Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Testy z úvodního kurzu matematické analýzy

Vypracovala: Bc. Michaela Jelínková
Vedoucí práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice, 2016

Poděkování

Chtěla bych poděkovat RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., vedoucí mé diplomové práce, za vedení, připomínky a čas, který mi věnovala. Dále bych chtěla poděkovat Doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D. za pomoc s didaktickou částí práce a Mgr. Jiřímu Kopeckému za technickou podporu. Mé poděkování patří též mé rodině a blízkým přátelům za podporu během studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Testy z úvodního kurzu matematické analýzy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 3. 1. 2016 ……………………………………………

Bc. Michaela Jelínková

Anotace

Cílem diplomové práce je didakticky správně sestavit sady příkladů a testy z matematické analýzy. Příklady budou vycházet z témat: reálná funkce jedné reálné proměnné a její vlastnosti, limita a spojitost funkce, derivace funkce, průběh funkce. Z jednotlivých sad příkladů budou pomocí softwaru Moodle náhodně vygenerovány konkrétní testy tak, že z každé sady bude generován určitý počet příkladů. Kromě zadání testů bude práce obsahovat i jejich podrobné řešení. Práce bude sloužit jako individuální příprava na zkoušku z matematické analýzy, nebo jako zkouška samotná.

Anotace v AJ

The aim of this thesis is to didactically properly assemble a set of exercises and tests form the field of Mathematical Analysis. Examples will be based on themes: real-valued functions of a real variable and its properties, limits and continuity of a function, derivative of a function and course of a function. Moodle software will be used to randomly generate specific tests in a way that from each set will be generated certain number of exercises. In addition to the test assignments this thesis will include their detailed solutions. This thesis will work as an individual preparation for the exam in mathematical analysis or the exam itself.

Obsah

1. ÚVOD 5
2. CÍL A METODIKA PRÁCE 6
3. TESTOVÁNÍ 8
3.1 DRUHY DIDAKTICKÝCH TESTŮ 8
3.2 DRUHY TESTOVÝCH ÚLOH 10
3.3 TESTOVÁNÍ ZNALOSTÍ MATEMATIKY V ČR 11
3.3.1 SCIO TESTY 11
3.3.2 PISA 11
3.3.3 TIMSS 12
4. SADY ÚLOH 13
4.1 ZADÁNÍ SAD ÚLOH 13
4.1.1 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 1 13
4.1.2 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 2 16
4.1.3 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 3 17
4.1.4 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 4 20
4.1.5 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 5 21
4.1.6 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 6 22
4.2 VÝSLEDKY SAD ÚLOH 4, 5 a 6 24
4.2.1 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 4 24
4.2.2 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 5 38
4.2.3 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 6 48
5. TESTY 63
5.1 TEST 1 63
5.2 TEST 2 65
5.3 TEST 3 67
5.4 TEST 4 69
5.5 TEST 5 71
6. ŘEŠENÍ TESTŮ 74
6.1 ŘEŠENÍ TESTU 1 74
6.2 ŘEŠENÍ TESTU 2 80
6.3 ŘEŠENÍ TESTU 3 87
6.4 ŘEŠENÍ TESTU 4 94
6.5 ŘEŠENÍ TESTU 5 101
7. ZÁVĚR 108
8. LITERATURA A ZDROJE 109

1. <u>ÚVOD</u>

Cílem diplomové práce je didakticky správně sestavit testy z matematické analýzy z oblasti funkce jedné reálné proměnné. S předpokladem, že tyto testy budou řešit studenti 1. ročníku bakalářského studia oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání PF JČU v rámci předmětu Matematická analýza I (dále MA1), bylo nutné v rámci tohoto úkolu přihlédnout k osnovám daného předmětu a těmi se v průběhu sestavování testů řídit. Nezbytným krokem ke správné obsahové náplni testů byl tedy především důkladný rozbor obsahu i rozsahu učiva předmětu MA1. Vedle písemné zkoušky může práce sloužit také jako pomůcka k individuální přípravě na tuto zkoušku.

Diplomová práce se skládá z několika částí. Ve druhé kapitole se čtenář seznámí s metodikou vytváření testů a metodikou jejich generování softwarem Moodle. V rámci diplomové práce bylo vytvořeno 6 různých sad příkladů, které jsou nahrány také v softwaru Moodle. Ten náhodně generuje z každé sady určitý počet příkladů tak, že vytvoří test.

Vzhledem k zaměření práce na tvorbu didaktických testů je třetí kapitola věnována problematice testování.

Čtvrtá část práce obsahuje zadání, včetně výsledků šesti sad příkladů. Pro každou sadu je společný úvod zadání. Konkrétní příklady v jednotlivých sadách jsou různé, nicméně náročnost jejich řešení je srovnatelná.

Závěrečná část práce nabízí ukázku pěti testů vygenerovaných pomocí softwaru Moodle. Součástí je také jejich podrobné řešení a hodnocení.

2. CÍL A METODIKA PRÁCE

Cílem diplomové práce je didakticky správně sestavit testy z matematické analýzy z oblasti funkce jedné reálné proměnné, konkrétně pro předmět Matematická analýza I vyučovaný na katedře matematiky PF JČU v bakalářském typu studia v rámci oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání. Vedle písemné zkoušky může práce sloužit také jako pomůcka k individuální přípravě na tuto zkoušku.

Prvním krokem ke správné obsahové náplni testů byl především důkladný rozbor obsahu i rozsahu učiva předmětu MA1.

Při tvorbě testů se vycházelo z následujících tematických okruhů:

1. Pojem funkce. Základní vlastnosti reálných funkcí jedné reálné proměnné. Skládání funkcí. Funkce inverzní.
2. Funkce logaritmická, funkce exponenciální, obecná mocnina.
3. Funkce goniometrické, cyklometrické.
4. Limita funkce. Limity funkcí vzniklých aritmetickými operacemi. Limita složené funkce. Věty o nerovnostech.
5. Spojitost funkce v bodě, na intervalu.
6. Suprémum a infimum množiny reálných čísel. Věta o limitě monotónní funkce. Vlastnosti funkcí spojitých v intervalu.
7. Derivace funkce v bodě. Věty o derivacích - aritmetické operace, složená funkce.
8. Věty o střední hodnotě- Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova. Monotonie funkce v bodě.
9. Absolutní extrém funkce na množině (intervalu). Monotonie funkce v intervalu.
10. Lokální extrém funkce, nutná a postačující podmínka. L´Hospitalovo pravidlo, výpočet derivace.
11. Slovní úlohy na extrém funkce.
12. Derivace vyšších řádů. Konvexnost a konkávnost funkce v intervalu.
13. Funkce konvexní, konkávní v bodě. Inflexní bod. Asymptota funkce. Vyšetřování průběhu funkce. (https://wstag.jcu.cz/portal/).

Součástí testů je také jejich hodnocení. U každého příkladu je uveden maximální počet bodů, který lze za vyřešení daného příkladu získat, přičemž maximální počet bodů z celého testu je 100. Za úspěšného řešitele testu je považován student, který získá minimálně polovinu z celkového počtu bodů, tj. 50 bodů. Student, který získá 50 – 69 bodů bude ohodnocen „dobře“. Hodnocení „velmi dobře“ lze získat při dosažení 70 – 89 bodů. Ohodnocení známkou „výborně“ získá ten, kdo dosáhne 90 – 100 bodů.

Z důvodu předejití opakujícímu se zadání testů v rozmezí několika zkouškových termínů bylo vytvořeno 6 sad příkladů. V každé sadě je 20 – 40 různých příkladů, přičemž jejich řešení je srovnatelně náročné. Příklady byly v těchto sadách nahrány do výukového softwaru Moodle, který umožňuje náhodné generování určitého počtu příkladů z každé sady tak, že vytvoří kompletní zadání zkouškového testu. Je tedy minimální pravděpodobnost, že by se zadání totožného testu opakovalo v krátkém časovém úseku. Vyučující má tak možnost vygenerovat na jeden zkouškový termín libovolný počet variant testů.

.

3. TESTOVÁNÍ

Cílem diplomové práce je vytvořit didaktické testy z matematické analýzy. Podle Sedláčkové (1993) jsou didaktické testy jednou z hlavních diagnostických metod. Pomocí diagnostických metod učitel získá zpětnou vazbu o výkonech studentů. Didaktický test je písemná zkouška zaměřená na zjišťování úrovně osvojení učiva u konkrétní skupiny osob. Každý test je nejprve navrhován, poté hodnocen a interpretován podle předem stanovených pravidel.

Kvalitně připravený didaktický test je jednou z možností, jak může pedagog získat informace o tom, jak probíhá výuka a jakých výsledků žáci dosahují. (Průcha, 2009).

Základními vlastnostmi didaktického testu jsou validita, reliabilita, praktičnost, obtížnost, citlivost. (Průcha, Walterová, Mareš, 2003).

První písemné zkoušky se objevují přibližně ve 2. polovině 19. století v USA. V České republice jsou počátky testování spjaty se jménem V. Příhody, který se s písemným testováním seznámil během svého studia v USA. Později se pokusil zavést písemné testování i na českých pokusných školách. Toto testování se velice dobře uchytilo, avšak po roce 1948 se od písemného testování upustilo. Od 60. let 20. století se písemné testování začalo do škol opět zavádět a je velice častým prostředkem v českých školách dodnes.

3.1 DRUHY DIDAKTICKÝCH TESTŮ

Každý didaktický test má vlastní specifické vlastnosti, podle nichž lze didaktické testy rozdělit do několika skupin podle toho, jaké informace jsou jejich prostřednictvím zjišťovány. Podle Průchy (2009) dělíme didaktické testy do následujících kategorií:

- **podle měření charakteristiky výkonu**
  - **Testy rychlosti** zjišťují, jak rychle je žák schopen řešit určitý typ testových úloh.
  - **Testy úrovně** zjišťují úroveň vědomostí, jsou nejčastěji používané na našich školách.
- **podle dokonalosti přípravy testu**
  - **Standardizované** testy jsou profesionálně připravené testy. Testování probíhá za jednotných podmínek.
  - **Nestandardizované** (neformální) jsou testy, které nejsou ověřeny na větším počtu žáků, a tudíž nejsou známy jejich vlastnosti.
- **podle povahy činnosti testovaného**
  - **Kognitivní** testy měří úroveň poznání u žáků.
  - **Psychomotorické** testy zjišťují výsledky psychomotorického učení žáků.
- **podle míry specifičnosti učení zjišťovaného testem**
  - **Testy výsledků výuky** měří, co se žáci v dané oblasti naučili.
  - **Testy studijních předpokladů** měří úroveň obecnějších charakteristik jedince.
- **podle interpretace výkonu**
  - **Testy rozlišující** bývají označovány také jako srovnávací testy nebo NR testy (norm-referenced tests).
  - **Testy ověřující** bývají označovány jako testy kriteriální nebo CR testy (criterion-referenced tests). Prověřují úroveň vědomostí žáka, nesrovnávají výkony žáků mezi sebou.
- **podle časové zařazení do výuky**
  - **Vstupní** testy se zadávají na začátku výuky určitého celku učiva.
  - **Průběžné** testy se zadávají v průběhu výuky a poskytují učiteli zpětnou vazbu k optimálnímu řízení výuky.
  - **Výstupní** testy se zadávají na konci výukového období nebo na konci určitého celku.
- **podle tematického rozsahu**
  - **Monotematické** testy zkouší jediné téma z učiva.
  - **Polytematické** testy zkouší učivo několika tematických celků.

- **podle míry objektivního skórování**
    - **Objektivně skórovatelné** testy obsahují úkoly, u nichž lze rozhodnout, zda byly řešeny správně.
    - **Subjektivně skórovatelné** obsahují úkoly, u nichž nelze jednoznačně rozhodnout, zda je odpověď správná.

Didaktické testy z matematické analýzy, které jsou hlavní náplní této práce, lze zařadit do každé z výše zmiňovaných kategorií didaktických testů. Z pohledu charakteristiky výkonu se jedná o testy úrovně, kde je jednoznačně zjišťovaná úroveň vědomostí. Testy prozatím nebyly ověřovány na větším počtu studentů, proto se jedná o nestandardizované testy. Cílem testů je hodnotit dosaženou úroveň poznání daného učiva, proto jsou kognitivní. Podle míry specifičnosti učení zjišťovaného testem se řadí mezi testy výsledků výuky. Podle interpretace výkonu se jedná o testy ověřující, protože je každý student hodnocen bez ohledu na výsledky jiných studentů, navíc při generování více variant zkouškových testů pomocí softwaru Moodle nebudou všichni studenti řešit stejná zadání testů. Jelikož testy budou sloužit jako písemná zkouška pro absolvování předmětu Matematická analýza 1, jde se o testy výstupní. V testech je zahrnuto učivo z celého semestru, je spojeno několik témat a jsou tedy polytematické. U každého příkladu existuje správná odpověď, proto se jedná o testy objektivně skórovatelné.

3.2 DRUHY TESTOVÝCH ÚLOH

Testová úloha je každá otázka, úkol nebo problém obsažený v testu. Rozlišujeme je podle způsobu, jak testovaná osoba úlohu řeší. Podle Průchy (2009) lze vymezit následující typy úloh:

- **Otevřené široké úlohy** vyžadují rozsáhlejší odpověď, doporučují se u zkoušení komplexních vědomostí nebo dovedností osvojovaných v delším časovém období.
- **Otevřené úlohy se stručnou odpovědí** požadují uvedení vlastní krátké odpovědi.

- **Uzavřené dichotomické úlohy** nabízí dvě alternativy odpovědi, přičemž student vybírá jednu z nich.
- **Uzavřené úlohy s výběrem odpovědí** obsahují několik možných odpovědí a řešitel vybírá jednu nebo několik správných odpovědí.
- **Uzavřené přiřazovací úlohy** obsahují dvě skupiny pojmů, které přiřazujeme k sobě.
- **Uzavřené seřazovací úlohy** požadují uspořádání pojmů do řady podle určitého kritéria.

Testy v této práci obsahují pouze otevřené široké úlohy, kde studenti řeší různě náročné úkoly.

3.3 TESTOVÁNÍ ZNALOSTÍ MATEMATIKY V ČR

3.3.1 SCIO TESTY

Scio je nezávislá společnost, která působí v oblasti českého školství od roku 1996. Jejím úkolem je především zjišťování a hodnocení výsledků vzdělávání s důrazem na vývoj a organizaci testování a příprava přijímacích zkoušek. Provádí také všeobecné testování znalostí z mnoha vzdělávacích okruhů. Jedná se o standardizované národní srovnávací zkoušky, které slouží k všeobecnému porovnání vědomostí a dovedností žáků, popřípadě studentů různých věkových kategorií v rámci celé České republiky.

3.3.2 PISA

Mezinárodní šetření PISA (Programme for International Student Assessment) je považováno za jedno z nejdůležitějších mezinárodních šetření v oblasti měření výsledků vzdělávání, které v současné době ve světě probíhá. Jedná se o zjišťování výsledků žáků v posledním roce povinné školní docházky v různých zemích v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti. Poprvé se tento výzkum uskutečnil v roce 2000 a opakuje se pravidelně každé tři roky tak, že pokaždé je kladen důraz na jednu z uvedených oblastí, aby bylo možné získat co nejpřesnější a nejdetailnější informace.

Kromě konkrétních znalostí výzkum sleduje také to, jak jsou mladí lidé schopni své vědomosti a dovednosti využívat v praxi, pro své další studium a zaměstnání. Cílem tohoto projektu je zlepšit vzdělávací politiku a výsledky vzdělávání a také poskytovat školám v jednotlivých zemích informace o fungování školských systémů. V ČR je realizátorem Česká školní inspekce.

3.3.3 TIMSS

Výzkum TIMSS (Trends in International Mathematics and Science) je mezinárodní šetření matematického a přírodovědného vzdělávání v různých zemích. Zjišťuje úroveň znalostí a dovedností žáků základních škol. Česká republika se pravidelně zapojuje od roku 1995 a to v 1. cyklu (1995), 2. cyklu (1999), 4. cyklu (2007), 5. cyklu (2011) a aktuálně probíhá šestý cyklus TIMSS 2015, do kterého je zapojeno více než 50 zemí. V listopadu roku 2016 budou zveřejněny výsledky, které ukáží trend vývoje v posledních 20 letech. Na zveřejnění mezinárodní zprávy naváží také podrobnější sekundární analýzy zaměřené na konkrétní témata, jako jsou například specifika slabých a výborných žáků, typy úloh, které jsou pro žáky nejvíce obtížné a další. Předmětem zkoumání jsou 3 hlavní kategorie, a to zamýšlené kurikulum, realizované kurikulum a dosažené kurikulum. Zamýšlené kurikulum jsou cíle definované národním vzdělávacím systémem. Realizované kurikulum je konkrétní učivo, které je opravdu učiteli předáno v jednotlivých školách a třídách žákům. Dosažené neboli osvojené kurikulum je učivo, které si jednotliví žáci opravdu osvojili a rozumí mu. Realizátorem je Česká školní inspekce. V roce 2015 bylo realizováno testování a sběr dat na 159 českých základních školách. Součástí šetření, kromě testů pro žáky, byly také rodičovské dotazníky, dotazníky pro ředitele školy a dotazníky pro učitele matematiky a přírodovědy. Projekt realizuje Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA).

4. SADY ÚLOH

4.1 ZADÁNÍ SAD ÚLOH

Tato kapitola obsahuje zadání šesti sad úloh. Sady číslo 1, 2 a 3 obsahují kromě zadání úloh i výsledky. U zbývajících sad 4, 5 a 6 jsou výsledky uvedeny až v následující kapitole, a to z důvodu náročnosti jejich zapsání a lepší přehlednosti práce.

4.1.1 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 1

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^3}{1-x^4}$ Výsledek: $\frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ Výsledek: $-\frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-x^2}$ Výsledek: -7
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+5x-6}{x-x^2}$ Výsledek: limita neexistuje
5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$ Výsledek: 2
6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ Výsledek: limita neexistuje
7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ Výsledek: $\frac{2}{3}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ Výsledek: -4
9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ Výsledek: 3
10. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$ Výsledek: $\frac{4}{3}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(2x-3)^5\cdot(3x-8)^3}{(4x+7)^7}$ Výsledek: ∞
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(2x+3)^2\cdot(4x+5)^6}{x^8+2x+7^5}$ Výsledek: 2^{15}
13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$ Výsledek: $\frac{1}{4}$
14. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(2x+3)^2\cdot(4x+5)^7}{x^8+2x+7^5}$ Výsledek: ∞
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^4-2x^3+100}{5x^3+100x^2-4}$ Výsledek: ∞
16. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^4-3x^2+100}{5x^5+100x^2-4}$ Výsledek: 0

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-5)^6\cdot(3x-9)^{25}}{(7x+100)^{31}}$ Výsledek: $\frac{2^6\cdot 3^{25}}{7^{31}}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^6-2x^5+10x-80}{6x^8+7x-20}$ Výsledek: 0

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-5)^6\cdot(3x-4)^{20}}{(6x+100)^{26}}$ Výsledek: $\frac{1}{2^{20}\cdot 3^6}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-5)^6\cdot(3x-4)^{20}}{(6x+100)^{25}}$ Výsledek: ∞

21. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+14}-2\cdot\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ Výsledek: $-\frac{3}{32}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+14}-2\cdot\sqrt{x+2}}{x^2-4}$ Výsledek: 0

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ Výsledek: 1

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+8x+1}$ Výsledek: -3

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ Výsledek: ∞

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ Výsledek: 1

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$ Výsledek: -1

28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$ Výsledek: -2

29. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x^2-16}-2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ Výsledek: 6

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$ Výsledek: 0

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$ Výsledek: 2

32. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-2x-8}$ Výsledek: $\frac{1}{13}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}$ Výsledek: ∞

34. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ Výsledek: $\frac{1}{4}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$ Výsledek: $\frac{3}{2}$

36. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ Výsledek: $-\frac{1}{56}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ Výsledek: $\frac{1}{2}$

38. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$ Výsledek: 12

39. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x}$ Výsledek: 2

40. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x}$ Výsledek: 0

4.1.2 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 2

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$ Výsledek: $\sqrt{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ Výsledek: 4

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \cdot \sin 4x}$ Výsledek: $-\frac{1}{8}$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$ Výsledek: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x}{x^4 - x}$ Výsledek: 0

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ Výsledek: $4\sqrt{2}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x^2 - \tan^2 x}{\sin x}$ Výsledek: 1

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin 3x}{x^2}$ Výsledek: 0

9. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ Výsledek: $-\frac{1}{6}$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$ Výsledek: π

11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x + \sqrt{2} \cdot \sin x}{\sin x - \cos x}$ Výsledek: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x}$ Výsledek: 0

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin^2 x}{x \cdot \cos x}$ Výsledek: 1

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln^2(1-x)}{x^2}$ Výsledek: 1

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{3x}}{x^2 + 3x}$ Výsledek: ∞

16. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x}$ Výsledek: 0

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$ Výsledek: $\frac{1}{4}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \cdot \sin x}$ Výsledek: $\frac{3}{2}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \cdot \sin^2 x}$ Výsledek: $\frac{1}{2}$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$ Výsledek: $\frac{1}{2}$

4.1.3 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 3

Vyřešte.

1. Majitel restaurace chce oplotit svůj obdélníkový pozemek přimykající se jednou stranou k budově restaurace. Obsah pozemku je roven $800\ m^2$. Jaký by měl mít pozemek rozměry, aby majitele oplocení vyšlo co nejlevněji?

   Výsledek: $a = 20\ m;\ b = 40\ m$

2. Dětské hřiště má tvar obdélníku, na který navazuje půlkruh. Jeho obvod $o = 140\ m$. Určete rozměry dětského hřiště tak, aby jeho obsah byl co největší.

   Výsledek: $r = v = \frac{140}{\pi+4} \doteq 19{,}6\ m$

3. Do rovnoramenného trojúhelníku vepište obdélník maximálního obsahu. Jaké budou rozměry obdélníku?

   Výsledek: $x = \frac{c}{2};\ y = \frac{v}{2}$

4. Ve firmě se z plechu vyrábí separátor k promíchání vody se vzduchem, který má tvar válce. Jaké rozměry by měl přístroj mít, pokud víme, že pro spotřebitele je výhodný maximální objem a pro výrobce minimální spotřeba materiálu, tj. minimální povrch. Řešte obecně.

   Výsledek: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\ v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

5. Jedna strana pravoúhlého pozemku se přimyká ke břehu kanálu, zbylé tři strany jsou ohrazeny plotem. Jaké by měly být rozměry pozemku, aby byl jeho obsah roven $1600\ m^2$ a délka plotu byla co nejmenší?

   Výsledek: $a = 20\sqrt{2}\ m;\ b = 40\sqrt{2}\ m$

6. Najděte pravidelný trojboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.(Hrubý, Kubát, 2008).

   Výsledek: $a = v_t \cdot \sqrt{3};\ v_t = \frac{a}{\sqrt{3}}$

7. Určete dvě kladná čísla tak, aby jejich součet byl 5 a součet třetí mocniny prvního sčítance a dvojnásobku druhé mocniny druhého sčítance byl minimální.

   Výsledek: $x = 2;\ y = 3$

8. Číslo 58 rozdělte na 2 sčítance tak, aby jejich součin byl maximální. Výsledek: $a = 29;\ b = 29$

9. Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při obvodu $o = 100\ cm$ maximální obsah.

   Výsledek: $z = \frac{100}{3};\ x = \frac{100}{3}$→ rovnostranný trojúhelník

10. Mezi plochami složenými ze čtvrtkruhu a obdélníka, které mají obvod dané velikosti L určete takovou, jejíž obsah je největší.(Ryšavý, 1999).

    Výsledek: $x = \frac{L}{4};\ y = L \cdot \frac{x-\pi}{16}$

11. Románské okno vytvořené obdélníkem a půlkruhem nad jednou stranou obdélníka má daný obvod L. Jaké musí mít okno rozměry, aby propouštělo co nejvíce světla (tj., aby jeho obsah byl maximální)?(Ryšavý, 1999).

    Výsledek: $z = \frac{2L}{4+\pi};\ v = \frac{L}{4+\pi};\ \frac{Z}{2} = \frac{L}{4+\pi}$ - poloměr kruhu

12. Jaké jsou rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem, pokud má bazén objem $V = 32\ m^3$ a pokud chceme na jeho vyzdění spotřebovat minimální množství materiálu?

    Výsledek: $a = 4\ m;\ v = 2\ m$

13. Drát dlouhý $50\ m$ ohněte do pravého úhlu tak, aby vzdálenost mezi koncovými body byla minimální. Kde musíme drát ohnout?

    Výsledek: $a = 25\ m;\ b = 25\ m$ → uprostřed

14. Ze čtvercového plechu o délce strany $30\ cm$ vystřihneme v rozích čtyři stejné čtverečky. Zbytek přehneme tak, abychom dostali otevřenou krabici. Urči stranu odstřižených čtverců, pokud chceme, aby objem krabice byl maximální.

    Výsledek: $x = 5\ cm$

15. Jaké rozměry musí mít obdélník s $o = 400\ cm$, aby jeho úhlopříčka byla minimální?

    Výsledek: $a = 100\ cm;\ b = 100\ cm$ → čtverec

16. Drát délky a máme rozdělit na dvě části. Z první máme vyrobit čtverec a z druhé kruh tak, aby součet ploch byl minimální. Určete tento součet ploch.(Ryšavý, 1999).

 Výsledek: $x = \frac{4a}{\pi+4}$

17. Ze čtvrtky formátu A4 ($210 * 297\ mm$) chceme vystřihnout v rozích malé čtverečky tak, abychom složením vzniklého obrazce dostali krabici maximálního objemu. Urči délku strany odstřižených čtverců.

 Výsledek: $x = 40{,}4\ mm$

18. Z drátu dlouhého $104\ cm$ se má zhotovit model kvádru s maximálním povrchem tak, aby součet délek dvou podstavných hran byl roven výšce kvádru. Určete rozměry kvádru.

 Výsledek: $a = 6{,}5\ cm;\ b = 6{,}5\ cm$

19. Číslo 16 rozdělte na dva sčítance tak, aby součet 2. mocnin těchto sčítanců byl nejmenší možný.

 Výsledek: $a = 8;\ b = 8$

20. Určete rozměry válcové nádoby bez víka, jejíž povrch $S = 270\ \pi$ tak, aby její objem byl co největší.

 Výsledek: $r = 9{,}5\ ;\ v = 9{,}5$

4.1.4 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 4

Je dána funkce (1-20).

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

1. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
4. $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$
5. $f(x) = \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4$
6. $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$
7. $f(x) = e^{2x-x^2}$
8. $f(x) = e^{2x^2}$
9. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$
10. $f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$
11. $f(x) = -2 + \ln(2x)$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$
13. $f(x) = \frac{2-x^4}{x^2}$
14. $f(x) = x \cdot e^{-x}$
15. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
16. $f(x) = 2 + \frac{12}{x^2-4}$
17. $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$
18. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
19. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
20. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

4.1.5 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 5

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 3$
2. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) + 3$
3. $f(x) = (x+3)^3 - 8$
4. $f(x) = 2^{x-1} + 4$
5. $f(x) = 3 \cdot \ln(x-1) + 3$
6. $f(x) = 4 + 3 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{5}\right)$
7. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
8. $f(x) = 1 - \ln(3x)$
9. $f(x) = \left(\frac{1}{12}\right)^{2-x} + 13$
10. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ na $\langle -2; \infty)$
11. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ na $(-\infty; -2\rangle$
12. $f(x) = \frac{2-x}{x+5}$
13. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ na $\langle 4; \infty)$
14. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ na $(-\infty; -4\rangle$
15. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ na $\left\langle \frac{3}{2}; \infty\right)$
16. $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$
17. $f(x) = \sin(2x) + 1$ na $\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\rangle$
18. $f(x) = 1 - 2 \cdot (e^x - 2)$
19. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ na $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle$
20. $f(x) = \cos(2x) - 1$ na $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$

4.1.6 SADA PŘÍKLADŮ ČÍSLO 6

Zakreslete grafy následujících funkcí. Určete jejich definiční obor.

1. $f(x) = \left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 3\right|$
2. $f(x) = \left|\left|x - 3\right| - 2\right|$
3. $f(x) = \left|\frac{3x-1}{x+2}\right|$
4. $f(x) = \left|\left|x - 4\right| - 3\right|$
5. $f(x) = \left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$
6. $f(x) = -\left|x - 1\right| + 1$
7. $f(x) = 2 \cdot \left|x + 3\right| - 1$
8. $f(x) = 0{,}5 \cdot \left|x - 2\right| - 2$
9. $f(x) = \left|3 + \log(x - 2)\right|$
10. $f(x) = \log\left|x - 2\right|$
11. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 3$
12. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - 2$
13. $f(x) = 3 + \log(x - 2)$
14. $f(x) = 2^{x-1} + 4$
15. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - 16$
16. $f(x) = -2 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$
17. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 2$
18. $f(x) = -1 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$
19. $f(x) = 2^{x-4} - 8$
20. $f(x) = 1 - \log(x - 2)$
21. $f(x) = x^2 + 8x + 14$
22. $f(x) = (x + 1)^3 - 8$
23. $f(x) = 2x^5 - 3$
24. $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-3)^2}$
25. $f(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^3}$

26. $f(x) = -x^2 + 5x - 13$

27. $f(x) = \frac{-2}{3 \cdot (x-2)^6}$

28. $f(x) = -(x-4)^4 - 2$

29. $f(x) = 2 \cdot (x+2)^{-2} - 4$

30. $f(x) = 3 \cdot (x-3)^{-5} + 2$

4.2 VÝSLEDKY SAD ÚLOH 4, 5 a 6

Výsledky sad 1, 2 a 3 jsou uvedeny v předešlé kapitole.

4.2.1 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 4

Je dána funkce (1-20).

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

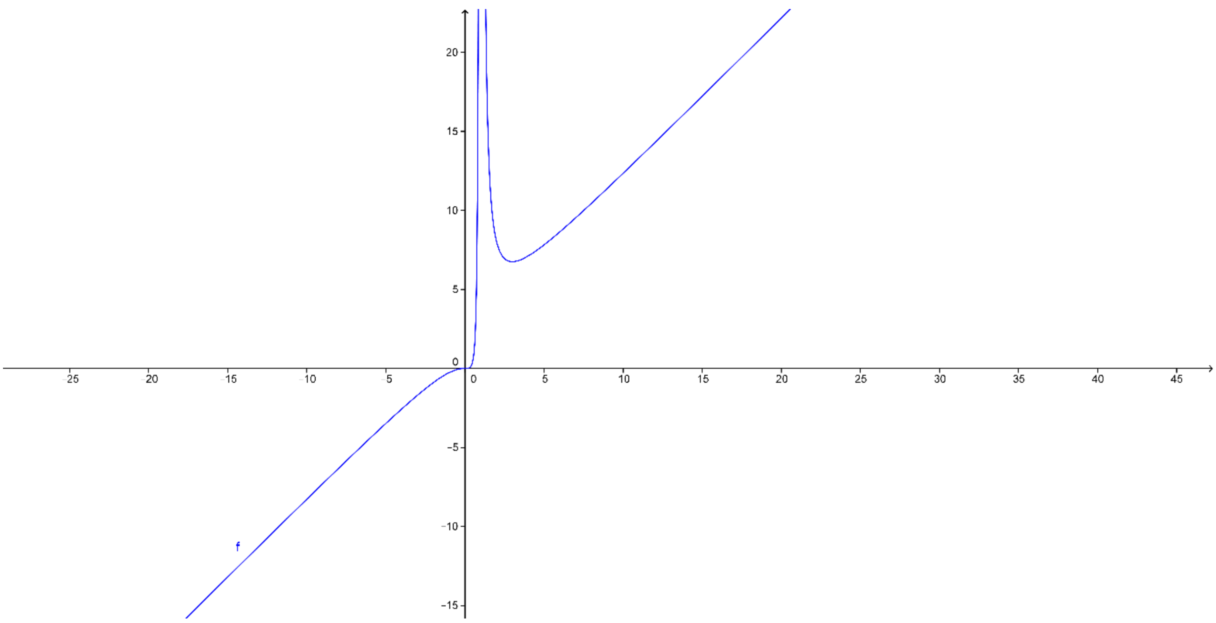
1. a) $Df \in R - \{1\}$; není sudá ani lichá; $P_x[0;0]$; $P_y[0;0]$.

   b) Rostoucí na $(-\infty;1) \cup \langle 3;\infty)$; klesající na $(1;3)$; lokální minimum $[3;6{,}75]$.

   c) Konvexní na $(-\infty;0)$; konkávní na $(0;1) \cup (1;\infty)$; inflexní bod $[0;0]$.

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \infty$; asymptota bez směrnice $x = 1$; asymptota se směrnicí $y = x + 2$.

   e) Graf:



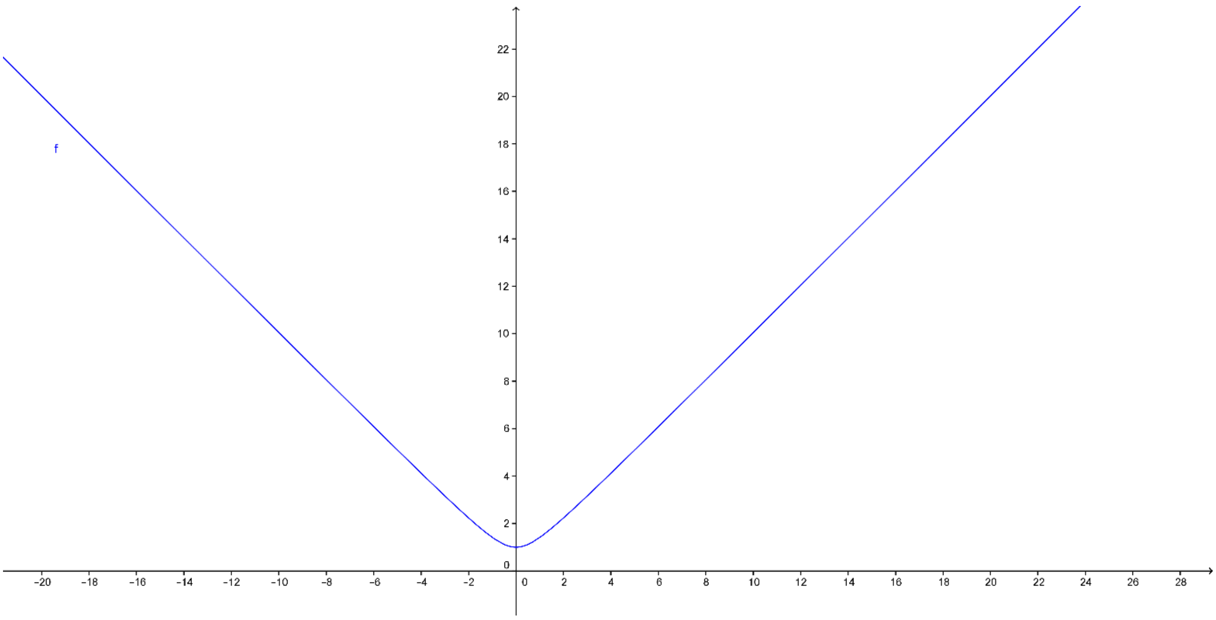
2. a) $Df \in R$; je sudá; P_x neexistuje; $P_y[0;1]$.

b) Rostoucí na $\langle 0;\infty)$; klesající na $(-\infty;0)$; lokální minimum $[0;1]$; globální minimum $[0;1]$.

c) Konvexní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=\infty$, asymptoty neexistují.

e) Graf:



3. a) $Df \in R$; je sudá; $P_{x1}[\sqrt{5};0]$; $P_{x2}[-\sqrt{5};0]$; $P_{x3}[-1;0]$; $P_{x4}[1;0]$; $P_y[0;2]$.

b) Rostoucí na $\left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}};0\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}};\infty\right)$; klesající na $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$;

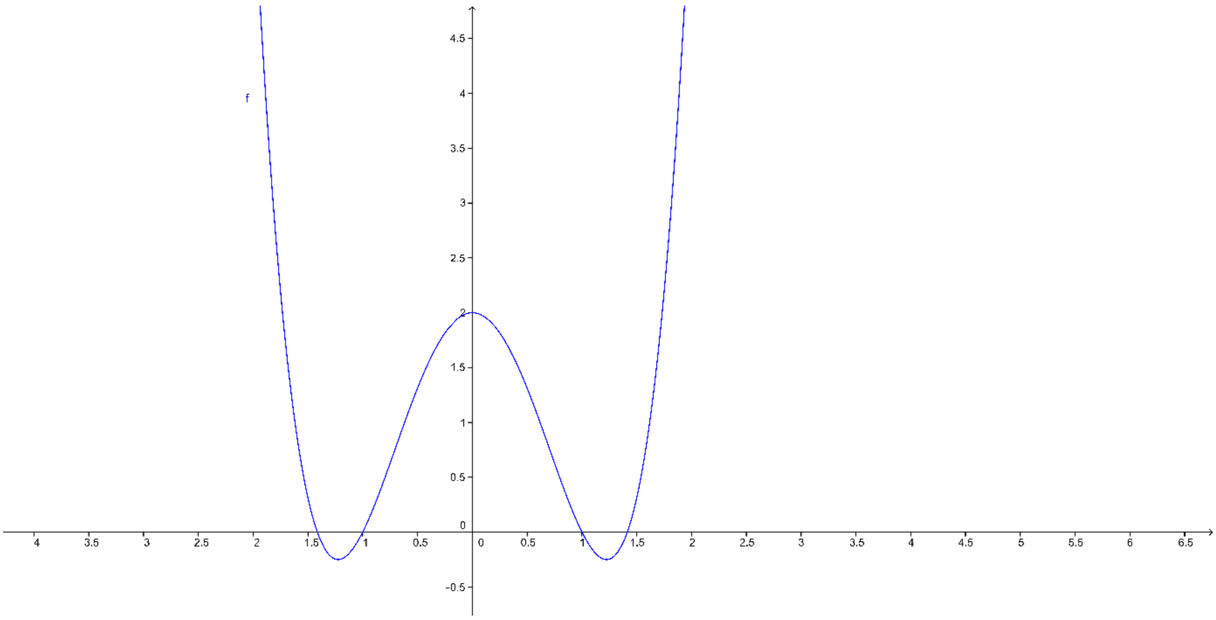
lokální maximum$[0;2]$; neostrá absolutní minima $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};-\frac{1}{4}\right]$; $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};-\frac{1}{4}\right]$.

c) Konvexní na $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$; konkávní na $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

inflexní body$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{4}\right]$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{4}\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4-3x^2+2=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4-3x^2+2=\infty$; asymptoty neexistují.

e) Graf:



4. a) $Df \in R - \{\pm 2\}$; je lichá; $P_x[0;0]$; $P_y[0;0]$.

b) Klesající na Df, lokální a globální extrémy neexistují.

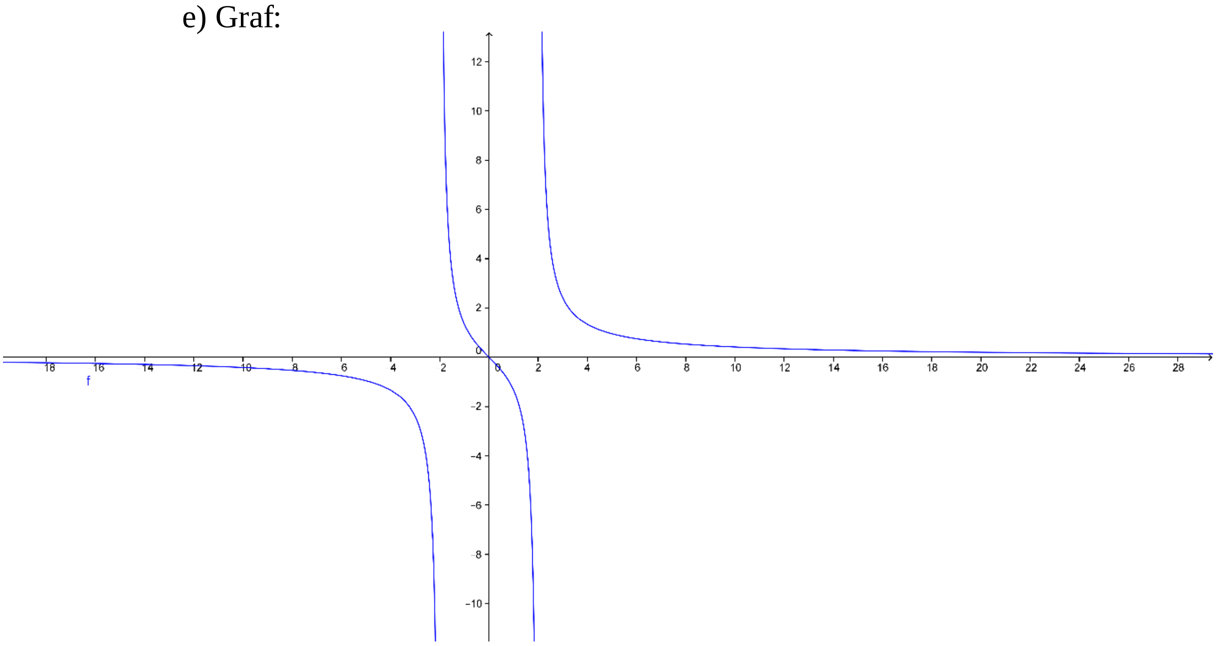
c) Konvexní na $(-2;0\rangle \cup (2;\infty)$; konkávní na $(-\infty;-2) \cup (0;2)$; inflexní bod $[0;0]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$; $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{4x}{x^2-4} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{4x}{x^2-4} = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to -2+} \frac{4x}{x^2-4} = \infty$; $\lim\limits_{x\to -2-} \frac{4x}{x^2-4} = -\infty$; asymptota bez směrnice

$x = \pm 2$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



5. a) $Df \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; není sudá ani lichá; $P_x\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$; $P_y[0; 1]$.

b) Rostoucí na $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$; klesající na $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$; lokální minimum $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$; globální minimum $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

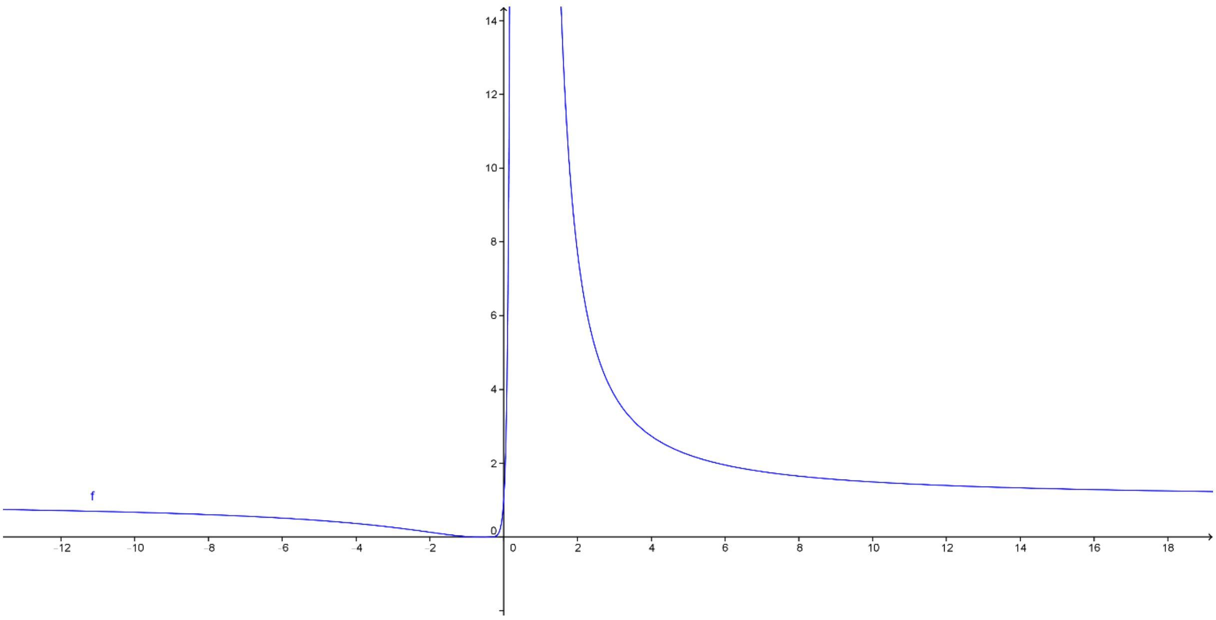
c) Konvexní na $\left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$; konkávní na $(-\infty; -2\rangle$; inflexní bod $\left[-2; \frac{81}{625}\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = 1$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \infty$;

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \infty$; asymptota bez směrnice $x = \frac{1}{2}$; asymptota se směrnicí

$y = 1$.

e) Graf:



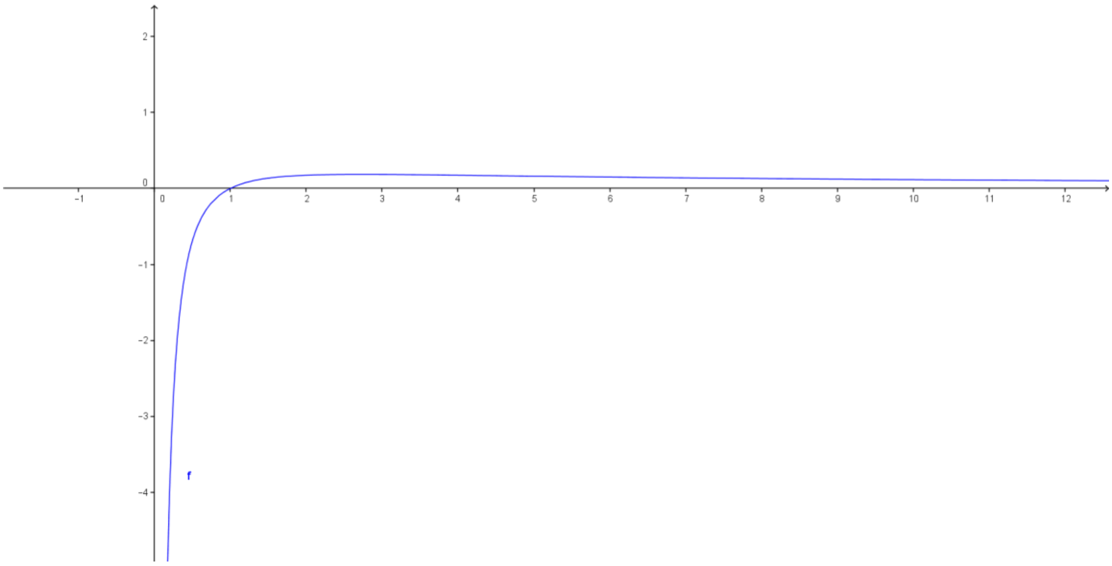
6. a) $Df \in (0; \infty)$; není sudá ani lichá; $P_x[1; 0]$; $P_y$neexistuje.

b) Rostoucí na $(0; e\rangle$; klesající na $(e; \infty)$; lokální maximum $[e; 0{,}18]$; globální maximum $[e; 0{,}18]$.

c) Konvexní na $(\sqrt{e}; \infty)$; konkávní na $(0; \sqrt{e}\rangle$; inflexní bod $[\sqrt{e}; 0{,}152]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{2x} = -\infty$;asymptota bez směrnice $x = 0$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



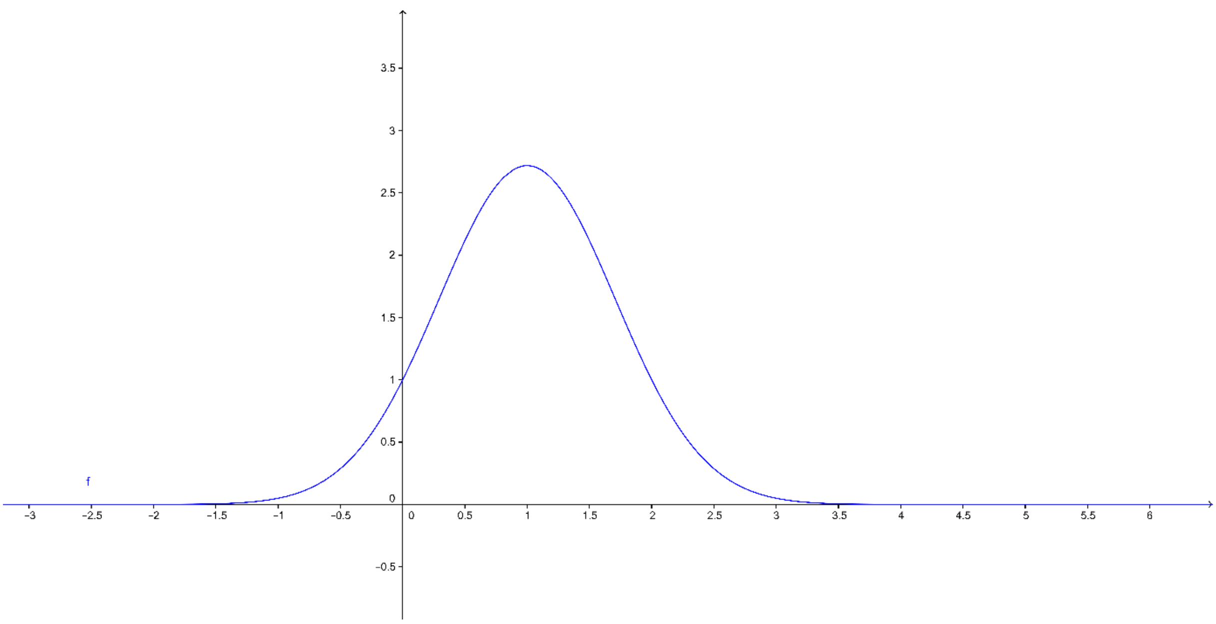
7. a) $Df \in R$; není sudá ani lichá; P_x neexistuje; $P_y[0;1]$.

b) Rostoucí na $(-\infty;1\rangle$; klesající na $(1;\infty)$; lokální maximum $[1;e]$; globální maximum $[1;e]$.

c) Konvexní na $\left(-\infty;\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\infty\right)$; konkávní na $\langle\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\rangle$; inflexní body$\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};1{,}65\right]$; $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}1{,}65\right]$.

d) $\lim_{x\to\infty} e^{2x-x^2} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2} = 0$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



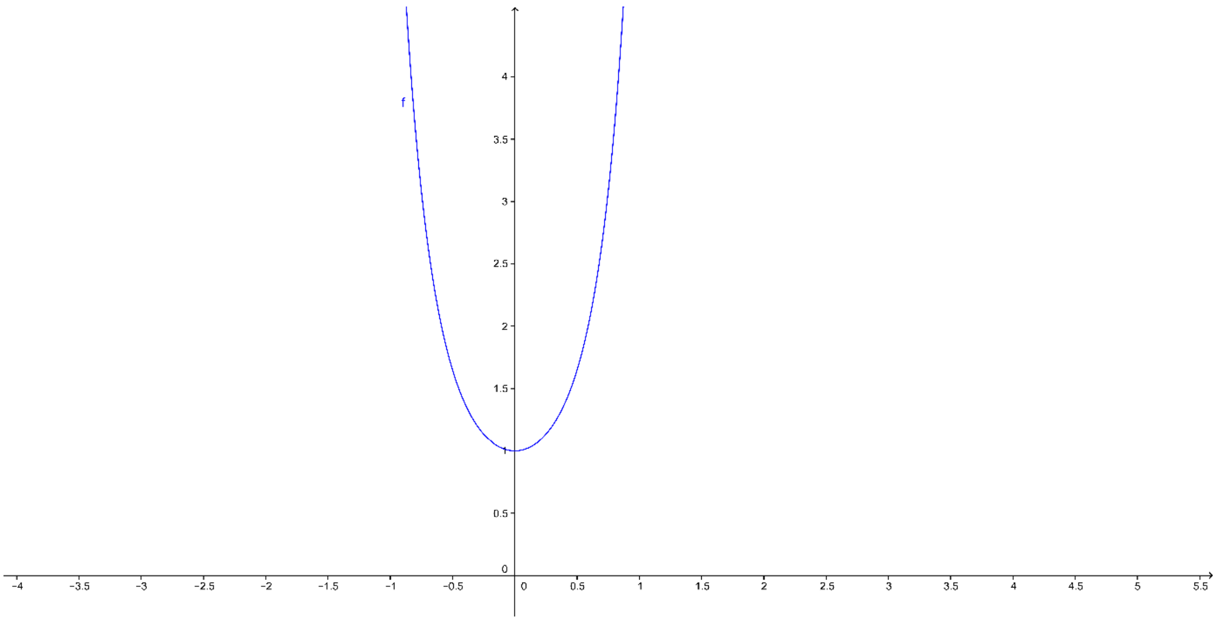
8. a) $Df \in R$; je sudá; P_x neexistuje; $P_y[0; 1]$.

b) Rostoucí na $\langle 0; \infty)$; klesající na $(-\infty; 0)$; lokální minimum $[0; 1]$; globální minimum $[0; 1]$.

c) Konvexní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x^2} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x^2} = \infty$; asymptoty neexistují.

e) Graf:



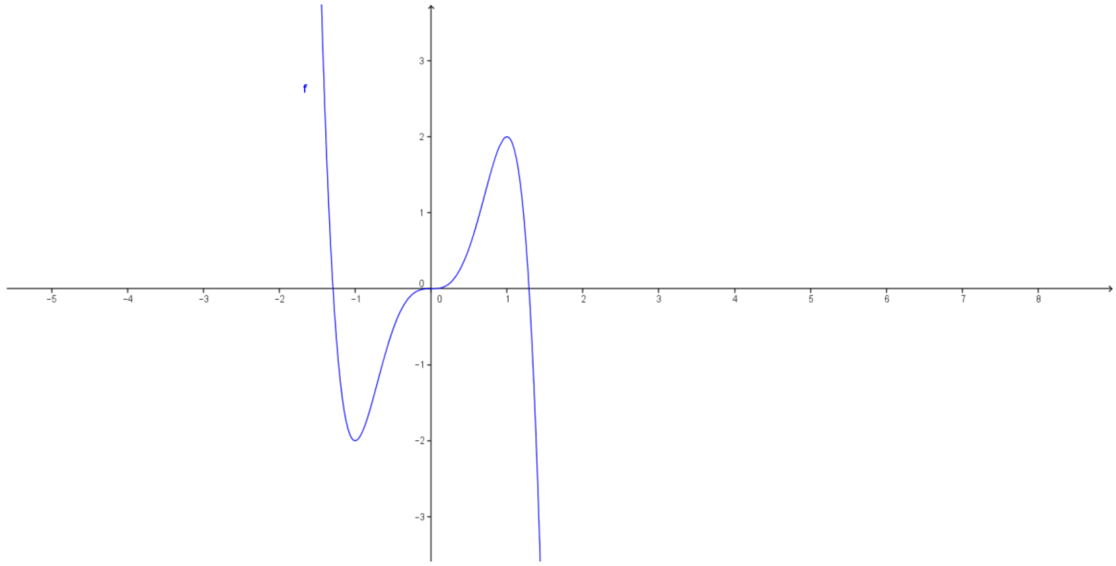
9. a) $Df \in R$; je lichá; $P_{x1}[0; 0]$; $P_{x2}\left[-\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right]$; $P_{x3}\left[\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right]$; $P_y[0; 0]$.

b) Rostoucí na $\langle -1; 1\rangle$; klesající na $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; lokální maximum $[1; 2]$; lokální minimum $[-1; -2]$.

c) Konvexní na $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \cup \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$; konkávní na $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$; inflexní body$[0; 0]$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1{,}24\right]$; $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -1{,}24\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} 5x^3 - 3x^5 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \infty$; asymptoty neexistují.

e) Graf:



10. a) $Df \in R - \{1\}$; není sudá ani lichá; $P_x[0;0]$; $P_y[0;0]$.

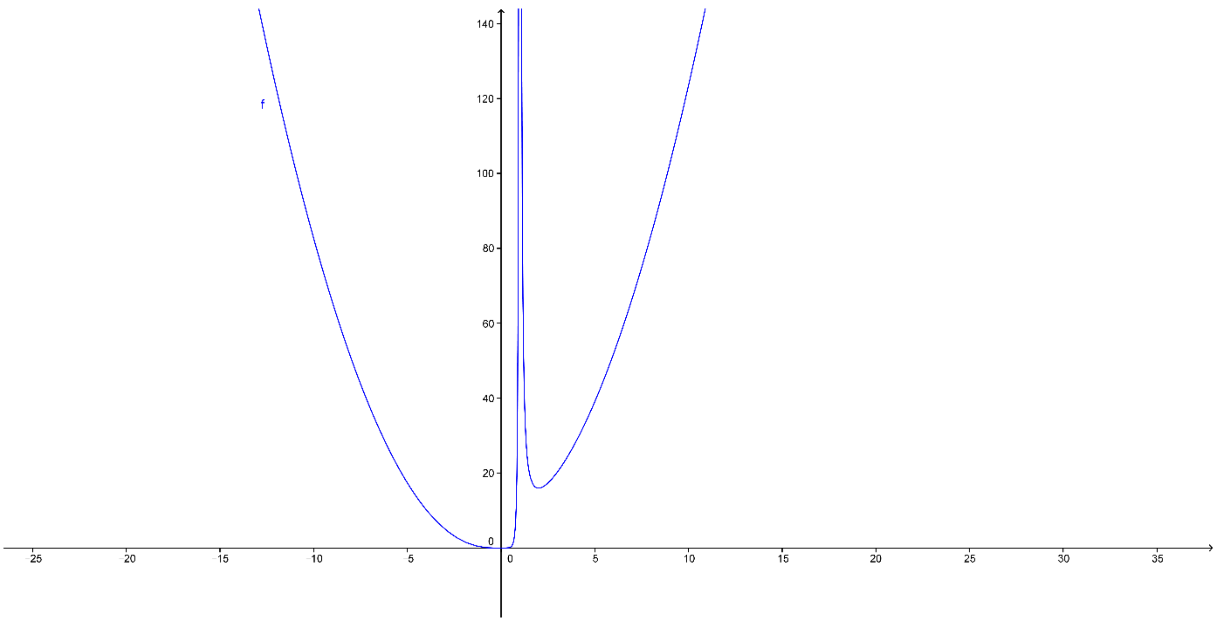
b) Rostoucí na $\langle 0;1) \cup \langle 2;\infty)$; klesající na $(-\infty;0) \cup (1;2)$; lokální minimum $[0;0]$; $[2;16]$; globální minimum $[0;0]$.

c) Konvexní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^2-2x+1} = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^2-2x+1} = \infty$; $\lim_{x\to1+} \frac{x^4}{x^2-2x+1} = \infty$;

$\lim_{x\to1-} \frac{x^4}{x^2-2x+1} = \infty$; asymptota bez směrnice $x = 1$.

e) Graf:



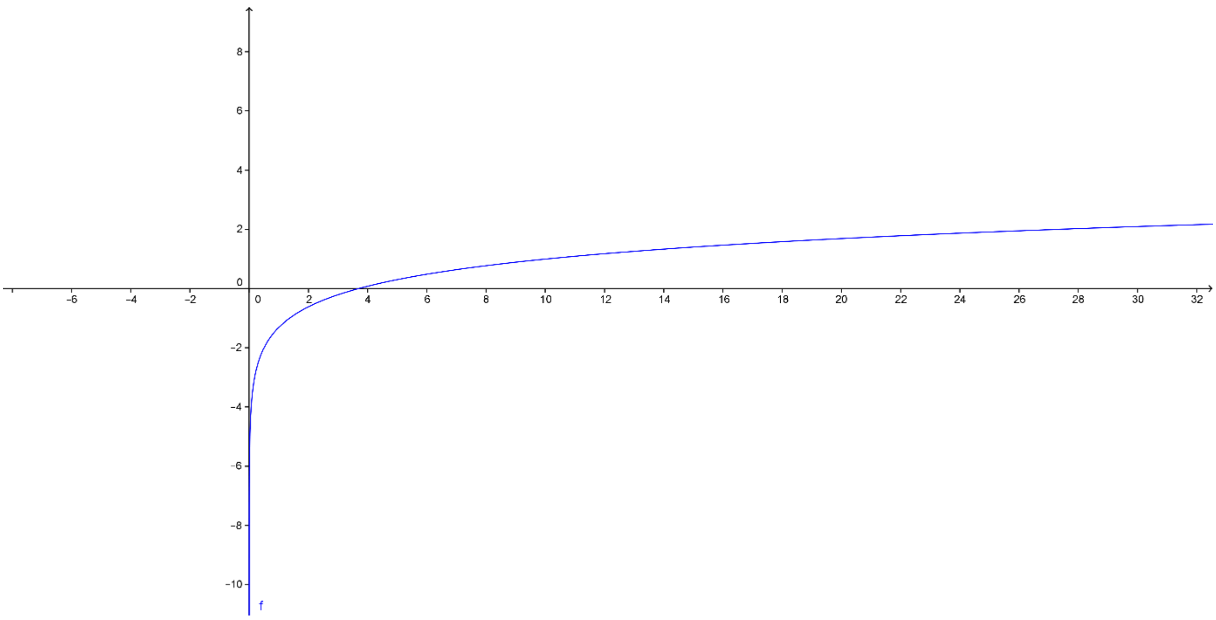
11. a) $Df \in (0; \infty)$; není sudá ani lichá; $P_x \left[\frac{e^2}{2}; 0\right]$; P_y neexistuje.

b) Rostoucí na Df; lokální a globální extrémy neexistují.

c) Konkávní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim_{x\to\infty} -2 + \ln(2x) = \infty$; $\lim_{x\to 0+} -2 + \ln(2x) = -\infty$; asymptota bez směrnice $x = 0$.

e) Graf:



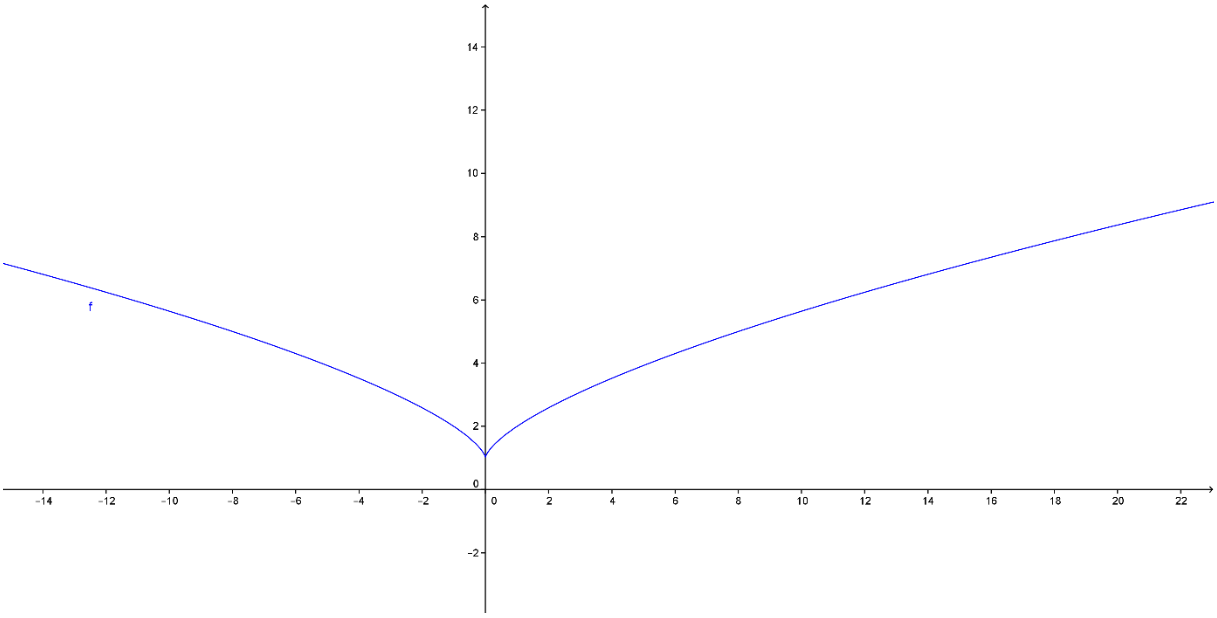
12. a) $Df \in R$; je sudá; P_x neexistuje; P_y $[0; 1]$.

b) Rostoucí na $(0; \infty)$; klesající na $(-\infty; 0\rangle$; lokální minimum $[0; 1]$; globální minimum $[0; 1]$.

c) Konkávní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2} + 1 = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2} + 1 = \infty$; asymptoty neexistují.

e) Graf:



13. a) $Df \in R - \{0\}$; je sudá; $P_{x1}\left[\sqrt[4]{2}; 0\right]$; $P_{x2}\left[-\sqrt[4]{2}; 0\right]$; P_y neexistuje.

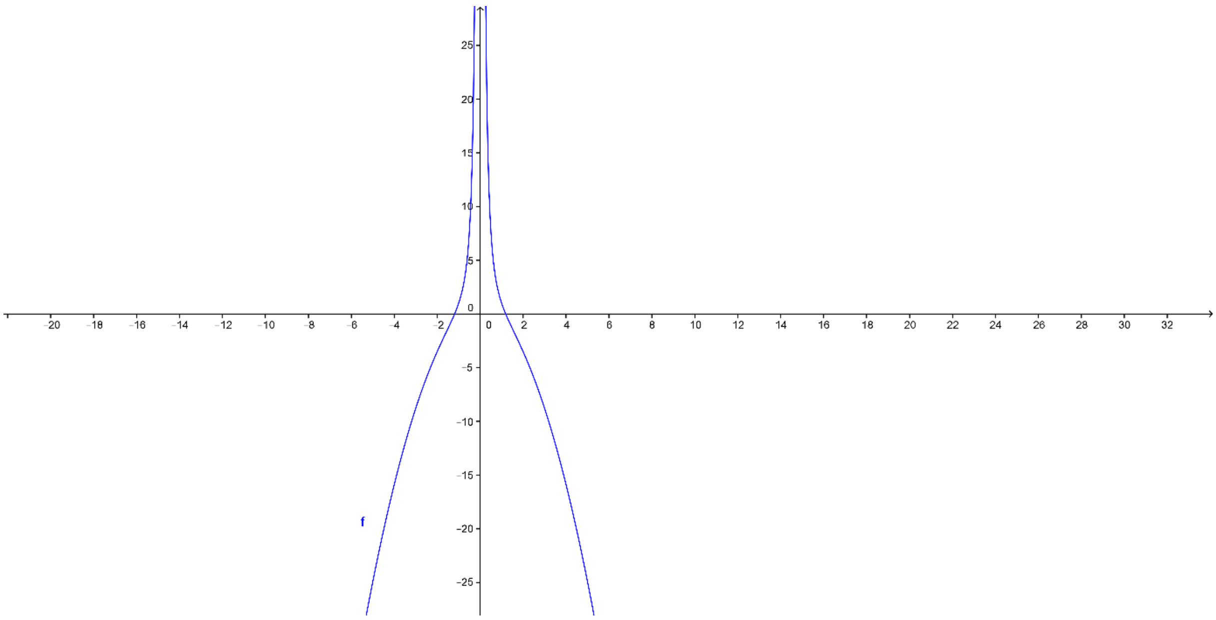
b) Rostoucí na $(-\infty; 0)$; klesající na $(0; \infty)$; lokální a globální extrémy neexistují.

c) Konvexní na $\langle -\sqrt[4]{6}; 0) \cup (0; \sqrt[4]{6}\rangle$; konkávní na $(-\infty; -\sqrt[4]{6}) \cup (\sqrt[4]{6}; \infty)$; inflexní body $\left[-\sqrt[4]{6}; -\frac{17}{3}\right]$; $\left[\sqrt[4]{6}; -\frac{17}{3}\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^4}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-x^4}{x^2} = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to0+} \frac{2-x^4}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{x\to0-} \frac{2-x^4}{x^2} = \infty$; asymptota bez směrnice $x = 0$.

e) Graf:



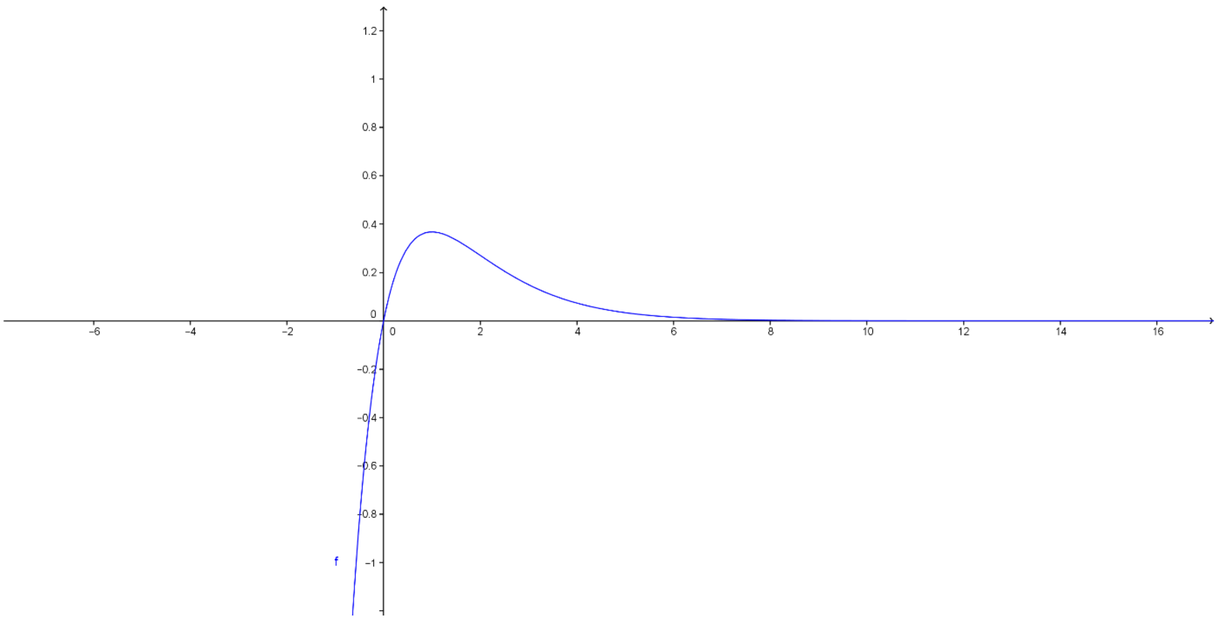
14. a) $Df \in R$; není sudá ani lichá; $P_x[0; 0]$; $P_y[0; 0]$.

b) Rostoucí na $(-\infty; 1\rangle$; klesající na $\langle 1; \infty)$; lokální maximum $[1; 0{,}37]$; globální maximum $[1; 0{,}37]$.

c) Konvexní na $\langle 2; \infty)$; konkávní na $(-\infty; 2)$; inflexní bod $[2; 0{,}27]$.

d) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



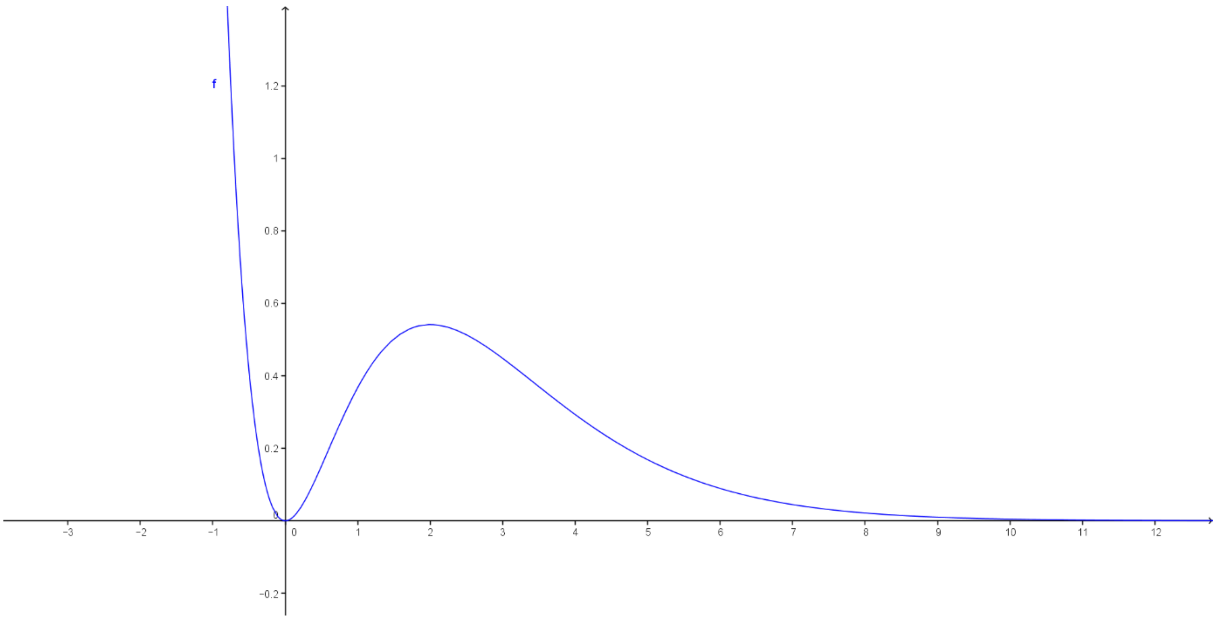
15. a) $Df \in R$; není sudá ani lichá; $P_x[0;0]$; $P_y[0;0]$.

b) Rostoucí na $(0;2)$; klesající na $(-\infty;0\rangle \cup \langle 2;\infty)$; lokální maximum$[2;0{,}54]$; lokální minimum $[0;0]$; globální minimum $[0;0]$.

c) Konvexní na $\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle 2+\sqrt{2};\infty\right)$; konkávní na $\left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$; inflexní body$\left[2-\sqrt{2};0{,}19\right]$; $\left[2+\sqrt{2};0{,}38\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



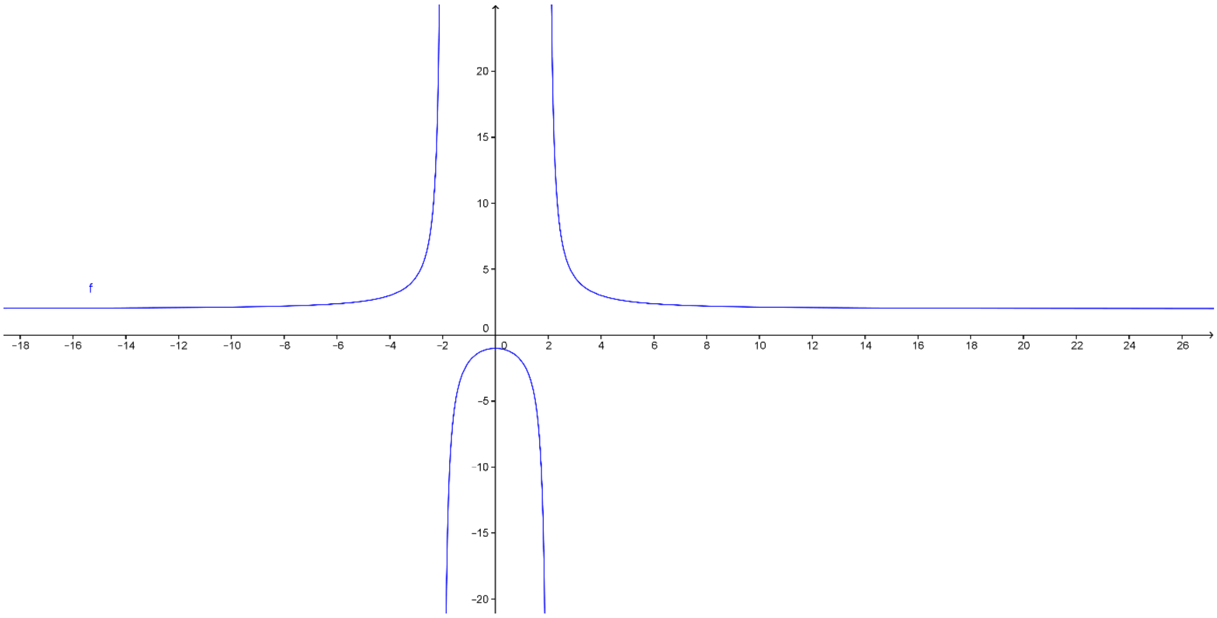
16. a) $Df \in R - \{\pm 2\}$; je sudá; P_x neexistuje; $P_y[0;-1]$.

b) Rostoucí na $(-\infty;-2) \cup (-2;0\rangle$; klesající na $\langle 0;2) \cup (2;\infty)$; lokální maximum $[0;-1]$.

c) Konvexní na $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$; konkávní na $(-2;2)$; inflexní body neexistují.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = 2$; $\lim\limits_{x\to2+} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \infty$; $\lim\limits_{x\to2-} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2+} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2-} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \infty$; asymptota bez směrnice $x = \pm 2$; asymptota se směrnicí $y = 2$.

e) Graf:



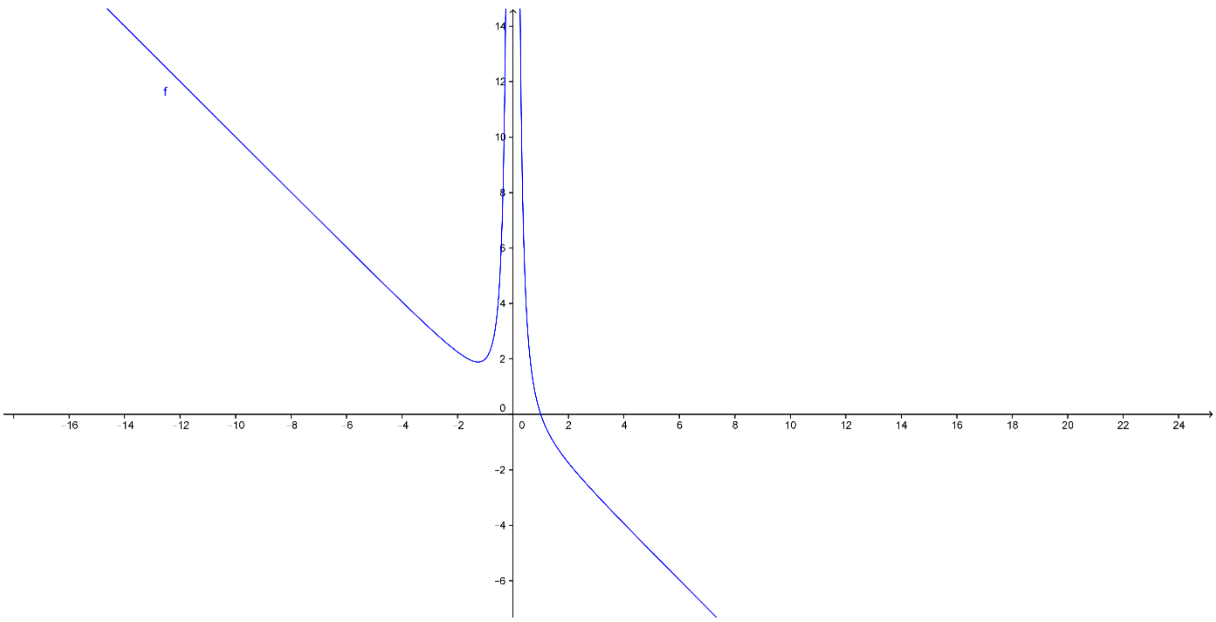
17. a) $Df \in R - \{0\}$; není sudá ani lichá; $P_x[1; 0]$; P_y neexistuje.

b) Rostoucí na $\left(\sqrt[3]{-2}; 0\right)$; klesající na $\left(-\infty; \sqrt[3]{-2}\right\rangle \cup (0; \infty)$; lokální minimum $\left[\sqrt[3]{-2}; 1{,}89\right]$.

c) Konvexní na Df; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{x\to0+} \frac{1-x^3}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{x\to0-} \frac{1-x^3}{x^2} = \infty$; asymptota bez směrnice $x = 0$; asymptota se směrnicí $y = -x$.

e) Graf:



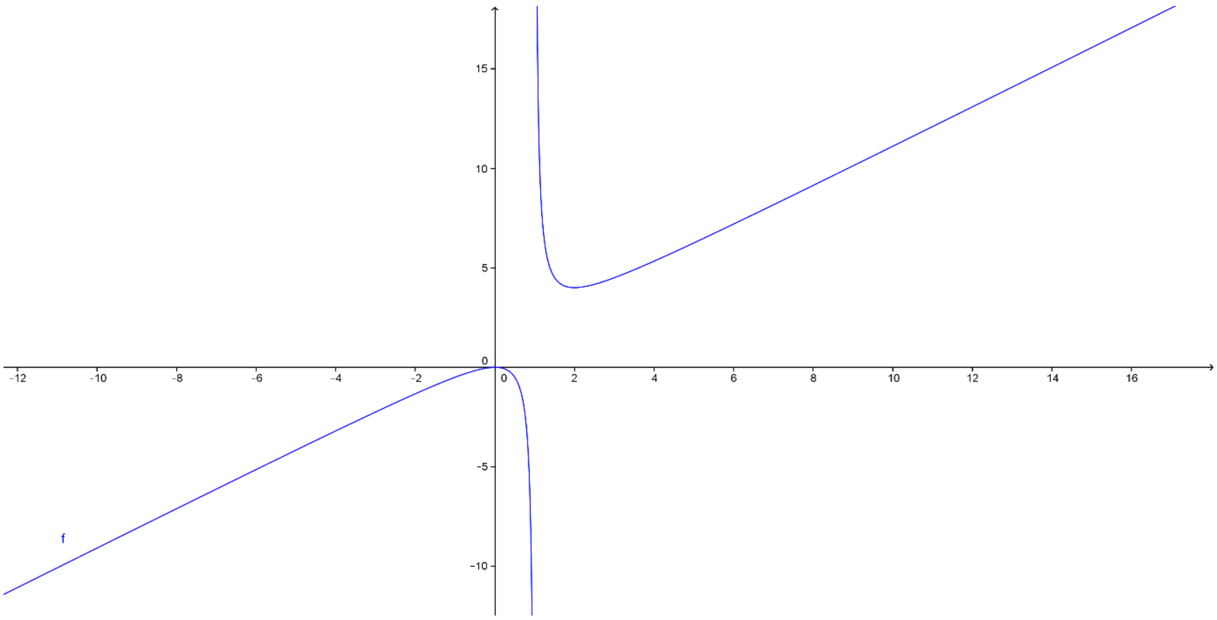
18. a) $Df \in R - \{1\}$; není sudá ani lichá; $P_x[0;0]$; $P_y[0;0]$.

b) Rostoucí na $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$; klesající na $(0;1) \cup (1;2)$; lokální maximum$[0;0]$; lokální minimum $[2;4]$.

c) Konvexní na $(1;\infty)$; konkávní na $(-\infty;1)$; inflexní bod neexistuje.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x\to1+} \frac{x^2}{x-1} = \infty$; $\lim_{x\to1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$; asymptota bez směrnice $x = 1$; asymptota se směrnicí $y = x + 1$.

e) Graf:



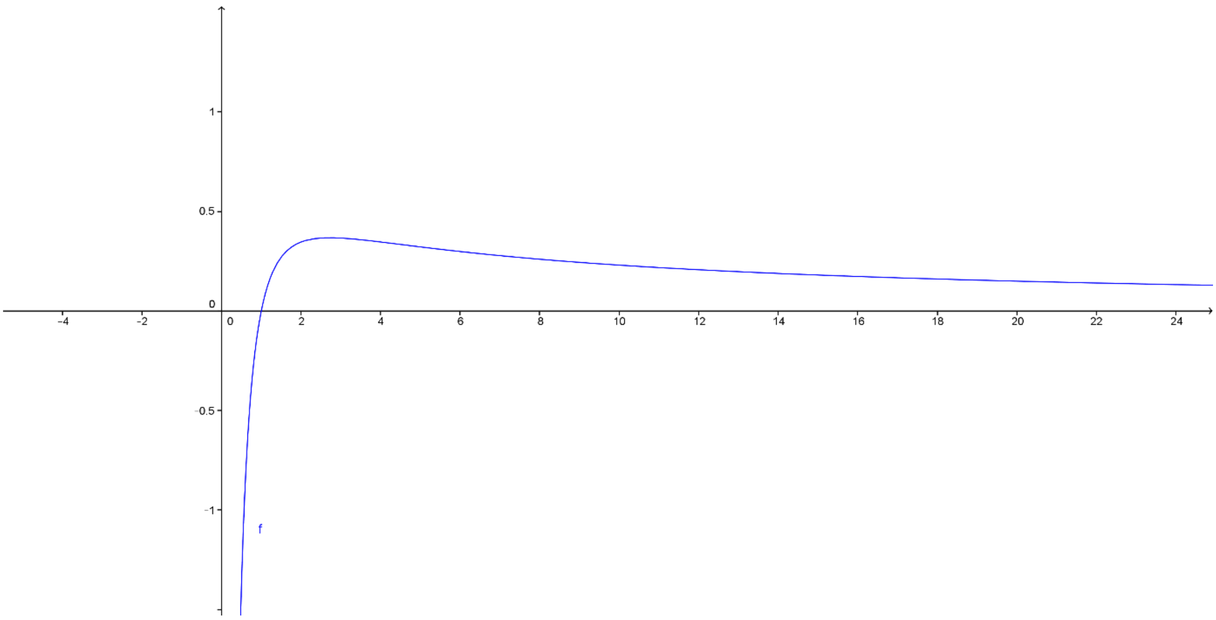
19. a) $Df \in (0;\infty)$; není sudá ani lichá; $P_x[1;0]$; P_y neexistuje.

b) Rostoucí na $(0; e\rangle$; klesající na $\langle e;\infty)$; lokální maximum $\left[e; \frac{1}{e}\right]$; globální maximum $\left[e; \frac{1}{e}\right]$.

c) Konvexní na $\langle\sqrt{e^3};\infty)$; konkávní na $\left(0;\sqrt{e^3}\right)$; inflexní bod $\left[\sqrt{e^3}; \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right]$.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$; asymptota bez směrnice $x = 0$; asymptota se směrnicí $y = 0$.

e) Graf:



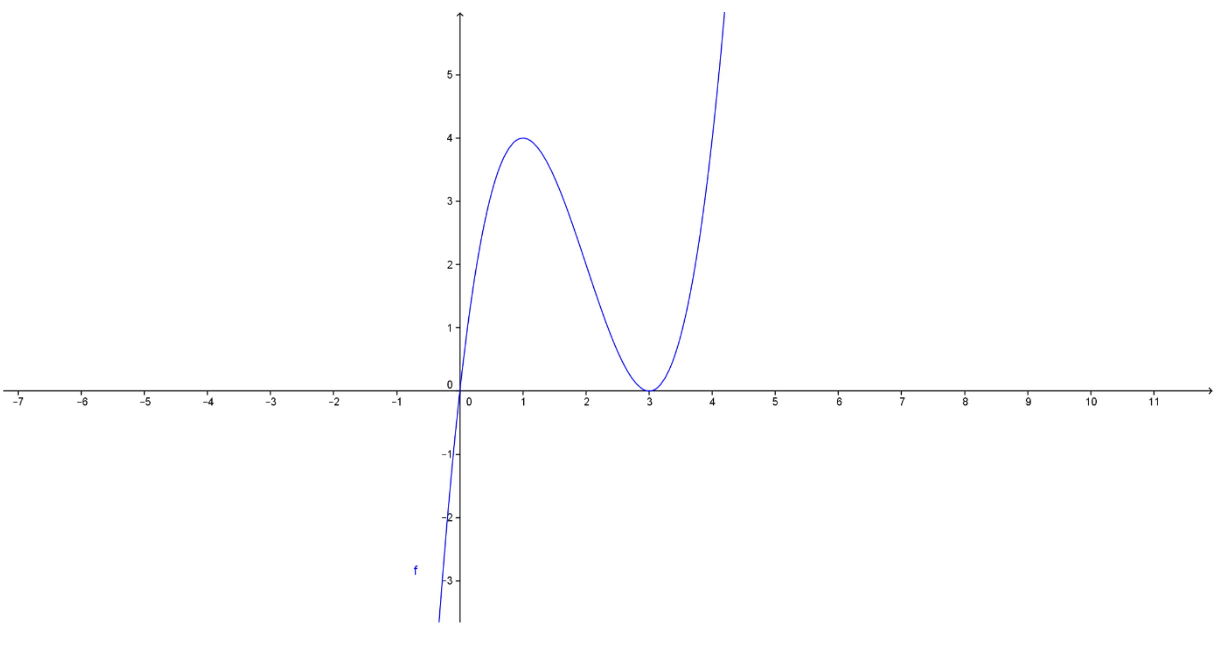
20. a) $Df \in R$; není sudá ani lichá; $P_{x_1}[0;0]$; $P_{x_2}[3;0]$; $P_y[0;0]$.

b) Rostoucí na $(-\infty;1\rangle \cup \langle 3;\infty)$; klesající na $(1;3)$; lokální maximum $[1;4]$; lokální minimum $[3;0]$.

c) Konvexní na $(2;\infty)$; konkávní na $(-\infty;2\rangle$; inflexní bod $[2;2]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 9x = -\infty$; asymptoty neexistují.

e) Graf:



4.2.2 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 5

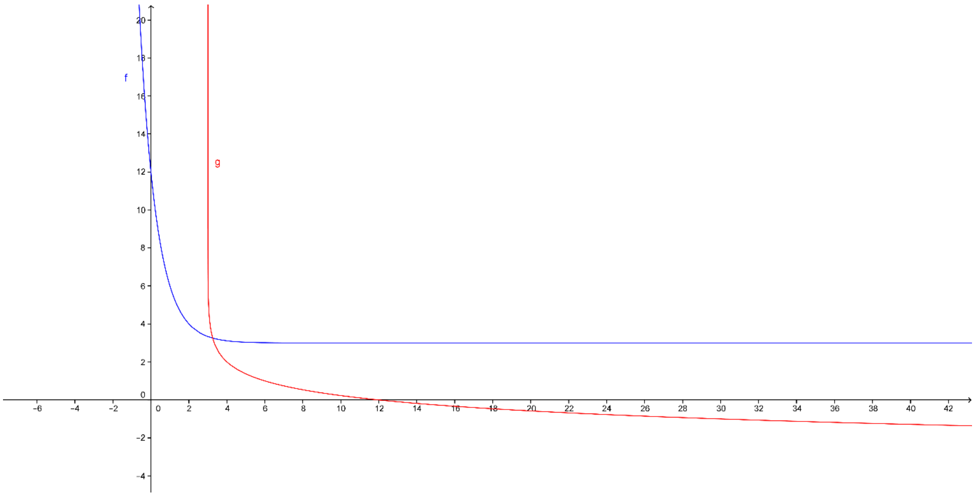
Najděte Df, inverzní funkci, Df^{-1}, zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

1. $Df \in R$

   $g(x) = log_{\frac{1}{3}}(x-3)+2$

   $Dg \in (3; \infty)$

   Graf:

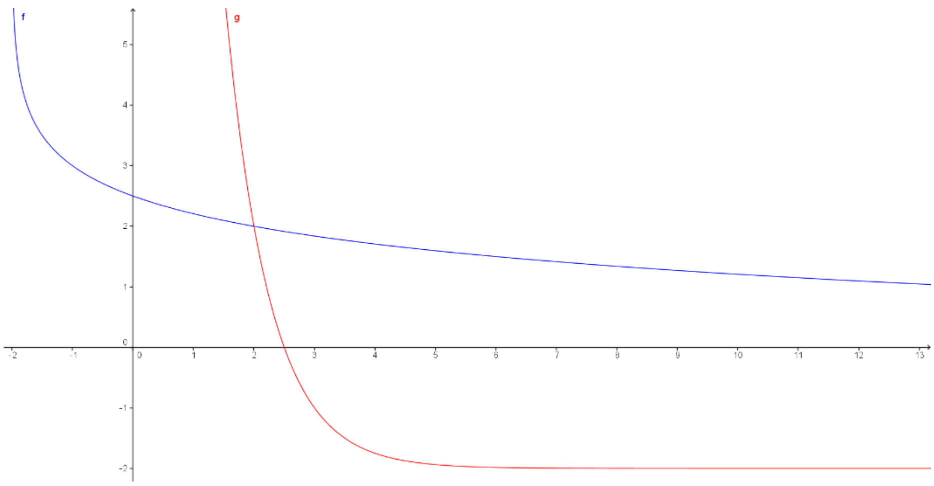


2. $Df \in (-2; \infty)$

   $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} - 2$

   $Dg \in R$

   Graf:

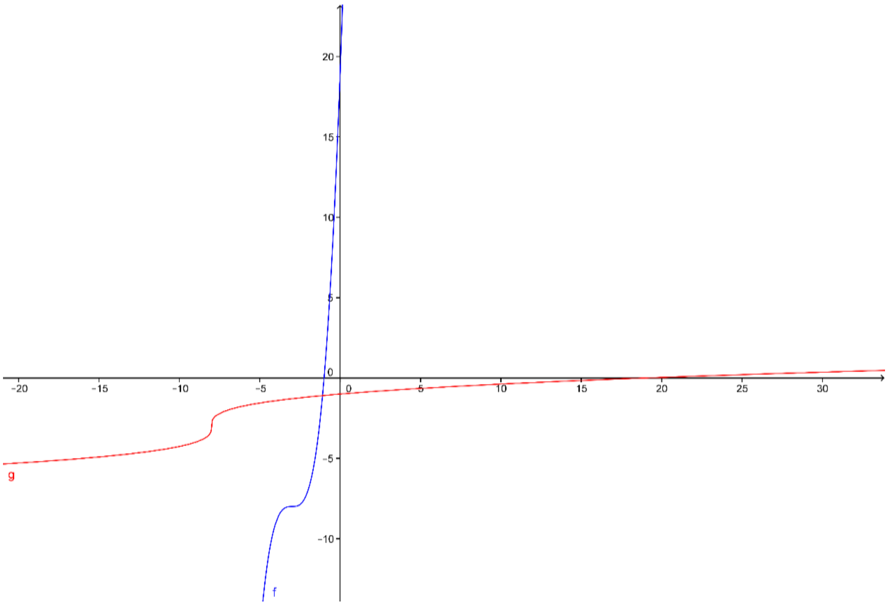


3. $Df \in R$

   $g(x) = \sqrt[3]{x+8} - 3$

   $Dg \in R$

   Graf:

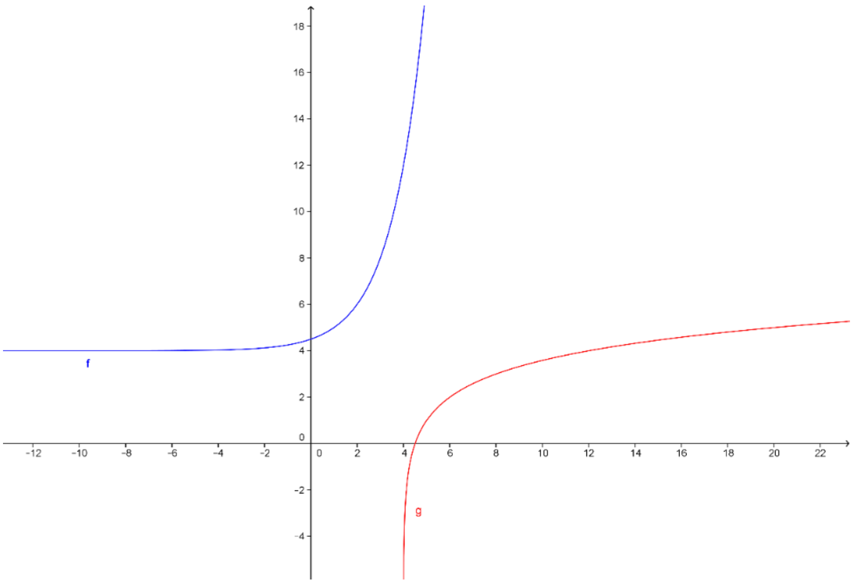


4. $Df \in R$

   $g(x) = log_2(x-4) + 1$

   $Dg \in (4; \infty)$

   Graf:

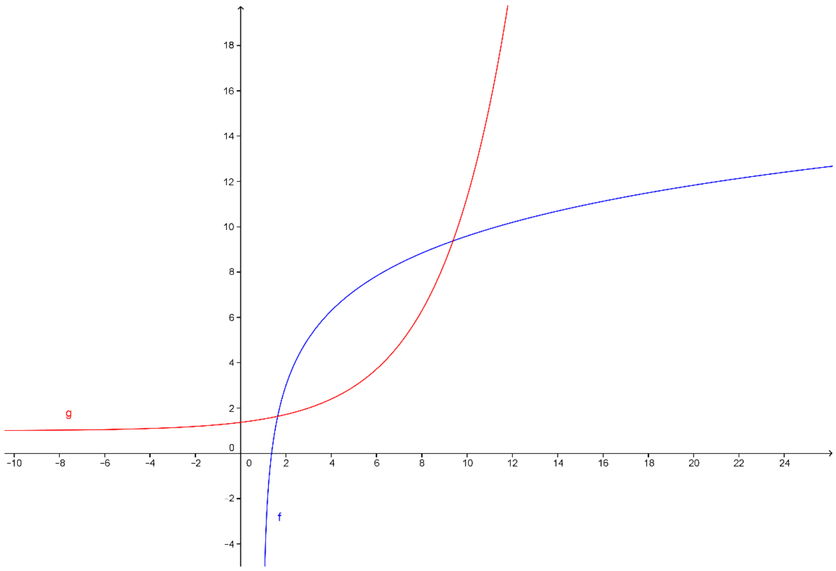


5. $Df \in (1; \infty)$

$g(x) = e^{\frac{x}{3}-1} + 1$

$Dg \in R$

Graf:

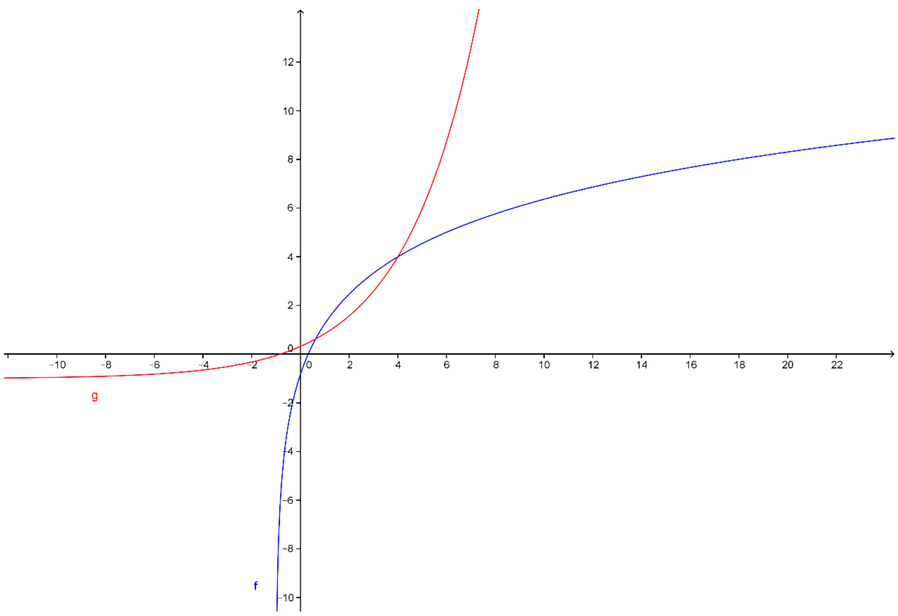


6. $Df \in (-1; \infty)$

$g(x) = 5 \cdot e^{\frac{x-4}{3}} - 1$

$Dg \in R$

Graf:

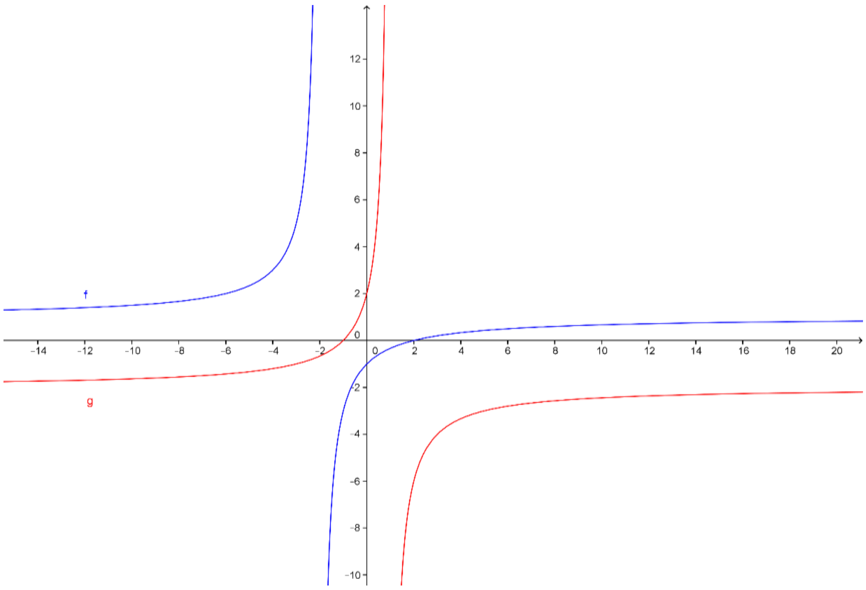


7. $Df \in R - \{-2\}$

$$g(x) = \frac{-2x-2}{x-1}$$

$Dg \in R - \{1\}$

Graf:

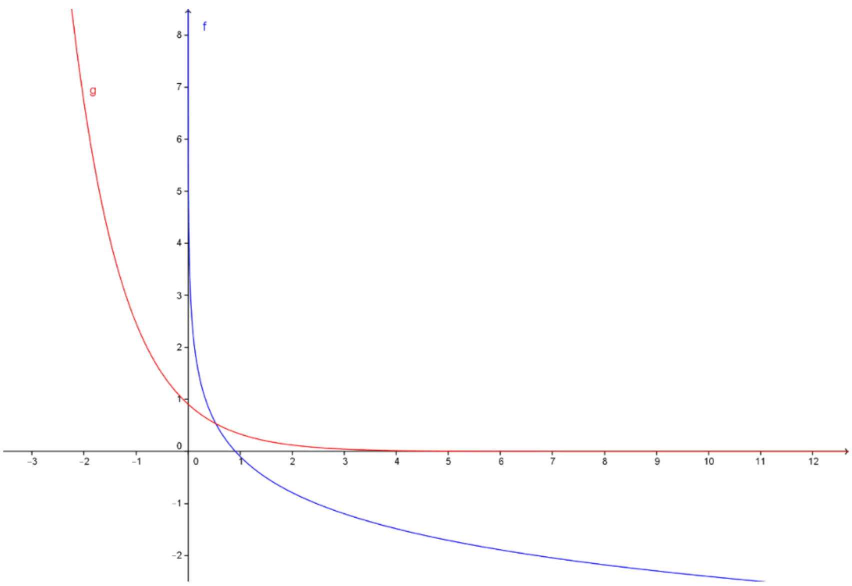


8. $Df \in (0; \infty)$

$$g(x) = \frac{e^{1-x}}{3}$$

$Dg \in R$

Graf:

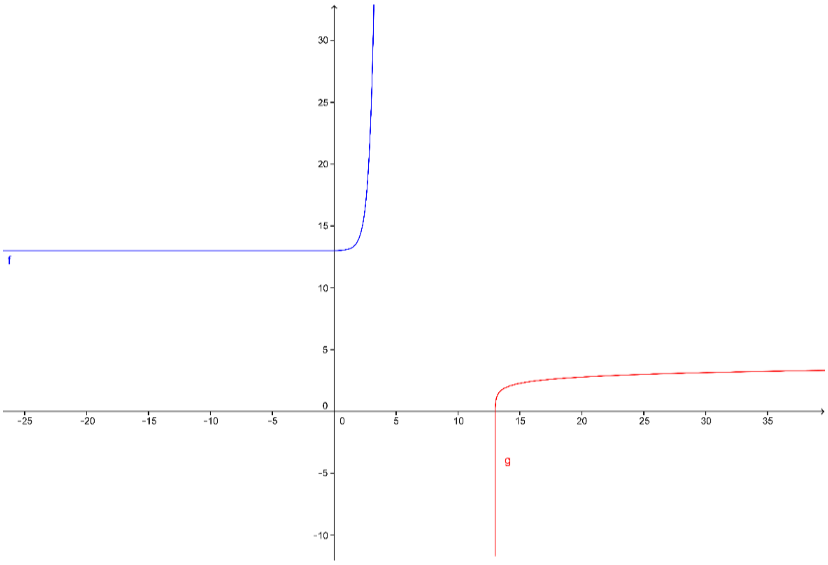


9. $Df \in R$

$g(x) = 2 - log_{\frac{1}{12}}(x - 13)$

$Dg \in (13; \infty)$

Graf:

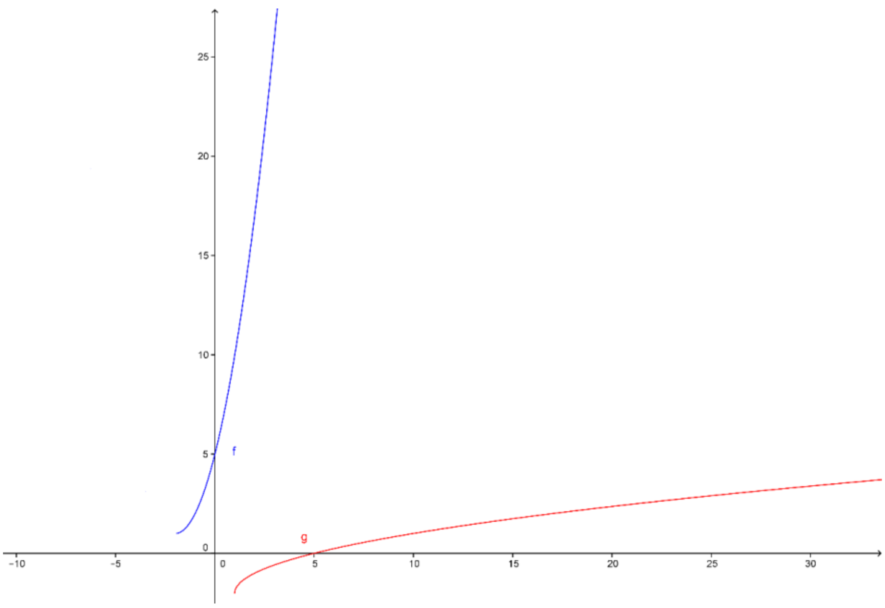


10. $Df \in R$; interval $\langle -2; \infty)$

$g(x) = \sqrt{x - 1} - 2$

$Dg \in \langle 1; \infty)$

Graf:

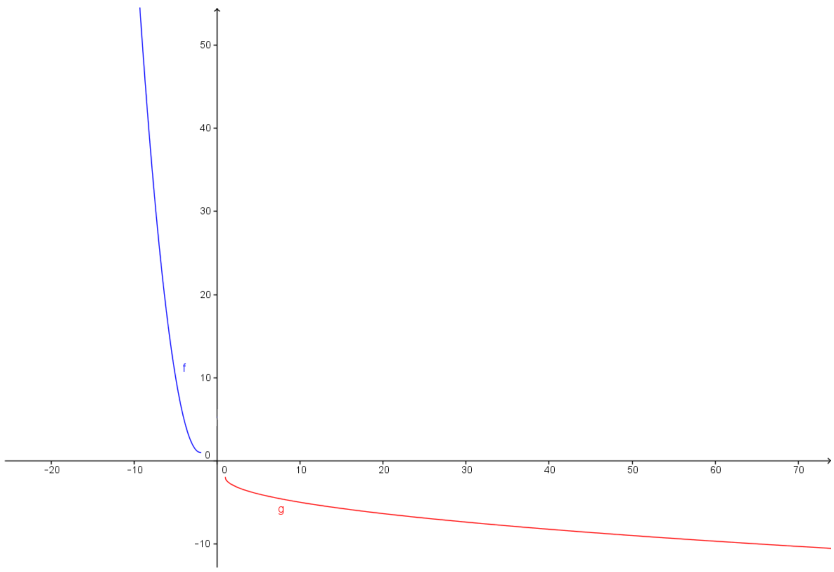


11. $Df \in R$; interval $(-\infty; -2\rangle$

$g(x) = -2 - \sqrt{x-1}$

$Dg \in \langle 1; \infty)$

Graf:

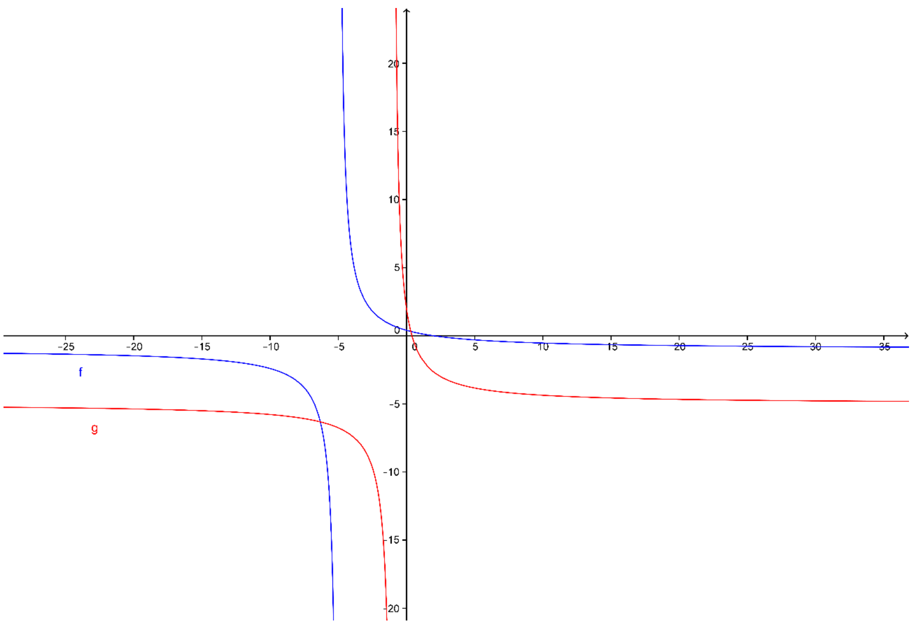


12. $Df \in R - \{5\}$

$$g(x) = \frac{2-5x}{x+1}$$

$Dg \in R - \{-1\}$

Graf:

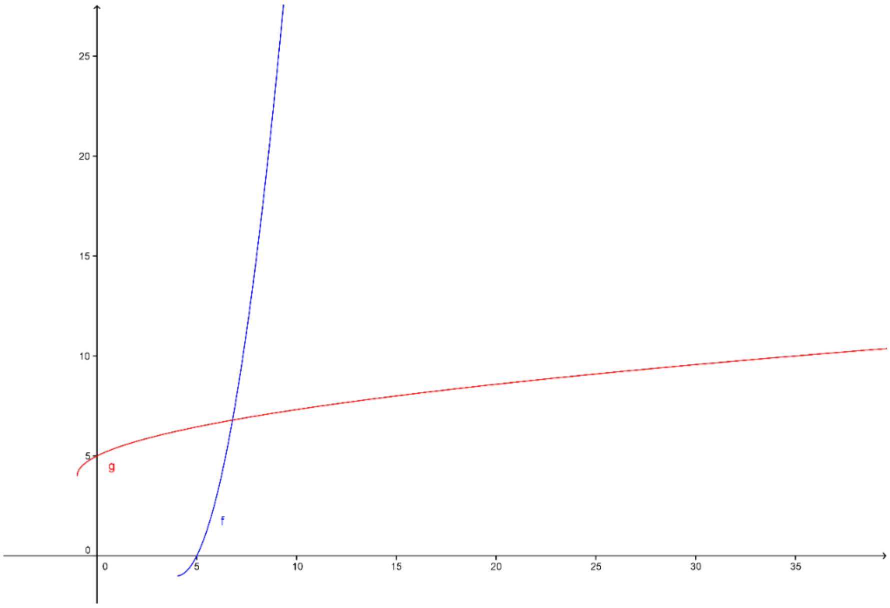


13. $Df \in R$; interval $\langle 4; \infty)$

$g(x) = \sqrt{x+1} + 4$

$Dg \in \langle -1; \infty)$

Graf:

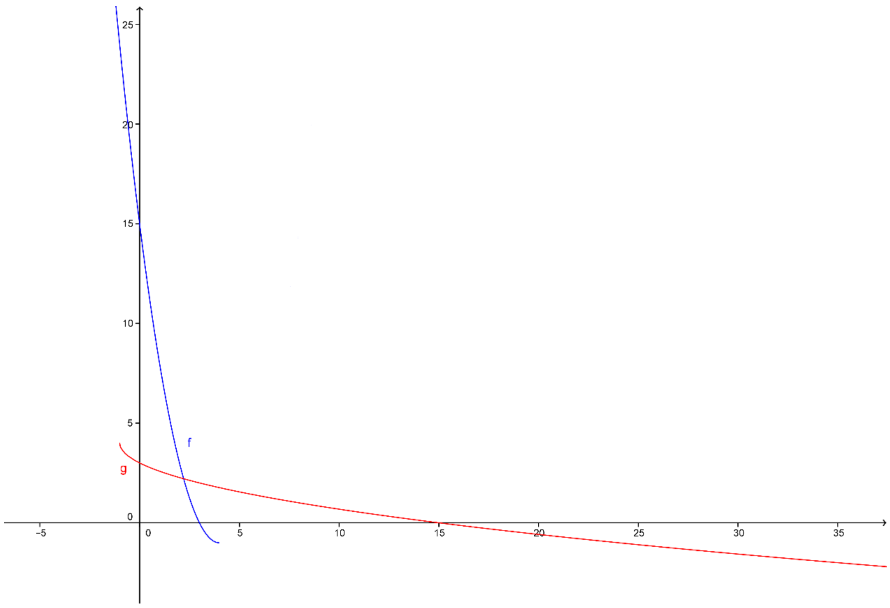


14. $Df \in R$; interval $(-\infty; 4\rangle$

$g(x) = 4 - \sqrt{x+1}$

$Dg \in \langle -1; \infty)$

Graf:

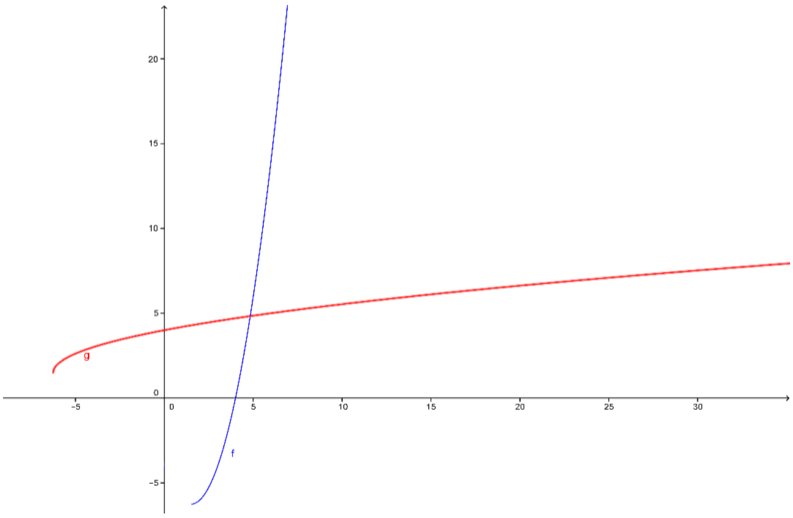


15. $Df \in R$; interval $\left\langle \frac{3}{2}; \infty \right)$

$$g(x) = \sqrt{x + \frac{25}{4}} + \frac{3}{2}$$

$$Dg \in \left\langle -\frac{25}{4}; \infty \right)$$

Graf:

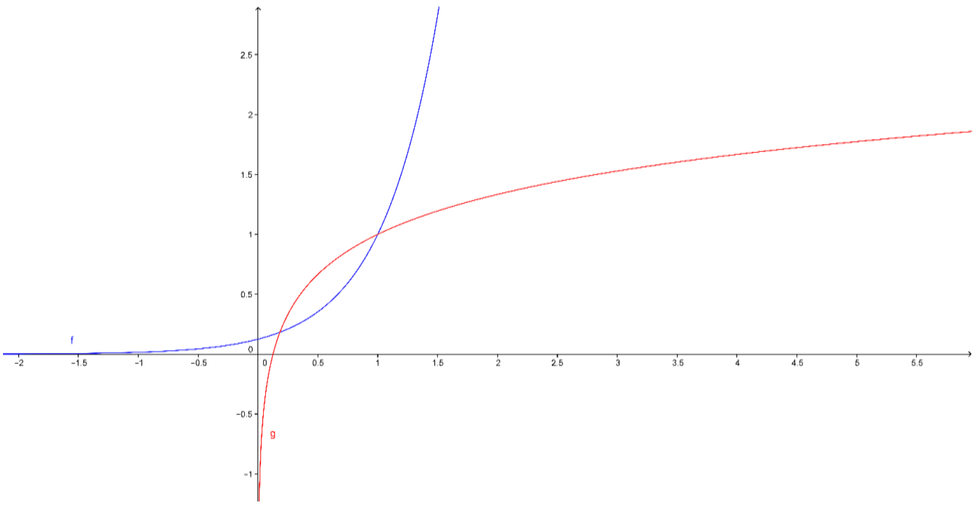


16. $Df \in R$

$$g(x) = 1 + log_8(x)$$

$$Dg \in (0; \infty)$$

Graf:

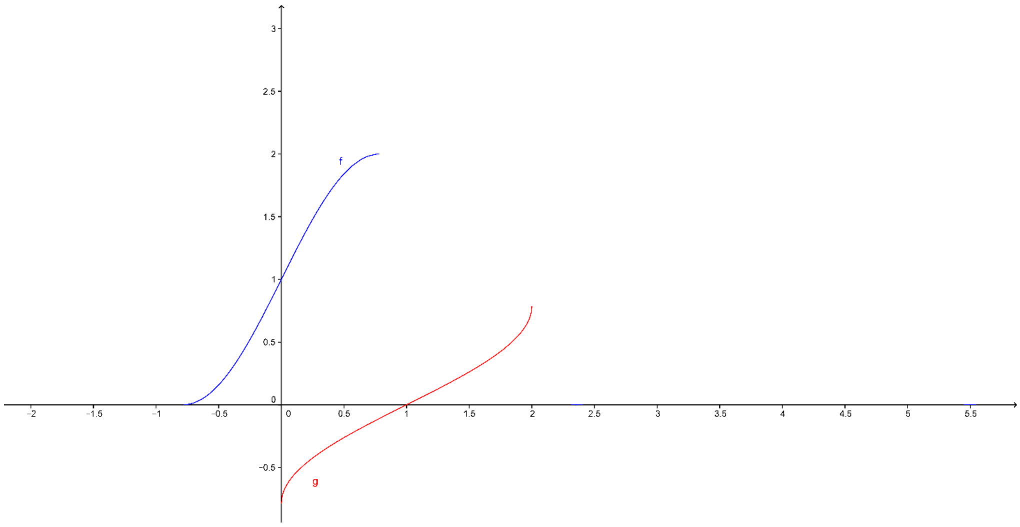


17. $Df \in R$; interval $\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \rangle$

$$g(x) = \frac{1}{2} arcsin(x-1)$$

$Dg \in \langle 0; 2 \rangle$

Graf:

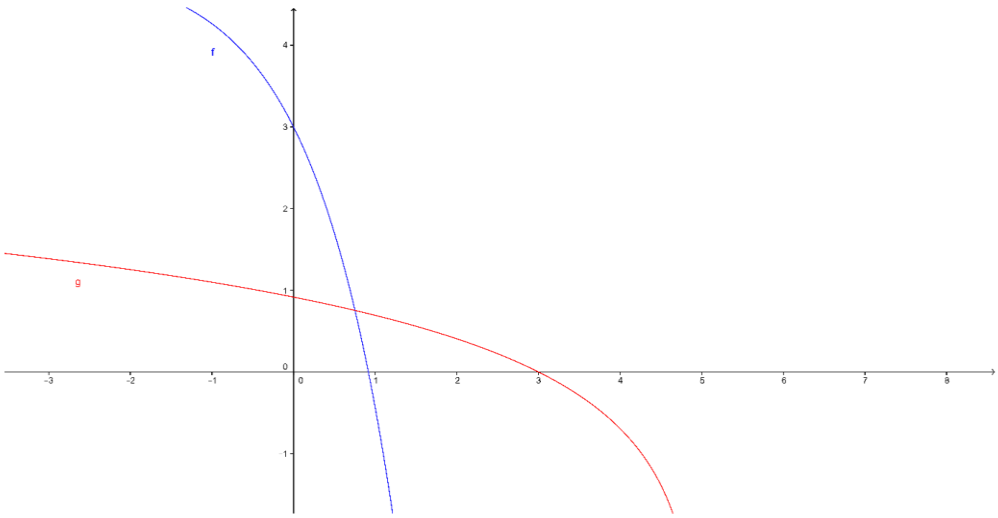


18. $Df \in R$

$$g(x) = ln\left(\frac{1-x}{2} + 2\right)$$

$Dg \in (-\infty; 5)$

Graf:

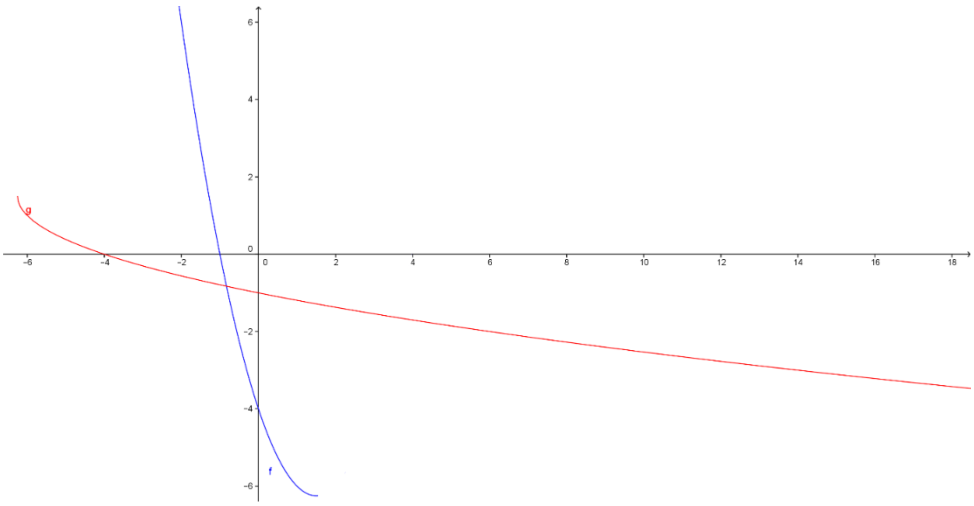


19. $Df \in R$; interval $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right\rangle$

$$g(x) = -\sqrt{x + \frac{25}{4}} + \frac{3}{2}$$

$$Dg \in \left\langle -\frac{25}{4}; \infty\right)$$

Graf:

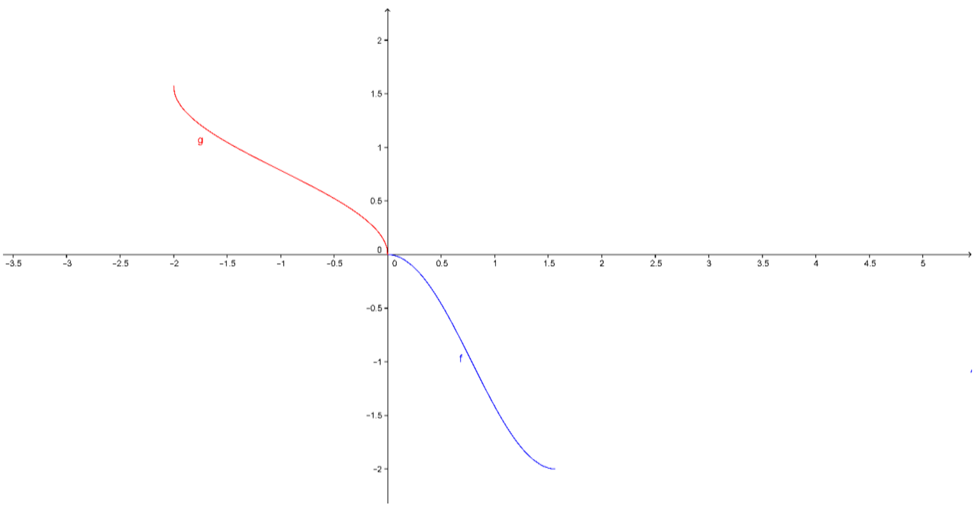


20. $Df \in R$; interval $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$

$$g(x) = \frac{1}{2} arccos(x+1)$$

$$Dg \in \langle -2; 0\rangle$$

Graf:

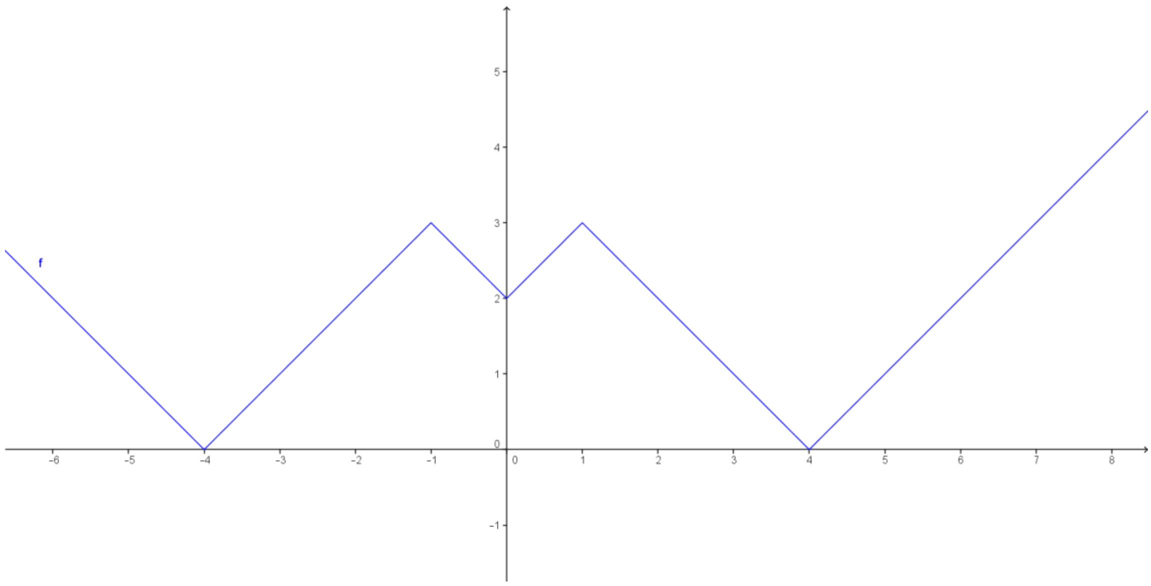


4.2.3 VÝSLEDKY SADY PŘÍKLADŮ ČÍSLO 6

Zakreslete co nejpřesněji grafy následujících funkcí, určete jejich Df.

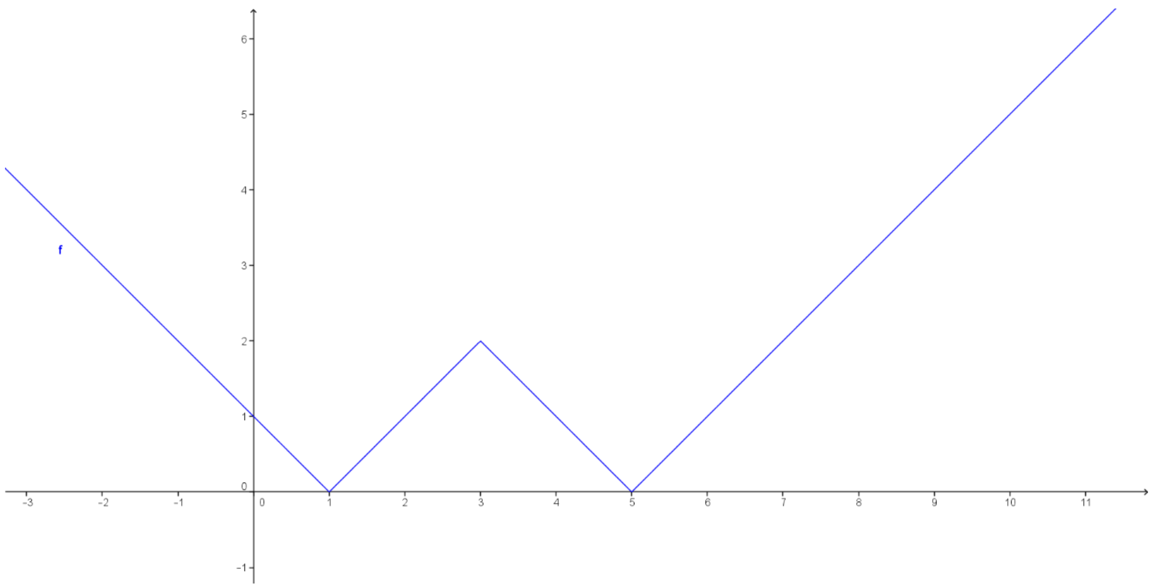
1. $Df \in R$

   Graf:



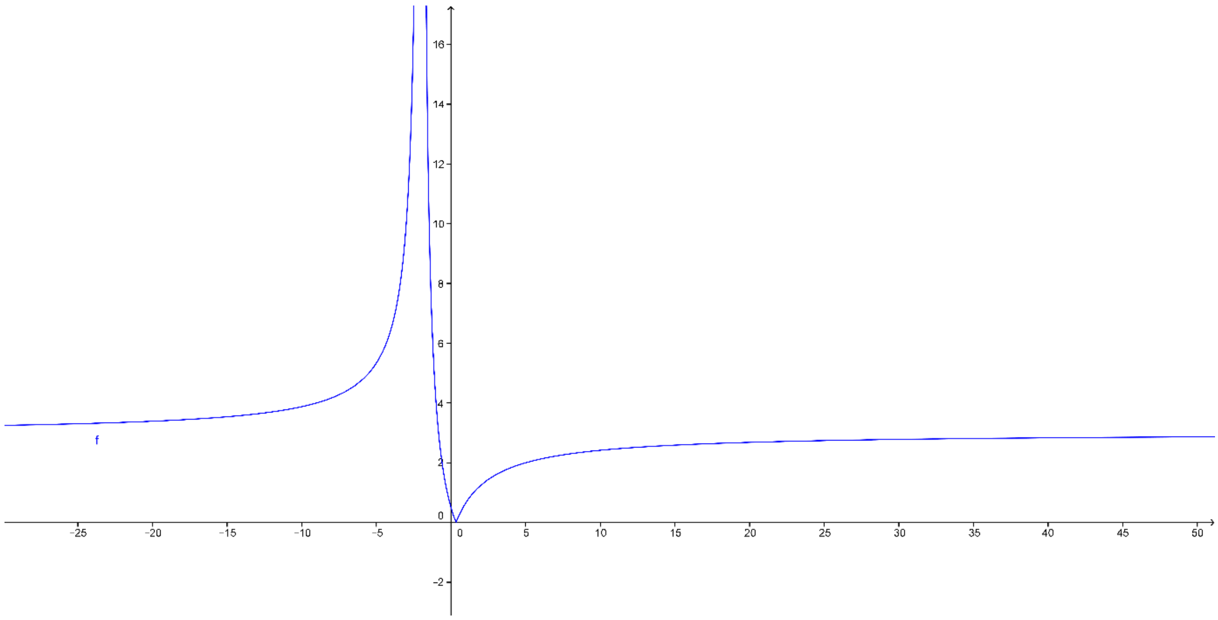
2. $Df \in R$

   Graf:



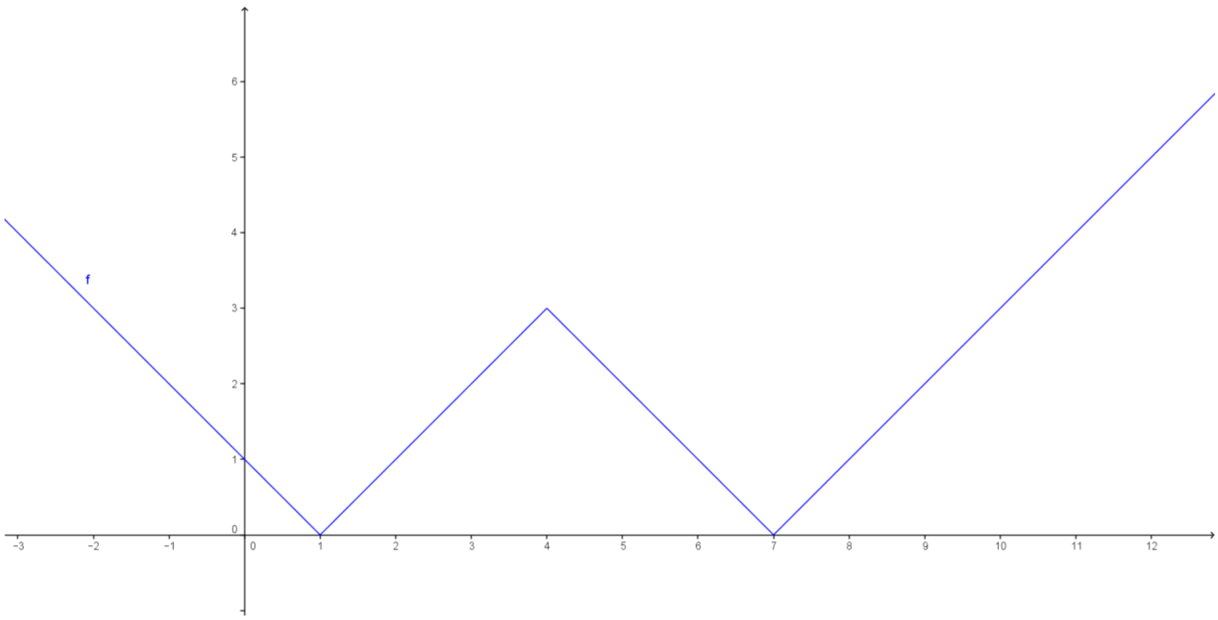
3. $Df \in R - \{2\}$

   Graf:



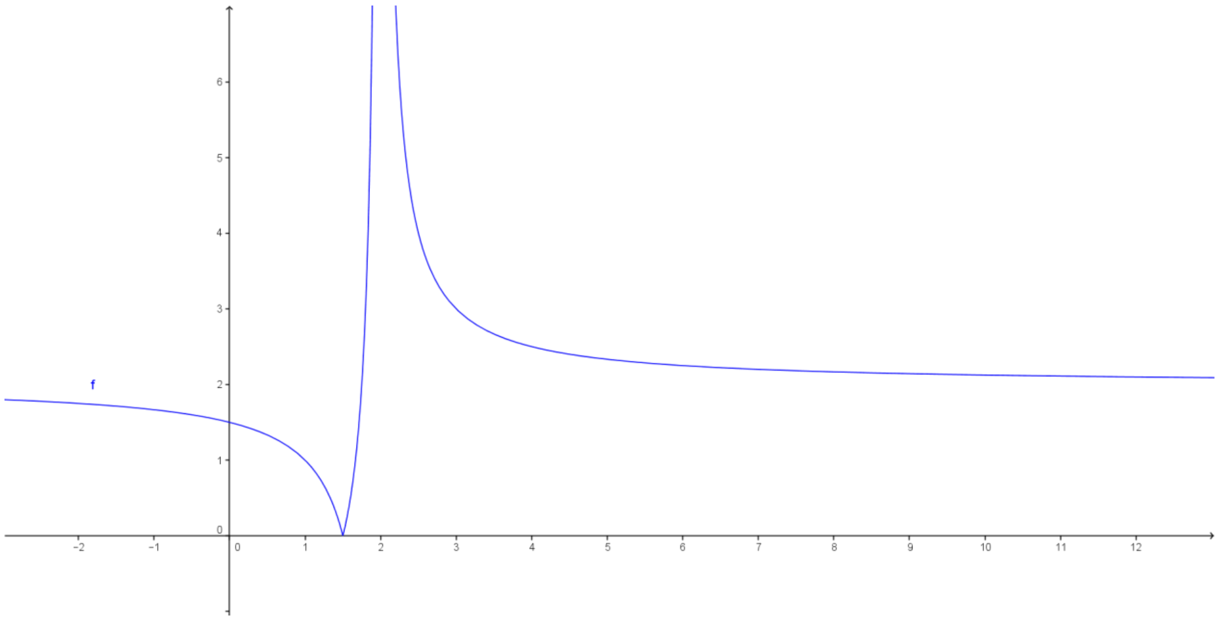
4. $Df \in R$

   Graf:



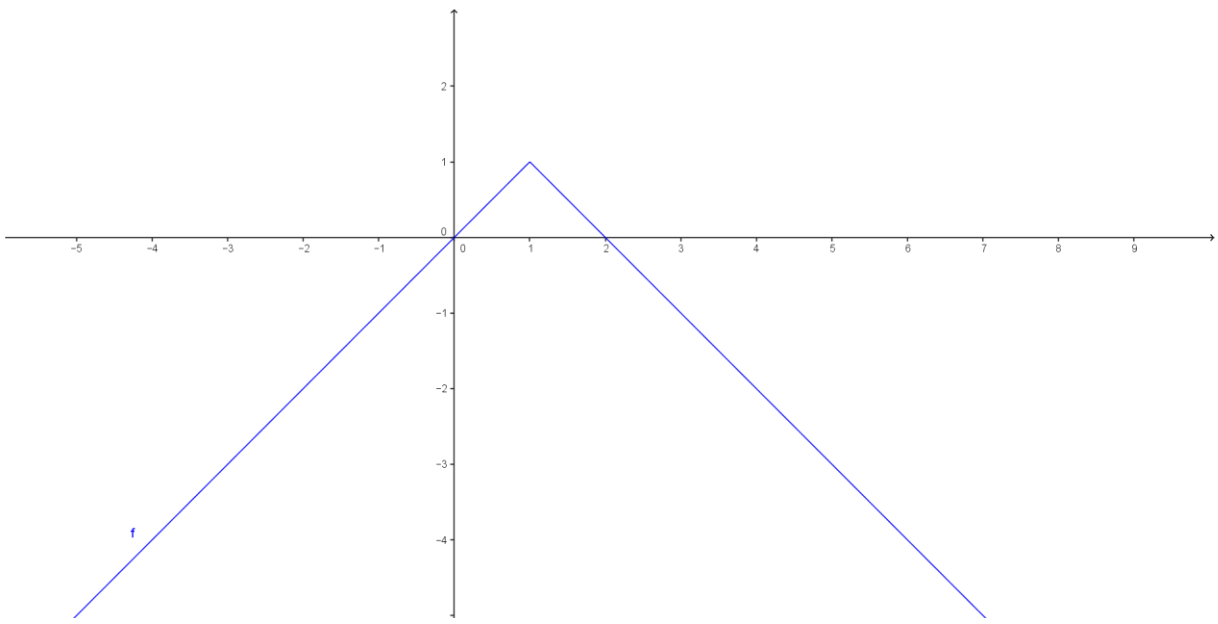
5. $Df \in R - \{2\}$

Graf:



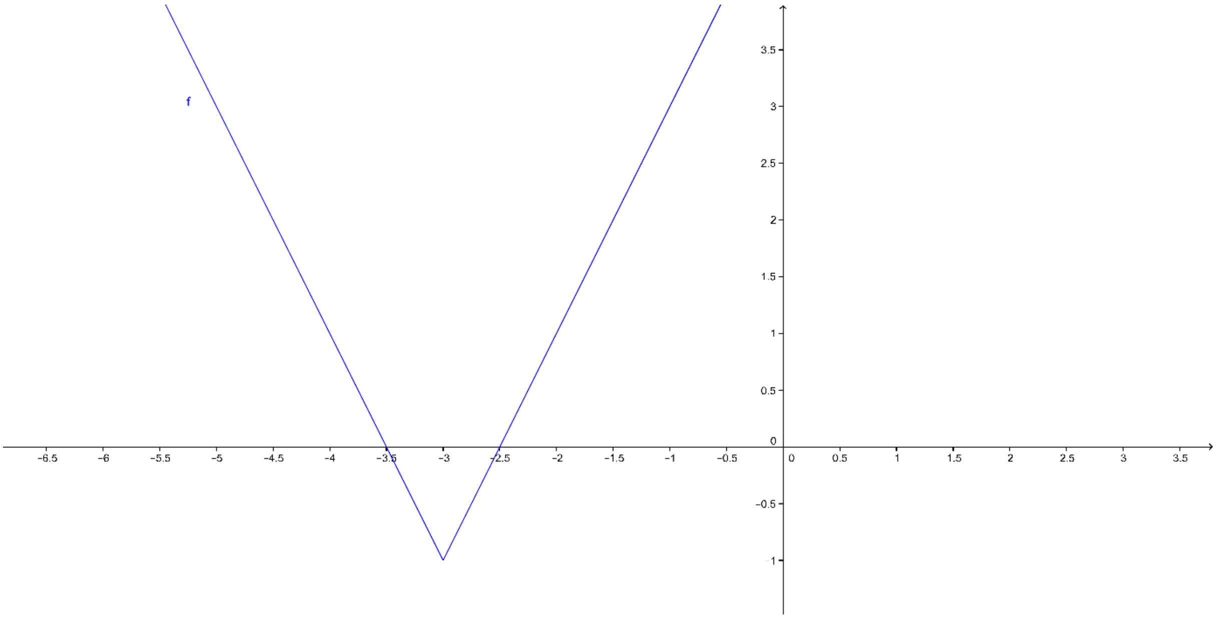
6. $Df \in R$

Graf:



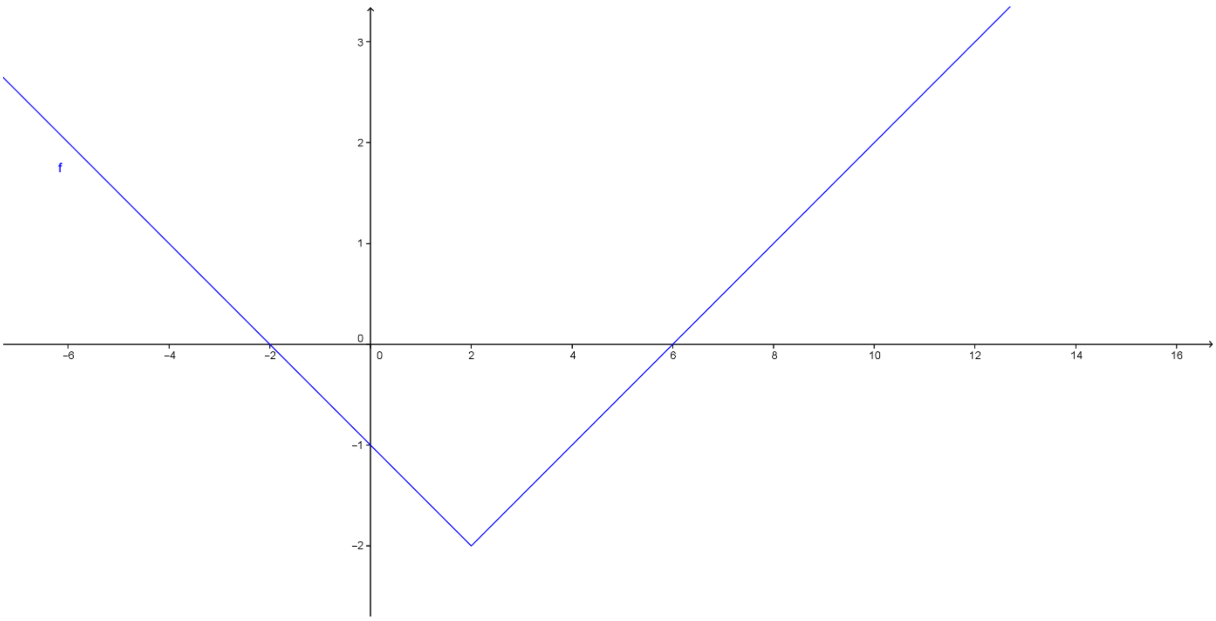
7. $Df \in R$

Graf:



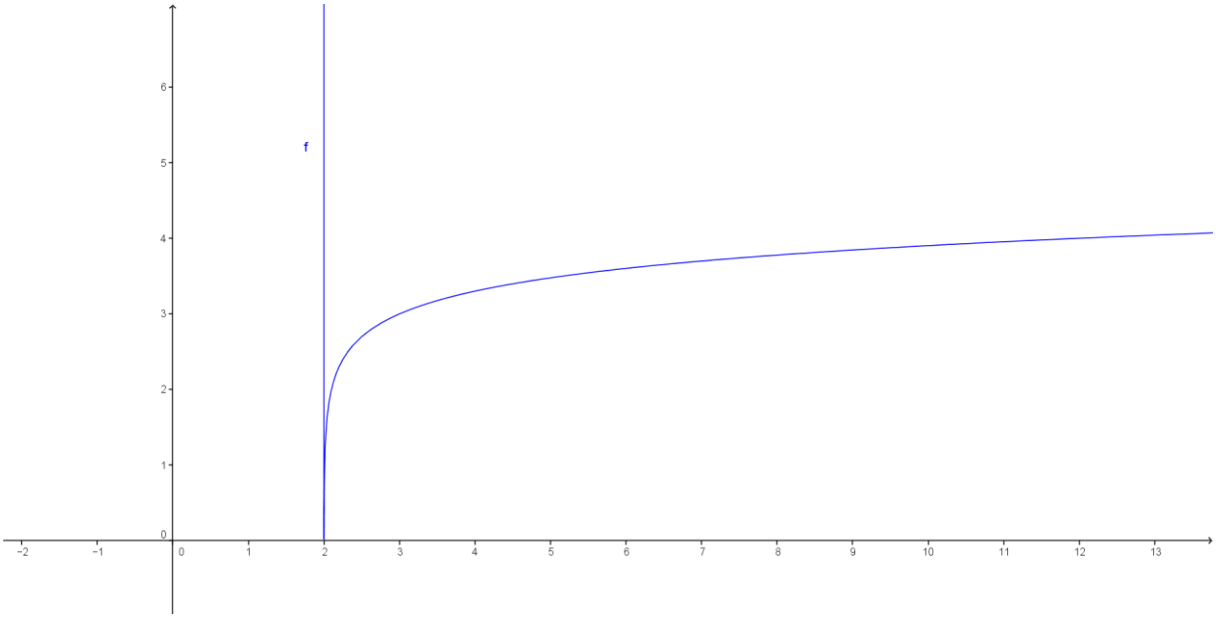
8. $Df \in R$

Graf:



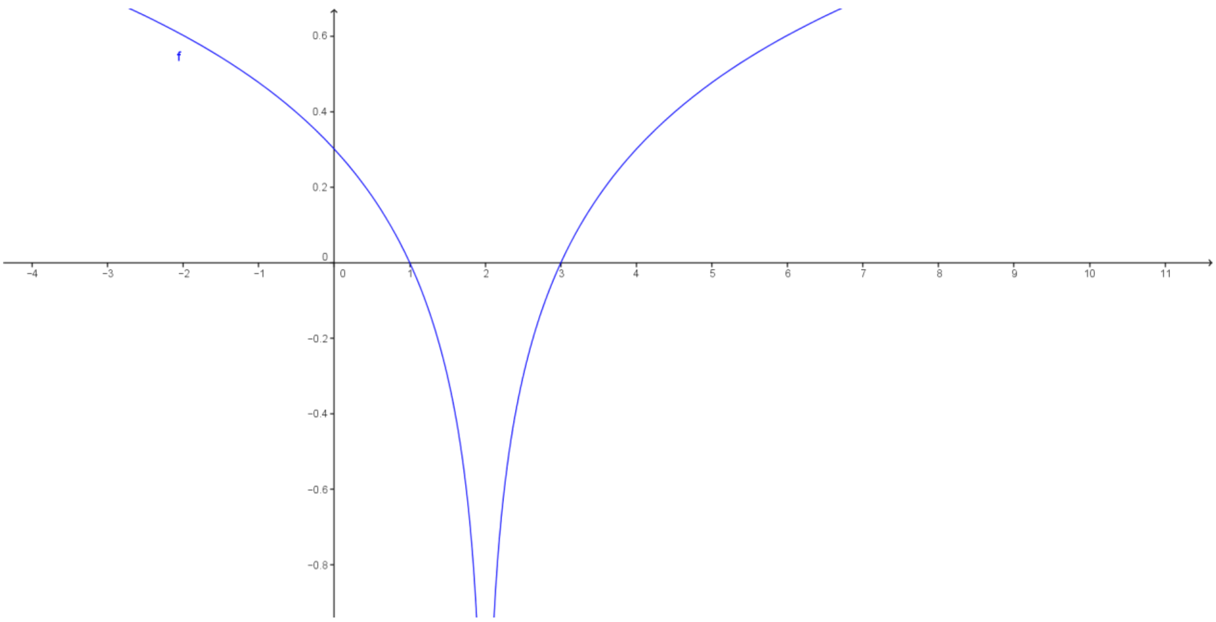
9. $Df \in (2;\infty)$

Graf:



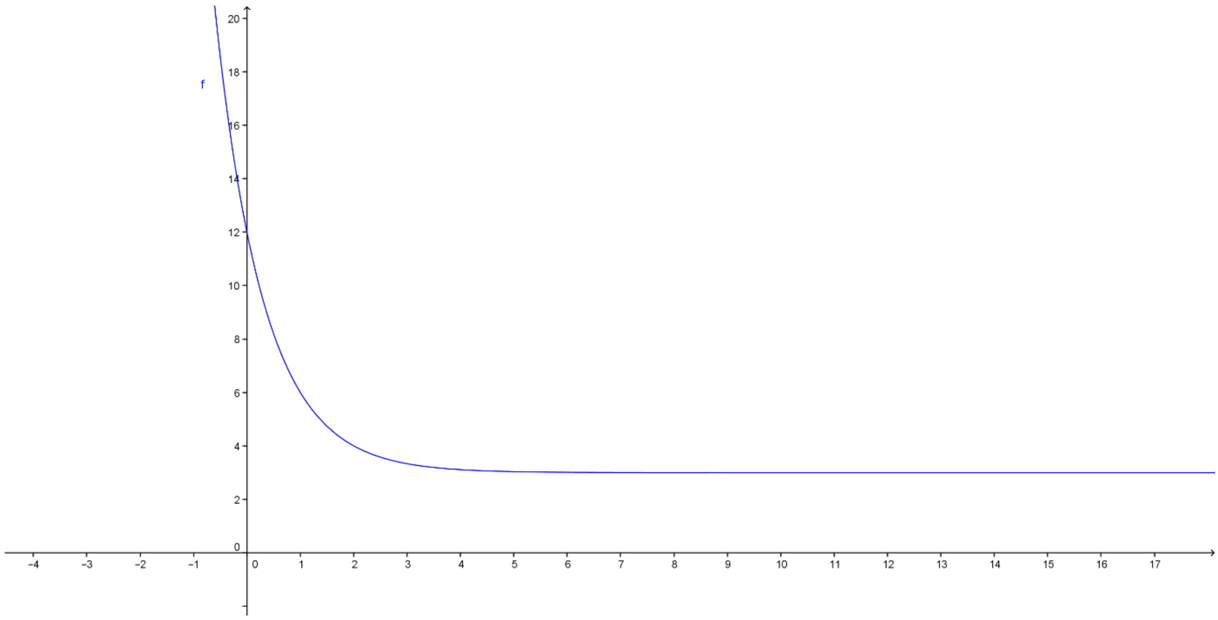
10. $Df \in R - \{2\}$

Graf:



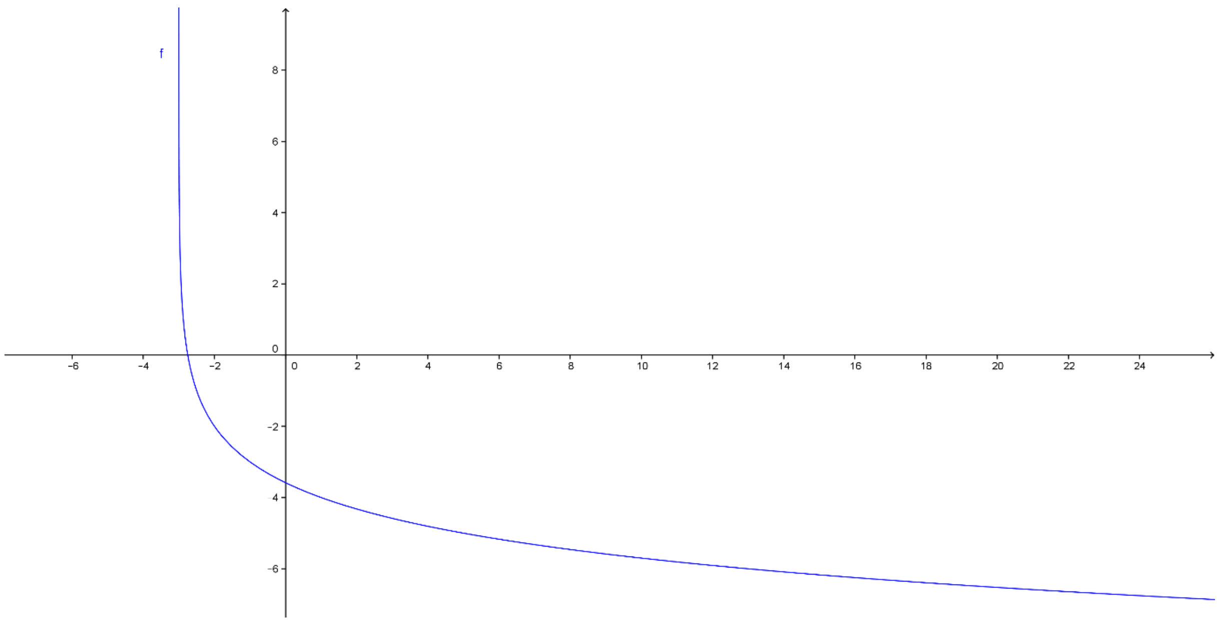
11. $Df \in R$

Graf:



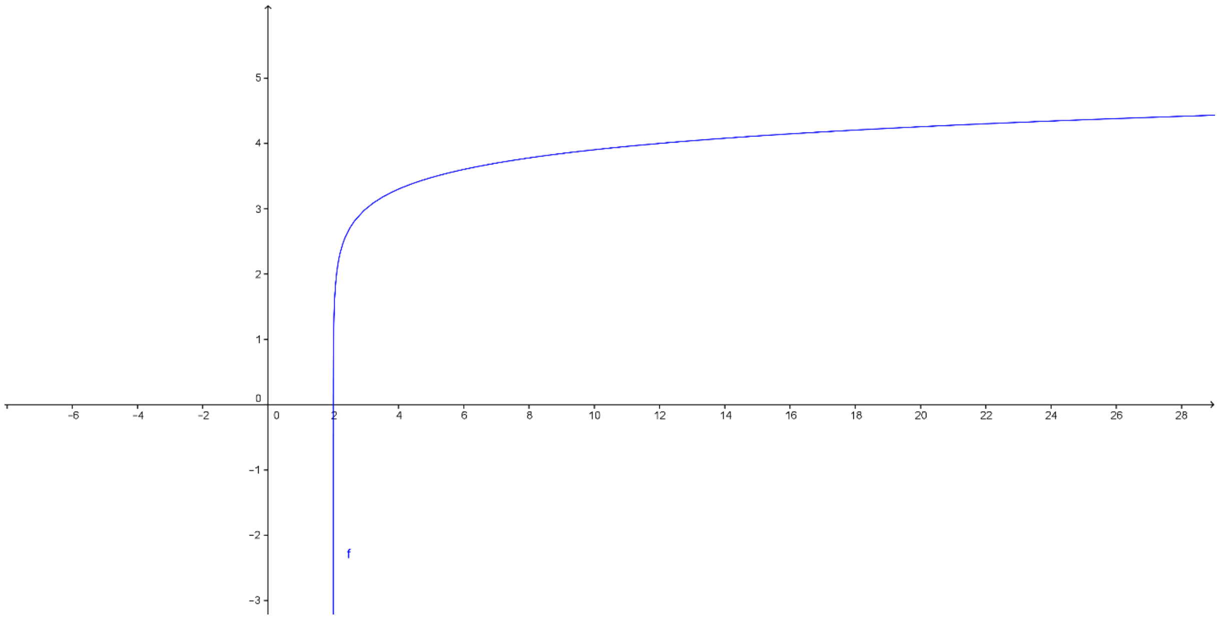
12. $Df \in (-3; \infty)$

Graf:



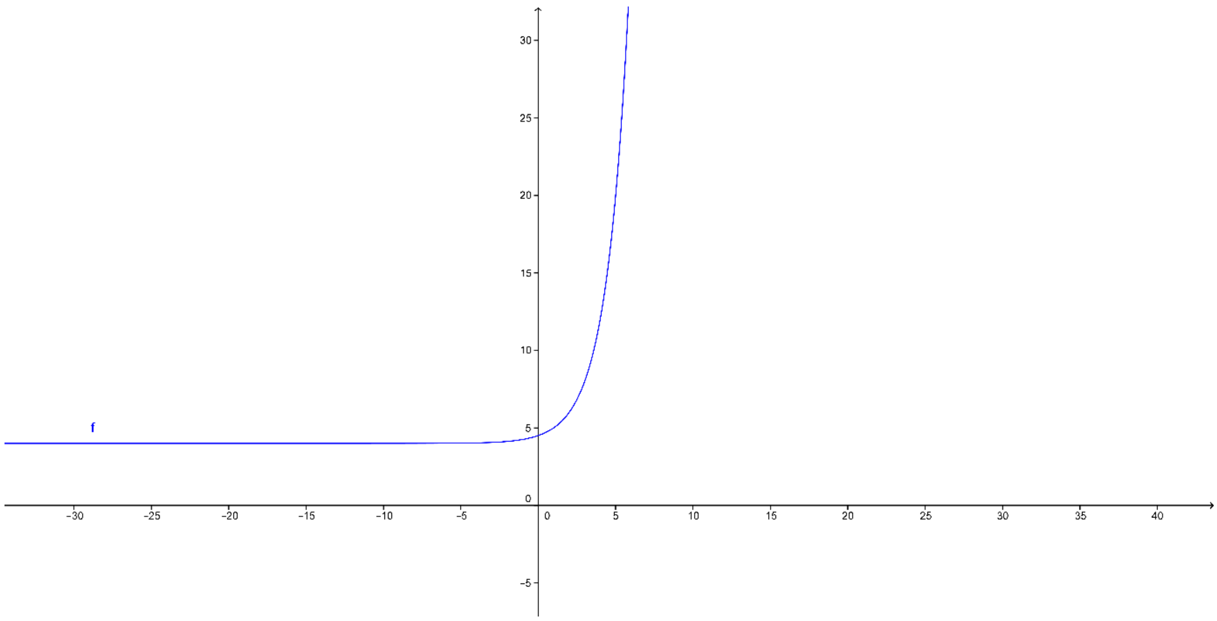
13. $Df \in (2; \infty)$

Graf:



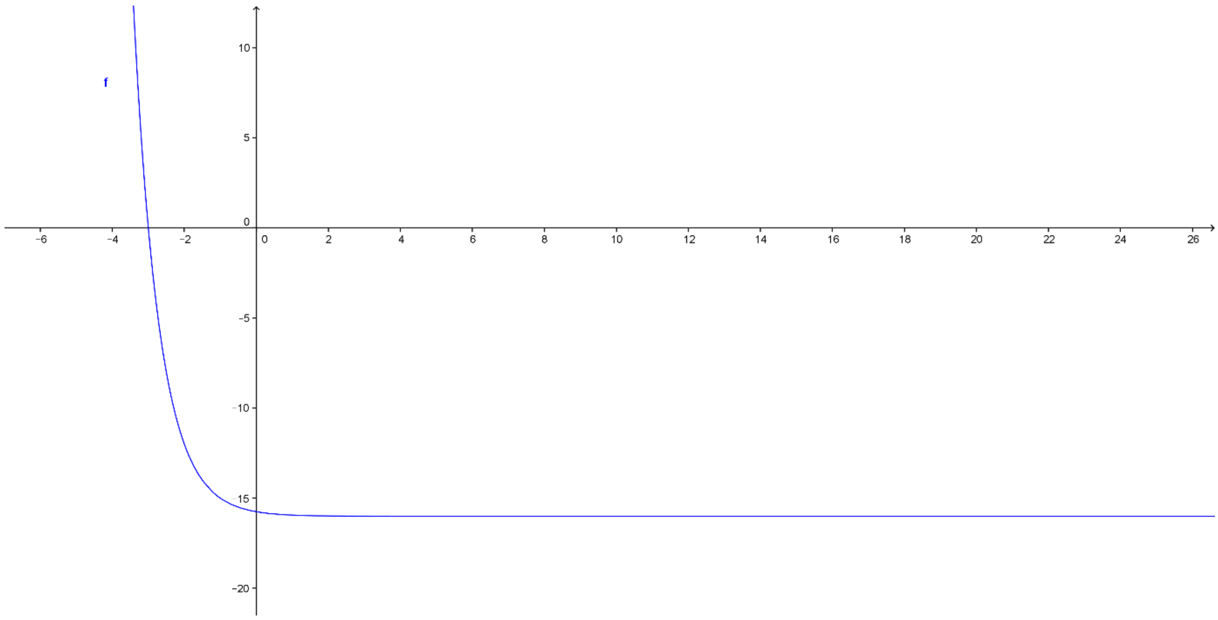
14. $Df \in R$

Graf:



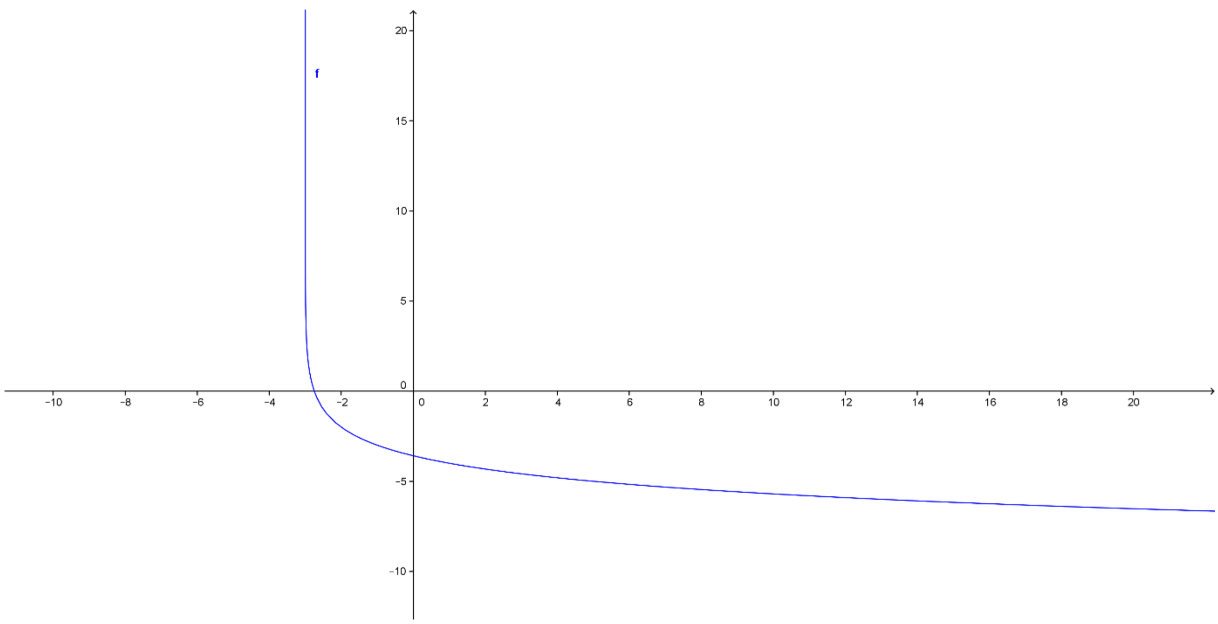
15. $Df \in R$

Graf:



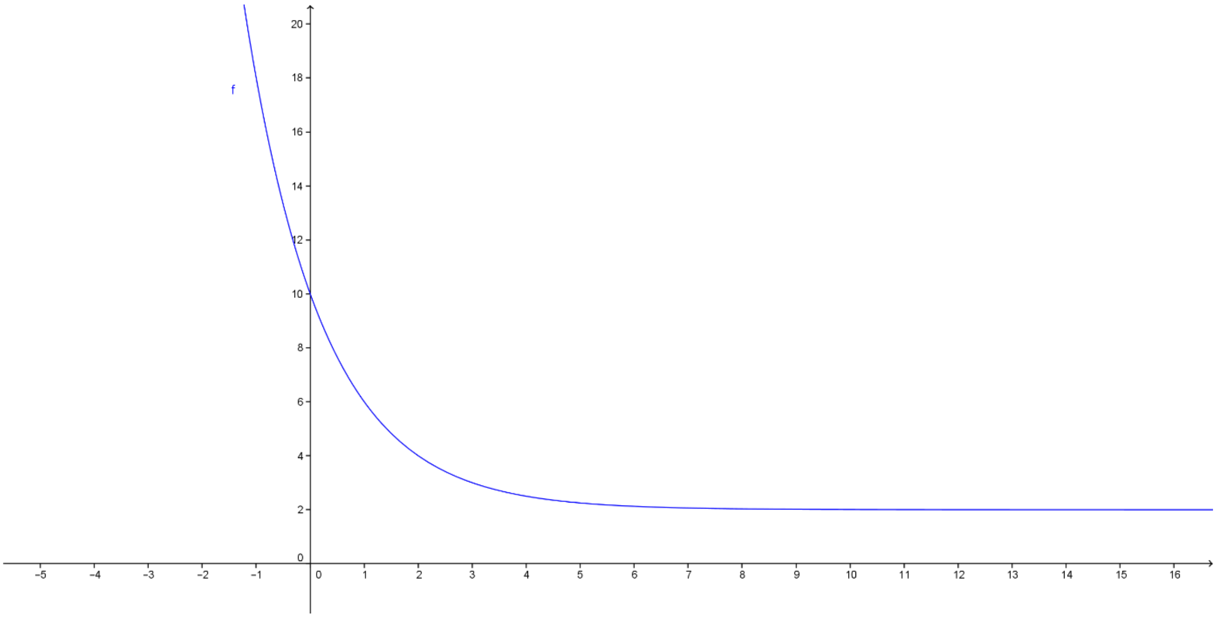
16. $Df \in (-3; \infty)$

Graf:



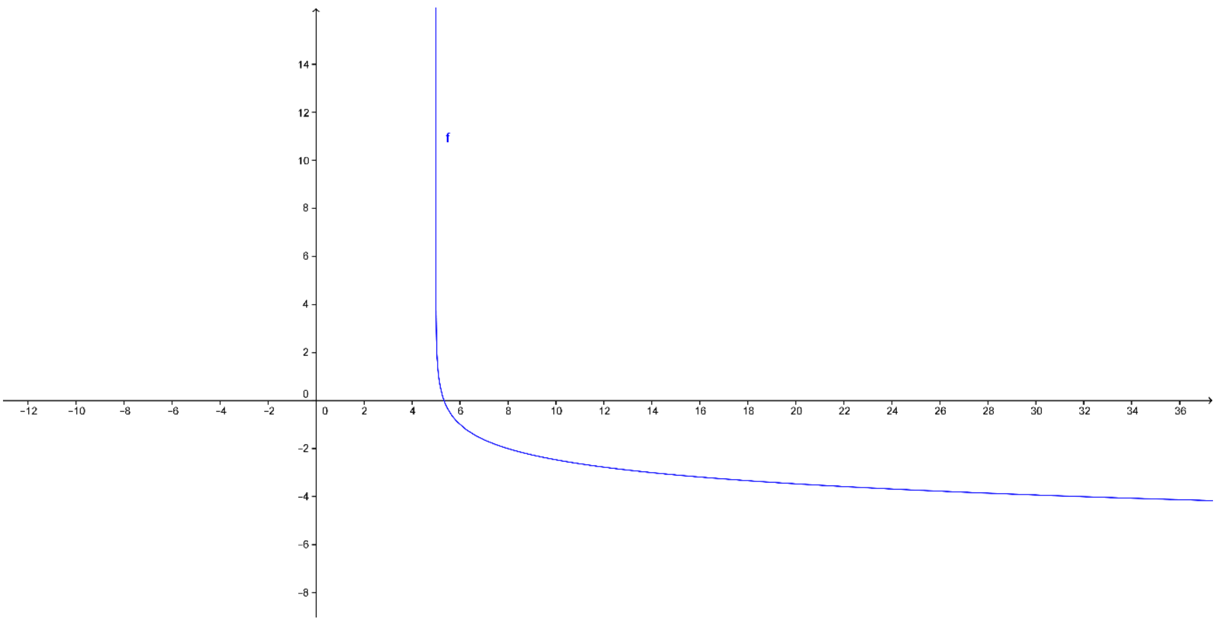
17. $Df \in R$

Graf:



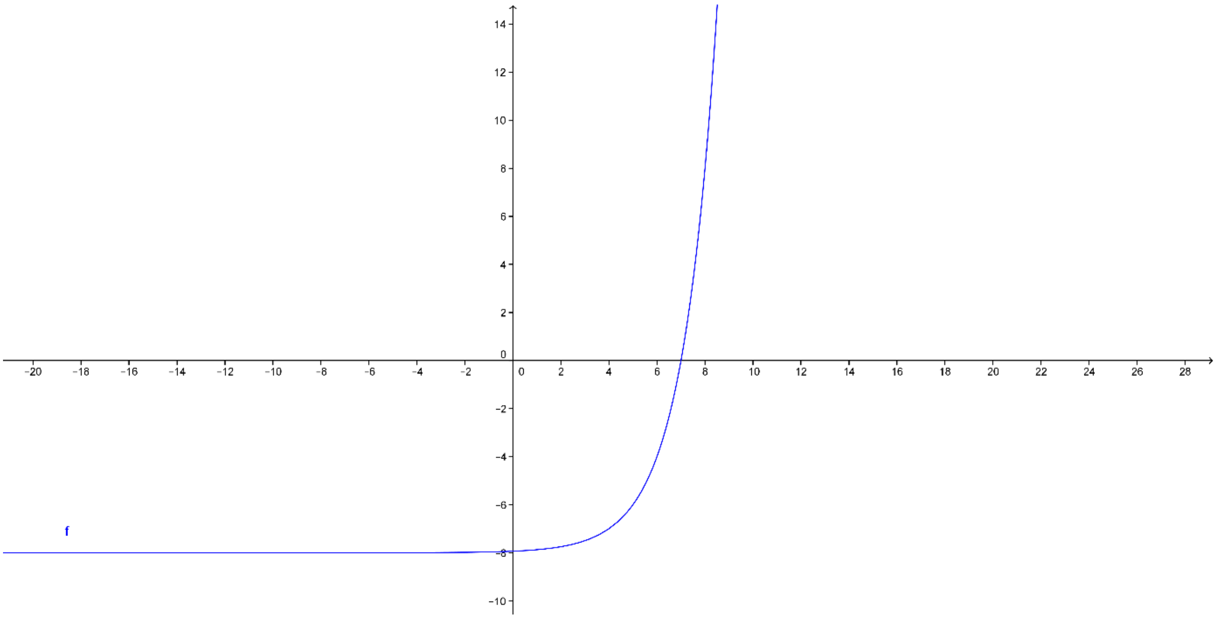
18. $Df \in (5; \infty)$

Graf:



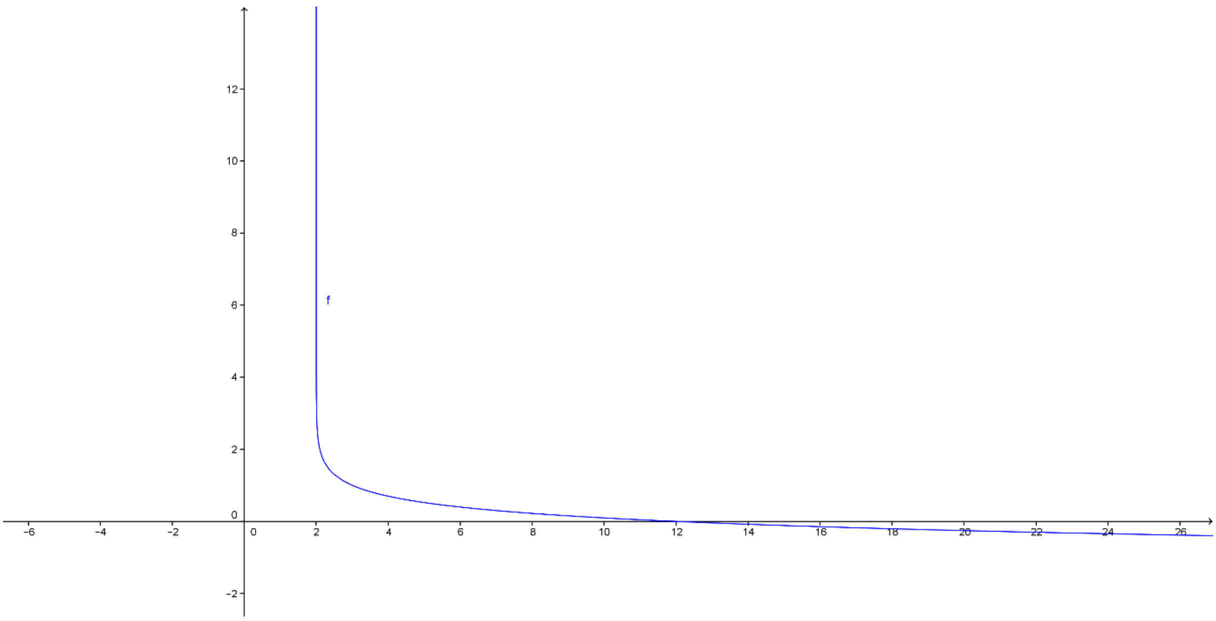
19. $Df \in R$

Graf:



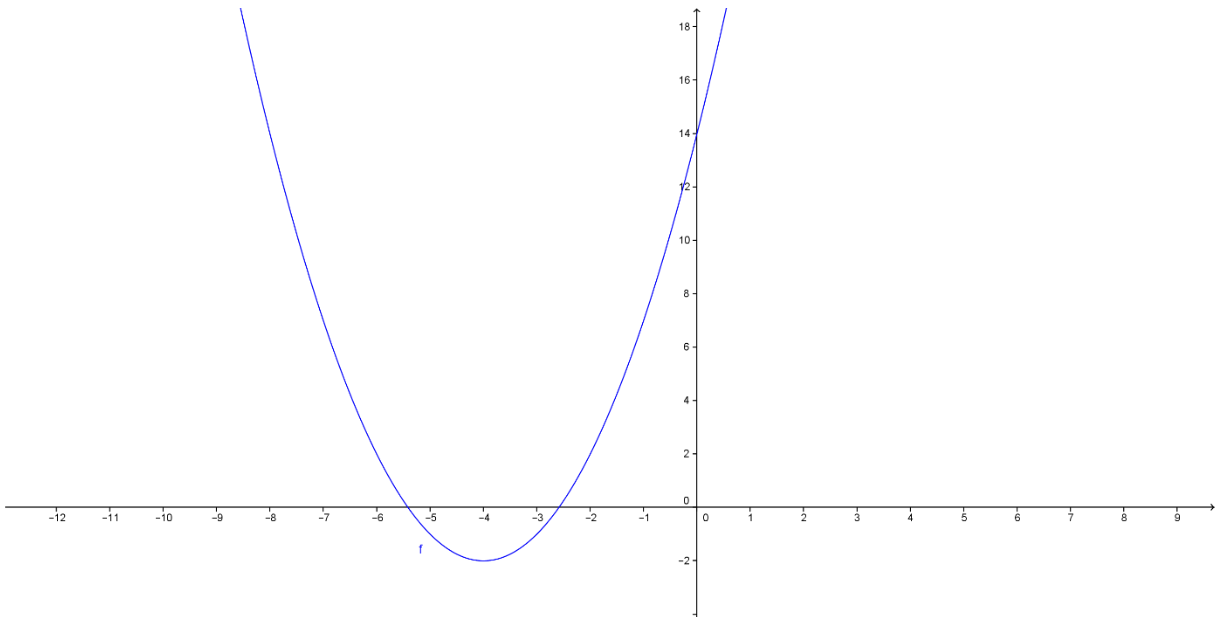
20. $Df \in (2;\infty)$

Graf:



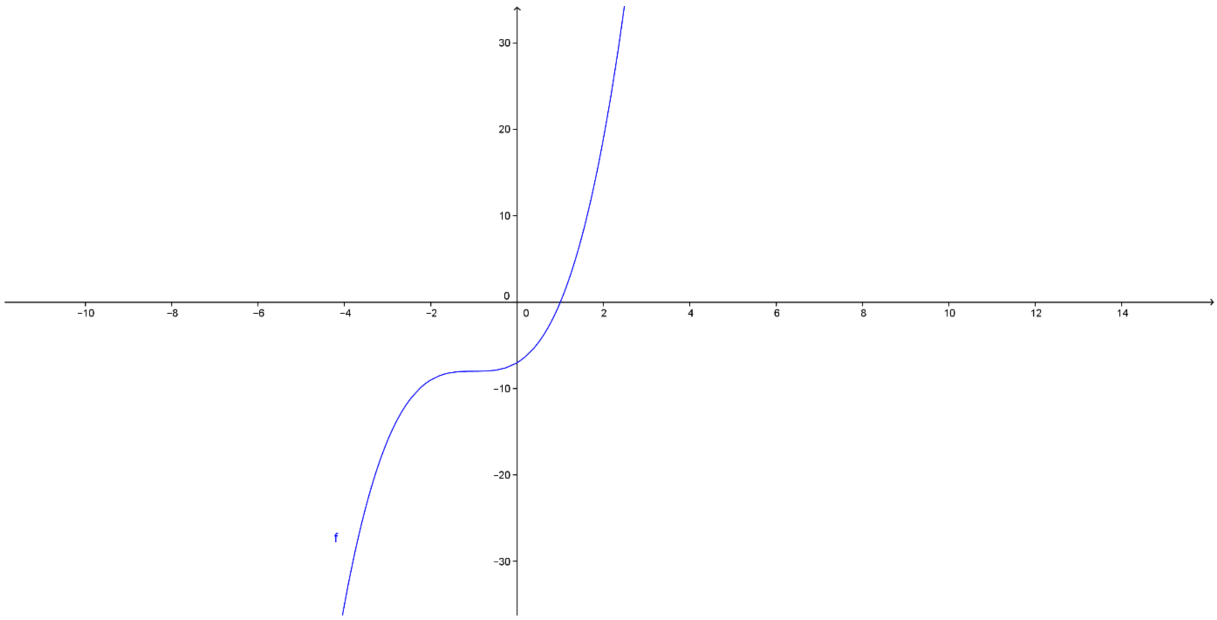
21. $Df \in R$

Graf:



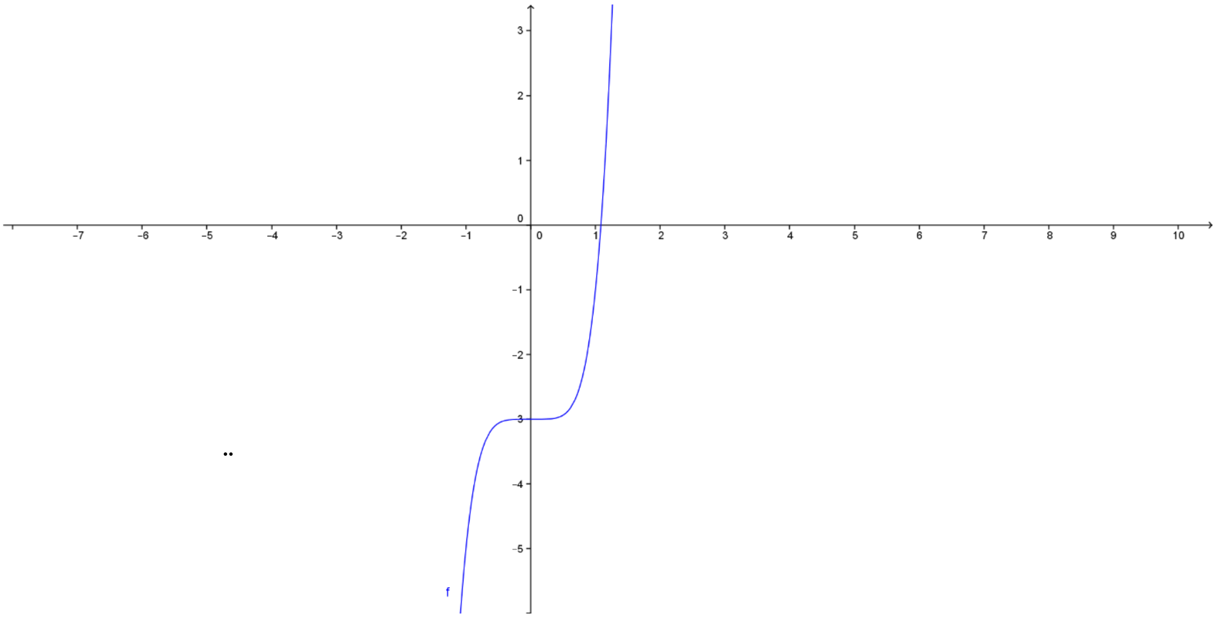
22. $Df \in R$

Graf:



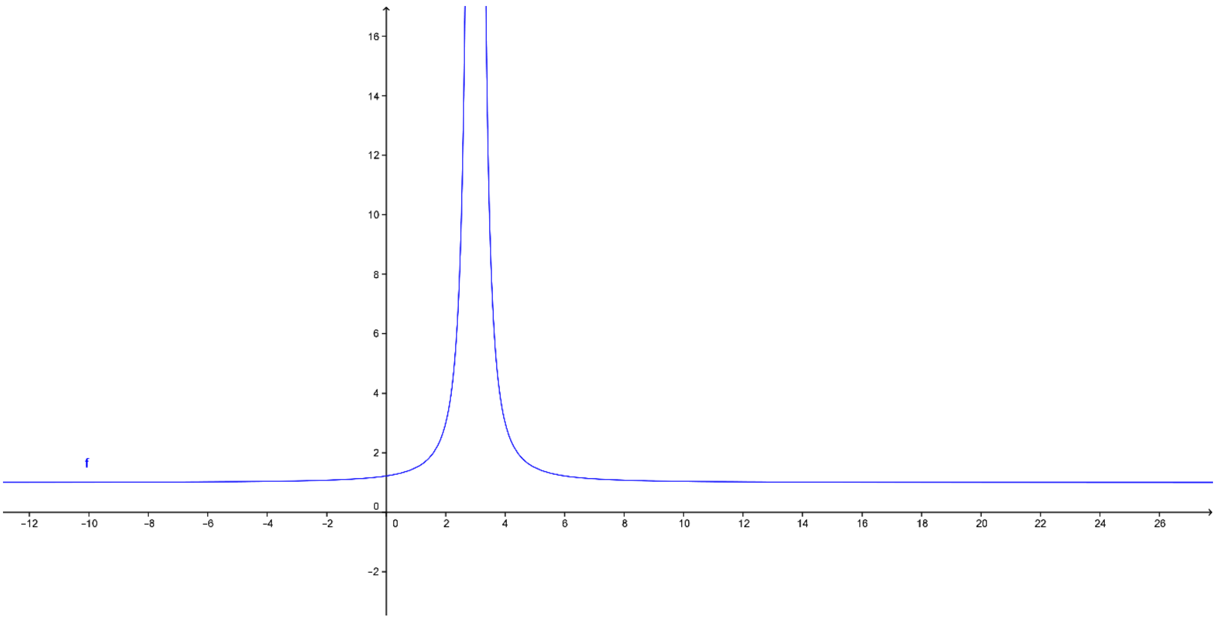
23. $Df \in R$

Graf:



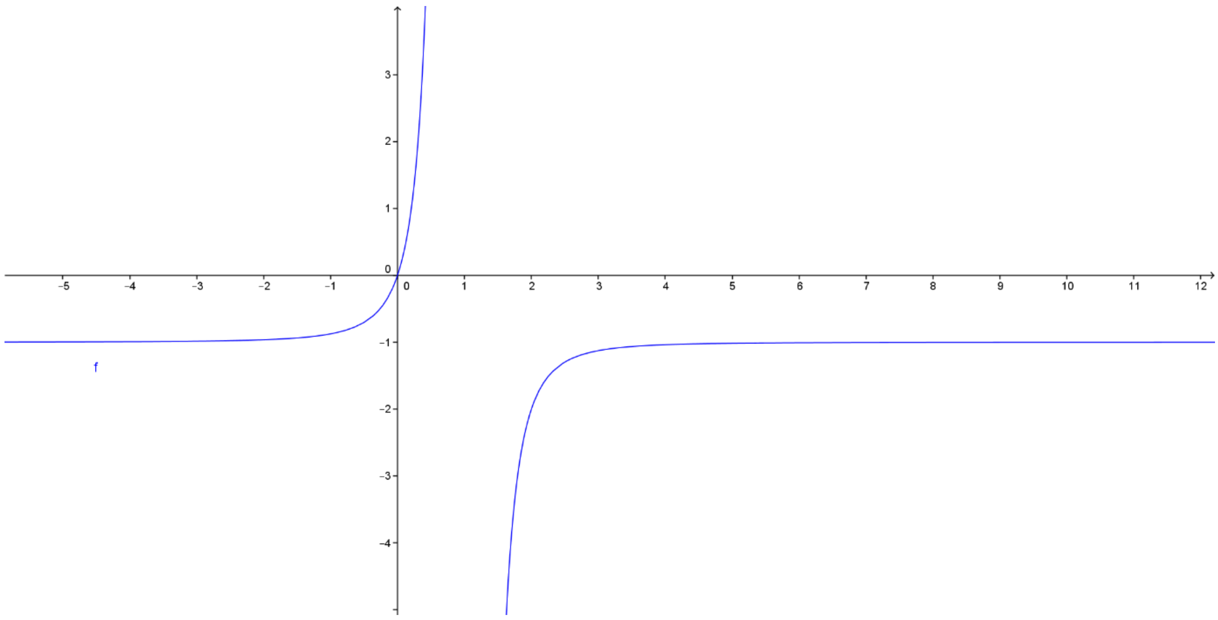
24. $Df \in R - \{3\}$

Graf:



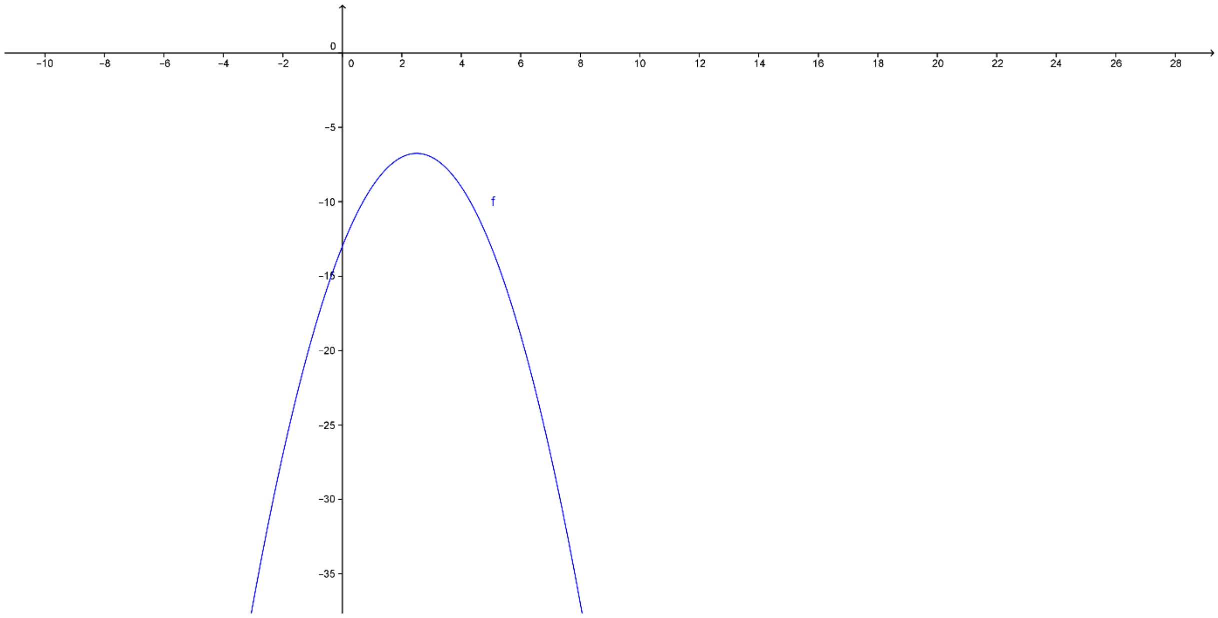
25. $Df \in R - \{1\}$

Graf:



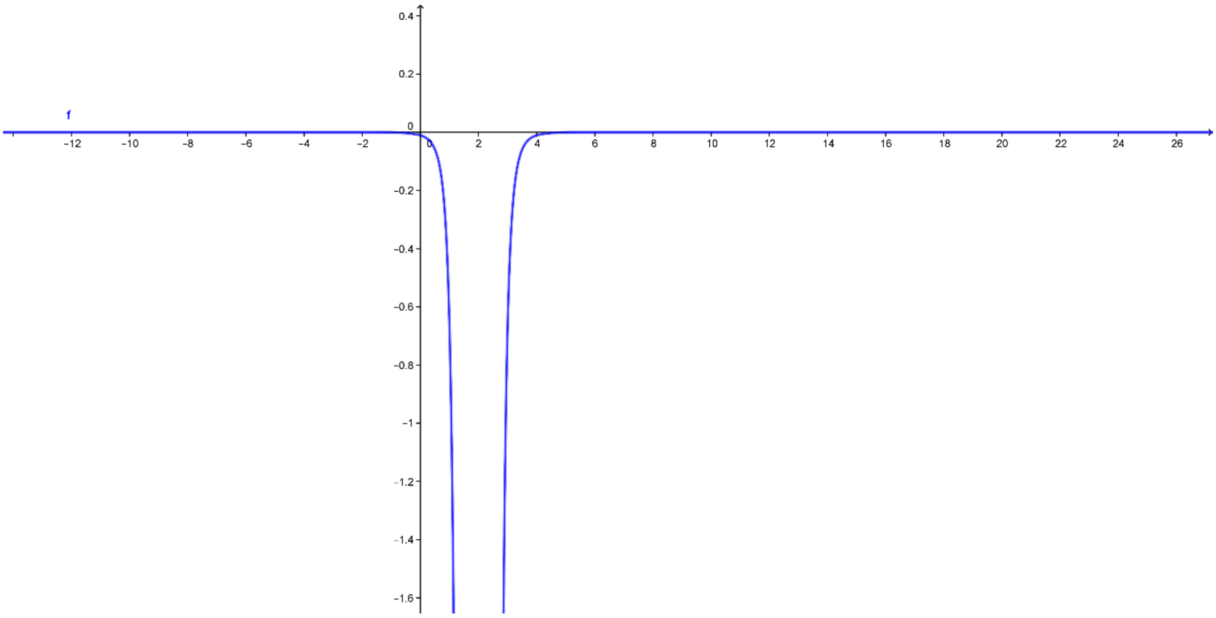
26. $Df \in R$

Graf:



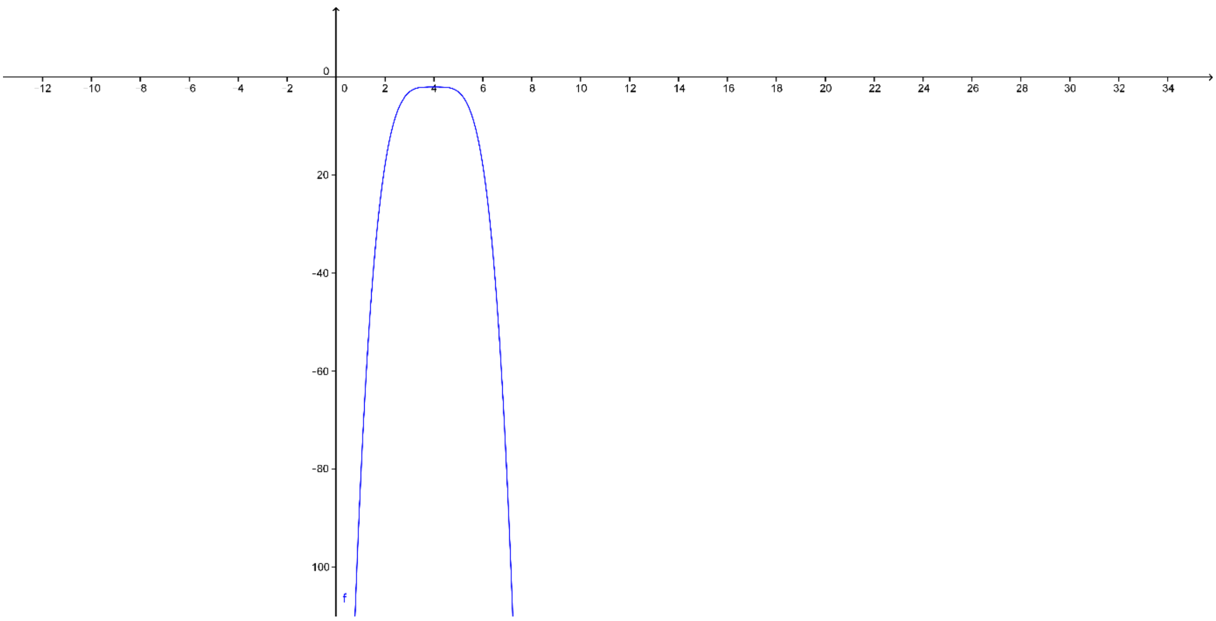
27. $Df \in R - \{2\}$

Graf:



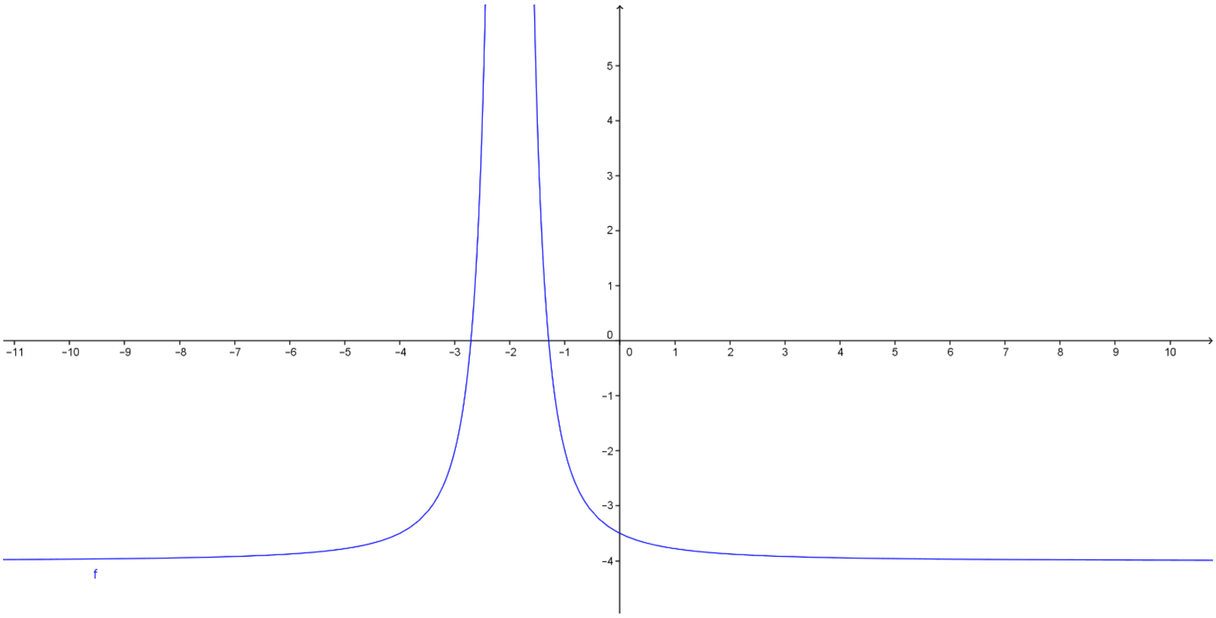
28. $Df \in R$

Graf:



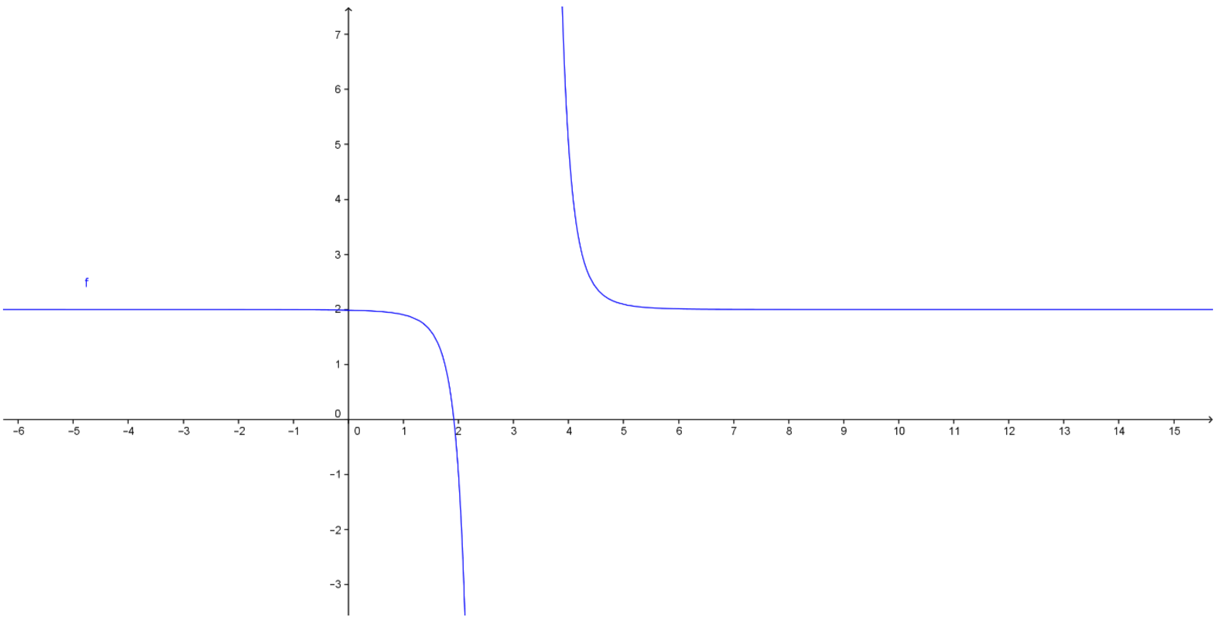
29. $Df \in R - \{-2\}$

Graf:



30. $Df \in R - \{3\}$

Graf:



5. TESTY

Tato kapitola obsahuje vygenerované testy pomocí softwaru Moodle. Testy byly složeny z jednotlivých sad úloh, které jsou uvedeny v předešlé části práce. Testové úlohy 1 a 2 byly náhodně vybírané ze sady číslo 1, přičemž testová úloha 1 z první dvacítky příkladů a testová úloha 2 z druhé dvacítky příkladů. Testové úlohy 3 a 4 byly náhodně vybírané ze sady číslo 2. Testová úloha 5 byla náhodně vybíraná ze sady číslo 3. Testová úloha 6 byla náhodně vybíraná ze sady číslo 4. Testová úloha 7 byla náhodně vybíraná ze sady číslo 5. Testové úlohy 8, 9 a 10 byly náhodně vybírané ze sady příkladů číslo 6, přičemž testová úloha 8 z první desítky příkladů, testová úloha 9 z druhé desítky příkladů a testová úloha 10 z třetí desítky příkladů.

5.1 TEST 1

Úloha 1
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - x^3}{1 - x^4}$$

Odpověď:

Úloha 2
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}$$

Odpověď:

Úloha 3
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

Odpověď:

Úloha 4
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin^2 x}{x \cdot \cos x}$$

Odpověď:

Úloha 5

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Do rovnoramenného trojúhelníku vepište obdélník maximálního obsahu.

Odpověď:

Úloha 6

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Je dána funkce:

$$f(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2}$$

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

Odpověď:

Úloha 7

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

$$f(x) = \sin(2x) + 1 \text{ na } \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \rangle$$

Odpověď:

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 2^{x-4} - 8$$

Odpověď:

Úloha 9

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = \left| \frac{2x-3}{x-2} \right|$$

Odpověď:

Úloha 10

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = x^2 + 8x + 14$$

Odpověď:

5.2 TEST 2

Úloha 1

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$$

Odpověď:

Úloha 2

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+14}-2\cdot\sqrt{x+2}}{x^2-4}$$

Odpověď:

Úloha 3

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2-\tan^2 x}{\sin x}$$

Odpověď:

Úloha 4

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1-x)}{x^2}$$

Odpověď:

Úloha 5

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte pravidelný trojboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.

Odpověď:

Úloha 6

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Je dána funkce:

$$f(x)=2+\frac{12}{x^2-4}$$

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

Odpověď:

Úloha 7

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

$$f(x) = 4 + 3 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{5}\right)$$

Odpověď:

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = -1 + \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$$

Odpověď:

Úloha 9

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = \left|3 + \log(x - 2)\right|$$

Odpověď:

Úloha 10

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-3)^2}$$

Odpověď:

5.3 TEST 3

Úloha 1

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-5)^6 \cdot (3x-4)^{20}}{(6x+100)^{26}}$$

Odpověď:

Úloha 2

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x^2-16}-2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

Odpověď:

Úloha 3

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$$

Odpověď:

Úloha 4

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$$

Odpověď:

Úloha 5

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Jaké jsou rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem, pokud má bazén objem $V = 32\ m^3$ a pokud chceme na jeho vyzdění spotřebovat minimální množství materiálu?

Odpověď:

Úloha 6

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Je dána funkce:

$$f(x) = \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4$$

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

Odpověď:

Úloha 7

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

$$f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$$

Odpověď:

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 1 - \log(x - 2)$$

Odpověď:

Úloha 9

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = \left|\,|x - 3| - 2\right|$$

Odpověď:

Úloha 10

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 2 \cdot (x + 2)^{-2} - 4$$

Odpověď:

5.4 TEST 4

Úloha 1
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$$

Odpověď:

Úloha 2
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Odpověď:

Úloha 3
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x}$$

Odpověď:

Úloha 4
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sin 4x}$$

Odpověď:

Úloha 5
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Ze čtvercového plechu o délce strany 30 cm vystřihneme v rozích čtyři stejné čtverečky. Zbytek přehneme tak, abychom dostali otevřenou krabici. Urči stranu odstřižených čtverců, pokud chceme, aby objem krabice byl maximální.

Odpověď:

Úloha 6
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Je dána funkce:

$$f(x)=\frac{2-x^4}{x^2}$$

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.

b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.

c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.

d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.

e) Nakreslete graf funkce.

Odpověď:

Úloha 7

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

$$f(x) = (x+3)^3 - 8$$

Odpověď:

Úloha 8

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = -2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$$

Odpověď:

Úloha 9

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = \big|\,\big|\,|x| - 1\big| - 3\big|$$

Odpověď:

Úloha 10

Dosud nezodpovězeno

Počet bodů z 1,00

Úloha s vlaječkou

Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 2x^5 - 3$$

Odpověď:

5.5 TEST 5

Úloha 1
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-5)^6\cdot(3x-9)^{25}}{(7x+100)^{31}}$$

Odpověď:

Úloha 2
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě bez použití L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+8x+1}$$

Odpověď:

Úloha 3
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$$

Odpověď:

Úloha 4
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte limitu funkce v daném bodě s použitím L´Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x^2}$$

Odpověď:

Úloha 5
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Jaké rozměry musí mít obdélník s $o = 400\ cm$, aby jeho úhlopříčka byla minimální?

Odpověď:

Úloha 6
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Je dána funkce:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

a) Určete definiční obor funkce, její průsečíky s osami, sudost, popř. lichost funkce.
b) Určete intervaly monotonie funkce, lokální a globální extrémy funkce.
c) Určete intervaly konvexnosti, resp. konkávnost a inflexní body funkce.
d) Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce, asymptoty funkce.
e) Nakreslete graf funkce.

Odpověď:

Úloha 7
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Najděte definiční obor funkce *f*, inverzní funkci k funkci *f* a její definiční obor. Zakreslete grafy obou funkcí do téhož obrázku.

$$f(x) = 1 - 2 \cdot (e^x - 2)$$

Odpověď:

Úloha 8
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - 16$$

Odpověď:

Úloha 9
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = 2 \cdot |x + 3| - 1$$

Odpověď:

Úloha 10
Dosud nezodpovězeno
Počet bodů z 1,00
Úloha s vlaječkou
Upravit úlohu

Zakreslete graf následující funkce. Určete její definiční obor.

$$f(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^3}$$

Odpověď:

Bodování testů:

Úloha 1: max. 6 bodů

Úloha 2: max. 6 bodů

Úloha 3: max. 10 bodů

Úloha 4: max. 10 bodů

Úloha 5: max. 15 bodů

Úloha 6: a) max. 5 bodů

b) max. 6 bodů

c)max. 6 bodů

d)max. 5 bodů

e) max. 3 body

Úloha 7: max. 10 bodů

Úloha 8: max. 6 bodů

Úloha 9: max. 6 bodů

Úloha 10: max. 6 bodů

6. ŘEŠENÍ TESTŮ

6.1 ŘEŠENÍ TESTU 1

Úloha 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{1-x^4}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(1-x^2)}{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(1-x)\cdot(1+x)}{(1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Úloha 2:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+1}=\infty+\infty=\infty$$

Úloha 3:

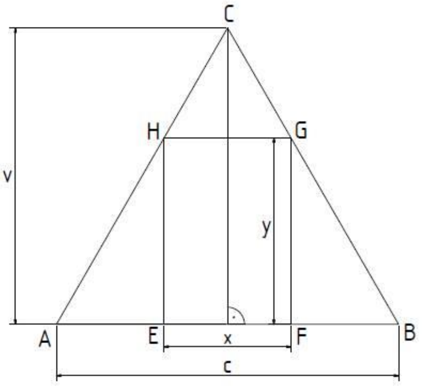
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-\ln x}{(\ln x)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\cdot(x-1)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Úloha 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Úloha 5:



Podmínky: $x; y; c; v > 0$

$x \in \langle 0; c\rangle$

$y \in \langle 0; v\rangle$

$S = x \cdot y$

Z podobnosti trojúhelníků plyne: $\frac{x}{c} = \frac{v-y}{v} \rightarrow x = \frac{v-y}{v} \cdot c$

$$S(y) = y \cdot \left(\frac{v-y}{v} \cdot c\right) = y \cdot \frac{vc - yc}{v} = y \cdot \left(c - \frac{yc}{v}\right) = yc - \frac{c}{v} \cdot y^2$$

$$S'(y) = c - 2 \cdot \frac{c}{v} \cdot y$$

$$S'(y) = 0 \rightarrow c = 2 \cdot \frac{c}{v} \cdot y$$

$$y = \frac{c}{2 \cdot \frac{c}{v}} = \frac{c \cdot v}{2c} = \frac{v}{2}$$

$y \in \langle 0; v\rangle$: $y = 0 \rightarrow S(0) = c \cdot 0 - 0 = 0$

$y = v \rightarrow S(v) = c \cdot v - \frac{c}{v} \cdot v^2 = 0 \rightarrow$ globální maximum

$$x = \frac{v - \frac{v}{2}}{v} \cdot c = \frac{c}{2}$$

Délky stran obdélníku jsou $x = \frac{c}{2}$ a $y = \frac{v}{2}$.

Úloha 6:

a) $Df \in R - \{1\}$

Funkce nemá symetrický Df, proto není sudá ani lichá.

$$P_x: y = 0 \rightarrow \frac{x^4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \rightarrow P_x[0; 0]$$

$$P_y: x = 0 \rightarrow \frac{0^4}{(0-1)^2} = 0 \rightarrow P_y[0; 0]$$

b) $f'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x-1)^2 - x^4 \cdot 2 \cdot (x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{4x^4 - 4x^3 - 2x^4}{(x-1)^3} = \frac{-4x^3 + 2x^4}{(x-1)^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (-4 + 2x) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

Pro $(-\infty; 0\rangle$: $f'(x) < 0$ klesající

Pro $(0; 1)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(1; 2\rangle$: $f'(x) < 0$ klesající

Pro $(2; \infty)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Rostoucí na $(0; 1) \cup (2; \infty)$.

Klesající na $(-\infty; 0\rangle \cup (1; 2\rangle$.

Lokální maximum neexistuje, lokální minimum $[0; 0]$; $[2; 16]$.

Globální maximum neexistuje, globální minimum $[0; 0]$.

c) $f''(x) = \frac{(-12x^2 + 8x^3) \cdot (x-1)^3 - (-4x^3 + 2x^4) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} =$

$\frac{-12x^3 + 12x^2 + 8x^4 - 8x^3 - (-12x^3 + 6x^4)}{(x-1)^4} =$

$= \frac{2x^4 - 8x^3 - 12x^2}{(x-1)^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4 - 8x^3 - 12x^2}{(x-1)^4} = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 8x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \cdot (2x^2 - 8x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Pro $(-\infty; 0\rangle$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $(0; 1)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $(1; \infty)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Konvexní na $Df \in R - \{1\}$. Inflexní body neexistují.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\infty}{1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\infty}{1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{x^4}{x^2-2x+1}=\frac{1}{0+}=\infty$

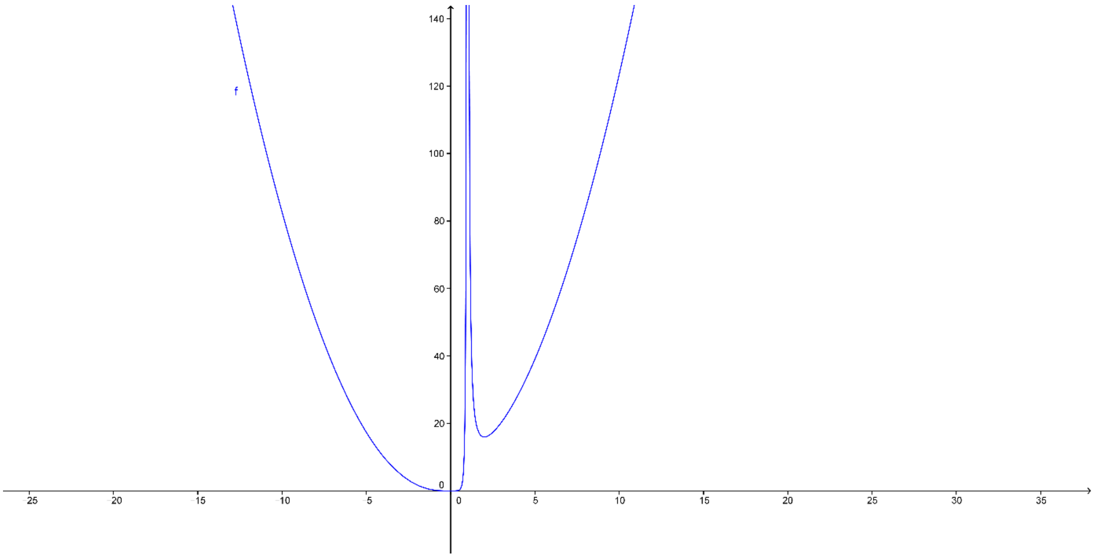
$\lim\limits_{x\to1-}\frac{x^4}{x^2-2x+1}=\frac{1}{0+}=\infty$

Asymptoty bez směrnice: $x = 1$.

Asymptoty se směrnicí: $y = k\cdot x + q$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^3+2x^2+x}=\infty\to$ neexistuje.

e)



Úloha 7:

$Df\in R$; interval $\langle-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\rangle$

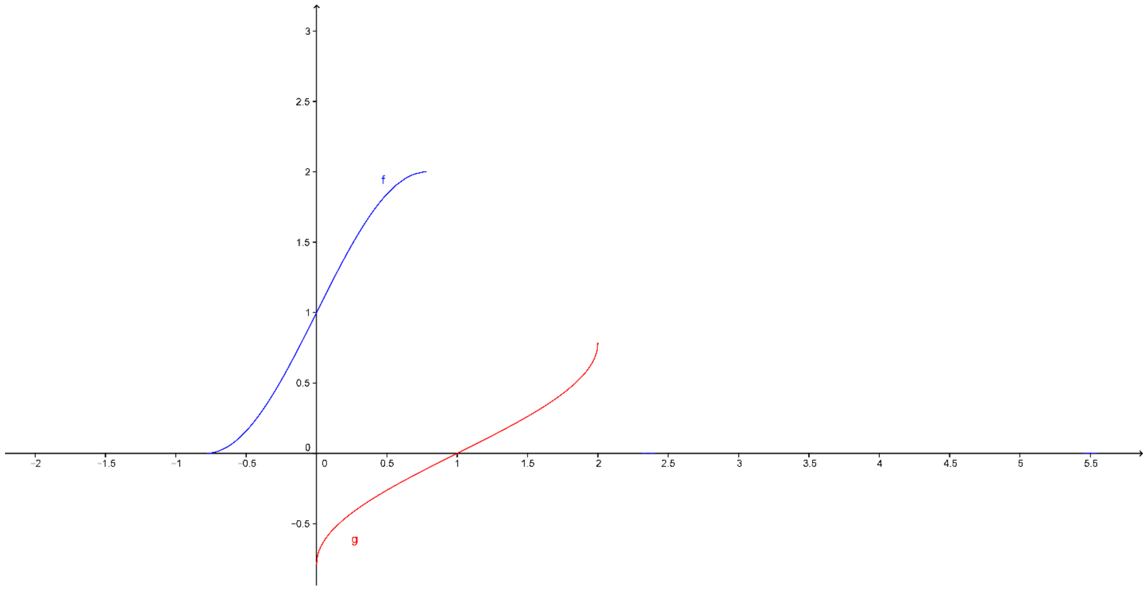
$x=\sin(2y)+1$

$x-1=\sin(2y)$

$g(x)=\frac{1}{2}arcsin(x-1)$

$Dg\in\langle0;2\rangle$

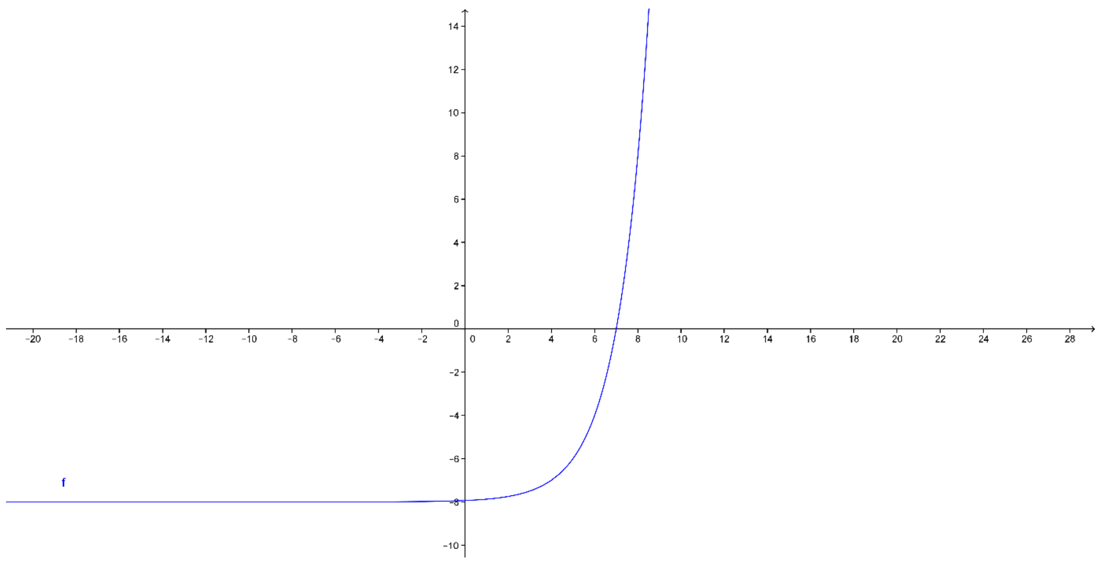
Graf:



<u>Úloha 8:</u>

$Df \in R$

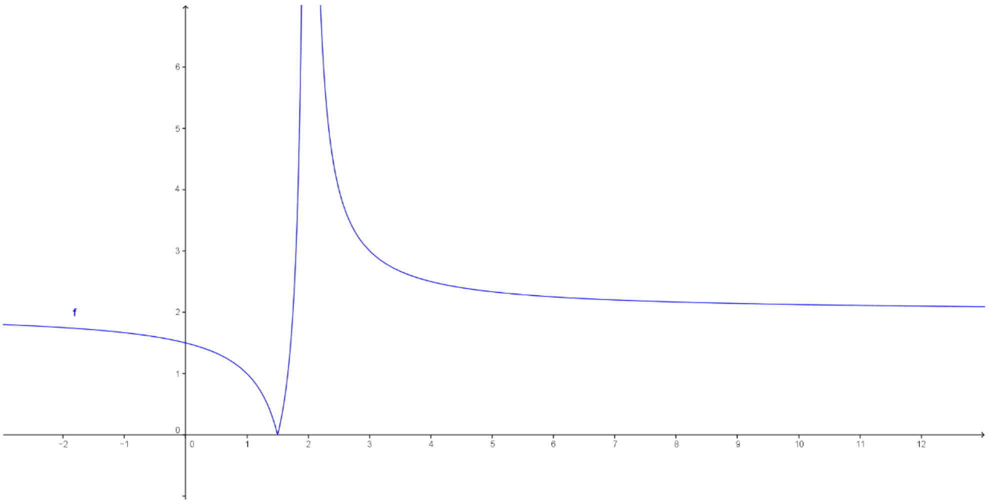
Graf:



Úloha 9:

$Df \in R - \{2\}$

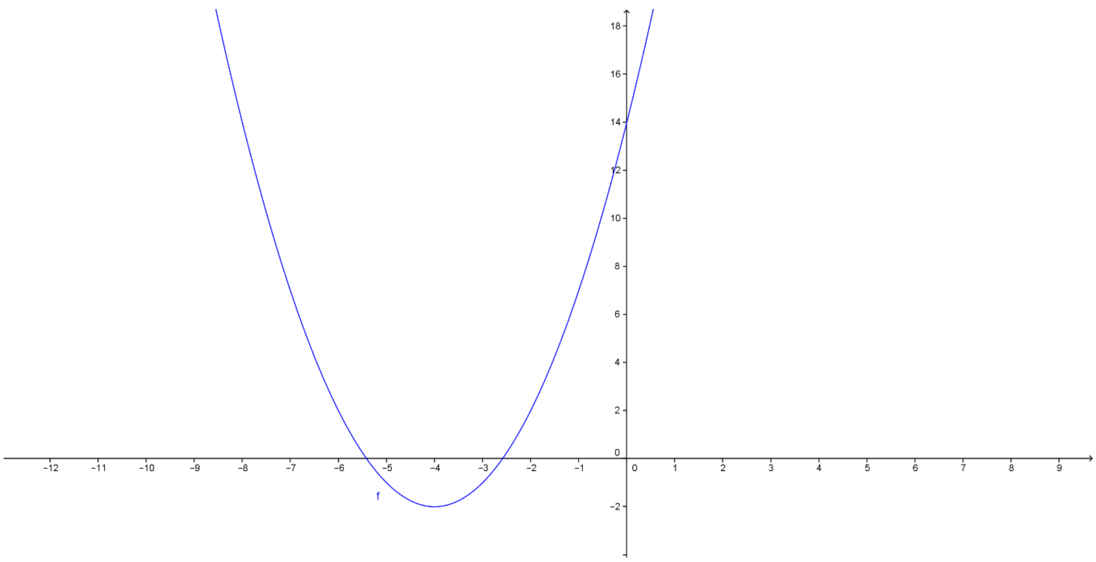
Graf:



Úloha 10:

$Df \in R$

Graf:



6.2 ŘEŠENÍ TESTU 2

Úloha 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4-x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3\cdot\left(4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{4}$$

Úloha 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+14}-2\cdot\sqrt{x+2}}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{14}{x}}-2\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{1+\frac{14}{x}}-2\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{\sqrt[3]{x}\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}==\frac{-1}{\infty}=0$$

Úloha 3:

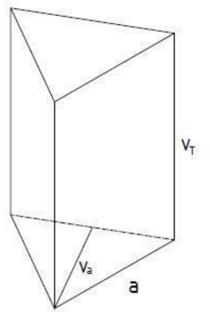
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2-\tan^2 x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+(x^2)^2}-2\cdot\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x}=\frac{1-2\cdot 0}{1}=1$$

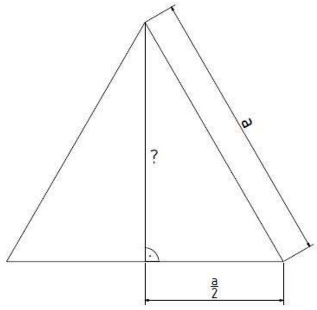
Úloha 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(\ln(1-x))\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1-x)}{x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{2x-1}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{1}}{-1}=1$$

Úloha 5:





Podmínky: $x; y; c; v > 0$

$x \in \langle 0; c\rangle$

$y \in \langle 0; v\rangle$

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$S = 2 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} + 3 \cdot a \cdot v_T \rightarrow v_T = \frac{S - a \cdot v_a}{3a} = \frac{S - a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{3a}$$

$$V = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v_T = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} \cdot \frac{S - a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{3a} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} \cdot \frac{S}{a} - \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6a} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot a}{4} \cdot \frac{S}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot S}{12} \cdot a - \frac{1}{8} \cdot a^3$$

$$V'(a) = \frac{\sqrt{3}S}{12} - \frac{3}{8} \cdot a^2 = -\frac{3a^2}{8} + \frac{\sqrt{3}S}{12}$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3a^2}{8} + \frac{\sqrt{3}S}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}S}{12} = \frac{3a^2}{8} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2\sqrt{3} \cdot S}{9} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2\sqrt{3} \cdot S}{9}}$$

$a \in (0; \infty)$: $a \rightarrow 0$: $\lim\limits_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \cdot S}{12} \cdot a - \frac{1}{8} \cdot a^3 = 0$

$a \rightarrow \infty$: $\lim\limits_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} \cdot S}{12} \cdot a - \frac{1}{8} \cdot a^3 = \lim\limits_{a \rightarrow \infty} a \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot S}{12} - \frac{1}{8} \cdot a^2\right) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

→ globální maximum

$$a^2 = \frac{2\sqrt{3} \cdot S}{9} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 + 3a \cdot v_T\right)}{9} = \frac{3a^2 + 2\sqrt{3} \cdot 3a - v_T}{9} = \frac{1}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{3}a \cdot v_T}{3}$$

$$3a^2 = a^2 + 2\sqrt{3} \cdot a \cdot v_T \Leftrightarrow 2a^2 = 2\sqrt{3} \cdot a \cdot v_T$$

$$\frac{2a^2}{2\sqrt{3} \cdot a} = v_T \Leftrightarrow v_T = \frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = v_T \cdot \sqrt{3}$$

Maximální objem má hranol o výšce $v_T = \frac{a}{\sqrt{3}}$ a délce hrany $a = v_T \cdot \sqrt{3}$.

Úloha 6:

a) $Df \in R - \{\pm 2\}$

$f(-x) = 2 + \frac{12}{x^2-4} = f(x)$ → Funkce je sudá.

P_x: $y = 0 \rightarrow 2 + \frac{12}{x^2-4} = 0$ → P_x neexistuje.

P_y: $x = 0 \rightarrow 2 + \frac{12}{-4} = -1 \rightarrow P_y[0; -1]$

b) $f'(x) = 0 + \frac{0 \cdot (x^2-4) - 12 \cdot (2x-0)}{(x^2-4)^2} = \frac{-24x}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-24x}{(x^2-4)^2} 0 \Leftrightarrow -24x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Pro $(-\infty; -2)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(-2; 0\rangle$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(0; 2)$: $f'(x) < 0$ klesající

Pro $(2; \infty)$: $f'(x) < 0$ klesající

Rostoucí na $(-\infty; -2) \cup (-2; 0\rangle$.

Klesající na $(0; 2) \cup (2; \infty)$.

Lokální maximum $[0; -1]$, lokální minimum neexistuje.

Globální extrémy neexistují.

c) $f''(x) = \frac{-24\cdot(x^2-4)^2-2\cdot(x^2-4)\cdot 2x\cdot(-24x)}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)\cdot[-24\cdot(x^2-4)-96x^2]}{(x^2-4)^4} =$
$\frac{-24x^2+96+96x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Leftrightarrow 24\cdot(3x^2+4) = 0 \Leftrightarrow (3x^2+4) = 0 \Leftrightarrow$
$3x^2 = -4$ → nemá řešení

Pro $(-\infty;-2)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $(-2;2)$: $f''(x) < 0$ konkávní

Pro $(2;\infty)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Konvexní na $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$.

Konkávní na $(-2;2)$. Inflexní body neexistují.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \frac{12}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \frac{12}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\cdot\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to2+} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \frac{12}{0+} = \infty$

$\lim\limits_{x\to2-} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \frac{12}{0-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2+} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \frac{12}{0-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2-} \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \frac{12}{0+} = \infty$

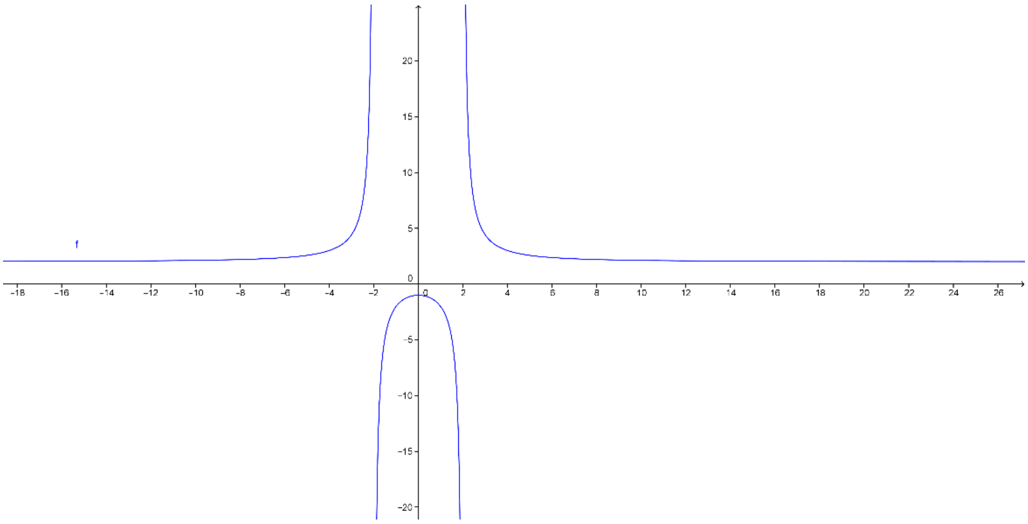
Asymptoty bez směrnice: $x = 2; x = -2$.

Asymptoty se směrnicí: $y = k\cdot x + q$

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+4}{x^3-4x} = \frac{x^2\cdot\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(x-\frac{4}{x}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0$

$q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2 \rightarrow y = 2.$

e)



Úloha 7:

$Df: \frac{x+1}{5} > 0 \Leftrightarrow x > -1 \rightarrow Df \in (-1;\infty)$

$x = 4 + 3 \cdot \ln\left(\frac{y+1}{5}\right)$

$x - 4 = 3 \cdot \ln\left(\frac{y+1}{5}\right)$

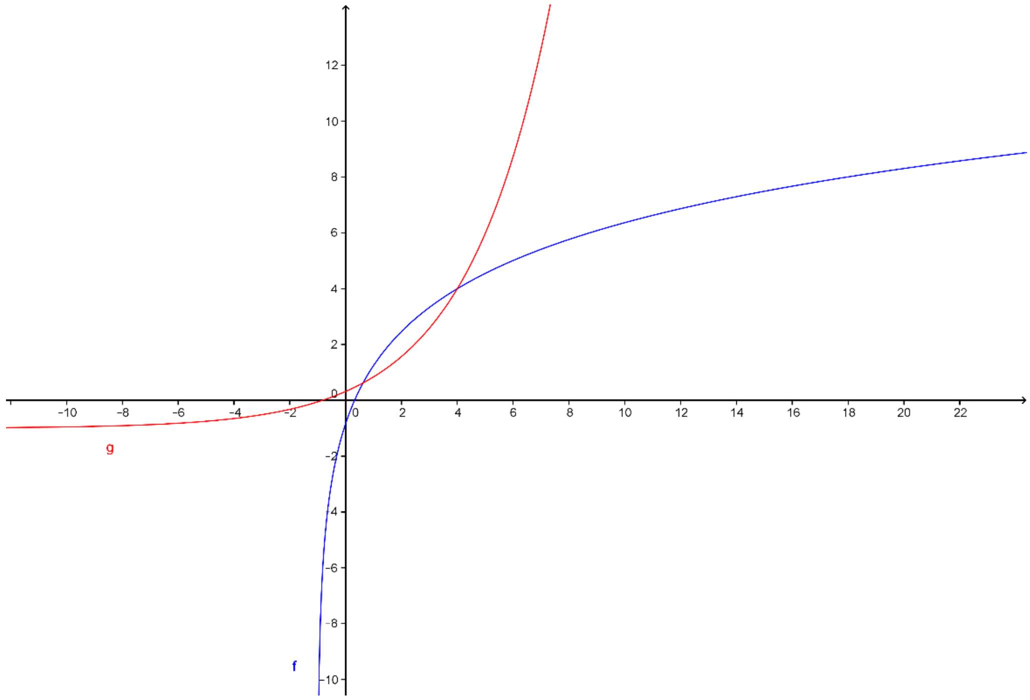
$$\frac{x-4}{3} = \ln\left(\frac{y+1}{5}\right)$$

$$e^{\frac{x-4}{3}} = \frac{y+1}{5}$$

$g(x) = 5e^{\frac{x-4}{3}} - 1$

$Dg \in R$

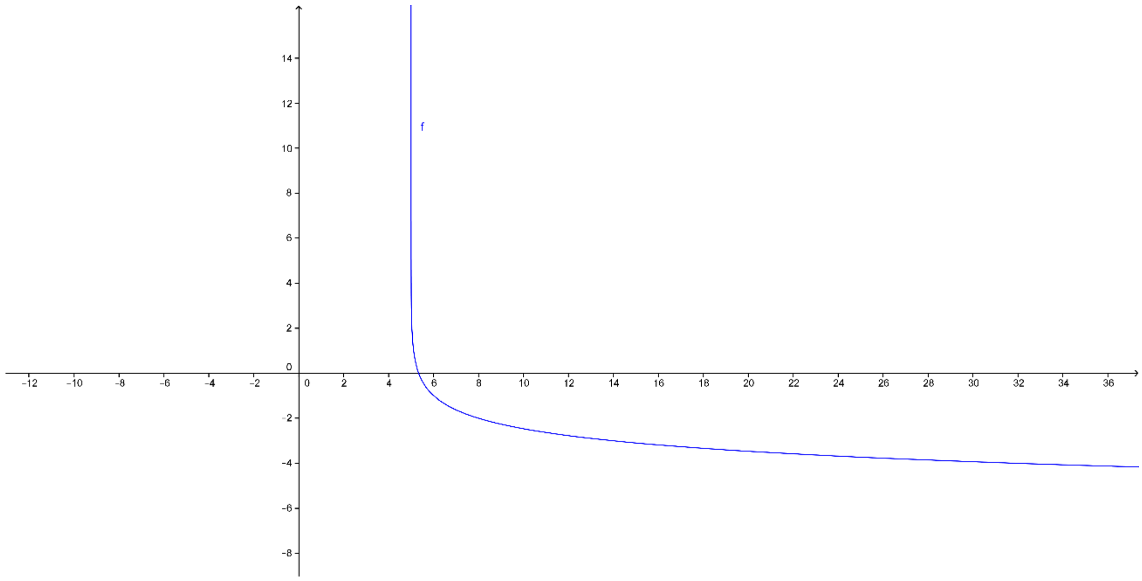
Graf:



Úloha 8:

$Df: x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5 \rightarrow Df \in (5; \infty)$

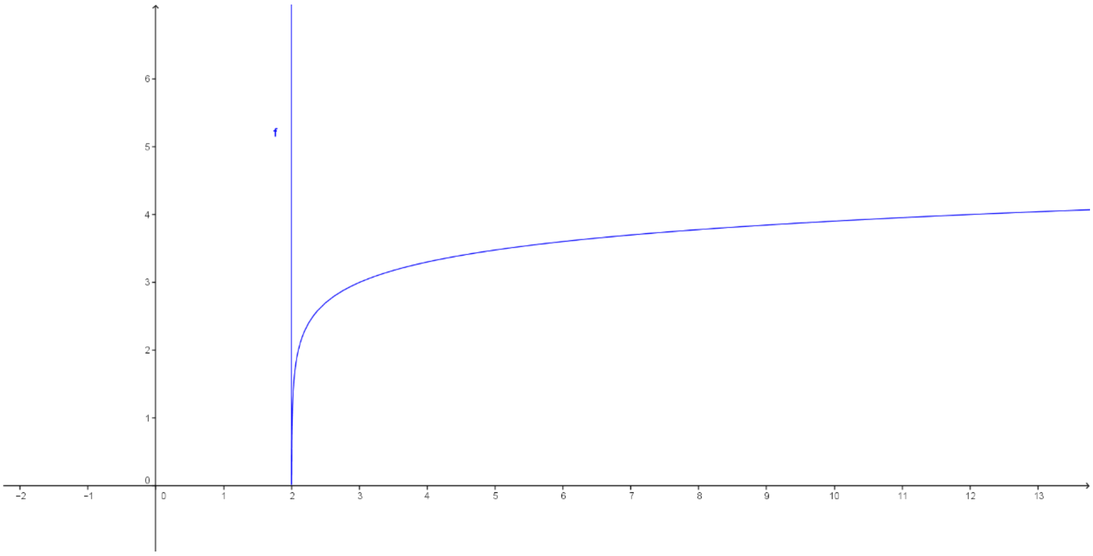
Graf:



Úloha 9:

$Df: x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \rightarrow Df \in (2; \infty)$

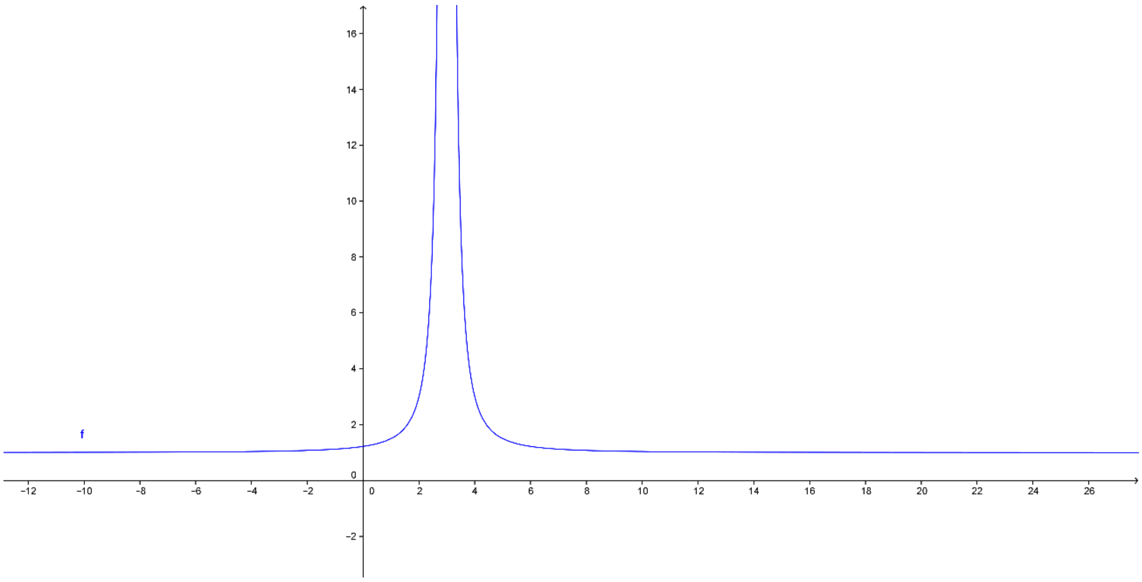
Graf:



Úloha 10:

$Df \in R - \{3\}$

Graf:



6.3 ŘEŠENÍ TESTU 3

Úloha 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-5)^6\cdot(3x-4)^{20}}{(6x+100)^{26}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x-5}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{3x-4}{x}\right)^{20}}{\left(\frac{6x+100}{x}\right)^{26}}=\frac{2^6\cdot 3^{20}}{6^{26}}=\frac{1}{2^{20}\cdot 3^6}$$

Úloha 2:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x^2-16}-2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x^2-16}-2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{2x^2-16}+2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-16}+2\cdot\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-16-4x}{\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-16}+2\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot(2x^2-16-4x)}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{2x^2-16}+2\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{2x^2-16}+2\sqrt{x}}=\frac{48}{8}=6$$

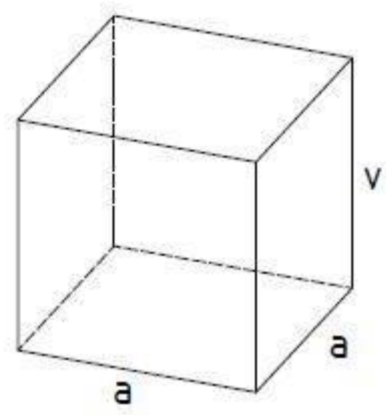
Úloha 3:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{0-\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{0-\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Úloha 4:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot x)}{1}=\pi\cdot\cos 2\pi=\pi\cdot 1=\pi$$

Úloha 5:



Podmínky: $a; v > 0$

$a \in (0; \infty)$

$v \in (0; \infty)$

$V = a^2 \cdot v$

$32 = a^2 \cdot v \rightarrow v = \frac{32}{a^2}$

$S = a^2 + 4 \cdot a \cdot v$

$S = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{32}{a^2} = a^2 + \frac{128}{a} = a^2 + 128 \cdot a^{-1}$

$S'(a) = 2a - 128 \cdot a^{-2} = 2a - \frac{128}{a^2}$

$S'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - \frac{128}{a^2} = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = 4\ cm$

$S''(a) = 2 + \frac{256}{a^3}$

$S''(4) = 6 > 0 \rightarrow$ globální minimum

$V = 32\ cm^2$

$32 = a^2 \cdot v$

$32 = 16 \cdot v$

$v = 2\ cm$

Rozměry otevřeného bazénu jsou $a = 4\ m$ a $v = 2\ m$.

Úloha 6:

a) $Df: 1 - 2x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$Df \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Funkce nemá symetrický Df, proto není sudá ani lichá.

$P_x: y = 0 \rightarrow \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = 0 \ \rightarrow 1 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow P_x\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$

$P_y: x = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{1}\right)^4 = 1 \rightarrow P_y[0; 1]$

b) $f'(x) = 4 \cdot \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^3 \cdot \frac{2\cdot(1-2x)-(1+2x)\cdot(-2)}{(1-2x)^2} = 4 \cdot \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^3 \cdot \frac{4}{(1-2x)^2} = \frac{16\cdot(1+2x)^3}{(1-2x)^5}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{16\cdot(1+2x)^3}{(1-2x)^5} 0 \Leftrightarrow (1 + 2x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Pro $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle: f'(x) < 0$ klesající

Pro $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle:\ f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $\left(\frac{1}{2}; \infty\right): f'(x) < 0$ klesající

Rostoucí na $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$.

Klesající na $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Lokální minimum $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, lokální maximum neexistuje.

Globální minimum $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

c) $f''(x) = \frac{16\cdot3\cdot(1+2x)^2\cdot2\cdot(1-2x)^5-16\cdot(1+2x)^3\cdot5\cdot(1-2x)^4\cdot(-2)}{(1-2x)^{10}} = \frac{(1+2x)^2\cdot(256+128x)}{(1-2x)^6}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+2x)^2\cdot(256+128x)}{(1-2x)^6} 0 \Leftrightarrow (1+2x)^2 = 0 \ \lor (256+128x) = 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = -\frac{1}{2}$

Pro $(-\infty; -2\rangle$: $f''(x) < 0$ konkávní

Pro$\left(-2; -\frac{1}{2}\right\rangle$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Konvexní na $\left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Konkávní na $(-\infty; -2\rangle$. Inflexní bod $\left[-2; \frac{81}{625}\right]$.

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)}\right)^4 = (-1)^4 = 1$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x\cdot\left(\frac{1}{x}-2\right)}\right)^4 = (-1)^4 = 1$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \left(\frac{1+1}{0+}\right)^4 = \infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4 = \left(\frac{1+1}{0-}\right)^4 = \infty$

Asymptoty bez směrnice: $x = \frac{1}{2}$.

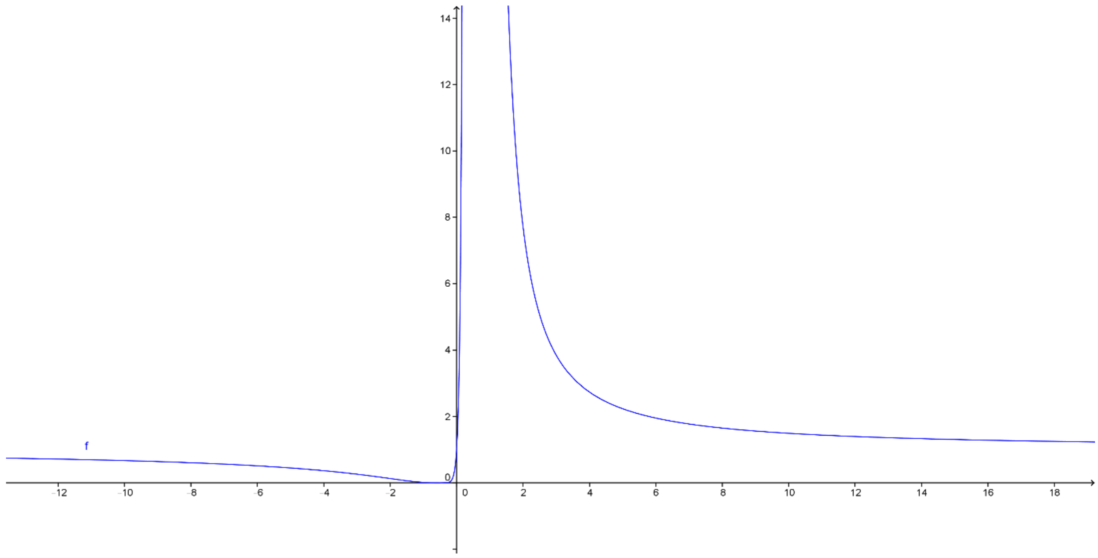
Asymptoty se směrnicí: $y = k\cdot x + q$

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^4}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{16x^4+32x^3+24x^2+8x+1}{16x^5-32x^4+24x^3-8x^2+x} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5\cdot\left(\frac{16}{x}+\frac{32}{x^2}+\frac{24}{x^3}+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\cdot\left(16-\frac{32}{x}+\frac{24}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)} = 0$

$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - k\cdot x = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \to y = 1.$

e)



Úloha 7:

$Df \in R$

$x = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-y}$

$\log_{\frac{1}{8}} x = 1 - y$

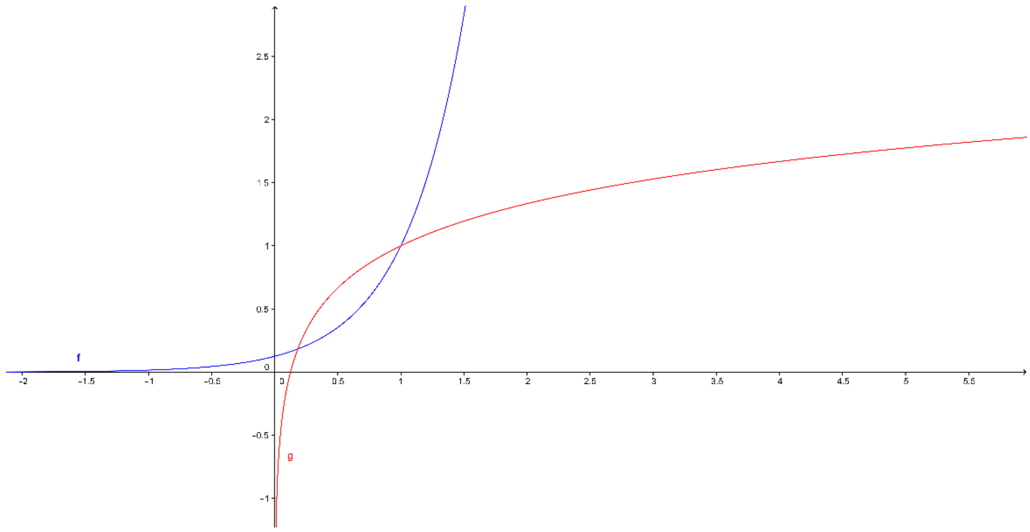
$\log_{\frac{1}{8}}(x) - 1 = -y$

$1 - \log_{\frac{1}{8}}(x) = y$

$g(x) = 1 + \log_8 x$

$Dg \in (0; \infty)$

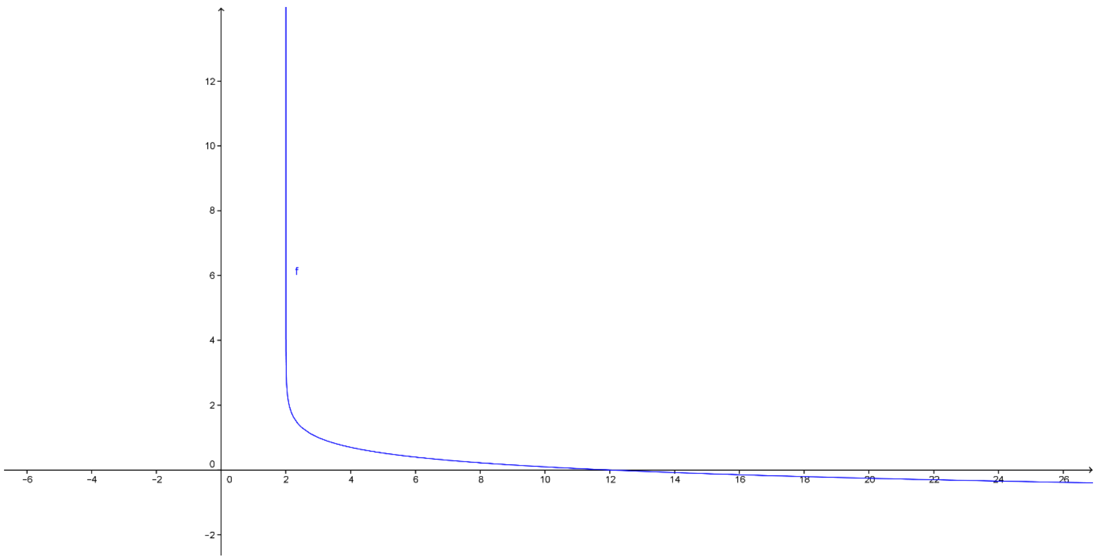
Graf:



Úloha 8:

$Df: x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \rightarrow Df \in (2; \infty)$

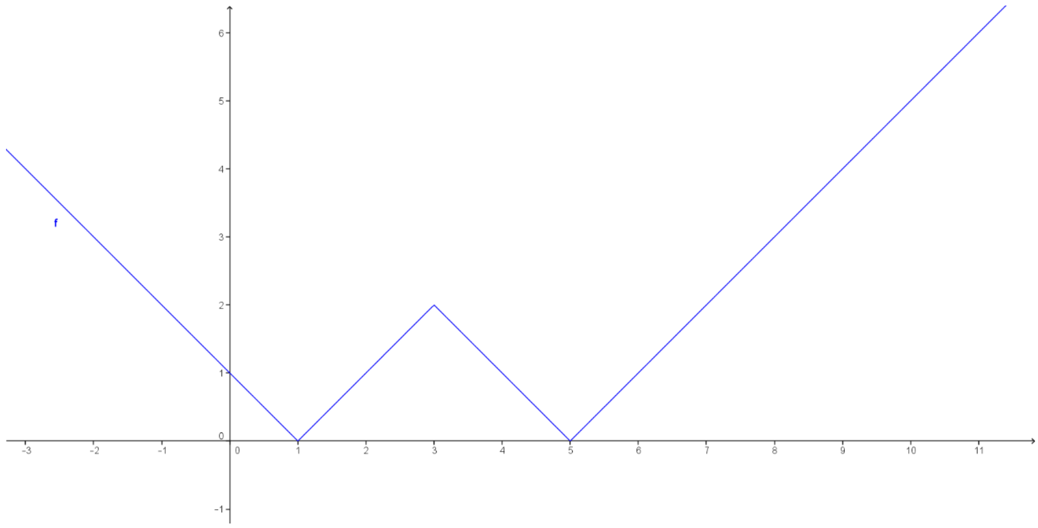
Graf:



Úloha 9:

$Df \in (2; \infty)$

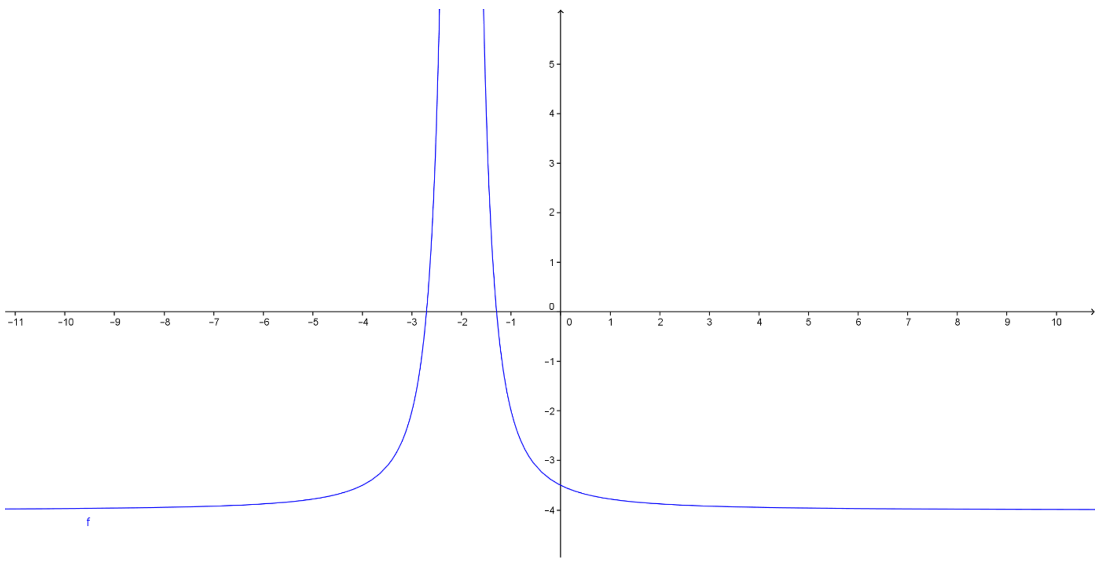
Graf:



Úloha 10:

$Df \in -\{-2\}$

Graf:



6.4 ŘEŠENÍ TESTU 4

Úloha 1:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x+2)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Úloha 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=1+1=2$$

Úloha 3:

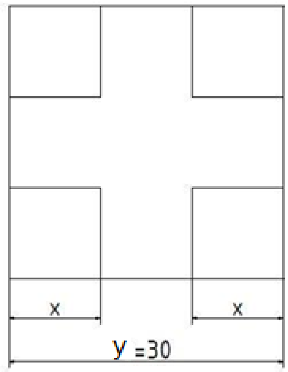
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x+\sin x}=\frac{1\cdot 2}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Úloha 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{0+\sin x}{1\cdot\sin 4x+x\cdot\cos 4x\cdot 4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x+4x\cdot\cos 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cdot\cos 4x+4\cdot\cos 4x+4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4}=-\frac{1}{8}$$

Úloha 5:



Podmínky: $x \in \langle 0; 30 \rangle$

$V = a \cdot b \cdot c$

$c = x$

$a = b = (30 - 2x)$

$V = (30 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x = (900 - 60x - 60x + 4x^2) \cdot x$
$= 900x - 120x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$

$S'(a) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Leftrightarrow (x - 5) \cdot (x - 15) = 0$

$x_1 = 5\ cm;\ x_2 = 15\ cm$

$V''(x) = 24x - 240$

$V''(5) = -120 < 0 \rightarrow$ globální maximum

$V''(15) = 120 > 0 \rightarrow$ globální minimum

Délka strany odstřiženého čtverečku je $x = 5\ cm$.

Úloha 6:

a) $Df \in R - \{0\}$

$f(-x) = \frac{2-x^4}{x^2} = f(x) \rightarrow$ Funkce je sudá.

P_x: $y = 0 \rightarrow 2 - x^4 = 0 \rightarrow x^4 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{2} \rightarrow P_{x1}\left[-\sqrt[4]{2}; 0\right]$; $P_{x2}\left[\sqrt[4]{2}; 0\right]$

P_y neexistuje.

b) $f'(x) = \frac{0-4x^3 \cdot x^2 - 2x \cdot (2-x^4)}{x^4} = \frac{-4x^5-4x+2x^5}{x^4} = \frac{-2x^5-4x}{x^4} = \frac{-2\cdot(x^4+2)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\cdot(x^4+2)}{x^3} 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x^4 + 2) = 0 \rightarrow$ NŘ

Pro $(-\infty; 0)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(0; \infty)$: $f'(x) < 0$ klesající

Rostoucí na $(-\infty; 0)$.

Klesající na $(0; \infty)$.

Lokální extrémy neexistují.

Globální extrémy neexistují.

c) $f''(x) = \frac{-4\cdot 2x^3 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (-2x^4-4)}{x^6} = \frac{-8x^6+6x^6+12x^2}{x^6} = \frac{-2x^6+12x^2}{x^6} = \frac{-2x^4+12}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^4 + 12}{x^4} 0 \Leftrightarrow -2x^4 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 6$

$x = \pm\sqrt[4]{6}$

Pro $(-\infty; -\sqrt[4]{6}\rangle$: $f''(x) < 0$ konkávní

Pro $\left(-\sqrt[4]{6}; 0\right)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $\left(0; \sqrt[4]{6}\right\rangle$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $\left(\sqrt[4]{6}; \infty\right)$: $f''(x) < 0$ konkávní

Konvexní na $\left(-\sqrt[4]{6}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt[4]{6}\right\rangle$.

Konkávní na $(-\infty; -\sqrt[4]{6}\rangle \cup \left(\sqrt[4]{6}; \infty\right)$.

Inflexní body $\left[-\sqrt[4]{6}; -\frac{17}{3}\right]$; $\left[\sqrt[4]{6}; -\frac{17}{3}\right]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{2}{x^2}-x^2\right)}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{2}{x^2}-x^2\right)}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0+} \frac{2-x^4}{x^2} = \frac{2-0}{0+} = \infty$

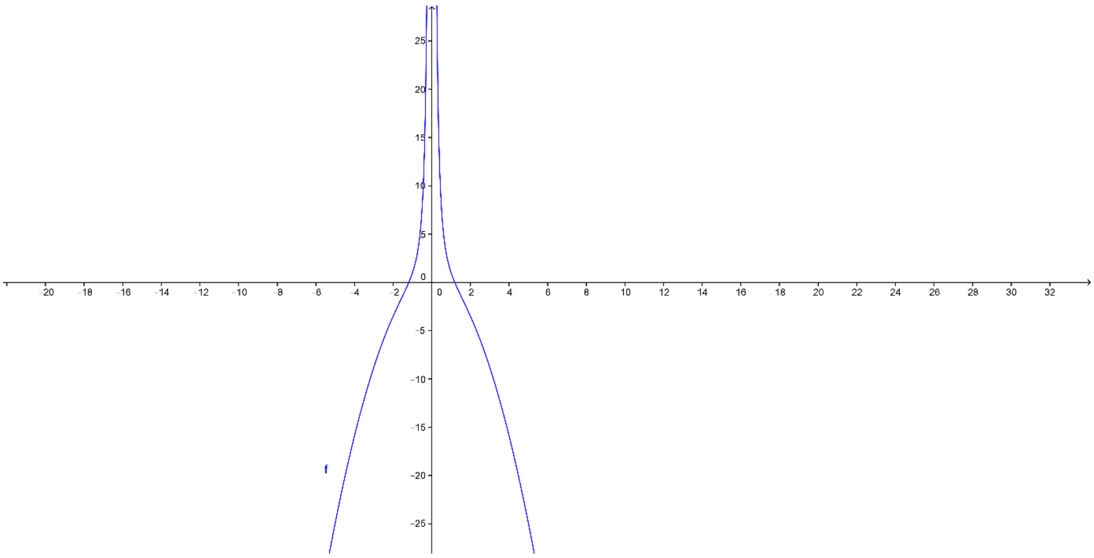
$\lim\limits_{x\to0-} \frac{2-x^4}{x^2} = \frac{2-0}{0+} = \infty$

Asymptoty bez směrnice: $x = 0$.

Asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(\frac{2}{x^3}-x\right)}{x^3} = -\infty \to$ neexistuje

e)



Úloha 7:

$Df \in R$

$x = (y+3)^3 - 8$

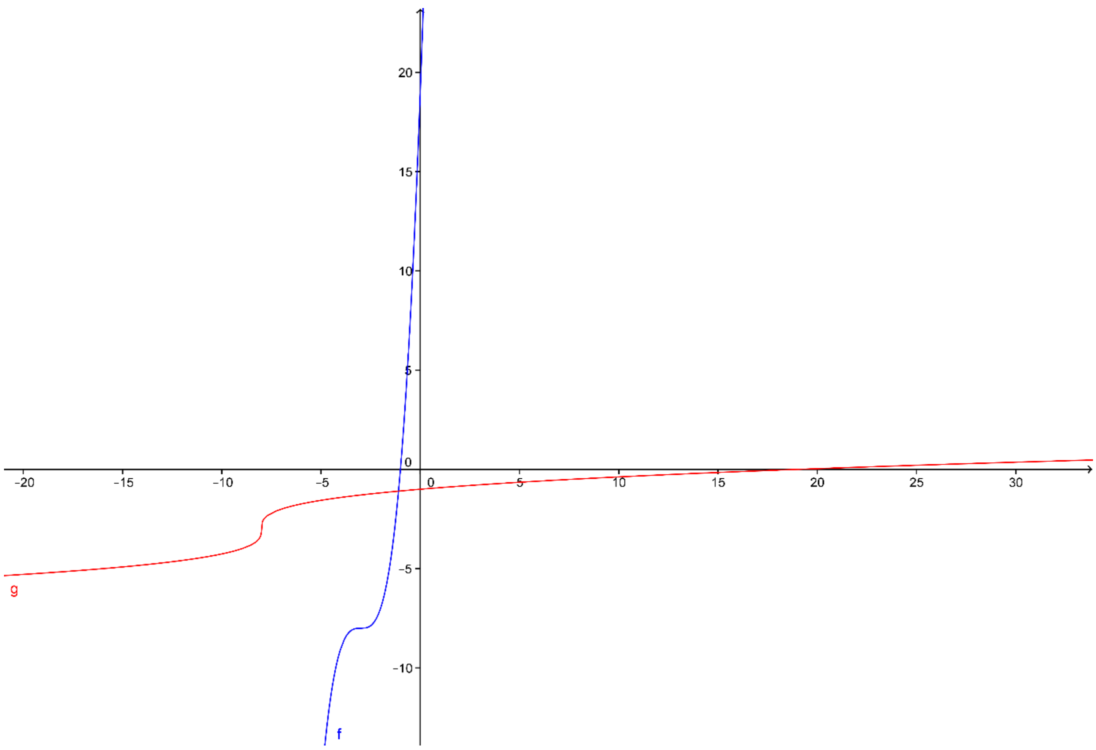
$x + 8 = (y+3)^3$

$\sqrt[3]{x+8} = y + 3$

$g(x) = \sqrt[3]{x+8} - 3$

$Dg \in R$

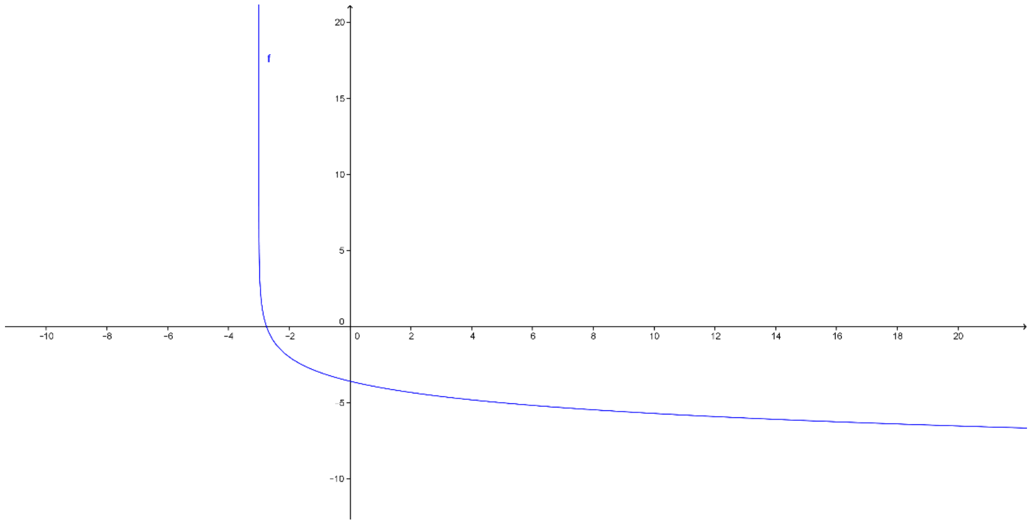
Graf:



Úloha 8:

$Df: x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \rightarrow Df \in (-3; \infty)$

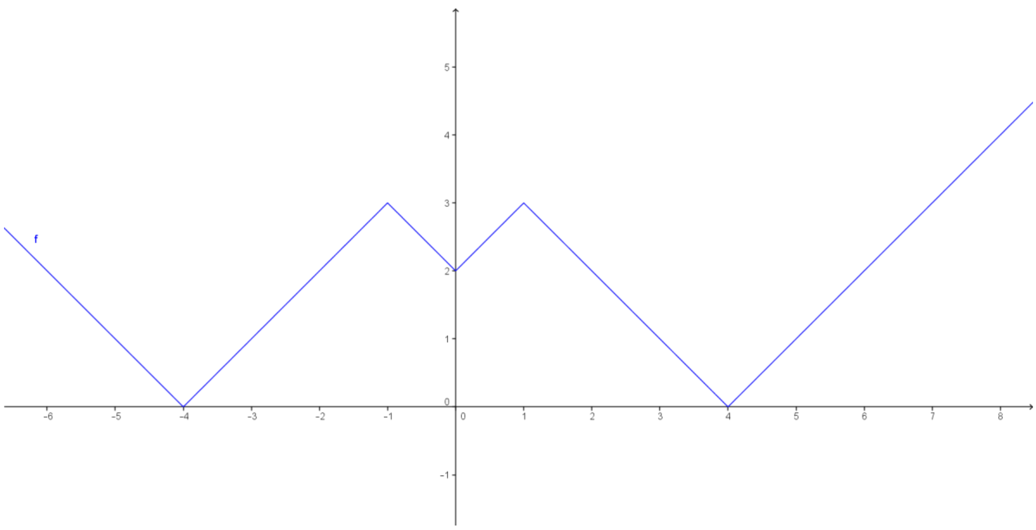
Graf:



Úloha 9:

$Df \in R$

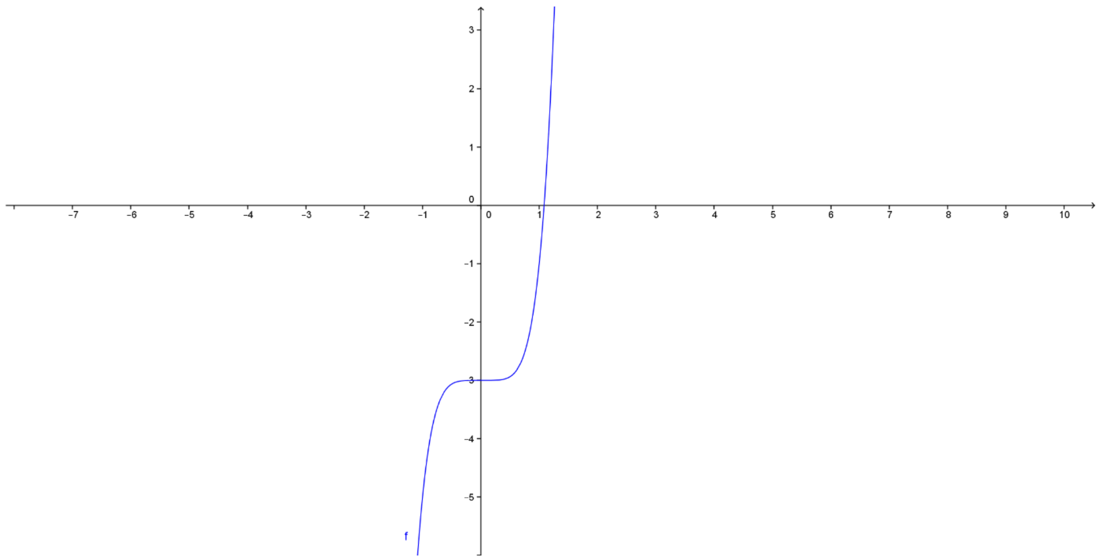
Graf:



Úloha 10:

$Df \in R$

Graf:



6.5 ŘEŠENÍ TESTU 5

Úloha 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-5)^6\cdot(3x-9)^{25}}{(7x+100)^{31}}=\frac{\left(\frac{2x-5}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{3x-9}{x}\right)^{25}}{\left(\frac{7x+100}{x}\right)^{31}}=\frac{2^6\cdot 3^{25}}{7^{31}}$$

Úloha 2:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+8x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+8x+1}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+8x+1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+8x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2-8x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+8x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+8x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-6-\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{-6}{2}=-3$$

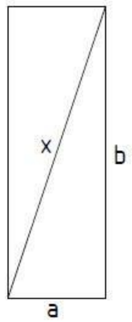
Úloha 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}=\frac{1}{4}$$

Úloha 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3\cos 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{0+3\sin 3x\cdot 3}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cdot\sin 3x}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Úloha 5:



Podmínky: $a; b; x > 0$

$a \in \langle 0; 400 \rangle$

$b \in \langle 0; 400 \rangle$

$o = 400 = 2a + 2b$

$400 - 2a = 2b \rightarrow \ b = 200 - a$

$x^2 = a^2 + b^2$

$x^2 = a^2 + (200 - a)^2 = a^2 + 40\,000 - 400a + a^2 = 2a^2 - 400a + 40\,000$

$x = \sqrt{2a^2 - 400a + 40\,000}$

$x'(a) = \frac{1}{2} \cdot \left(2a^2 - 400a + 40\,000\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4a - 400) = \frac{4a - 400}{2 \cdot \sqrt{2a^2 - 400a + 40\,000}} =$

$= \frac{2a - 200}{\sqrt{2a^2 - 400a + 40\,000}}$

$x'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a - 200}{\sqrt{2a^2 - 400a + 40\,000}} = 0 \Leftrightarrow 2a - 200 = 0$

$a = 100\ cm$

$x''(a) = \frac{2}{\sqrt{2a^2 - 400a + 40\,000}} - \frac{4a - 400}{2 \cdot \sqrt{(2a^2 - 400a + 40\,000)^3}}$

$x''(100) = \frac{2}{\sqrt{20\,000}} > 0 \rightarrow$ globální minimum

$400 = 2a + 2b \rightarrow 400 = 200 + 2b \rightarrow b = 100\ cm$

Obdélník musí mít rozměry $a = 100\ cm$ a $b = 100\ cm$. Je to tedy čtverec.

Úloha 6:

a) $Df \in R - \{1\}$

Funkce nemá symetrický Df, proto není sudá ani lichá.

$P_x: y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow P_x[0; 0]$

$P_y: x = 0 \rightarrow \frac{0}{1} = 0 \rightarrow P_y[0; 0]$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2 \cdot (x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-3) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Pro $(-\infty; 0\rangle$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(0; 1)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Pro $(1; 3\rangle$: $f'(x) < 0$ klesající

Pro $(3; \infty)$: $f'(x) > 0$ rostoucí

Rostoucí na $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$.

Klesající na $(1; 3\rangle$.

Lokální minimum $[3; 6{,}75]$.

Globální extrémy neexistují.

c) $f''(x) = \frac{(3x^2-6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3-3x^2) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{(x-1)^4} 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Pro $(-\infty; 0\rangle$: $f''(x) < 0$ konkávní

Pro $(0; 1)$: $f''(x) > 0$ konvexní

Pro $(1; \infty)$: $f''(x) < 0$ konvexní

Konvexní na $(0; 1) \cup (1; \infty)$.

Konkávní na $(-\infty; 0\rangle$.

Inflexní bod $[0; 0]$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\infty}{1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty$

$\lim\limits_{x\to1-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = \infty$

Asymptoty bez směrnice: $x = 1$.

Asymptoty se směrnicí: $y = k \cdot x + q$

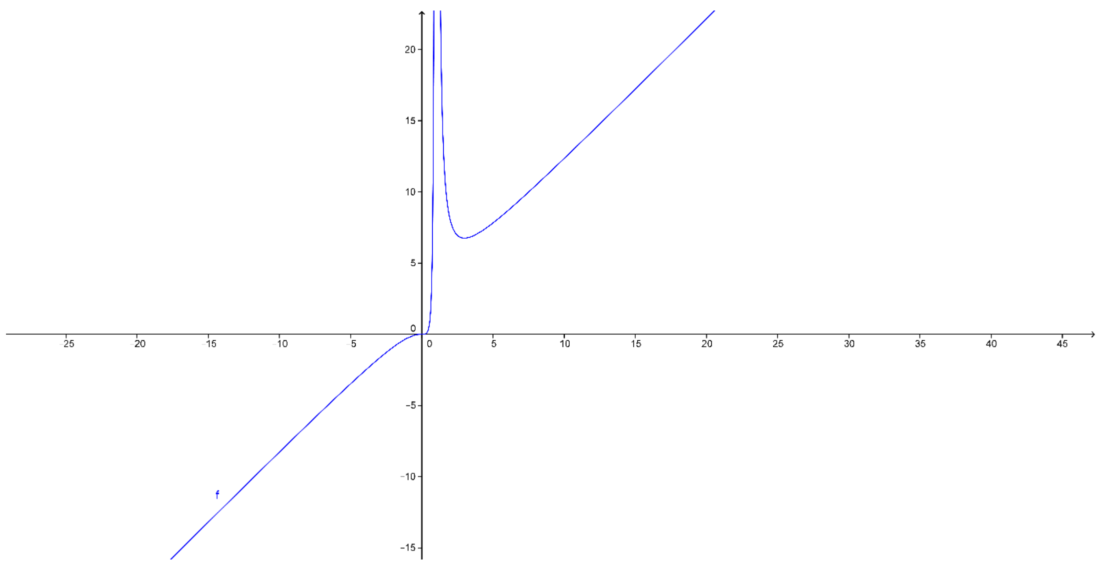
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - k \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

$y = x + 2$

e)



Úloha 7:

$Df \in R$

$x = 1 - 2 \cdot (e^y - 2)$

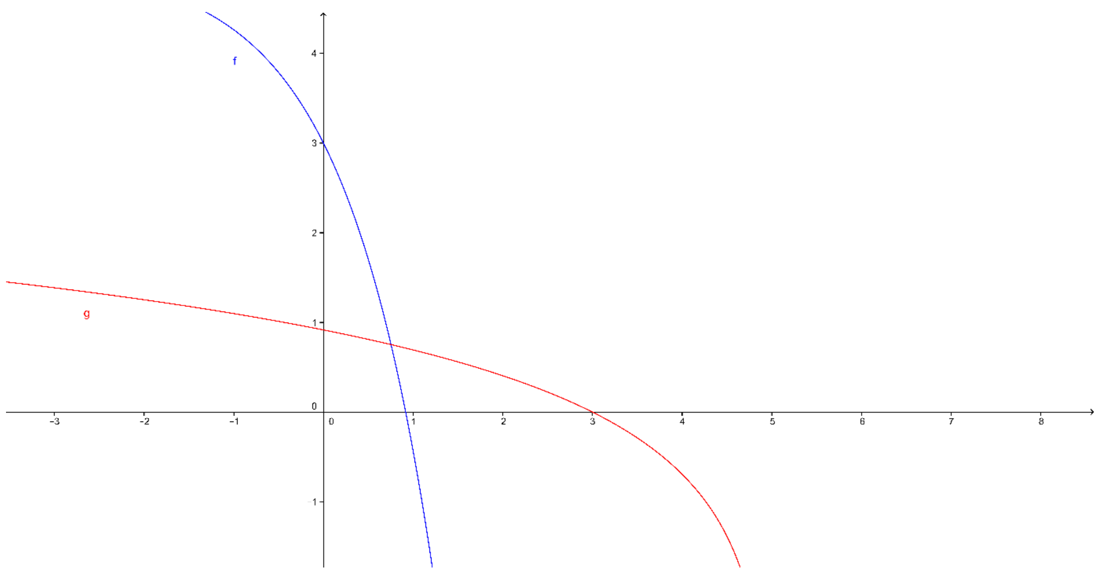
$x - 1 = -2 \cdot (e^y - 2)$

$\frac{x-1}{-2} = e^y - 2$

$g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2} + 2\right)$

$Dg: \frac{1-x}{2} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{2} > 0 \Leftrightarrow 5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \rightarrow Dg \in (-\infty; 5)$

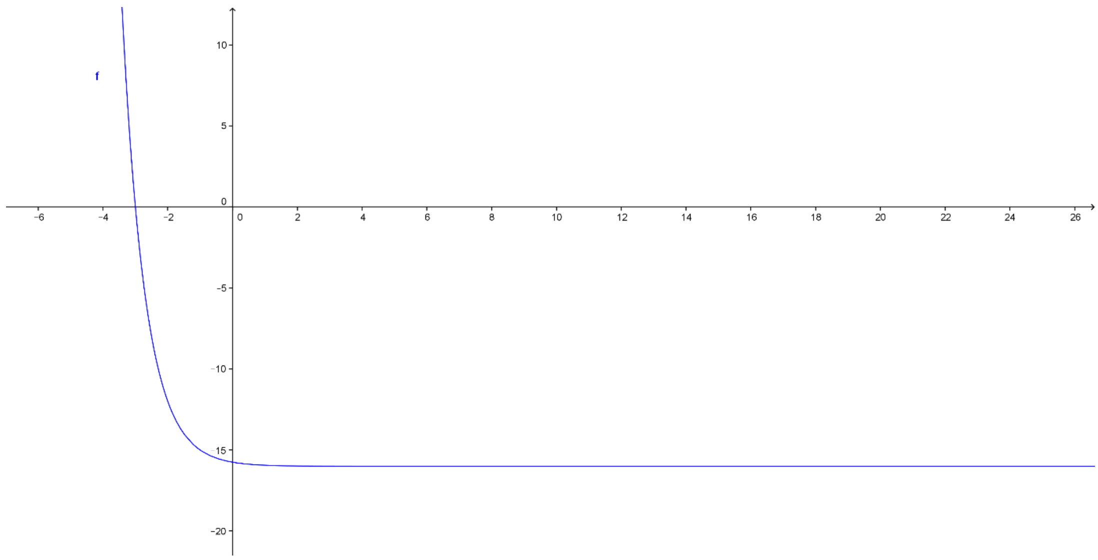
Graf:



Úloha 8:

$Df \in R$

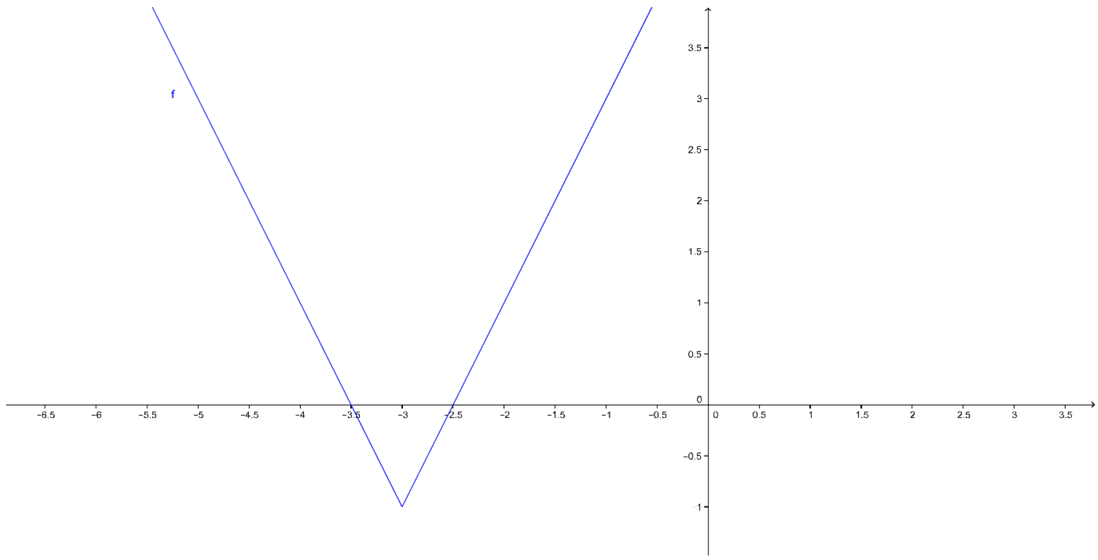
Graf:



Úloha 9:

$Df \in R$

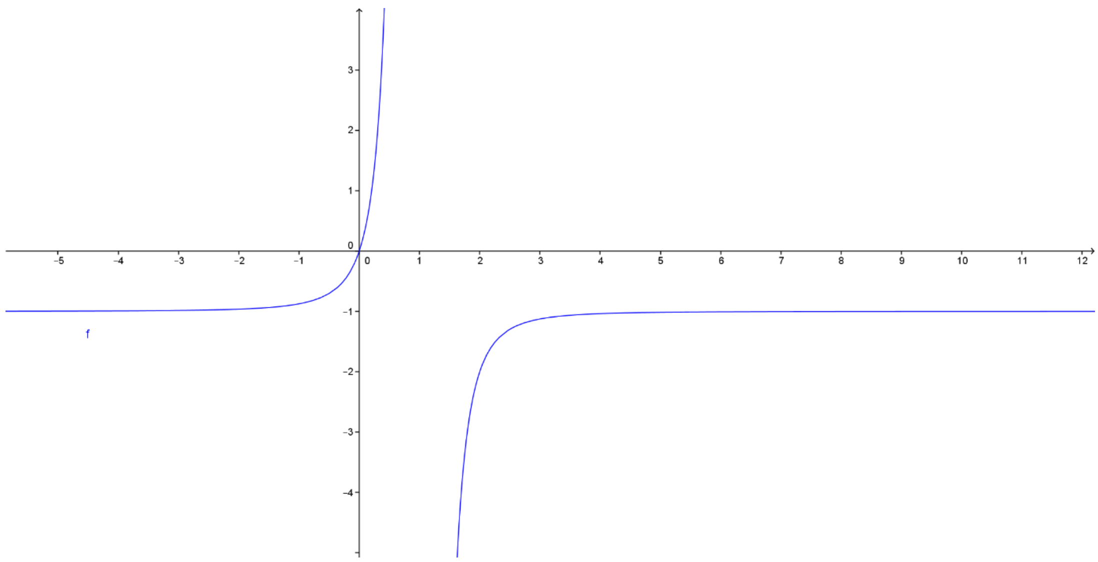
Graf:



Úloha 10:

$Df \in R - \{1\}$

Graf:



7. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo didakticky správně sestavit sady a testy z matematické analýzy z oblasti funkce jedné reálné proměnné. S předpokladem, že tyto testy budou řešit studenti 1. ročníku bakalářského studia oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání PF JČU v předmětu MA1, bylo nutné v rámci tohoto úkolu přihlédnout k osnovám daného předmětu a těmi se v průběhu sestavování testů řídit. Nezbytným krokem ke správné obsahové náplni testů byl tedy především důkladný rozbor obsahu i rozsahu učiva předmětu MA1.

V další části práce jsem se zabývala testováním a didaktickými testy z teoretického hlediska.

Následující část práce nabízí 6 sad úloh. Každá sada obsahuje 20 až 40 příkladů, přičemž příklady v jednotlivých sadách mají srovnatelně obtížná řešení. Příklady ze všech sad byly nahrány do výukového softwaru Moodle, pomocí něhož lze náhodně generovat konkrétní testy tak, že z každé sady bude vybrán určitý počet příkladů. První tři sady obsahují v téže kapitole i výsledky. Výsledky zbývajících sad příkladů jsou uvedeny v následující kapitole, a to pro jejich složitější zápis a lepší přehlednost práce.

Poslední část práce nabízí 5 náhodně vygenerovaných testů pomocí softwaru Moodle jako ukázku toho, k čemu bude práce do budoucna sloužit. Kromě zadání testů tato část obsahuje i jejich podrobné řešení a hodnocení.

Vedle písemné zkoušky může práce sloužit také jako pomůcka k individuální přípravě na tuto zkoušku.

8. LITERATURA A ZDROJE

[1] AKSAMIT, Pavel a František MRÁZ. *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium.* 2., opr. a rozš. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 1995. 209 s. ISBN 80-7040-150-8.

[2] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999. 631 s. ISBN 80-719-6140-X.

[3] FROLÍKOVÁ, Jiřina. *Matematická analýza pro učitelské studium*, I. semestr, SPN Praha, 1984

[4] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. 210 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN978-80-7196-363-9.

[5] JIRÁSEK, František, Zdeněk TICHÝ, Eduard KRIEGELSTEIN. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné: příručka pro vysoké školy*. 4. vyd. Praha: SNTL, 1990. 817 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-030-0239-7.

[6] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.

[7] PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Eva ZMEŠKALOVÁ. *Algebraické funkce*. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2005, 167 s., ISBN 80-7040-825-1.

[8] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Funkce*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. 168 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-357-8.

[9] PETRÁŠKOVÁ, Vladimíra a Hana ŠTĚPÁNKOVÁ. *Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2014.

[10] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999, 91 s. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-85931-68-0.

[11] RYŠAVÝ, Svatoslav. *Testy z matematické analýzy pro II. semestr*. České Budějovice:1999.

[12] HRABAL, V., LUSTIGOVÁ, Z., VALENTOVÁ, L. *Testy a testování ve škole*. Praha: SVI PedF UK, 1992.

[13] PŮLPÁN, Zdeněk. *Základy sestavování a klasifikace vyhodnocování didaktických testů*. Hradec Králové: Kotva, 1991, 148 s. ISBN 8090025447.

[14] PRŮCHA, Jan (ed.). *Pedagogická encyklopedie*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2009, 935 s. ISBN 978-80-7367-546-2.

[15] PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003, 322 s. ISBN 80-7178-772-8.

[16] SEDLÁČKOVÁ, J. (1993): *Diagnostické metody ve vyučování matematice,* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci.

[17] https://wstag.jcu.cz/portal/