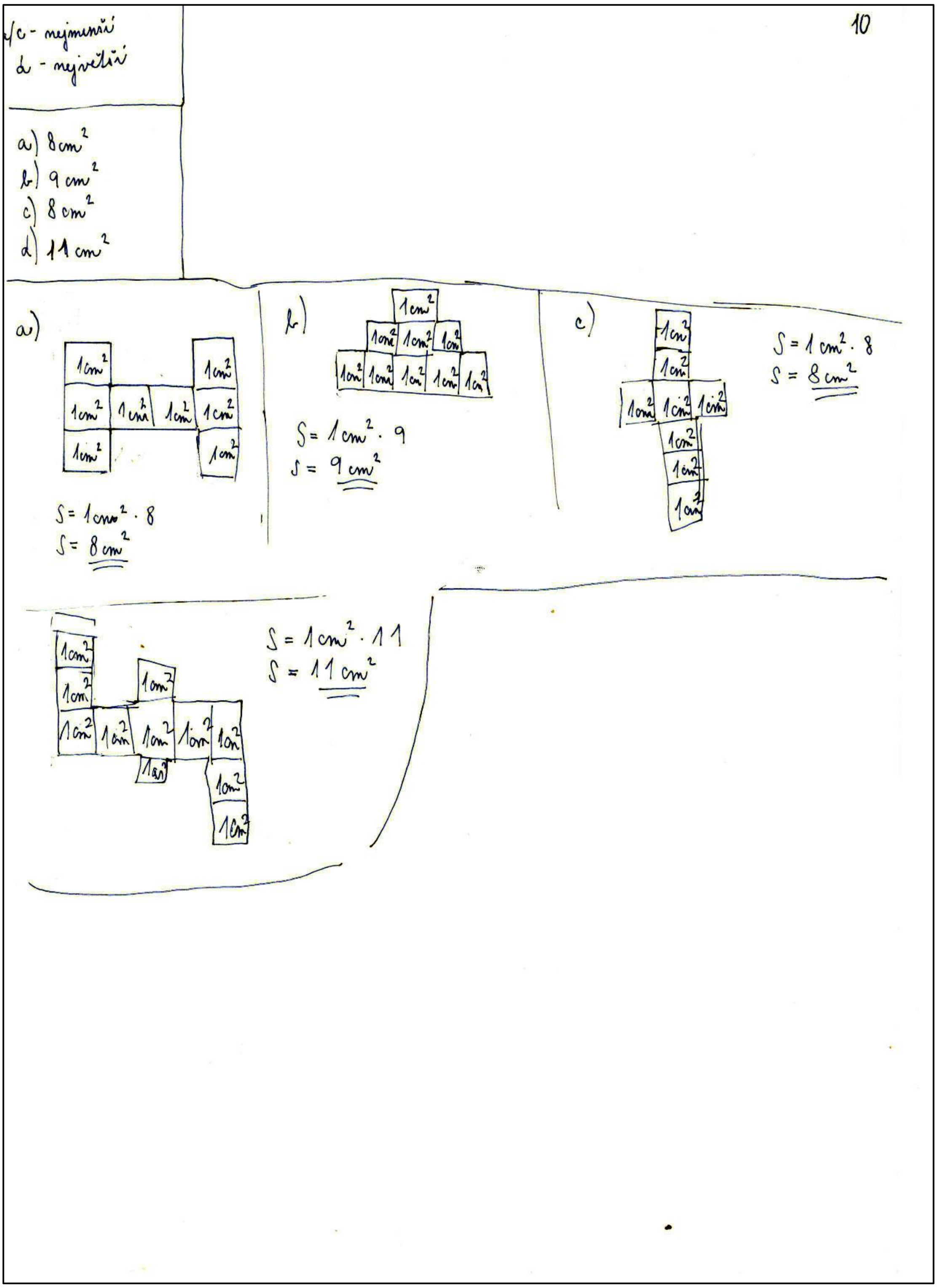


Graf 5: Použité postupy souhrnně

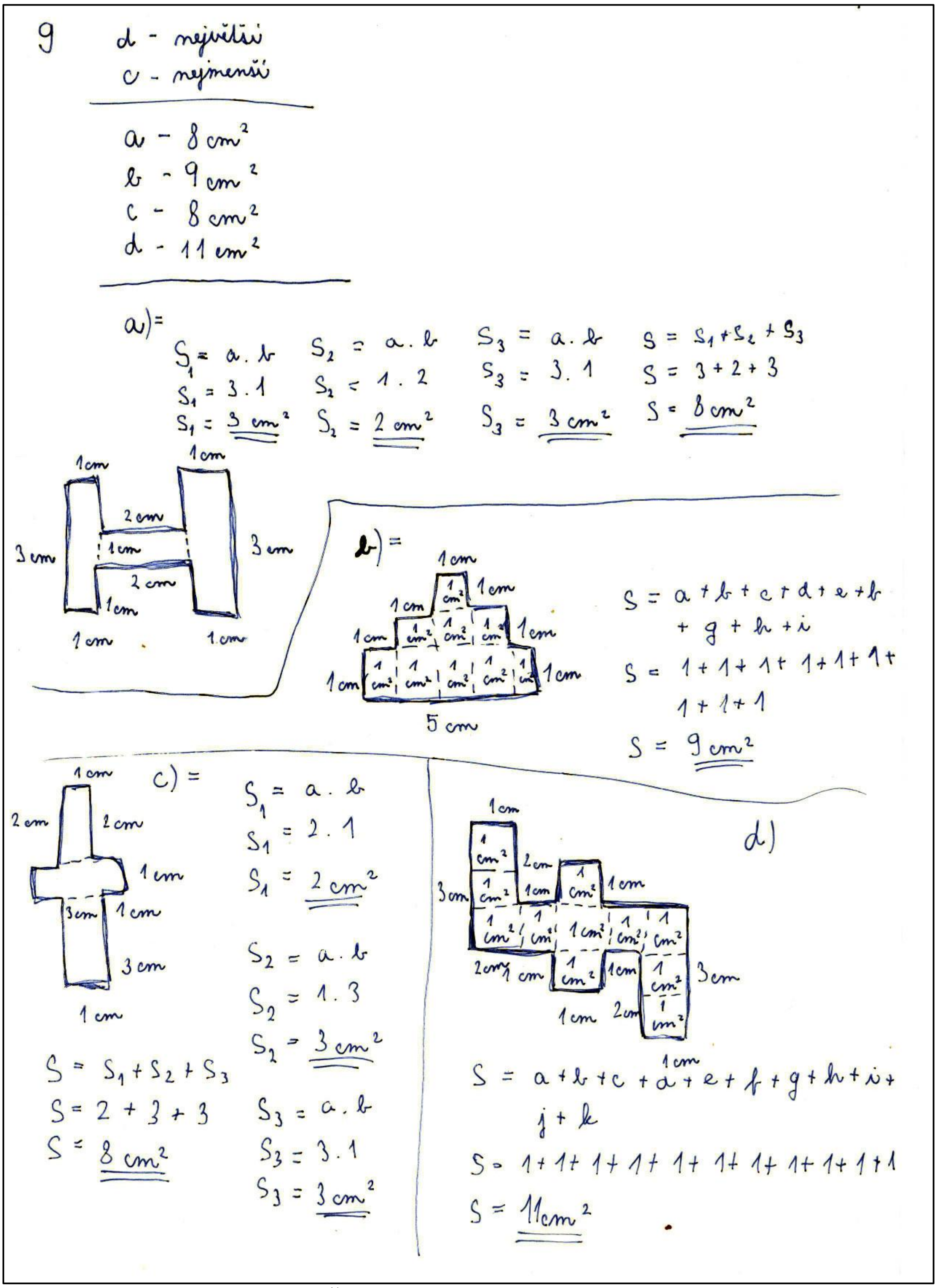
Jak je vidět z tabulky 5 i diagramu 5, tak nejvíce používaný způsob byl druhý. Zajímavá je ale i četnost 5. způsobu. Domnívám se, že příčinou aplikace tohoto chybného postupu byla snaha žáků upravit (zobecnit) na zadané obrazce vzorec pro výpočet obsahu čtverce nebo obdélníku, který je založen na součinu délek dvojice sousedních stran. Do určité míry by bylo tedy možné v aplikaci tohoto postupu vidět i jeden z problémů, který řeší didaktika matematiky a tím je formalizmus. Domnívám se totiž, že došlo k chybnému prosazení formy výpočtu obsahu přesněji myšlenky, že obsah se vždy vypočítá jako součin délek všech sousedních na sebe kolmých stran.

Pro doplnění informací k výsledkům testování této třetí úlohy bych jen ještě upozornil, že byly zaznamenány i některé chyby nebo nepřesnosti ve formálním zápisu.

Na závěr tohoto vyhodnocování si ještě pro ilustraci ukážeme naskenovaná řešení dvou žáků, kde jsou dobře vidět řešení třetího úkolu. Nejprve si uvedeme řešení žáka (obrázek 53), který v tomto úkolu použil u všech čtyř obrazců pokaždé stejný postup, a to z uvedeného výčtu postup druhý, a pak si uvedeme řešení (obrázek 54) žáka, který použil dva postupy (1. a 2.), které u jednotlivých obrazců střídal.



Obrázek 53: Řešení třetího úkolu pouze jedním způsobem



Obrázek 54: Řešení třetího úkolu střídavě dvěma postupy

8.4 Závěr testování

Jak už bylo uvedeno, testování proběhlo na malém vzorku, a proto se neodvažuji dělat žádné obecné závěry. Jakých výsledků bylo dosaženo vzhledem k cílům tohoto testování je dobře patrné z předešlé podkapitoly *Výsledky testování*. Rád bych ale ještě jednou zopakoval ten poznatek, který jsem získal při pozorování průběhu testování, a to že žáci byli požadavkem odhadu zaskočení, což mě ještě více utvrzuje v názoru, že odhadování je potřeba záměrně a systematicky procvičovat.

Pokud bych toto testování někdy opakoval, zvolil bych spíše postupné zadávání úkolů než hromadné a po vypracování daného úkolu bych si řešení vždy vybral, aby bylo více zajištěno, že nebudou odhady opravovány na základě přesných výpočtů.

9 Závěr

Hlavním cílem této diplomové práce bylo vytvořit pomocný výukový materiál zabývající se matematickým odhadem z prostředí základní školy, který by dával návod, jak odhady vytvářet a zároveň by poskytoval i množství příkladů na procvičení. Domnívám se totiž, že česky psaných publikací, které se touto problematikou systematicky zabývají, je velice málo.

Asi nejvíce obtížné pro mě bylo popsat postupy tvorby odhadů tak, aby u nich byla dodržena terminologická přesnost a zároveň aby byly i srozumitelně vysvětleny. Navíc musím přiznat, že teprve až při samotném tvoření této práce jsem si uvědomil, o jak rozsáhlé a rozmanité téma se jedná.

Na úplný závěr bych si přál, aby tato práce našla praktické uplatnění a stala se tak užitečnou pomůckou nejednomu učiteli matematiky na základní škole.

10 Literatura a další zdroje:

Literatura:

1) Bartsch, H.-J. (1996): *Matematické vzorce*. 3. vyd. Praha: Mladá fronta.
2) Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009): *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus.
3) Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M. (2009): *Matematika pro 4. ročník základních škol*. Vyd. 1. Všeň: Alter.
4) Boswell, L., a kol. (1999a): *Houghton Mifflin math central*. Level 1. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91747-6)
5) Boswell, L., a kol. (1999b): *Houghton Mifflin math central*. Level 1. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91748-4)
6) Boswell, L., a kol. (1999c): *Houghton Mifflin math central*. Level 2. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91749-2)
7) Boswell, L., a kol. (1999d): *Houghton Mifflin math central*. Level 2. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91750-6)
8) Boswell, L., a kol. (1999e): *Houghton Mifflin math central*. Level 3. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91751-4)
9) Boswell, L., a kol. (1999f): *Houghton Mifflin math central*. Level 3. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91752-2)
10) Boswell, L., a kol. (1999g): *Houghton Mifflin math central*. Level 4. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91753-0)
11) Boswell, L., a kol. (1999h): *Houghton Mifflin math central*. Level 4. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91754-9)
12) Boswell, L., a kol. (1999i): *Houghton Mifflin math central*. Level 5. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91755-7)
13) Boswell, L., a kol. (1999j): *Houghton Mifflin math central*. Level 5. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91756-5)
14) Boswell, L., a kol. (1999k): *Houghton Mifflin math central*. Level 6. Volume 1. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91757-3)
15) Boswell, L., a kol. (1999l): *Houghton Mifflin math central*. Level 6. Volume 2. Boston: Houghton Mifflin. (ISBN 0-395-91758-1)

16) Bright, G., W. (1976): Estimation as Part of Learning to Measure. In *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*, (38, pp. 87-104). Reston, VA:NCTM
17) Clayton, J., G. (1996): A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.
18) Cockcroft, W., H. (1982): *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
19) Justová, J. (2011): *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 1. Všeň: Alter.
20) Kahounová, J. (2009): *Úvod do teorie odhadu*. Dotisk 1. vyd. Praha: Oeconomica.
21) Levine, D., R. (1982): Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), str. 350-359.
22) Liedtke, W., W. (1993): Measurement. In J. N. Payne (Ed.), *Mathematics for the young child*, pp. 229-250.
23) Mikulčák, J. a kol. (1995): *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 3. vyd. Praha: Prometheus.
24) Odvárko, O., Kadleček, J. (1998a): *Knížka pro učitele k učebnicím Matematiky pro 6. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus.
25) Odvárko, O., Kadleček, J. (1999a): *Knížka pro učitele k učebnicím Matematiky pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus.
26) Odvárko, O., Kadleček, J. (2000a): *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus.
27) Odvárko, O., Kadleček, J. (2001a): *Knížka pro učitele k učebnicím Matematiky pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus.
28) Odvárko, O., Kadleček, J. (1997a): *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-066-7)
29) Odvárko, O., Kadleček, J. (1998b): *Matematika pro 6. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-086-1)
30) Odvárko, O., Kadleček, J. (1997b): *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-144-2)

31) Odvárko, O., Kadleček, J. (1998c): *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-111-6)

32) Odvárko, O., Kadleček, J. (1998d): *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. (ISBN 80-7196-126-4)

33) Odvárko, O., Kadleček, J. (1999b): *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-129-9)

34) Odvárko, O., Kadleček, J. (1999c): *Matematika pro 8. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-148-5)

35) Odvárko, O., Kadleček, J. (1999d): *Matematika pro 8. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-167-1)

36) Odvárko, O., Kadleček, J. (2000b): *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-183-3)

37) Odvárko, O., Kadleček, J. (2000c): *Matematika pro 9. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-194-9)

38) Odvárko, O., Kadleček, J. (2001b): *Matematika pro 9. ročník základní školy*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-208-2)

39) Odvárko, O., Kadleček, J. (2001c): *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. (ISBN 80-7196-212-0).

40) Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín L. (2015): *Primary teacher' approach to measurement estimation activities.* Konrad Krainer; Naďa Vondrová. CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. Pp 3227-3233, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

41) Pátek, J. (2014): *GeoGebra ve výuce zeměpisu na základní škole.* Čeké Budějovice: Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

42) Pech, P., Činčurová, L., Günzel, M., a kol. (2015): *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

43) Polák, J., (1995): *Přehled středoškolské matematiky*. Dot. 6. vyd. Praha: Prometheus.

44) Průcha J., Walterová, E., Mareš, J. (2003): *Pedagogický slovník*. 4., aktualiz. vyd. Praha: Portál.
45) Půlpán, Z., Čihák, M. (2007): *Matematika 6 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství.
46) Půlpán, Z., a kol. (2008): *Matematika 7 pro základní školy: aritmetika*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství.
47) Rauner, K., (2004): *Fyzika pro 6. ročník základní školy a primu víceletého gymnázia*. Praha: Fraus.
48) Rektorys, K. (2000): *Přehled užité matematiky II*. 7. vyd. Praha: Prometheus.
49) Samková, L. (2013): Využití programu Geogebra při nácviku odhadů. In: Hašek, Roman (ed.). *Sborník příspěvků 6. konference – Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, s. 323 – 336.
50) Sedláček, J. (1981): *Slovník školské matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
51) Segovia, I., & Castro, E. (2009): La estimación en el cálculo y en la medida. *Electronic Journal of Reasearch in Eduactional Psychology*. 17(1), 449-536.
52) Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., Madson, C. R. (1982): Skill in estimation problems of extend and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), str. 211-232.
53) Van De Walle, J., A., Karp, K., S., & Bay-Williams, J., M. (2010): *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. USA: Pearson
54) (2011): Odhad. *Slovník současné češtiny*. 1. vyd. Brno: Lingea.

Internetové zdroje:

I. Česká republika. Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In: *Zákony pro lidi* [online]. [cit. 9. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561.

II. Český úřad zeměměřický a katastrální. [online]. [cit. 15. 3. 2015]. Dostupné z: www.cuzk.cz.

III. Druhá odmocnina. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. 2008 [cit. 3. 11. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Druh%C3%A1_odmocnina.

IV. Lingea. Odhad. *nechybujte.cz - Slovník současné češtiny*. [online]. © 2014 [cit. 7. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nechybujte.cz/slovnik-soucacne-cestiny.

V. Metodický portál RVP.CZ. [online]. [cit. 4. 1. 2015]. Dostupné z: www.rvp.cz.

VI. Národní ústav pro vzdělávání. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. *nuv.cz* [online]. 2013 [cit. 5. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433.

VII. Odhad. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. 2006 [cit. 9. 12. 2014]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Odhad.

VIII. Pneumatika. *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. 2006 [cit. 22. 5. 2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pneumatika.

IX. Projekt Fibonacci. [online]. [cit. 15. 12. 2014]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html.

X. Weisstein, E., W., "Estimate.". *WolframMathWord* [online]. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. [cit. 20. 11. 2013]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/Estimate.html.