Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Diplomová práce

Badatelsky orientovaná výuka matematiky

Vypracoval: Bc. Veronika Šulová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2017

Poděkování

Těmito pár řádky bych chtěla upřímně poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho velmi vstřícnou pomoc, ochotu, dobré rady a náměty a především nesmírnou trpělivost, se kterou k mé práci vždy přistupoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Badatelsky orientovaná výuka matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Anotace

Tato diplomová práce stručně představuje pojem badatelsky orientovaná výuka matematiky. V badatelsky orientované výuce je důraz kladen převážně na aktivní činnost žáka, jejímž cílem je objevení určité skutečnosti. Tato činnost zahrnuje především řešení problémů a hledání vhodných cest, kterými je možné se dobrat správného cíle. Tuto cestu k cíli můžeme nazvat bádání. Proces bádání zahrnuje pozorování, formulování otázek, zjišťování informací, navrhování možných postupů a jejich ověřování.

V této vzdělávací metodě úloha učitele není předávat žákům již hotová fakta, ale k cíli je směřovat a dohlížet na správnost jejich postupů. Učitele zde můžeme chápat jako průvodce, poradce či pomocníka na cestě k cíly (objevu).

V práci je uvedeno několik příkladů z matematiky základní a střední školy, ve kterých je uplatněn badatelsky orientovaný přístup.

Matematika v daných příkladech není složitá, důraz je kladen na praktické použití. Dále jsou v příkladech rozvíjeny mezipředmětové vztahy, což je důležitá součást badatelsky orientované výuky. Ke každému příkladu jsou navíc uvedeny doplňující otázky.

Klíčová slova:

badatelsky orientovaná výuka, matematika, příklady, objevování, žák, vyučování.

Abstract

This diploma thesis briefly introduces the concept of inquiry based teaching mathematics. In inquiry based teaching, emphasis is placed primarily on the active activity of the pupil, the aim of which is to discover a certain reality. This activity mainly involves solving problems and finding the right paths to achieve the right goal. We can call this path to a goal as a research. The inquiry process involves observing, formulating questions, identifying information, designing possible processes, and verifying them.

In this educational method, the role of the teacher is not to pass the facts to the pupils, but to target them and to supervise the correctness of their practices. We can understand the teacher here as a guide, adviser or assistant on the path to the goal (discovery).

In the thesis a few examples of mathematics of elementary and secondary schools are given, in which the inquiry based approach is applied.

Mathematics in the given examples is not complicated, emphasis is put on the practical use. In the examples interdisciplinary relationships are developed as well, which is an important part of the inquiry based teaching. In each example, additional questions are provided.

Key words:

inquiry based teaching, mathematics, examples, discovery, student, teaching.

Obsah

1 Úvod

Předmětem této diplomové práce je badatelsky orientovaná výuka. Tento pojem je v české školství poměrně nový, nicméně se jeví jako velmi efektivní a žádoucí.

Při badatelsky orientovaném vyučování je hlavní činností žáka bádání. V průběhu bádání se žák snaží najít způsob, jak se dobrat pravdy, odhalit podstatu, vyřešit problém či nalézt vztah, závislost atd.

V průběhu bádání žák pracuje především samostatně a učitel působí jako průvodce na cestě k cíli, podporuje a dohlíží na správnost jeho postupů.

Do činností žáka v průběhu bádání patří především pozorování problému, kladení otázek, navrhování vhodných postupů, vyhledávání informací, formulace hypotéz, ověřování správnosti řešení a v neposlední řadě interpretace a obhájení závěru.

Tato práce nejprve popisuje pojem badatelsky orientovaná výuka, stručně seznámí čtenáře s jeho významem a historií v Evropě.

V další části práce je uvedeno několik konkrétních příkladů, na kterých je možné uplatnit badatelskou formu výuky. Přičemž nejde o jeden zadaný příklad k vyřešení, nýbrž o širší téma, které je možné hlouběji prozkoumat. Každý z těchto úkolů je rozdělen na dvě části. V první části se zabýváme představením problému, jeho popisem a základními vlastnostmi. Druhá část je věnována doplňujícím otázkám. Doplňující otázky jsou většinou takové, které pravděpodobně mnohé napadnou během řešení původního problému. Tyto otázky se nemusí vždy týkat matematiky, jejich původ může být například historie, zeměpis, technika, umění a mnoho dalších oborů. V rámci badatelsky orientované výuky je kladen značný důraz na podporu mezipředmětových vztahů, proto je žádoucí snažit se nalézt odpověď i na otázky, které s matematikou přímo nesouvisí.

Vše výše uvedené je v práci popsáno a ukázáno. Na tuto práci můžeme nahlížet, jako na inspiraci pro učitele, kteří mají zájem zahrnout badatelskou formu výuky do svých vyučovacích hodin. V úvodní obecné části se s tímto pojmem seznámí a získají dostačující představu o této metodě. V části druhé se mohou uvedenými příklady nechat inspirovat nebo je přímo použít ve své výuce.

2 Obecná část

2.1 Badatelsky orientovaná výuka

Základem názvu badatelsky orientovaná výuka je slovo bádat či bádání. Dříve než začneme mluvit o samotné badatelsky orientované výuce, měli bychom si ujasnit, co právě tento pojem znamená.

2.1.1 Bádání

Jako bádaní překládáme do češtiny anglický výraz „inquiry‘‘. Jeho význam je ovšem o něco širší. Můžeme ho také vyjádřit jako zkoumání nebo hledání pravdy, pátrání, vyšetřování [1].

Badatelsky orientovaná výuka tedy stojí na základě právě těchto pojmů.

2.1.2 Badatelsky orientovaná výuka

,,Nejlepší způsob, jak se učit, je praktická činnost- praktická činnost a kladení otázek. Nejlepší způsob, jak učit, je přimět studenty klást otázky a aktivizovat je. Nekažte fakta, stimulujte aktivitu.‘‘

Paul Halmos, maďarský matematik

Badatelsky orientovaná výuka nebo vyučování (zkr. BOV), též se můžeme setkat s jeho anglickým ekvivalentem Inquiry Based Education, je takový vyučovací proces, během něhož žák převážně samostatně bádá. Což, jak je uvedeno výše, můžeme chápat tak, že žák zkoumá, pátrá, vyšetřuje, snaží se dobrat pravdy. Přičemž jeho bádání se má co možná nejvíce napodobovat bádání skutečného vědce, proto by měl žák pracovat převážně samostatně [1], [2], [3].

V průběhu badatelského vyučování učitel nepředstavuje pouze zdroj faktů, které předává žákům, jejichž úkolem je si tyto informace zapamatovat a následně prezentovat, za což jsou hodnoceni. BOV klade důraz na průběh osvojování těchto faktů a snaží se vytvářet takové podmínky, aby žáci dokázali fakta sami objevit a díky tomu pochopit jejich hlubší podstatu či souvislost.

Učitel tedy žákům nepředává hotové učivo, nýbrž se snaží vytvářet takové situace (problémy), jejichž řešením si žáci učivo sami osvojí. Kromě toho je jeho úkolem vhodné kladení a formulování otázek ve, které žáka směřují k zamýšlenému cíli. Cílem je poznatek, který si má žák osvojit.

Často se uvádí, že učitel v BOV hraje roli spíše jakéhosi moderátora vzdělávacího procesu. Jeho úkolem je žáka směřovat ke správnému cíli, regulovat a korigovat postupy, kterými se žák hodlá k cíli dobrat.

Pro správou představu o BOV je důležité si uvědomit, co by měla obsahovat. BOV charakterizována zejména těmito znaky:

- úlohy mohou mít více způsobů řešení, je možné se výsledku dobrat různými cestami a často mohou být i sama tato řešení odlišná
- objevování popř. znovuobjevování (potvrzování již objeveného)
- učení se z chyb (cizích, ale především těch vlastních)
- dostačující základ znalostí, na nichž je možné stavět
- propojování nově nabytých poznatků s již známými (tzv. kumulativní učení)
- propojování předmětu s jinými vědními ale i nevědními obory
- kooperativní a autonomní učení

2.2 Vznik badatelsky orientovaného vyučování

Pojem badatelsky orientované vyučování oficiálně v českém školství nefiguruje příliš dlouhou dobu. U nás jsme se s tímto termínem začali častěji setkávat přibližně před deseti lety. V té době byl v Evropě uskutečněn projekt POLLEN, což byl projekt, zaměřen na podporu inovací přírodovědného vzdělávání. Byl postaven právě na BOV a jeho cílem bylo její rozšíření.

Po úspěšném projektu POLLEN byla odstartována celá řada dalších, které měly za úkol představit a rozšířit badatelsky orientovanou výuku.

Původně byl tento trend zaměřen na přírodovědné předměty, později se rozšířil i na matematiku. V této oblasti je pravděpodobně nejznámějším představitelem a jakýmsi průkopníkem projekt FIBONACCI, který byl odstartován přibližně čtyři roky po výše zmíněném projektu POLLEN [2].

2.2.1 Projekt POLLEN

Projekt POLLEN byl evropský projekt na podporu inovací v přírodovědném vzdělávání, který se uskutečnil v letech 2006-2009 [4], [5].

Jeho cílem bylo pozvednout úroveň přírodovědného vzdělávání na základních školách. Přičemž kladl největší důraz na realizaci výuky právě badatelskou formou, což mělo zvýšit zájem žáků o učivo a motivovat je ke vzdělávání v přírodovědné oblasti.

Projekt byl realizován prostřednictvím sítě dvanácti evropských měst (tzv. seed sities). Těchto dvanáct měst tvořilo tzv. podpůrný rámec pro rozvoj přírodovědného vzdělávání. Města měla za úkol podporovat školy, které se do projektu zapojily, a tím na nich zajišťovat kvalitu realizované badatelsky orientované výuky.

Země zapojené do projektu POLLEN:

Belgie (Brusel), Estonsko (Tartu), Francie (Sant-Etienne), Německo (Berlín), Itálie (Perugia), Nizozemí (Amsterdam), Portugalsko (Sacavém-Loures), Španělsko (Girona), Švedsko (Stockholm), Velká Británie (Leicester), Maďarsko (Vac), Slovinsko (Ljubljana).

Do projektu POLLEN bylo zapojenu celkem sto základních škol z těchto dvanácti evropských měst. Učitelům účastnícím se projektu byly poskytnuty potřebné podklady pro realizaci, školení, učební materiály, pracovní listy, webové odkazy. Dále byla realizovaná setkání těchto učitelů s vědci a pedagogickými experty za účelem konzultace a vzájemného předávání poznatků a zkušeností. Projekt se nesoustředil pouze na rozvoj vzdělávání čistě v přírodních vědách, ale byl zaměřen také na sociální otázky. Každé město zapojené do projektu zároveň řešilo nějaký místní specifický problém.

Města zapojená do projektu hrála během jeho realizace důležitou roli. Jejich úkolem bylo nejen zprostředkovávat materiály školám, ale dále také vytvářet ve městě tzv. místní skupiny, které se na projektu také angažovaly. Tyto místí skupiny tvořily například rodiny žáků, vědecké komunity ve městě, také úřady, muzea a kulturní centra. Cílem bylo zapojení všech těchto činitelů, aby se zamezilo tomu, že přírodovědné vzdělávání žáků bude jen v rámci samotné školní výuky.

Na závěr projektu byla provedena evaluace, která zkoumala v první řadě postoj dětí k přírodním vědám, respektive jeho změna v průběhu projektu. Dále také jaký vliv měl celý projekt na samotnou výuku přírodovědných předmětů na základních školách, postoj učitelů k tomuto druhu výuky a jeho vliv na celou místí komunitu, která se na projektu podílela.

2.2.2 Projekt FIBONACCI

Můžeme říci, že tento projekt jaksi navazuje svým zaměřením na výše uvedený projekt POLLEN. Jejich cíle i průběh realizace jsou v určitých ohledech velmi podobné [6], [7].

FIBONACCI je projekt, jehož základem je právě BOV. Jeho záměrem bylo zlepšit kvalitu výuky přírodovědných předmětů a matematiky a to již od předškolního vzdělávání po druhý stupeň základní školy a především zvýšit zájem žáků o přírodní vědy a matematiku.

Projekt je pojmenován podle slavného a velmi úspěšného matematika Leonarda z Pisi jinak známého právě pod jménem Fibonacci, který žil a působil na přelomu 12. a 13. století v Itálii. Fibonacci je známý především díky tzv. Fibonacciho posloupnosti, kterou interpretoval jako množení králíků. Proto se také často uvádí pojem Fibonacciho králíci.

Projekt FIBONACCI se zabýval a jeho hlavním cílem bylo šíření badatelsky orientovaného vzdělávání v přírodních vědách a matematice po Evropě.

Mezinárodní vědecká komunita a její evropští představitelé považují zahrnutí badatelsky orientovaného vzdělávání v matematice a přírodních vědách za velmi důležité. BOV je efektivní a potřebný nástroj v oblasti nabývání vědecké gramotnosti a získání vědeckého povědomí o světě kolem nás. Používání BOV ve vzdělávání na základních a středních školách zvyšuje zájem o přírodovědné předměty a matematiku.

Cílem projektu je tedy šíření badatelsky orientované výuky. Tento proces se uskutečnil prostřednictvím 12 tzv. referenčních center a 24 sesterských center v různých městech po celé Evropě.

Projekt byl zahájen 1. Ledna 2010 a trval 3 roky, tedy do roku 2013. Byl koordinovaný francouzským programem La main á la pâte, který je tvořen prestižními pařížskými instituce (Académia des aciences, Institute National de Recherche

Pédagogique, Ecola narmale supérieure) a odbornou spolupráci mu poskytovala univerzita Bayreuth v Německu.

Základní principy a myšlenky projektu FIBONACCI:

1. Přístup založený na řešení problémů
2. Využití vědeckého postupu ve vzdělávání
3. Učení se z (vlastních) chyb
4. Nabývání základních dovedností
5. Kumulativní učení
6. Uvědomění si hranic předmětu a mezioborový přístup
7. Podpora sjednocení chlapců a dívek
8. Podpora spolupráce žáků
9. Schopnost samostatného učení se

Na tyto projekty POLLEN a FIBONACCI můžeme nahlížet jako na jakési průkopníky BOV v Evropě. Byly na poli badatelsky orientovaného vyučování a rozšiřování nejmohutnější a zároveň pravděpodobně nejznámější.

Ovšem nebyly samozřejmě jedinými. Jako další realizované projekty, jejichž záměrem bylo rozšíření BOV můžeme uvést podle [1] např.:

- S-TEAM
- ESTABLISH
- PRI-SCI-NET
- PROFILES
- ASSIST-ME
- MaSciL

Na závěr můžeme říci, že BOV se nyní stává (nebo již stala) velkým trendem ve vzdělávání a to z mnoha důvodů. Velkou její předností je jistě motivace žáků. Vyučování touto metodou žáky většinou baví a zajímá. Díky tomu se výuka stává efektivnější. Dále je také nezpochybnitelné, že v průběhu bádání si žák osvojuje schopnosti a dovednosti k řešení problému, samostatnému přemýšlení, uvažování, zjišťování a zpracování informací, kladení a formulace otázek a následné ověřování hypotéz. To jsou schopnosti, které se v dnešní době jeví jako velmi důležité pro úspěšné začlenění do společnosti a trhu práce. Můžeme dokonce předpokládat, že tyto aspekty jsou dnes cennější a žádanější než samotné znalosti konkrétních faktů. Jelikož dnes není téměř žádný problém jakoukoliv informaci v krátkém časovém úseku dohledat, jeví se jako důležitější pro dnešní lidskou populaci dovednost poradit si v problémových situacích a nacházet cesty k řešení.

Díky tomu všemu se právě BOV jeví jako velmi vhodný nástroj pro přípravu dnešních dětí na budoucí život.

2.3 Badatelsky orientovaná výuka v matematice

Začlenění bádání právě do výuky matematiky se jeví jako velmi efektivní [8]. V matematice totiž zdaleka nejde jen o učení se předem daným faktům. Naopak je zde velmi důležité pochopení a porozumění věci. Základ matematiky tvoří vztahy a zákonitosti, které bývá velmi obtížné si osvojit, pokud jim nerozumíme. Potom se matematika jeví obtížnou a paradoxně nelogickou a nesmyslnou, což je pravý opak toho, čím matematika skutečně je. Pokud ovšem matematickým souvislostem porozumíme a chápeme jejich podstatu, vidíme že, se jedná o větu v podstatě jednoduchou bez jakýchkoliv záludností a chytáků. Potom si můžeme uvědomit, že matematika je skutečně všude kolem nás a že na rčení ,,Matematika je královna vědy‘‘ je mnoho pravdivého.

Naprosto nezapomenutelný výrok pronesl v jednom televizním pořadu bývalý ředitel ústavu pro jazyk český v Praze pan doc. RNDr. Karel Oliva, Dr., který překvapivě původně vystudoval právě matematiku.

„Žádná věda není dosti vědecká, pokud nepoužívá matematiku. Matematika je hledání vztahů, struktur, zákonitostí a to je přesně to, co dělá každá věda."

Doc. RNDr. Karel Oliva, Dr.

Pokud tedy správně rozumíme matematice, často nám tato schopnost, ač si to sami ani nemusíme uvědomovat, pomáhá při řešení problémů a situací, které s matematikou na první pohled vůbec nesouvisí.

Je tedy patrné, že matematika, ač se mnohým tak nejeví, je skutečně významnou disciplínou a její efektivní výuka na školách je důležitá o to více.

Právě badatelsky orientovaná výuka tvoří ideální plodnou půdu pro správné pochopení všech oblastí matematiky a mimo to i jejich praktické využití v běžném či pracovním životě.

Obory, ve kterých je možné matematicky bádat, jsou mnohé. Nejčastěji se jako zdroje bádání uvádějí tyto oblasti:

- příroda a přírodní jevy
- technika, technické problémy a řešení
- každodenní běžné problémy, se kterými se můžeme setkat například v domácnosti
- umělecká sféra, krása, dokonalost
- matematické objekty, se kterými se setkávám v běžné výuce

Nestandardní aplikační úlohy a problémy jsou důležitou součástí matematického vzdělávání. Řešení těchto problémů může být často málo závislé na již nabytých znalostech, mnohdy je důležité pouhé logické uvažování. Tyto úlohy by měly obsahovat pokud možno všechny oblasti základního vzdělávání. Žáci by měli umět problém pochopit, analyzovat a nalézt způsob, jak dojít ke správnému řešení.

Úloh, které se dají pojmout badatelkou formou výuky je v matematice velmi mnoho, často se můžeme setkat s názorem, že v podstatě každá nová látka jde žákům podat stylem bádání [9].

3 Vybraná témata

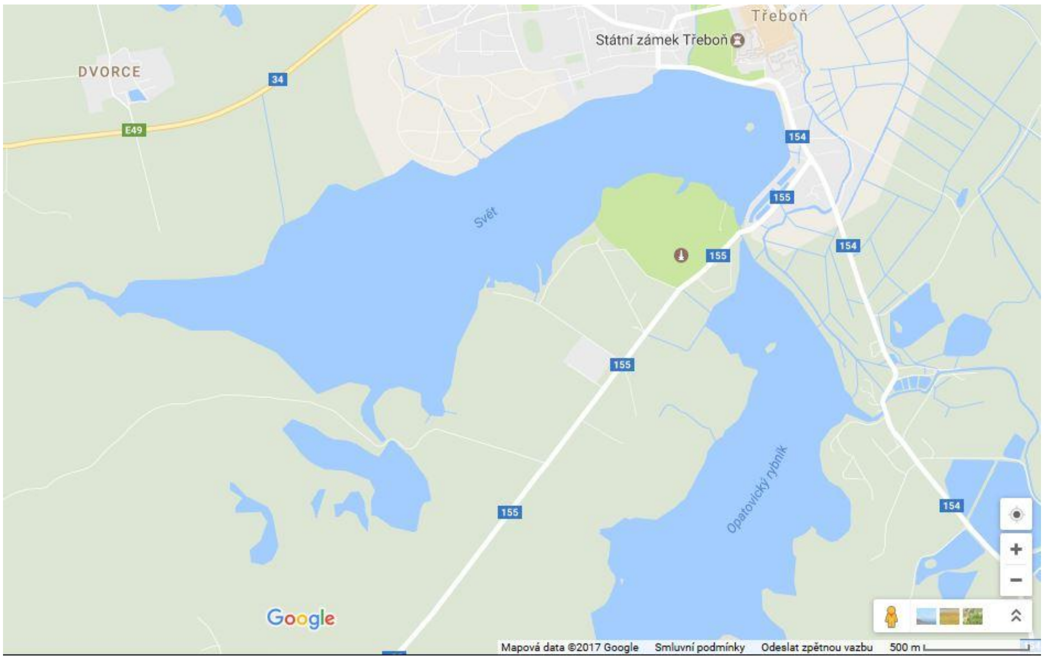
3.1 Obsah vodní plochy rybníka

Jistě nikde na světě nenajdeme rybník, který by měl pravidelný tvar nebo alespoň tvar, který bychom mohli pojmenovat názvem nějakého geometrického prvku. Již při samotném pohledu na jakoukoliv přírodní vodní plochu z výšky nebo na mapě, musí být každému jasně, že pravděpodobně nebude jednoduché určit obsah této plochy. Přesto právě určení obsahu plochy rybníka bývá v určitých oblastech (např. rybníkářství, stavebnictví atd.) důležité [10], [11], [12].

3.1.1 Popis problému

Určete obsah vodní plochy vybraného rybníka.

Pro tento úkol jsme vybrali jeden z našich nejznámějších a největších rybníků třeboňský rybník Svět.



Obrázek 1- Rybník Svět

Rybník Svět je svou rozlohou 15. největším rybníkem v České republice. Nachází se na jižním okraji jihočeského města Třeboň. Původně nesl rybník název Nevděk, ovšem na začátku 17. století byl Nevděk rozdělen hrází na rybník Svět a Opatovický rybník. V současné době se Svět využívá především k rybochovným účelům, je ale také hojně využíván k rekreaci a sportu.

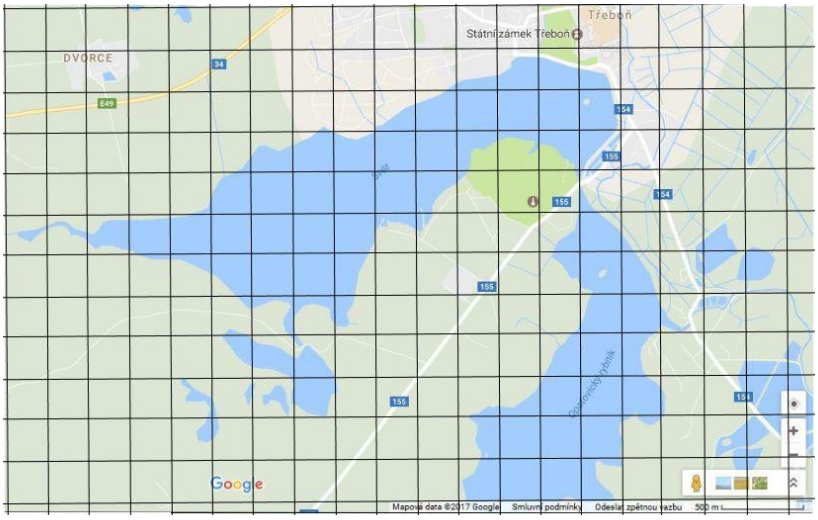
Řešení 1:

Obrázek rybníka na mapě proložíme sítí. Podle měřítka na mapě má strana čtverce sítě délku 500 m, každý čtverec ohraničuje tedy plochu o obsahu 250 000 m^2.

Obrázek 2- Síť 1

Nyní určíme počet čtverců, které se svým celým objemem nacházejí uvnitř rybníka (označíme n_1) a počet čtverců, do kterých rybník zasahuje (označíme n_2).

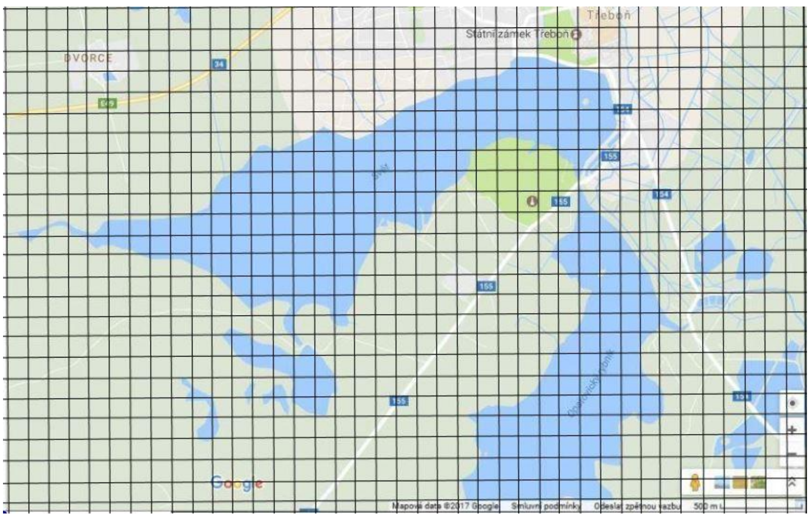
Zjistili jsme, že n_1=0 a n_2=18. Rozloha rybníka je tedy někde mezi 0 m^2 a 4 500 000 m^2. Tento výsledek je velmi nepřesný, proto v dalším kroku čtvercovou síť zjemníme, čímž se dostaneme k přesnějšímu určení plochy rybníka.



Obrázek 3- Síť 2

Stranu čtverce sítě jsme zmenšili na 250 m. Tudíž jedno oko sítě má obsah 62 500 m^2. Dále postupujeme stejným způsobem jako v předchozím kroku.

Spočetli jsme, že n_1=14 a n_2=52. Rozloha rybníka je pak mezi 875 000 m^2 a 3 250 000 m^2. Rozmezí se znatelně zmenšilo, a však výsledek je stále velmi nepřesný. Budeme tedy pokračovat nadále ve zjemňování sítě.



Obrázek 4- Síť 3

Nyní jsme stranu čtverce sítě zmenšili na 125 m. To znamená, že obsah jednoho čtverce je 15 625 m^2.

Stejným způsobem jako v předchozích krocích spočteme počet čtverců, které celým svým obsahem leží na ploše rybníka a počet čtverců, které do vodní plochy alespoň částečně zasahují.

Počet čtverců, které celým obsahem náleží vodní ploše je n_1=86 a počet čtverců, které do vodní plochy alespoň zasahují n_2=160. Počtu 86 čtverců odpovídá rozloha 1 343 750 m^2 a počtu 160 čtverců odpovídá rozloha 2 500 000 m^2.

Rozmezí se opět značně zúžilo, ovšem výsledek je ještě stále velmi nepřesný. Pro upřesnění provedeme tedy zjemnění sítě ještě jednou.

Obrázek 5- Síť 4

Jedno oko sítě má nyní obsah 3 906,25 m^2. Stejným způsobem jako v předcházejících krocích určíme minimální a maximální plochu rybníka.

Zjistili jsme, že počet celých čtverců n_1=430 a počet čtverců alespoň do vodní plochy zasahujících je n_2=567. Minimální rozloha rybníka je tedy 1 679 687,5 m^2 a maximální rozloha rybníka je 2 214 843,75 m^2.

Rozmezí se opět značným způsobem zmenšilo. Opakovaným zjemňováním sítě bychom došli k výsledku ještě přesnějšímu. Přesného výsledku bychom dosáhli v okamžiku, když by se minimum a maximum rovnalo.

Rozloha rybníka Svět je 215 ha. Správný výsledek, ke kterému bychom tedy měli tímto způsobem dojít je **2 150 000 m^2**.

Řešení 2:

Další způsob, jak zjistit rozlohu zadaného rybníka je náročnější na přípravu i čas. Toto řešení je ovšem efektivnější a při správném postupu pravděpodobně také přesnější.

Rybník vyobrazený na mapě s menším měřítkem obkreslíme na tenkou polystyrenovou desku. Je lépe použít desku tenčí z důvodu snazší manipulace. V dalším kroku obkreslený tvar rybníka na desce vyřízneme vhodným nástrojem, například ostrým nožíkem nebo strunovou pilkou.

Vyříznutý model rybníka ponoříme do nádoby s vodou, nádobu zvolíme vhodně dle vlastního uvážení. Dále pečlivě odečteme objem vody vytlačené polystyrenovým modelem.

Zjistili jsme, jaký objem má model rybníka vyříznutý z polystyrenové desky. Pokud jsme při vyřezáváni modelu pracovali přesně, má jeho horní a dolní podstava stejný tvar a obsah. Tloušťka desky je známá. Můžeme tedy vypočíst, jaký obsah má podstava modelu, to znamená, jaký obsah má rybník vyobrazený na mapě.

Dle měřítka mapy, které udává její výrobce, vypočteme ze zjištěného obsahu modelu skutečný obsah rybníka v m^2.

Řešení 3:

U předchozího způsobu řešení by mohl nastat drobný problém u kroku, ve kterém je třeba ponořit model rybníka do nádoby s vodou a následné odečtení objemu vytlačené vody. Tento postup se jeví poněkud pracně. Abychom se těmto komplikacím vyhnuli, nabízí se ještě jiný způsob řešení této úlohy.

Stejným způsobem, který je popsaný výše, vyrobíme model rybníka z tenké polystyrenové desky. Následně bude třeba vyhledat hustotu polystyrenu, ze kterého je vyrobena námi použitá deska. Hustotu by měl uvádět výrobce, nebo ji můžeme dohledat v tabulkách případně na internetu.

Jakmile známe hustotu materiálu, je řešení velmi jednoduché a rychlé. Pomocí například kuchyňské digitální váhy zjistíme hmotnost modelu rybníka. Hustotu materiálu známe. Vypočteme tedy jeho objem.

Další postup je již totožný jako v předchozím případě.

3.1.2 Doplňující otázky:

1. Kdo byl zakladatelem rybníka Svět?

Zakladatelem rybníka byl Jakub Krčín z Jelčan a Sedlčan (1535 Kolín nebo Polepy – 1604 Sedlčany).

Obrázek 6- Jakub Krčín z Jelčan a Sedlčan

Jakub Krčín z Jelčana Sedlčan přichází do Třeboně roku 1570. Jeho velkolepým plánem je postavit v těsné blízkosti města rozsáhlý rybník.

Tento plán se však nesetkává s pochopením místních obyvatel, většina obyvatelstva Třeboně je proti. Však Vilém z Rožmberka jeho plán podpořil a stavba byla roku 1571 zahájena.

Výstavba trvala následující tři roky. Byly při ní zatopeny rozsáhlé plochy luk a polí. Zároveň bylo také zatopeno tehdejší Svinenské předměstí Třeboně. Toto počínání se místnímu obyvatelstvu nezamlouvala, a proto také rybník získal své původní jméno Nevděk.

Nevděk byl rybník skutečně velmi rozsáhlý, obsah jeho vodní plochy činil přibližně 360 ha. Jelikož se však nacházel v těsné blízkosti města, znamenal pro něj v případě povodní značnou hrozbu. Proto byl v roce 1574 rozdělen hrází na rybník Svět a Opatovický rybník.

2. V okolí města Třeboň je několik významných rybníků. Který z nich je největší? Kolikátý v pořadí dle rozlohy je rybník Svět?

Oblast Třeboňsko je jednou z částí Jindřichohradeckého okresu. Pro představu uvádíme níže na obrázku rozdělení okresů Jihočeského kraje.

Obrázek 7- Členění Jihočeského kraje

Třeboňsku se často zcela právem přezdívá krajina rybníků. V okolí města Třeboň se nachází okolo 500 rybníků. Je to oblast České Republiky s největší koncentrací vodních ploch a proto se také město Třeboň stalo centrem rybníkářství a rybářství u nás.

Nyní se blíže seznámíme s první pěticí největších a nejznámějších třeboňských rybníků.

Prvních pět největších třeboňských rybníků

Pořadí	Název	Rozloha [ha]
1.	Rožmberk	647
2.	Horusický velký	440
3.	Dvořiště	387
4.	Velký Tisý	313
5.	Záblatský	310

Obrázek 8- Největší třeboňské rybníky

1. Rožmberk

Rybník Rožmberk se nachází přibližně 2 kilometry od Třeboně. Se svou rozlohou 647 ha je nejen největším rybníkem Třeboňska, ale zároveň i největším rybníkem v České Republice vůbec. Pro svou velikost je Rožmberk někdy přezdíván české moře.

Rožmberk byl vybudován v letech 1584 - 1590, jako mnoho dalších jihočeských rybníků, Jakubem Krčínem z Jelčan a Sedlčan. Jeho hlavním přítokem a odtokem je řeka Lužnice. Rožmberk je tedy spíše přehradou na řece Lužnici.

Původně stavbu rybníka plánoval již Štěpánek Netolický, ovšem díky povodňovému nebezpečí, které by rybník pro Třeboň představoval, ji nerealizoval. Jeho nástupce Jakub Krčín se však do stavby směle pustil a pro snížení rizika protržení hráze a zatopení okolí vybodoval Novou řeku, která odvádí přebytečnou vodu z rybníka do řeky Nežárky.

Dnes se Rožmberk využívá zejména k chovu ryb. Jeho každoročně pořádané výlovy jsou nejnavštěvovanějšími v České republice.

Kolem Rožmberka také dnes vede cyklistická naučná stezka, která má své návštěvníky seznamovat s jihočeskými rybníky a zajímavostmi okolí Třeboně.

2. Horusický velký

Horusický velký rybník, též jen Horusický rybník, je druhým největším rybníkem Třeboňska a zároveň třetím největším rybníkem České republiky. Nachází se přibližně 4 kilometry jihovýchodně od Veselí nad Lužnicí a zároveň asi 24 kilometrů severně od Třeboně.

Mezi lety 1511 a 1512 byl vybudován Štěpánkem Netolickým. Štěpánek Netolický dával přednost mělkým rybníkům, které se lépe vyhřívají a jsou tedy vhodnější pro chov sladkovodních ryb zejména kaprů. Proto i Horusický rybník není příliš hluboký, ale je jedním z nejproduktivnějších rybníků na chov ryb v republice.

Horusický rybník je také známý tím, že na něm a v jeho okolí žije velké množství různého ptactva. V zimních měsících se zde můžeme setkat s několika jedinci orla mořského.

3. Dvořiště

Třetím největším rybníkem Třeboňska a čtvrtým největším rybníkem u nás je rybník Dvořiště. Rozprostírá se asi 11 kilometrů severovýchodně od Třeboně.

Kromě toho, že Dvořiště patří k největším rybníkům v České republice, je zároveň jedním z nejstarších. Byl vybodován již ve 14. století za vlády Karla IV. v místě, kde se údajně nacházelo přírodní jezero.

Stejně jako rybník Rožmberk na řece Lužnici je i rybník Dvořiště vlastně přehradou na Miletínském potoce.

4. Velký Tisý

Tento rybník nalezneme nedaleko rybníka Dvořiště. Velký Tisý je co do rozlohy čtvrtý největší na Třeboňsku a pátý největší v republice. Nachází se přibližně 10 kilometrů severně od města Třeboň.

Velký Tisý dal roku 1505 vybudovat slavný rybníkář Štěpánek Netolický. Byl jeho prvním velkým dílem, jeho stavba se také uvádí jako počátek rybníkářské tradice na Třeboňsku.

Stejně jako většina rybníků, které jsou dílem právě Štěpánka Netolického, je i tento rybník velmi mělký. Jeho hloubka dosahuje maximálně jednoho metru. Z toho důvodu se v něm velmi dobře daří značnému množství sladkovodních ryb a jeho výlovy jsou velmi úspěšné.

5. Záblatský

Záblatský rybník se rozprostírá ještě o několik kilometrů severněji od Třeboně než rybník Velký Tisý. Nachází se jen necelé 4 kilometry od Lomnice nad Lužnicí.

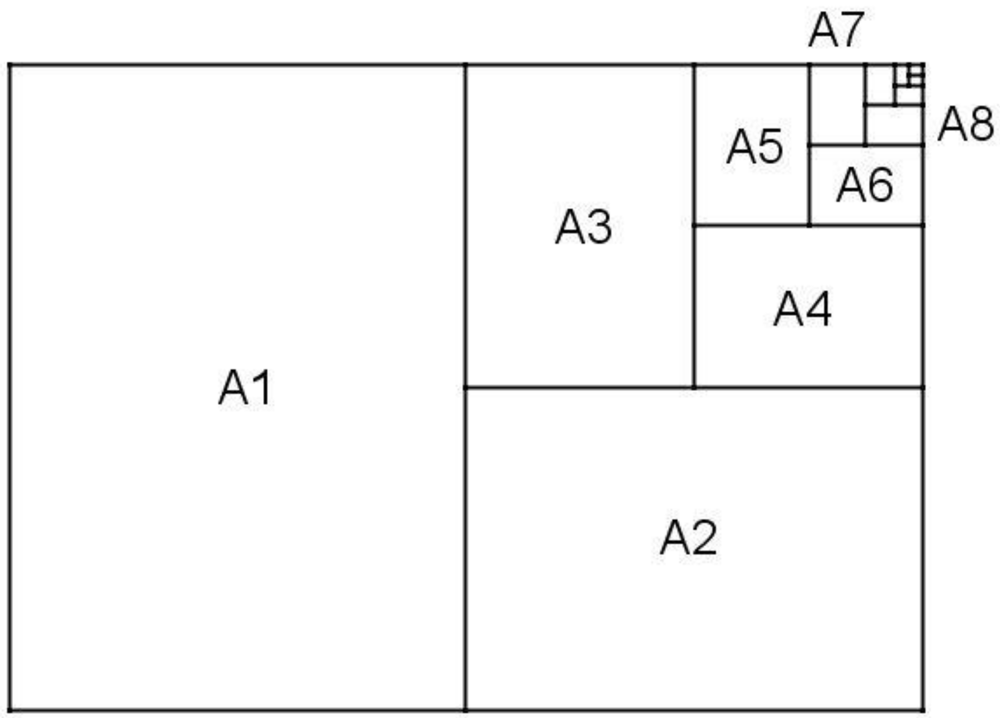
Byl vybudován v druhé polovině 16. století českým šlechticem Zdeňkem ze Šternberka. Od té doby je rybník Záblatský jedním z nejvýnosnějších rybníků u nás.

3.2 Formát papíru

V této kapitole se budeme zabývat formáty papíru a především jejich rozměru [13], [14], [15].
Všem je jistě známa vlastnost každého formátu papíru. Papír jakéhokoliv formátu má tvar obdélníka, který když přeložíme v půli delší strany, získáme dva totožné obdélníky o polovině obsahu původního obdélníka. Každý z těchto obdélníků má ovšem délky stran ve stejném poměru jako obdélník původní. Tímto způsobem můžeme pokračovat dále. Každým dalším přeložením dostaneme menší obdélník o stejném poměru stran.

3.2.1 Popis problému

Asi nejznámějším a pravděpodobně i nejpoužívanějším formátem je formát A. Konkrétní velikosti tohoto formátu se rozlišují čísly (A0, A1, A2, A3, A4, A5,…). Pro lepší představu můžeme formát A zobrazit následujícím způsobem.



Obrázek 9-Formát A

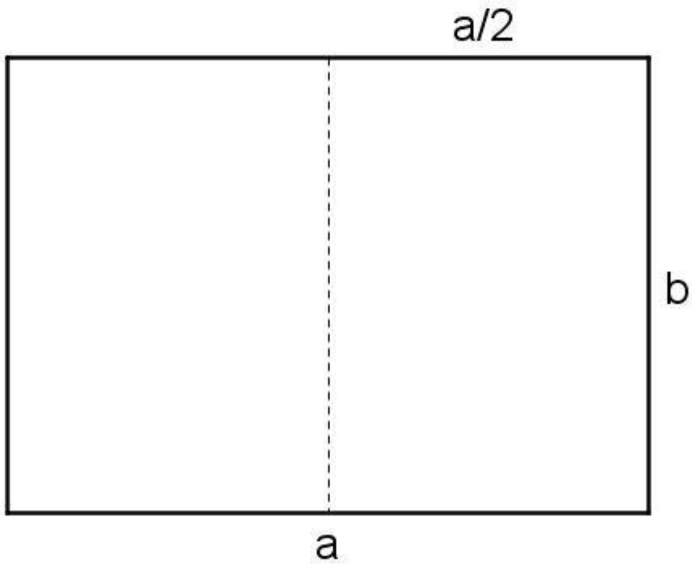
Obrázek 9 přestavuje formát A0, který vznikne složením všech ostatních formátů (A1, A2, A3,…).

Formát A je definovaný velikostí papíru A0. Papír formátu A0 má obsah přesně 1 m^2. Nyní pomocí již uvedených vlastností určíme konkrétní rozměru papíru formátu A0.

Určete rozměry papíru formátu A0.

Formát papíru je navržen tak, aby při postupném překládání a zmenšování jeho plochy na poloviny předcházejícího formátu, byl zachován poměr stran papíru. Tento poznatek je klíčový pro určení rozměru základního formátu A0. Je zřejmé, že není možné zvolit rozměry tohoto papíru libovolně jen s tou podmínkou, aby jejich součin (obsah obdélníka) byl roven jednomu metru čtverečnímu.

Jak je již výše uvedeno, nezbytnou podmínkou pro formát A je, že poměr stran formátu A0, A1, A2,… musí být vždy stejný. Abychom mohli určit rozměry formátu A0, musíme nejprve zjistit tento poměr.



Obrázek 10- Papír formátu A0

Obrázek 11 má představovat zmenšený formát A0. Jeho rozměry označíme jako a, b. Zároveň je tento model rozdělen na dvě poloviny, které teda představují formát A1. Rozměry formátu A1 jsou tedy $b; \frac{a}{2}$.

Pro výše uvedené rozměry musí platit:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}.$$

Po vyřešení rovnice dostaneme vztah:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Poměr stran formátu A tedy je vždy $\sqrt{2}$.

Nyní dopočteme konkrétní rozměry formátu A0, jestliže víme, že jeho obsah je 1 m^2. Řešení je zřejmě nejjednodušší provést soustavou dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$a \cdot b = 1$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme výsledek:

$$a = \sqrt[4]{2} \doteq 1{,}189 \text{ m}$$

$$b = \frac{1}{a}$$

$$b = \frac{1}{1{,}189} = 0{,}841 \text{ m}.$$

Výsledné rozměry jsme zaokrouhlili na tisíciny metru (tj. milimetry). Vyšlo, že výška formátu A0 je **1189 mm** a šířka je **841 mm**.

Pro kontrolu výsledku provedeme zkoušku.

$$a \cdot b = 1$$

$$1{,}189 \cdot 0{,}841 = 0{,}999949$$

$$0{,}999949 \doteq 1$$

Zkouškou jsme ověřili, že obsah papíru formátu A0 je skutečně 1 m^2. Vlivem zaokrouhlování došlo jen k drobné odchylce.

3.2.2 Doplňující otázky:

1. Již známe rozměry formátu A0. Jaké rozměry mají formáty A1, A2, A3, A4, A5?

A1

Formát A1 je polovina formátu A0, vznikne přeložením výšky na polovinu. Pokud A0 má rozměry a, b, pak rozměry formátu A1 jsou $b, \frac{a}{2}$.

Dosadíme-li výše určené délky, dostaneme:

$$b = 0{,}841 \text{ m}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1{,}189}{2} \doteq 0{,}595 \text{ m.}$$

Výška formátu A1 je tedy **0,841 m** a šířka **0,595 m**.

Stejným způsobem určíme i následující rozměry.

A2

Formát A2 má výšku **0,595 m** a šířku **0,421 m**.

A3

Formát A3 má výšku **0,421 m** a šířku **0,298 m**.

A4

Formát A4 má výšku **0,298 m** a šířku **0,211 m**.

A5

Formát A5 má výšku **0,211 m** a šířku **0,149 m**.

2. Kromě nejčastěji používaného formátu A existují také formáty B a C. Jaký je mezi nimi rozdíl a čím je každý tento formát charakteristický?

U všech formátů papíru musí platit při překládání stejná podmínka. Poměr stran musí být vždy stejný. Různé formáty se liší pouze svým obsahem.

Formát B

Formát papíru B je definovaný velikostí papíru formátu B0. Papír formátu B0 má obsah $\sqrt{2}\ \mathrm{m}^2$. Rozměry formátu B0 určíme stejným způsobem jako v předchozím případě u formátu A0.

Poměr stran musí být stejně jako u formátu A $\sqrt{2}$. Platí tedy tyto dvě rovnice:

$$a \cdot b = \sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Jejich řešení získáme rozměru formátu B0.

$$b = 1\ \mathrm{m}$$

$$a = \sqrt{2}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}414\ \mathrm{m}$$

Papír formátu B0 má rozměry 1 m a 1,414 m.

Formát C

Aby byla splněna hlavní podmínka formátu papíru, musí mít i formát C délky stran vždy v poměru $\sqrt{2}$.

Formát C se nejčastěji používá pro velikosti obálek na dopisy. Aby se do obálky bez problémů vešly papíry nejpoužívanějšího formátu A, musí být obálka vždy o něco málo větší. Z tohoto důvodu je formát C definován geometrickým průměrem formátů A a B.

Geometrický průměr *n* čísel je *n*-tá odmocnina jejich součinu.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Podívejme se nyní konkrétně, jaké rozměry má formát A0 a B0. Díky nim určíme rozměry formátu C0. Rozměry jsou uvedeny v milimetrech.

A0: 1189 × 841

B0: 1414 × 1000

Geometrický průměr delších stran: $\sqrt{1189 \cdot 1414} \doteq 1297.$

Geometrický průměr kratších stran: $\sqrt{841 \cdot 1000} \doteq 917.$

C0: 1297 × 917

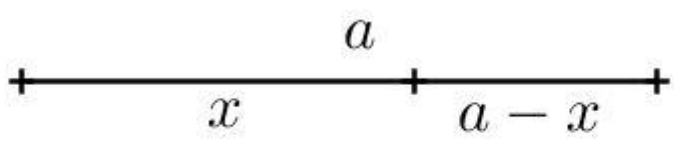
3.3 Zlatý řez

Zlatý řez je často v matematice označovaný jako ideální poměr. Jedná se rozdělení úsečky na dvě části tak, že poměr větší části ku menší musí být stejný jako poměr celé úsečky ku její větší části [15].

3.3.1 Popis problému

Určete poměr zlatého řezu.

V první části této kapitoly je naším úkolem tento poměr (konkrétní číslo) určit. Pro lepší pochopení úlohy poslouží následující obrázek.



Obrázek 11- Rozdělení úsečky ve zlatém poměru

Na obrázku 12 je znázorněna úsečka délky a, která je rozdělena na dvě části v poměru zlatého řezu. Delší část této úsečky je označena x, kratší část má délku $a - x$. Tento poměr vyjádříme matematicky. Podle definice zlatého řezu platí následující rovnice.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

$$a \cdot (a - x) = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = a \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = a \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \ ; \ x_2 = a \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Rovnice má dvě řešení. Druhé řešení (x_2) ovšem nemůže nastat, jelikož a je číslem vždy kladným, řešení x_2 by bylo záporné. Taková situace nemůže nastat.

Řešením výše uvedené rovnice jsme získali hodnotu proměnné x s parametrem a. Zjistili jsme:

$$x \doteq 0{,}618a.$$

Nyní je naším úkolem určit poměr mezi celou úsečkou délky a a kratší úsečkou délky x.

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{0{,}618a} = \frac{1}{0{,}618} \doteq 1{,}618$$

$$\frac{a}{x} \doteq 1{,}618$$

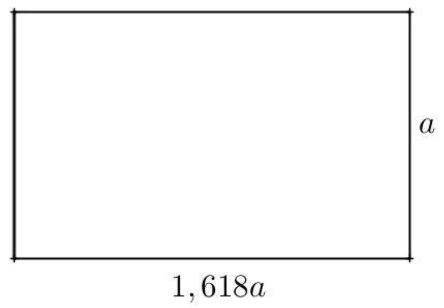
Zlatému poměru tedy odpovídá číslo **1,618**. Toto číslo se běžně značí písmenem řecké abecedy φ. Platí tedy $\boldsymbol{\varphi = 1{,}618}$.

Zlatý obdélník

Jestliže známe poměr zlatého řezu, můžeme se začít zabývat tzv. zlatým obdélníkem. Tento obdélník má celou řadu zajímavých vlastností, které můžeme postupně objevovat.

Zlatý obdélník je takový obdélník, který má délky stran v poměru zlatého řezu. Pokud kratší strana bude například 10 cm, delší strana bude mít délku $1{,}618 \cdot 10$ cm, což odpovídá délce 16,18 cm.

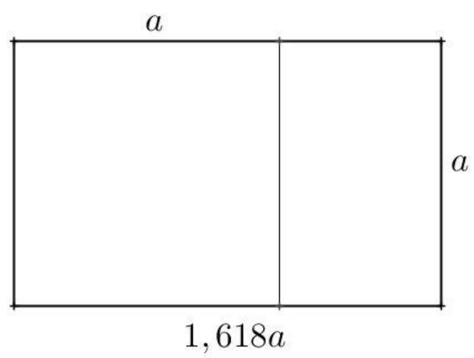
Obdélník s délkami stran v poměru zlatého řezu je zobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 12- Zlatý obdélník 1

Zajímavou vlastnost zlatého obdélníku můžeme pozorovat při jeho postupném zmenšování.

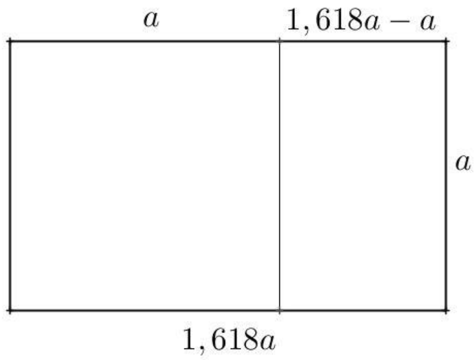
Odebereme-li ze zlatého obdélníku čtverec o straně stejné délky jako je kratší strana obdélníku. Viz obrázek 14.



Obrázek 13- Zlatý obdélník 2

Zbylý menší obdélník je taktéž zlatým. Má tedy strany také v poměru zlatého řezu. Toto tvrzení není nikterak těžké dokázat.

Je zřejmé, že vzniklý menší obdélník má strany o délkách a a $1{,}618a - a$. Jaký je tedy poměr těchto dvou stran?



Obrázek 14- Zlatý obdélník 3

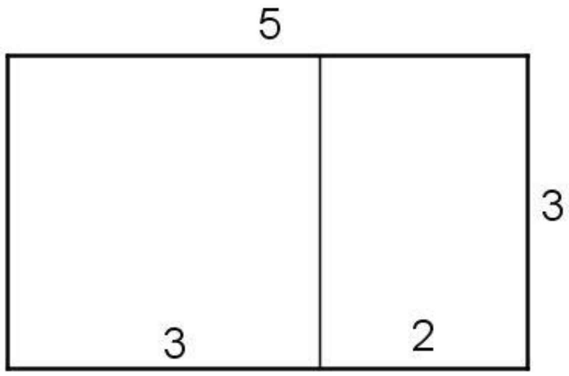
$$\frac{a}{1{,}618a - a} = \frac{a}{0{,}618a} = \frac{1}{0{,}618} = 1{,}618$$

Délky strany menšího obdélníka jsou také ve zlatém poměru, proto se skutečně jedná o obdélník zlatý.

Nyní se nabízí otázka, neplatí-li toto náhodou pro jakýkoliv obecný obdélník? Máme-li obecný obdélník o délkách stran a, b a odebereme-li z něho čtverec o stejné délce strany jako je kratší strana obdélníka, bude mít vzniklý menší obdélník strany ve stejném poměru jako původní obdélník?

Zda by tvrzení formulované ve výše uvedené otázce mohlo platit, můžeme ověřit na nějakém konkrétním obdélníku, jehož strany libovolně zvolíme.

Mějme například obdélník o délkách stran 5 j a 3 j. Dále z něj odebereme čtverec o straně 3 j. Menší obdélník, který vznikl, má tedy rozměry 3 j a 2 j.



Obrázek 15- Obdélník

Je téměř na první pohled jasné, že poměr stran malého obdélníka není stejný jako poměr stran velkého obdélníka.

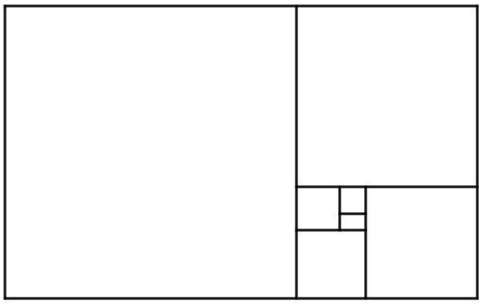
$$\frac{5}{3} \neq \frac{3}{2}$$

$$1,\overline{6} \neq 1,5$$

Poměry délek stran se sobě nerovnají. Tím jsme dokázali, že toto tvrzení neplatí pro jakýkoliv obecný obdélník, ale pouze pro obdélník zlatý.

Úhlopříčky zlatého obdélníka

Další zajímavá vlastnost týkající se zlatého obdélníka je vzájemná poloha jeho úhlopříček. Nejdříve sestrojíme libovolný zlatý obdélník a do něj vyznačíme jeho postupné dělení na čtverce a další zlaté obdélníky popsané výše.

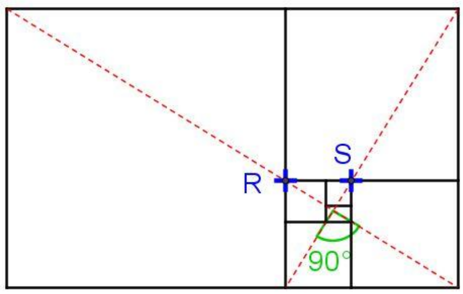


Obrázek 16- Rozdělení zlatého obdélníku

Na obrázku 17 je znázorněn zlatý obdélník a jeho postupné rozdělení na čtverce a menší zlaté obdélníky.

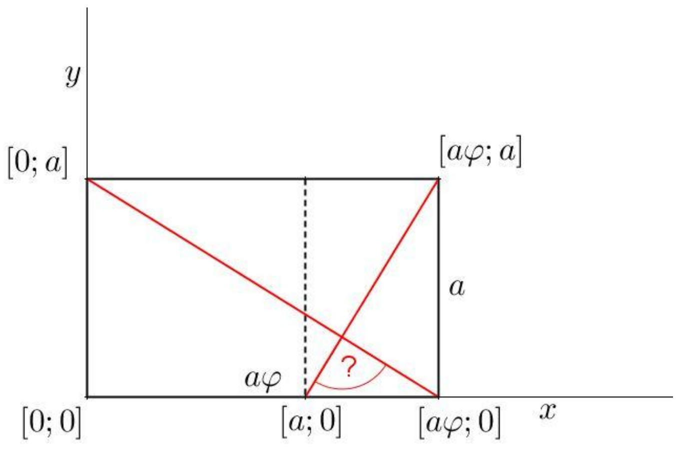
Sestrojíme-li nyní úhlopříčku největšího obdélníka a úhlopříčku druhého vzniklého zlatého obdélníka tak, aby tyto úhlopříčky nevycházely se stejného bodu, zjistíme, že tyto úhlopříčky jsou na sebe navzájem kolmé.

Kromě vzájemné kolmosti mají tyto úhlopříčky další vlastnost patrnou z obrázku níže. Zároveň na těchto úhlopříčkách leží vrcholy dalšího v pořadí zmenšeného zlatého obdélníka. Tyto body jsou na obrázku 18 nazvány R a S.



Obrázek 17- Úhlopříčky zlatého obdélníku

Úhlopříčka původního obdélníka a úhlopříčka menšího obdélníka, které jsou znázorněny na obrázku 18, jsou na sebe kolmé. Toto tvrzení nyní dokážeme. Pro důkaz tento obdélník vhodně umístíme do kartézské soustavy souřadnic.



Obrázek 18- Kolmost úhlopříček zlatého obdélníka

Na obrázku 19 je zlatý obdélník umístěn do kartézské soustavy souřadnic tak, že jeden jeho vrchol se nachází v počátku soustavy a jeho délka i šířka jsou rovnoběžné každá s jednou osou souřadnic.

Úhlopříčky, které jsou na obrázku červeně zvýrazněny, vyjádříme jako vektory $\vec{u}, \vec{v}$ pomocí jejich krajních bodů. Vektor $\vec{u}$ bude představovat úhlopříčku většího obdélníka a vektor $\vec{v}$ úhlopříčku menšího obdélníka.

$$\vec{u} = (a\varphi;\ -a)$$
$$\vec{v} = (a\varphi - a; a)$$

Pokud jsou tyto vektory na sebe navzájem kolmé, musí platit, že jejich skalární součin je roven 0.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Do této rovnice dosadíme souřadnice vektorů a vyřešíme.

$$(a\varphi;\ -a) \cdot (a\varphi - a; a) = 0$$
$$a\varphi(a\varphi - a) - a^2 = 0$$
$$a^2(\varphi^2 - \varphi - 1) = 0$$

Jelikož a je vždy kladné nenulové číslo, aby tato rovnice platila, musí být výraz v závorce roven 0.

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$
$$\varphi(\varphi - 1) - 1 = 0$$

Pro zlatý poměr zároveň platí vztah:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1.$$

Tento vztah dosadíme do řešené rovnice.

$$\varphi \cdot \frac{1}{\varphi} - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

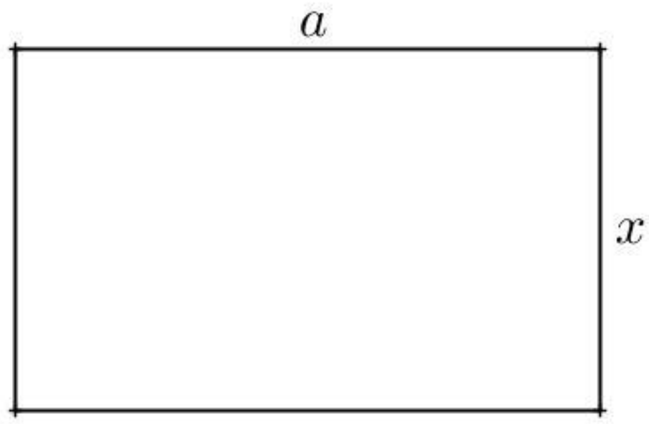
$$0 = 0$$

Součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ je tedy vždy roven 0. To znamená, že tyto dva vektory jsou na sebe kolmé. Stejně tak na sebe musí být kolmé i úhlopříčky znázorněné na obrázku 19.

3.3.2 Doplňující otázky:

1. Obdélník má obsah 1 metr čtvereční a jeho strany jsou v poměru zlatého řezu. Jaké rozměry má tento obdélník?

Obdélník na obrázku má strany o délkách *a* a *x*. Víme, že jeho strany jsou v poměru zlatého řezu a také, že jeho obsah je přesně 1 m^2.



Obrázek 19- Zlatý obdélník daného obsahu

Délky stran tohoto obdélníka zjistíme řešení soustavy těchto dvou rovnic.

$$\frac{a}{x} = 1{,}618$$

$$a \cdot x = 1$$

Jejím řešením dojdeme k následujícím výsledkům:

$$x \doteq 0{,}786$$

$$a \doteq 1{,}272$$

Zjistili jsme, že delší strana obdélníka má délku přibližně **1,272 m** a kratší strana je dlouhá asi **0,786 m**.

Výsledky ještě ověříme jednoduchou zkouškou:

Víme, že musí platit:

$$\frac{a}{x} = 1{,}618$$

$$\frac{1{,}272}{0{,}786} \doteq 1{,}618.$$

Dále musí platit:

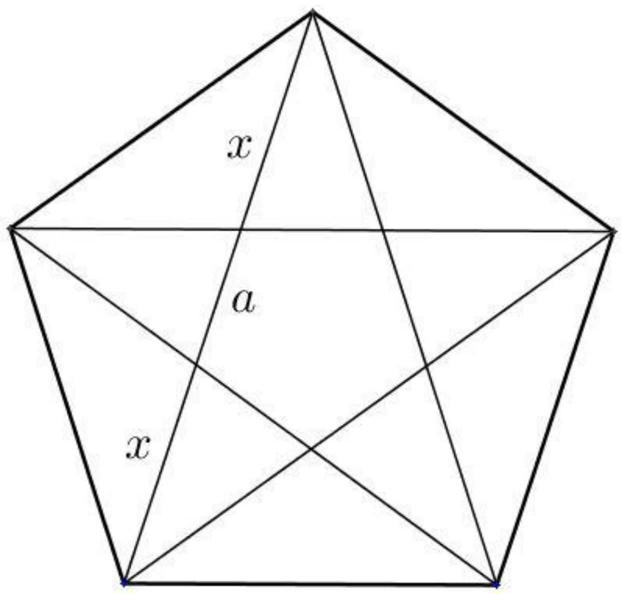
$$a \cdot x = 1$$

$$1{,}272 \cdot 0{,}786 \doteq 1.$$

Rozměry tohoto obdélníku jsou tedy **1,272 m** a **0,786 m**.

2. Mějme pravidelný pětiúhelník. Sestrojíme-li všechny jeho úhlopříčky, mělo by platit, že každá úhlopříčka je rozdělena jinou úhlopříčkou v poměru zlatého řezu. Dokažte toto tvrzení.

Na obrázku 21 je pravidelný pětiúhelník a všechny jeho úhlopříčky.



Obrázek 20- Pravidelný pětiúhelník 1

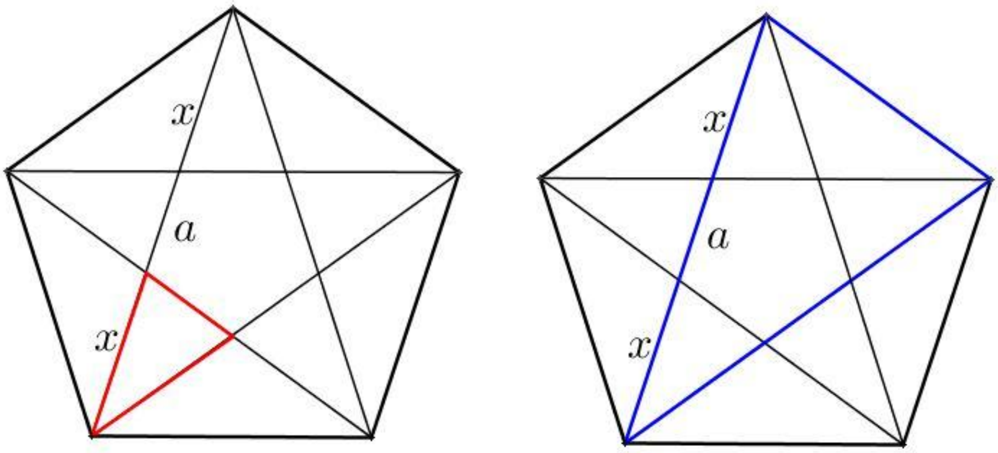
Úhlopříčkám pětiúhelníka jsme přiřadili velikosti a a x. Přičemž každá z úhlopříček má délku $a + 2x$.

Podle zadaného tvrzení by mělo platit:

$$\frac{a + 2x}{a + x} \doteq 1{,}618.$$

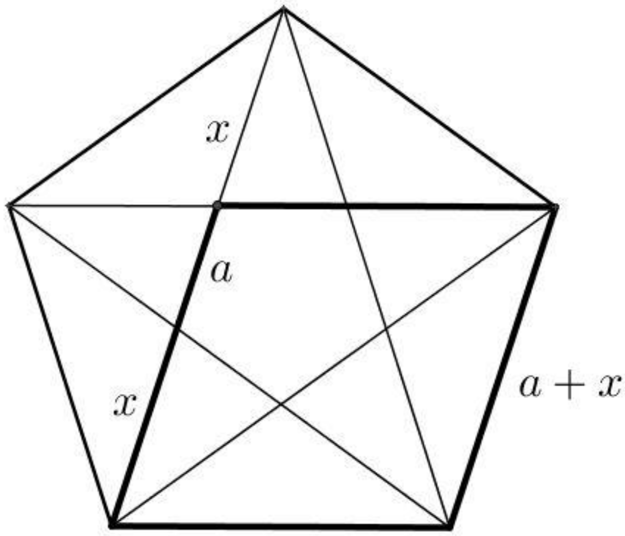
Nyní zjistíme, jaký vztah mají mezi sebou délky a a x.

Úhlopříčky tento pětiúhelník rozdělují na několik jiných geometrických útvarů. Můžeme si například všimnout, že dva trojúhelníky zvýrazněné níže na obrázku 29 jsou si navzájem podobné.



Obrázek 21- Pravidelný pětiúhelník 2

Dále si můžeme všimnout, že jedna strana pětiúhelníku má délku $a + x$. Tento fakt je zřejmý obrázku 23.



Obrázek 22- Pravidelný pětiúhelník 3

Můžeme říci, že červený trojúhelník má strany délek x, x, a a modrý trojúhelník má strany délek $a + 2x, a + 2x, a + x$.

Podle věty o podobnosti trojúhelníků platí rovnice:

$$\frac{x}{a} = \frac{a + 2x}{a + x}.$$

Řešením této rovnice dojdeme k výsledku:

$$x \doteq 1{,}618a.$$

To znamená:

$$\frac{x}{a} \doteq 1{,}618.$$

Strany a, x jsou v poměru zlatého řezu.
Také víme, že platí:

$$\frac{x}{a} = \frac{a + 2x}{a + x} \doteq 1{,}618$$

Zároveň $a + 2x$ je délka celé úhlopříčky pětiúhelníka a $a + x$ je délka větší části úhlopříčky rozdělené jinou úhlopříčkou. Tyto dvě úsečky jsou také v poměru zlatého řezu.

Tímto jsme dokázali, že každá úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka je rozdělena jinou úhlopříčkou vždy v poměru zlatého řezu.

3.4 Pythagorova věta a Thaletova věta

3.4.1 Popis problému

Jak Pythagorova tak Thaletova věta jsou věty velmi známé a v matematice často používané. Oběma je již na základních školách věnována velká pozornost a pravděpodobně každý člověk, který prošel základním vzděláním, si i po letech dokáže alespoň částečně vybavit, čeho se tyto dvě věty týkají.

Pythagorova i Thaletova věta mají jednu společnou vlastnost a to, že obě můžeme použít při konstrukci pravoúhlého trojúhelníka. Čehož využijeme u následujícího příkladu.

Jakým způsobem je možné vytýčit pravý úhel pro stavbu pyramidy?

Pyramida má čtvercový půdorys. Chceme-li jej vytýčit pro její stavbu, potřebujeme sestrojit na místě budoucí stavby čtverec. Pro konstrukci čtvercového půdorysu je třeba nějakým způsobem vyznačit čtyři pravé úhly na místě vrcholů tohoto čtverce.

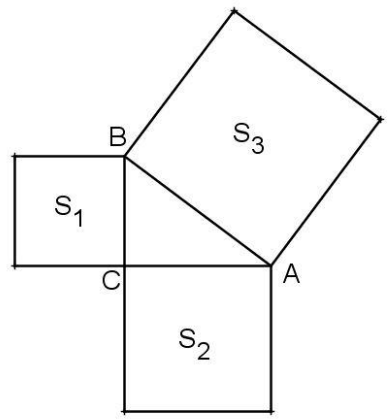
Vyměřit pravý úhel pro stavbu tak velkého objektu jako je například pyramida, není jednoduché. Pro jeho konstrukci ale můžeme využít Pythagorovy nebo Thaletovy věty.

Řešení pomocí Pythagorovy věty:

Pythagorova věta popisuje vzájemný vztah mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Známe-li délky dvou stran trojúhelníka a víme-li zároveň, že je tento trojúhelník pravoúhlý, dokážeme právě pomocí Pythagorovy věty určit délku třetí strany.

Znění Pythagorovy věty

Součet obsahů čtverců sestrojených nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu čtverce sestrojeného nad přeponou.



Obrázek 23- Pythagorova věta

Sečteme-li obsahy S_1 a S_2 čtverců sestrojených nad odvěsnami trojúhelníka, dostaneme obsah S_3 čtverce sestrojeného nad přeponou.

$$S_1 + S_2 = S_3$$

$$S_1 = a^2;\ S_2 = b^2;\ S_3 = c^2$$

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Jak víme, Pythagorova věta hovoří o vzájemném vztahu délek stran pravoúhlého trojúhelníka. Konstrukci pravoúhlého trojúhelníka můžeme využít k vytýčení pravého úhlu pro stavbu dané pyramidy.

Nejprve je třeba sestrojit pravoúhlý trojúhelník. K tomu nám mohou nejlépe posloužit tzv. pythagorejské trojice.

Pythagorejská trojce je taková trojice přirozených čísel, pro kterou platí:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Jinými slovy můžeme říct, že tato tři přirozená číslo představují délky stran pravoúhlého trojúhelníka.

Nejznámější pythagorejské trojice:

3; 4; 5,

5; 12; 13,

7; 24; 25,

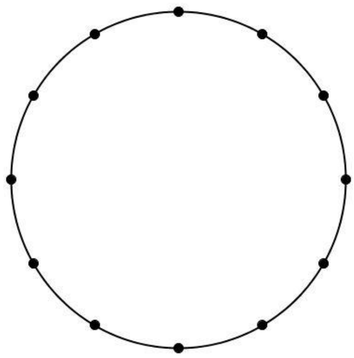
8; 15; 17,

9; 40; 41.

Pro řešení zadané úlohy použijeme nejjednodušší pythagorejskou trojici, což jsou čísla 3; 4; 5. Sestrojíme-li trojúhelník o délkách stran 3 j; 4 j; 5 j, bude pravoúhlý (j = libovolná jednotka délky).

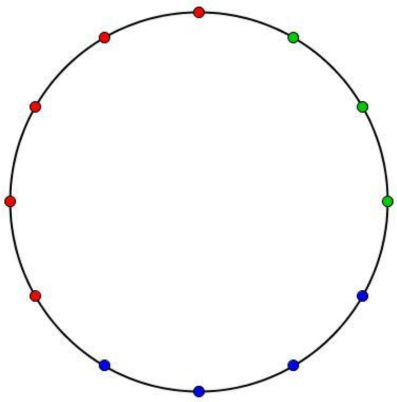
Aby tento trojúhelník byl dostatečně velký, bude pravděpodobně nejjednodušší jej sestrojit pomocí příhodně dlouhého lana.

Lano rozdělíme na 12 stejně dlouhých dílů (například pomocí uzlů) a jeho konce svážeme tak, aby vznikl kruh o 12 stejných dílech.



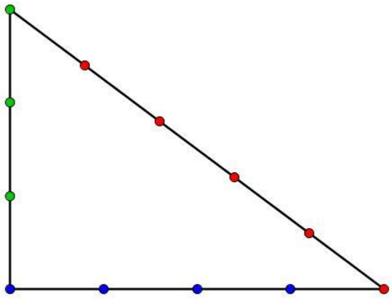
Obrázek 24- Řešení pomocí Pythagorovy věty 1

Lano je tvořeno dohromady 12 stejnými díly, můžeme ho tedy rozdělit na tři části po třech, čtyřech a pěti dílech.



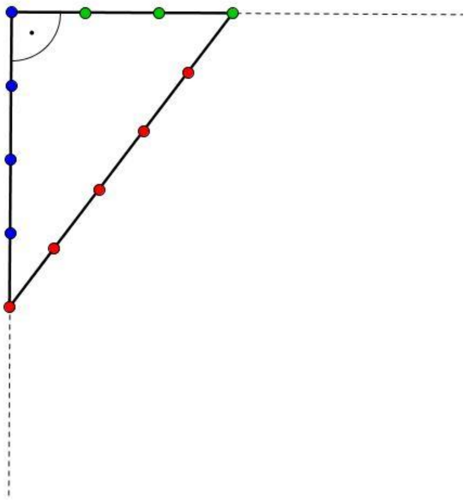
Obrázek 25- Řešení pomocí Pythagorovy věty 2

Dále správným uchycením a napnutím, vytvoříme z lana pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají délky 3 díly, 4 díly a 5 dílů.



Obrázek 26- Řešení pomocí Pythagorovy věty 3

Tímto trojúhelníkem můžeme vytýčit pravý úhel při konstrukce pyramidy. Jednu jeho odvěsnu přiložíme na jednu stranu čtvercového půdorysu a druhou jeho stranu vytvoříme protažením druhé odvěsny.



Obrázek 27- Řešení pomocí Pythagorovy věty 4

Pomocí lana rozděleného na 12 stejných dílů (nebo jakýkoli počet, který je součtem některé z pythagorejských trojic), můžeme vytýčit pravé úhly čtvercového půdorysu pyramidy.

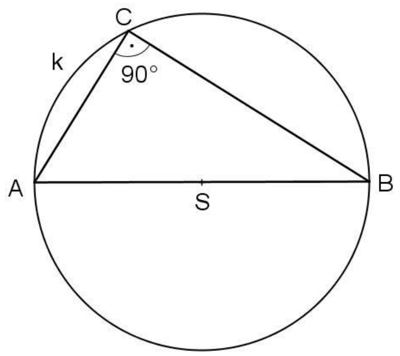
Řešení pomocí Thaletovy věty:

Thaletovu větu je možné pojmout dvěma různými způsoby. Buď jako větu, která popisuje vlastnost kružnice, nebo jako větu vypovídající o jedné z vlastností pravoúhlého trojúhelníka.

Znění Thaletovy věty

- Všechny trojúhelníky sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravoúhlé.

- Střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku leží ve středu jeho přepony.

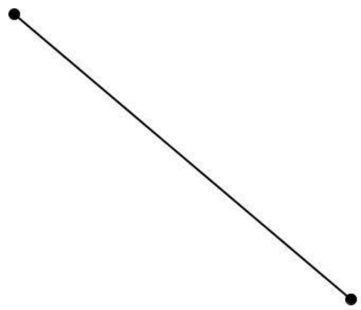


Obrázek 28- Thaletova věta

Obrázek 29 znázorňuje Thaletovu větu graficky. Krajní body průměru kružnice a libovolný bod na ní ležící tvoří vždy pravoúhlý trojúhelník.

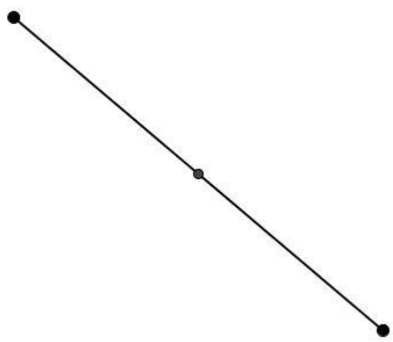
Pomocí Thaletovy věty (Thaletovy kružnice) můžeme sestrojit rovněž pravoúhlý trojúhelník, který nám stejně jako v předchozím případě pomůže vytýčit pravé úhly půdorysu pyramidy.

Podle rozměrů, které má strana půdorysu mít, určíme velikost jeho úhlopříčky. Umístíme dva protilehlé vrcholy tohoto půdorysu na požadované místo. Zbylé dva vrcholy určíme pomocí Thaletovy kružnice.



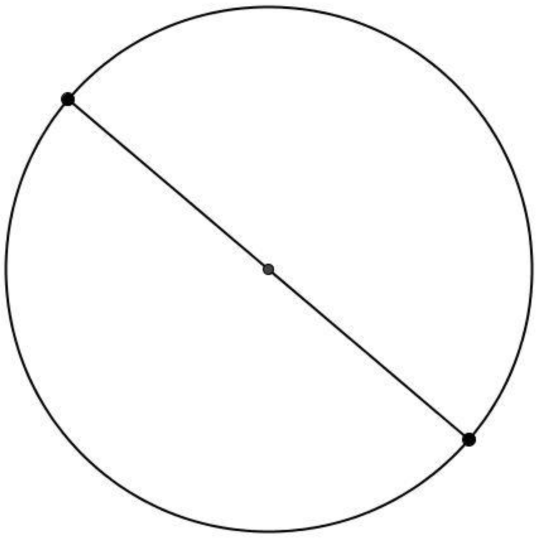
Obrázek 29- Řešení pomocí Thaletovy věty 1

Úsečka na obrázku 30 představuje úhlopříčku půdorysu. Její krajní body jsou protilehlé vrcholy tohoto půdorysu pyramidy. Nyní nalezneme střed této úsečky, který je zároveň středem Thaletovy kružnice.



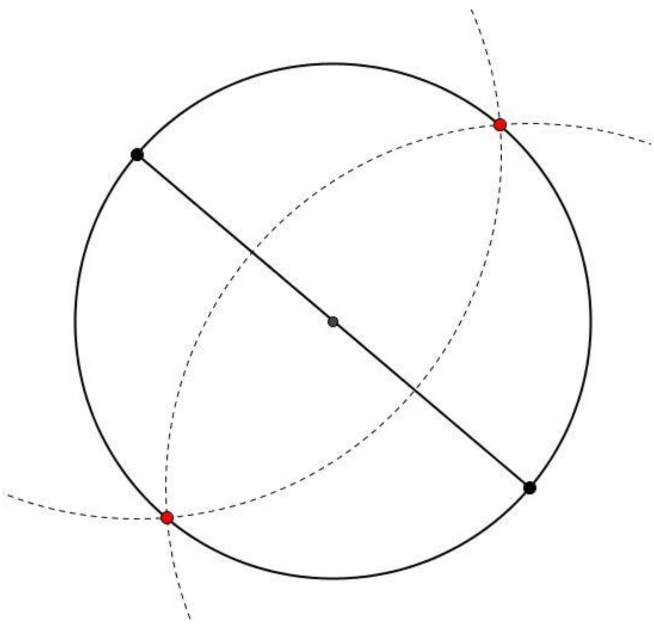
Obrázek 30- Řešení pomocí Thaletovy věty 2

Dále sestrojíme Thaletovu kružnici nad touto úsečkou. K tomu můžeme použít například lano, na jehož jeden konec umístíme kůl (pro vytvoření obrysu kružnice) a jeho druhý konec upevníme ke středu úsečky.



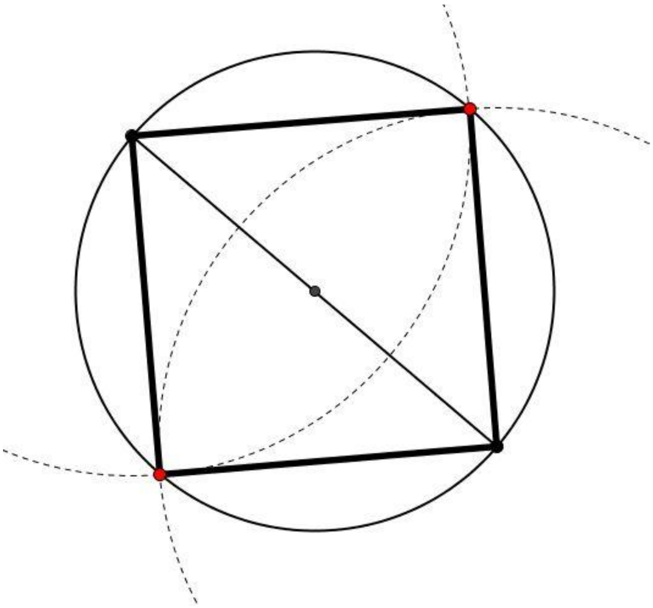
Obrázek 31- Řešení pomocí Thaletovy věty 3

Sestrojili jsme Thaletovu kružnici nad úhlopříčkou půdorysu pyramidy. Dále vyneseme z již známých vrcholů délky stran půdorysu pyramidy (opět pomocí kružnice, kterou můžeme vytvořit stejným způsobem jako předním Thaletovu kružnici). Kde se tyto kružnice protnou s Thaletovou kružnicí, tam se nacházejí zbylé dva vrcholy půdorysu.



Obrázek 32- Řešení pomocí Thaletovy věty 4

Spojíme-li všechny čtyři vrcholy ve čtverec, dostaneme půdorys zadané pyramidy.



Obrázek 33- Řešení pomocí Thaletovy věty 5

3.4.2 Doplňující otázky:

1. Kdy a kým byla formulována Pythagorova věta?

O Pythagorově větě se často mluví jako o pravděpodobně nejslavnější větě matematiky.

Tuto věta v 6. stol. př. n. l. objevil známý matematiky Pythagoras ze Samu, po kterém je tato věta také pojmenována. Uvádí se však, že Pythagorova věta byla známá již ve starověkém Egyptě nebo Číně.

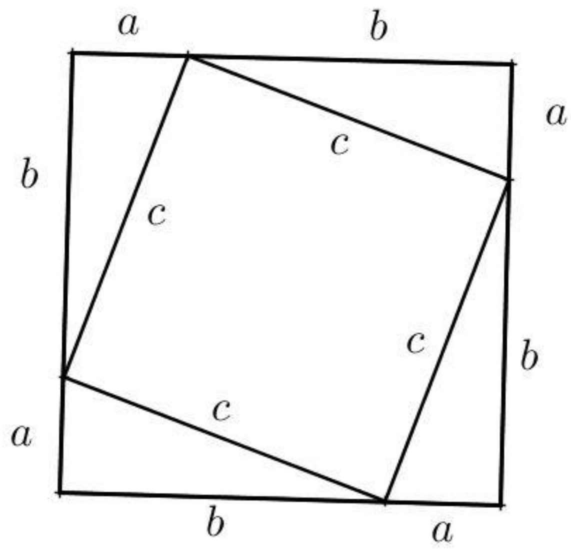
Pythagoras ze Samu [16]

Obrázek 34- Pythagoras ze Samu

Pythagoras se narodil okolo roku 570 př. n. l. na Řeckém ostrově Samos. Z tohoto ostrova však přibližně ve svých třiceti letech, v době kdy se tamní vlády ujal tyran Polykratéz, uprchl. Zbytek svého života prožil v jižní Itálii na území dnešního Crotone. Tam také založil svou filozofickou školu a vyučoval.

2. Dokažte Pythagorovu větu.

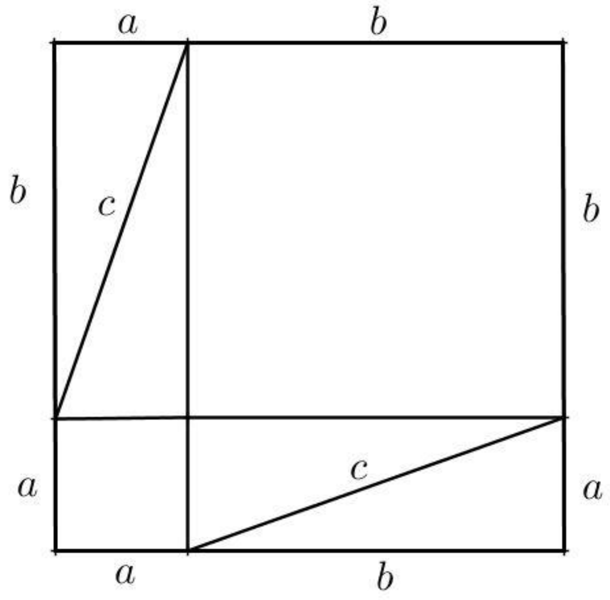
Pythagorovu větu je možné graficky dokázat velmi jednoduchým způsobem. Nejprve sestrojíme libovolný čtverec. Všechny strany tohoto čtverce rozdělíme stejným způsobem na dvě různé části, o délkách a a b. Body, které rozdělují každou stranu, spojíme tak, aby vznikl menší čtverec vepsaný do čtverce původního.



Obrázek 35- Důkaz Pythagorovy věty 1

Na obrázku 36 vznikly čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami a, b a přeponou na obrázku pojmenovanou c. Menší obdélník má stranu délky c a jeho obsah je roven c^2.

Nyní trojúhelníky uvnitř čtverce přemístíme tak, aby rozdělily plochu čtverce na dva menší čtverce a dva obdélníky.



Obrázek 36- Důkaz Pythagorovy věty 2

Z obrázku je zřejmé, že jeden z těchto menších čtverců má stranu délky a, tudíž je jeho obsah a^2 a druhý stranu délky b, jeho obsah je tedy b^2. Zároveň je jasné, že obsah těchto dvou čtverců dohromady musí být stejný jako obsah čtverce o straně c z předchozího obrázku.

Musí tedy platit:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tím je Pythagorova věta dokázána.

3. Kdy a kým byla formulována Thaletova věta

Thaletova věta je podobně jako Pythagorova věta velmi slavnou a důležitou větou matematiky. V 5. století před n. l. ji formuloval Thales z Milétu. Tuto větu ovšem znali již staří Egypťané a Babyloňané. Thales byl prvním, kdo je dokázal.

Thales z Milétu [17]

Obrázek 37- Thales z Milétu

Thales z Milétu se narodil roku 640 před n. l. ve městě Milétos. Je jedním z nejvýznamnějších řeckých filozofů. Proslavil se ovšem i v mnoha dalších oborech, byl zároveň významným matematikem, fyzikem a astronomem. Rovněž byl také velmi zcestovalým a úspěšným kupcem.

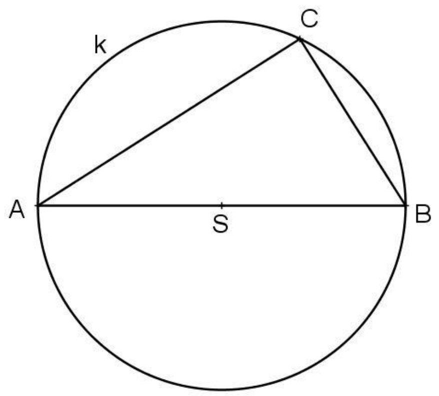
V oblasti matematiky je známý především díky formulaci a důkazu Thaletovy věty. Dále také ve své době šokoval tím, že dokázal s velkou přesností určit výšku pyramid jen z jejich stínu.

O Thaletově životě se bohužel neví příliš mnoho, některé prameny je rozcházejí i v délce Thaletova života. Údajně měl zemřít ve věku přibližně 78 let.

Jeho přínos matematice a především filozofii je bezesporu jedinečný a nenahraditelný.

4. Dokažte Thaletovu větu.

Pro jasnější ilustraci důkazu si pomůžeme obrázkem.

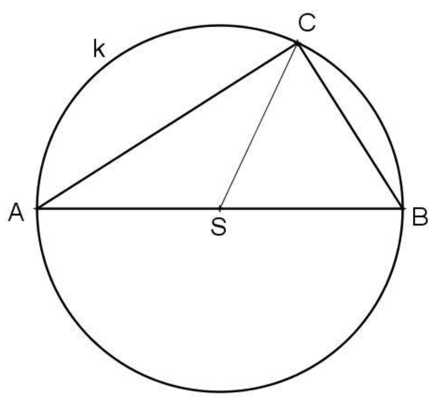


Obrázek 38- Důkaz Thaletovy věty 1

Na obrázku 39 je zobrazen trojúhelník sestrojený nad průměrem kružnice. Tento trojúhelník je podle Thaletovy věty pravoúhlý.

Naším úkolem je dokázat, že úhel u vrcholu C je 90°.

Trojúhelník ABC rozdělíme úsečkou CS na dva menší trojúhelníky ASC a BCS.

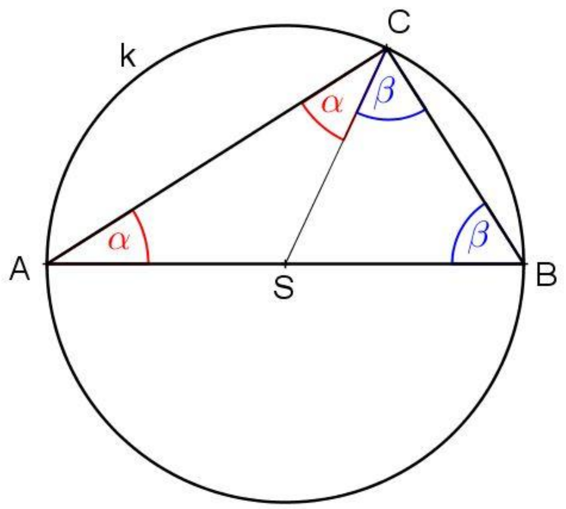


Obrázek 39- Důkaz Thaletovy věty 2

Oba tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné, jelikož vždy dvě jejich strany jsou tvořeny poloměrem kružnice k. Z toho plyne:

$$\sphericalangle CAS = \sphericalangle ACS = \alpha$$

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle CBS = \beta.$$



Obrázek 40- Důkaz Thaletovy věty 3

Jelikož součet vnitřních úhlů každého trojúhelníka je 180°, musí platit:

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

$$2(\alpha + \beta) = 180°$$

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}.$$

U vrcholu C se nachází právě úhel $\alpha + \beta$. Tím jsme dokázali, že trojúhelník ABC je vždy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C.

3.5 Užití goniometrických funkcí

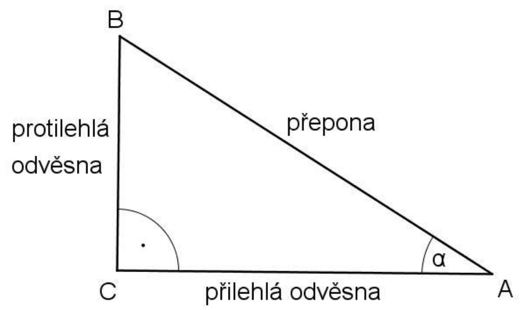
Goniometrické funkce jsou funkce, které popisují vztah mezi úhly a délkami stran trojúhelníků. Ačkoliv pomocí goniometrických funkcí můžeme popsat úhly a strany jakéhokoliv trojúhelníka, převážně se s nimi setkáváme pouze u trojúhelníků pravoúhlých.

3.5.1 Popis problému

Jaký způsobem je možné ze země určit výšku stromu, aniž bychom jej museli měřit?

K vyřešení této úlohy nám vystačí znalost goniometrických funkcí, libovolné měřidlo délky, úhloměr a tužka nebo klacík. Dále je nutné, aby zvolený strom, jehož délku budeme měřit, vrhal stín. Musí být tedy splněna podmínka vhodného počasí.

Goniometrické funkce



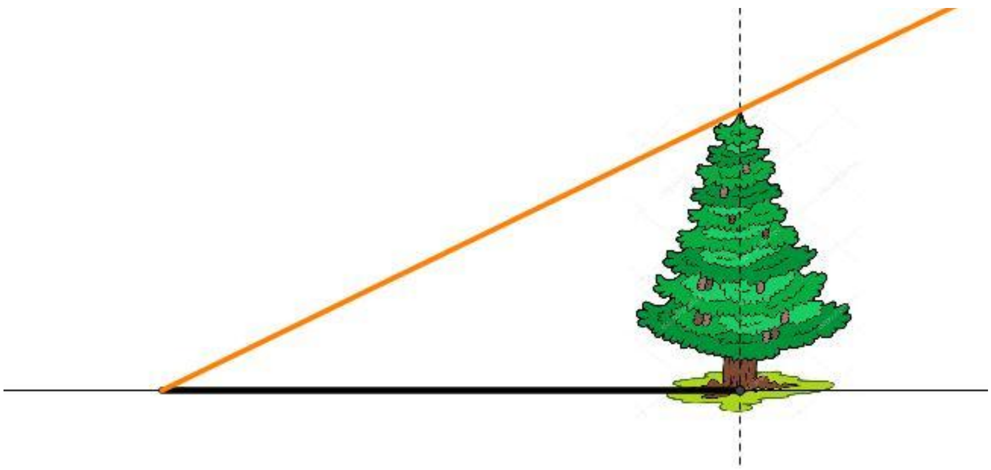
Obrázek 41- Goniometrické funkce

Na obrázku 42 je znázorněný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Dále je u vrcholu A vyznačen úhel α. Strany trojúhelníka jsou pojmenovány podle své polohy vzhledem k úhlu α.

Definice goniometrických funkcí vzhledem k úhlu α.

- Sinus: $\sin\alpha = \frac{\text{protilehlé odvěsna}}{\text{přepona}}$
- Kosinus: $\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$
- Tangens: $\tan\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehá odvěsna}}$
- Kotangens: $\cot\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$

Na obrázku 43 je znázorněn strom, jehož výšku chceme určit. Oranžově je naznačen směr slunečních paprsků v daném okamžiku. Černá tučná čára přestavuje stín, který je vržen tímto stromem na zem. Přerušovaná čára naznačuje osu stromu procházející jeho nejvyšším bodem.



Obrázek 42- Určení výšky stromu 1

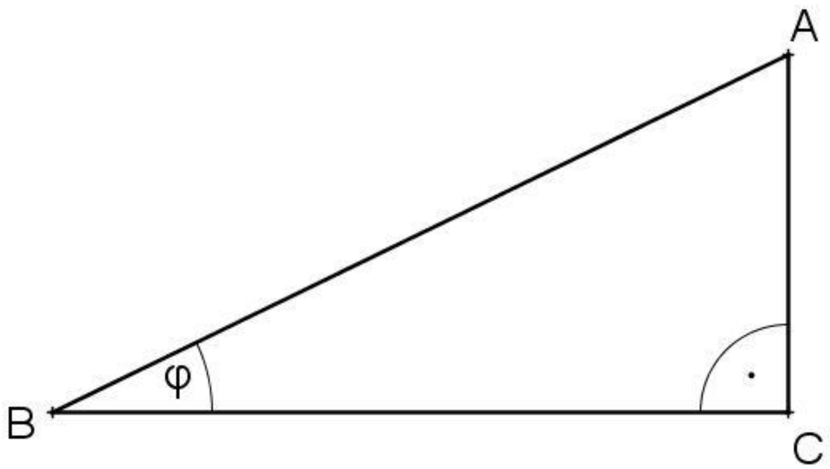
Všechny tři tyto čáry můžeme pojmout jako navzájem různoběžné přímky, jejichž tři průsečíky tvoří pravoúhlý trojúhelník.

Aniž bychom museli opustit zemský povrch, můžeme o tomto trojúhelníku zjistit dva důležité údaje. Pásmem můžeme změřit délku vrženého stínu a pomocí tužky nebo klacíku a úhloměru určíme velikost úhlu, který svírají sluneční paprsky povrchem

Země. Změřit délku stínu pásmem nepředstavuje žádný problém, mírně obtížnějším úkolem je změření úhlu slunečních paprsků.

Vezmeme připravenou tužku nebo klacík. Jeden konec opřeme o zem a druhý konce nastavíme tak (pod takovým úhlem), aby tento předmět nevrhal na zem žádný stín. V tom okamžiku víme, že jsme tento předmět nastavili tak, že svírá s povrchem stejný úhel jako sluneční paprsky.

Až se toto podaří, změříme úhloměrem úhel, který tento předmět svírá se zemí. Tento úhel je zároveň jedním úhlem výše popsaného trojúhelníka. Označíme jej φ.



Obrázek 43- Určení výšky stromu 2

Obrázek představuje trojúhelník 44 vytvořený stromem, jeho stínem a úsečkou mezi skutečným vrcholem stromu a vrcholem stínu.

Trojúhelník jsme pojmenovali ABC. Pravý úhel (pata stromu) se nachází při vrcholu C, strana *a* je délka stínu, strana *b* představuje výšku stromu a strana *c* je vzdálenosti mezi skutečnou špičkou a špičkou stínu. Úhel φ je úhel, který svírají sluneční paprsky se zemí.

Naším úkolem je určit délku strany *b* tohoto pravoúhlého trojúhelníka. Strana *b* je jednou z jeho odvěsen, druhá z odvěsen (strana *a*) je nám také známa, přepona nikoliv.

Pro řešení této úlohy můžeme tedy využít goniometrických funkcí tangens nebo kotangens. Funkce tangens se v takových případech používá častěji. Pro řešení naší úlohy zvolíme tedy také právě funkci tangens.

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\boldsymbol{b = a \cdot \tan\varphi}$$

Z řešení vidíme, že výšku stromu, kterou představuje právě strana *b*, určíme jako součin délky stínu (strany a) a hodnoty tangens úhlu, který svírají sluneční paprsky se zemí (úhlu φ).

3.5.2 Doplňující otázky:

1. Může se někdy během jasného slunného dne stát, že bychom nedokázali úlohu způsobem, který je výše uvedený, vyřešit? Pokud ano, kdy a proč?

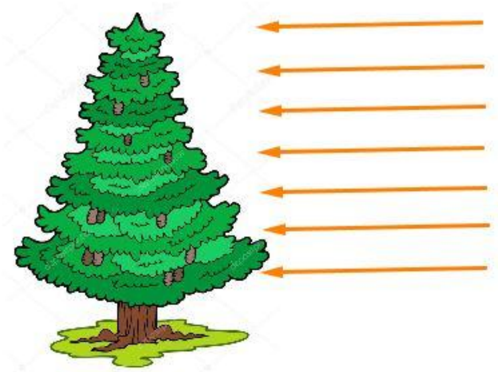
U řešení, které jsme popisovali je klíčový sklon Slunce. Díky tomu, že sluneční paprsky dopadají na zem pod určitým úhlem, vrhá strom stín. V okamžiku, kdy by sluneční paprsky dopadaly na zem kolmo, strom by žádný stín nevrhal a nemohli bychom určit jeho výšku.

Obrázek 44-Stín stromu 1

Budou-li sluneční paprsky dopadat na zem způsobem na obrázku 45, pak bude strom vrhat stín kruhové tvaru pouze pod sebe. Z čehož není možné jeho výšku určit. Tento jev v našich zeměpisných podmínkách ovšem nemůže nastat. Na tuto část Země sluneční paprsky nikdy kolmo nedopadají.

Situace by mohla nastat na obratnících (raka, kozoroha). To jsou zemské rovnoběžky, na které v době slunovratu dopadá sluneční záření kolmo.

Další možnost, která může nastat a překazit realizaci, je, pokud Slunce klesne tak nízko, že se bude nacházet pod horizontem stromu.



Obrázek 45- Stín stromu 2

Pokud se Slunce nachází na obzoru, můžeme dopadající paprsky znázornit jako na obrázku 46. V takovém případě strom vrhá neurčitý stín, který se ztrácí a není možné určit jeho konec. Jde jakoby donekonečna. Pak není možné změřit jeho délku a výšku stromu nelze vypočíst.

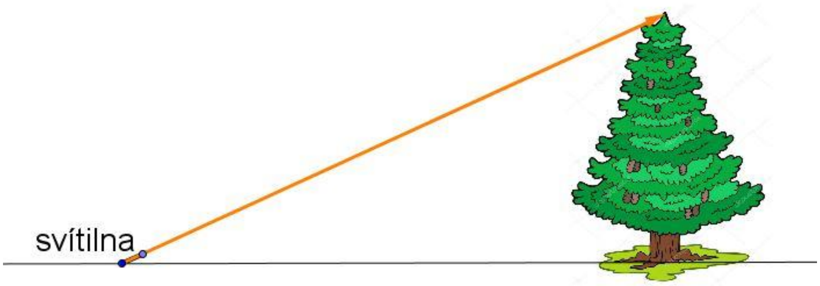
K tomuto jevu dochází každé ráno při východu Slunce a každý večer při jeho západu.

2. Jak bychom mohli tuto úlohu vyřešit například v noci?

Pokud je noc a nesvítí Slunce, strom nevrhá žádný stín, není tedy možné k určení jeho výšky použít způsob popsaný v úvodu.

Máme-li tuhle úlohu vyřešit, postačí nám jako pomůcka obyčejná ruční svítilna. Měla by však být dostatečně silná.

Svítilnu umístíme do libovolné vzdálenosti od stromu, kterou předem určíme. Je nám tedy známa. Svítilnu rozsvítíme a namíříme tak, aby vrhala kužel světla přesně na špičku stromu.



Obrázek 46- Měření výšky stromu za tmy

Z obrázku 46 je zřejmé, že strom, světlo vrhané svítilnou a povrch země od paty stromu ke svítilně tvoří pravoúhlý trojúhelník. Ten se velmi podobá tomu z původního řešení.

Pokud nyní dokážeme změřit úhel, který svírá svítilna se zemí, můžeme opět použitím funkce tangens vypočítat výšku stromu.

4 Závěr

Cílem této práce je zprostředkovat čtenáři základní představu o pojmu badatelsky orientovaná výuka a její zahrnutí do vyučování matematiky.

Dále má práce naznačovat, jaké problémy či úlohy lze ve výuce matematiky pojmout badatelskou metodou a tím poskytnout čtenáři určitou inspiraci pro realizaci badatelského vyučování.

V první části práce je charakterizována výuka badatelskou formou, aby si čtenář mohl vytvořit představu o tomto způsobu vyučování. Dále se v této části seznámil se vznikem a rozšiřováním této formy výuky v Evropě.

V druhé části práce si čtenář udělal představu o konkrétních příkladech, které se dají pojmout formou badatelsky orientované výuky.

Myslím, že tato práce je vhodná jako pomocný materiál pro učitele matematiky, kteří mají zájem o realizaci badatelský výuky ve svých hodinách.

5 Literatura

[1] STUCHLÍKOVÁ, I. O badatelsky orientovaném vyučování. *Papáček M. (ed.): Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování.* DiBi 2010. pp. 129-135 přístupné on line http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/bi/DiBi2010.pdf

[2] PECH, Pavel, Lenka ČINČUROVÁ, Martin GÜNZEL, et al. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2.

[3] DOSTÁL, Jiří. *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4393-5.

[4] Projekt POLLEN [cit. 17-2-16]. Dostupné z: http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/2120/projekt-pollen.html/

[5] PROJEKT POLLEN – ROZVOJOVÉ MESTÁ VEDY [cit. 17-2-18]. Dostupné z: pdf.truni.sk/download?vsr/dokumenty/pollen.pdf

[6] Projekt Fibonacci [cit. 17-3-2]. Dostupné z: http://fibonacci.truni.sk/index.php?option=com_content&view=section&layout=blog&id=5&Itemid=53

[7] The Fibonacci Project [cit. 17-3-6]. Dostupné z: http://fibonacci-project.eu/

[8] SAMKOVÁ, L., HOŠPESOVÁ, A., ROUBÍČEK, F., TICHÁ, M. Badatelsky orientované vyučování matematice. Scientia in educatione (sciED), 2015, roč. 6, č. 1, s. 91-122.

[9] Upravený Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání platný od 1. 9. 2013 [cit. 17-3-20]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani

[10] Třeboňsko [cit. 17-2-1]. Dostupné z: http://www.trebonsko.cz/

[11] Třeboňský kapr [cit. 17-2-5]. Dostupné z: http://www.trebonskykapr.cz/

[12] Rybníkářství Třeboň [cit. 17-2-3]. Dostupné z: http://www.trebon.rybarstvi.cz/

[13] Standardní velikosti papíru ISO [cit. 17-3-15]. Dostupné z: http://www.typo.cz/databaze/pravidla-a-nazvoslovi/standardni-velikosti-papiru-iso/

[14] Rozměry papíru formátu A4, A5, A6, A3, ... [cit. 17-3-15]. Dostupné z: http://www.rozmery-velikosti.cz/papir-a4-a5.htm

[15] BARNES, J. G. P. *Gems of geometry*. 2nd ed. New York: Springer, c2012. ISBN 978-3-642-30963-2.

[16] Pythagoras [17-3-22]. Dostupné z: http://www.iep.utm.edu/pythagor/

[17] Thales of Miletus [17-3-25]. Dostupné z: http://www.iep.utm.edu/thales/