Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Diplomová práce

Magické čtverce

Vypracovala: Bc. Lucie Suchá
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Magické čtverce jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Poděkování

Chtěla bych tímto poděkovat prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který vedl diplomovou práci. Děkuji za jeho cenné rady a ochotu spolupracovat na mé diplomové práci. Také bych ráda poděkovala rodině a příteli, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Anotace práce

Tato diplomová práce se zabývá základními vlastnostmi magických čtverců a analyzuje je z hlediska použitelnosti při výuce na základní škole. Magické čtverce jsou známy již několik stovek let a od té doby prošly mnoha modifikacemi, od nichž byly odvozeny další druhy. Proto je úvod práce věnován jejich historii. Další kapitola pojednává o konstrukci magických čtverců. Následující kapitoly se zabývají podobným hrám jako Sudoku, Kakuro a latinské čtverce. Závěr práce je věnován využitelnosti magických čtverců při výuce matematiky. Na procvičení dané problematiky jsou vytvořeny pracovní listy, které jsou rozděleny pro jednotlivé třídy svou obtížností.

Annotation

This diploma thesis deals with basic features of magic squares and analyses these features with regard to usability during the teaching at elementary schools. Magic squares are known for hundreds years and since then they have changed due to various modifications, from which other kinds were derived. The first part of the thesis is therefore dedicated to the history. Next chapter deals with the construction of magic squares. The following chapters study similar games as Sudoku, Kakuro and Latin squares. The final part of the thesis is dedicated to the usability of magic squares in teaching mathematics. To practice the given topic, the worksheets which are divided according to their difficulty, were created.

Obsah

1 Úvod

Magické čtverce, které jsou hlavním tématem této diplomové práce, jsou velmi staré druhy matematických rébusů. O magických čtvercích byly napsány spousty knih i článků v různých časopisech. Cílem této práce je studium základních vlastností a také historický pohled na magické čtverce. Dále využití magických čtverců v hodinách matematiky.

Celá druhá kapitola se bude zabývat samotnými magickými čtverci, které jsou sestaveny z přirozených čísel od 1 do n^2 tak, že jejich součet v každém řádku, sloupci i v obou hlavních diagonálách je konstantní. Tuto konstantu budeme nazývat magickou konstantou. Nejprve se budeme věnovat definicím magických čtverců a také dalšími druhy magických čtverců. Poté se podíváme blíže na historii magických čtverců, kde je nejznámější Lo Shu čtverec velikosti $3\ x\ 3$ a dále magický čtverec velikosti $4\ x\ 4$, který se nachází na obrazu Melancholia od Albrechta Dürera. Následovat bude podkapitola s konstrukcemi magických čtverců, kde se blíže podíváme na konstrukci pro n liché, n dělitelné 4 a n nedělitelné 4.

Ve třetí kapitole se podíváme na latinské čtverce, které jsou velmi podobné magickým čtvercům jen s tím rozdílem, že u latinských čtverců jsou čísla od 1 do n a neřeší se v nich žádný součet, tedy žádná konstanta.

V dalších kapitolách se budeme zabývat logickými rébusy, nejdříve to bude Sudoku a následovat bude Kakuro. Sudoku je spíše věcí logického myšlení než matematickou úlohou, jak se na první pohled zdá. Cílem je doplnit čísla do čtverce. Oblíbenost Sudoku můžeme vidět i v tom, že k jejímu luštění nepotřebujeme žádnou slovní zásobu ani žádné vědomosti. Sudoku není závislé ani na žádném jazyce a je stejné pro všechny státy světa. Obdobně je tu i u Kakura, jen s tím rozdílem, že není v populaci tak oblíbené. Kakuro je logická hra, která je podobná Sudoku a klasické křížovce.

Díky pracovním listům, které jsou uvedeny v poslední kapitole, se chci také věnovat rozvíjení zájmu žáků o matematiku. Využiji k tomu právě úlohy s magickými čtverci. Pracovní listy jsou sestaveny tak, aby se s nimi seznámili všichni žáci na základní škole. Mohou být využity v hodinách matematiky jako rozšiřující a aktivizační učivo nebo se s nimi mohou žáci seznámit v rámci zájmové matematiky v různých kroužcích a soutěžích.

U pracovních listů jsou nejprve uvedeny základní informace, kde se také můžeme dočíst, jaké klíčové kompetence jsou u žáků rozvíjeny. Poté následuje zadání pracovního listu a za ním si můžeme ověřit správnost našeho řešení pomocí výsledků, které jsou zde uvedeny.

2 Magické čtverce

2.1 Definice magických čtverců

Základní definice magických čtverců: Magický čtverec je uspořádání přirozených čísel $1, 2, \dots, n^2$ do čtvercové sítě $n\ x\ n$, přičemž každé z čísel se v ní vyskytuje právě jednou a součet čísel v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách dává stejný výsledek [2].

Z definice je patrné, že magický čtverec budou charakterizovat dva parametry. Prvním je jeho řád o velikosti n, který udává počet prvků v řádku, resp. počet řádků a sloupců. Druhým parametrem je jeho konstanta, která odpovídá onomu charakteristickému součtu prvků. Konstantu můžeme určit i pomocí vztahu $\frac{1}{2}n(n^2+1)$, pro $n \geq 1$. Platí také, že čtverec zůstane magickým čtvercem, pokud přičteme ke každému číslu ve čtverci nezáporné celé číslo. Stejně tak to platí také pro násobení každého čísla ve čtverci týmž číslem [18].

Pro příklad uvedeme i další platné definice magických čtverců. Magickým čtvercem řádu n rozumíme čtvercovou matici $M = (m_{ij})$ řádu n, která obsahuje pouze celá čísla a součet čísel v libovolném řádku, v libovolném sloupci i na obou úhlopříčkách je týž. Tento součet je vlastně stopa matice $\sum_i m_{ii}$, a proto jej budeme značit s. Pokud M má všechny prvky stejné, pak se nazývá konstantní magický čtverec [18].

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Obr. 1 Příklad magického čtverce

Normální (někdy též klasický) magický čtverec je magický čtverec, jehož členy jsou přirozená čísla od 1 do n^2[18].

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Obr. 2 Příklad normálního magického čtverce

Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách členy se stejným součtem. Obvykle se každé číslo smí vyskytovat v tabulce pouze jednou. Normální magický čtverec je magický čtverec, jehož členy jsou přirozená čísla od 1 do n^2[23].

Magický čtverec je tvořen mřížkou s různými čísly v buňkách. Tato čísla jsou zvolena tak, aby součet všech řádků, sloupců i diagonál představoval stejné číslo. Magický čtverec se stranou tvořenou třemi buňkami se nazývá čtverec třetího řádu a je složen z devíti buněk. Zpravidla obsahuje čísla od 1 do 9. Čtverec čtvrtého řádu obsahuje čísla od 1 do 16. Čím více buněk do mřížky přidáme, tím je vytvoření magického čtverce obtížnější. Počet možných magických čtverců se rychle zvětšuje. Magický čtverec druhého řádu neexistuje, magický čtverec třetího řádu už však má 880 možností, magický čtverec čtvrtého řádu má 275 305 224 možností. Magický čtverec pátého řádu může mít až 1,7745 x 10^{19} možností (což je číslo 17 745 000 000 000 000 000) [22].

2.2 Další druhy magických čtverců

Z magických čtverců vychází mnoho dalších různých konstrukcí. Některé jsou podobné magickým čtvercům, jiné se liší tvarem. Tyto obdobné útvary nemají sice tak bohatou historii jako magické čtverce, ale nabízejí mnoho dalších problémů a hříček. Další můžou mít jiné vlastnosti a na některé z nich se v této části podíváme.

Heteročtverec je čtvercová tabulka, jejíž členy jsou přirozená čísla od 1 do n^2. Součty členů v každém sloupci, v každé řádce i na obou diagonálách jsou po dvou různé (liší se) [23].

Antimagický čtverec je heteročtverec, pro který lze součty členů v každém sloupci, v každé řádce a na obou diagonálách seřadit do aritmetické posloupnosti s jednotkovým krokem. Čísla v antimagickém čtverci nemusí být rozdílná a nemusí jít o jejich souvislou řadu, kde by žádné nechybělo. Dodnes ale není známo, zda lze tyto čtverce zkonstruovat pro každé $n > 3$, ale co víme, že pro 1 a 2 žádný způsob neexistuje. Neexistenci antimagického čtverce 3. řádu se zatím podařilo dokázat jen s pomocí programu na rozbor možností [17], [23].

15	2	12	4
1	10	14	15
8	9	3	16
11	13	6	7

Obr. 3 Antimagický čtverec 4. řádu

Panmagický čtverec je magický čtverec, jehož konstantu získáme součtem čísel na všech jeho lomených diagonálách (Obr. 4). Panmagické čtverce, někdy též pandiagonální nebo ďábelské, nelze sestrojit pro libovolný řád. Nelze to pro $n = 3$ a $n = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}$, ale ukázky čtverce pátého řádu můžeme vidět na Obr. 5 [2].

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

5	4	3	2	1
4	3	2	1	5
3	2	1	5	4
2	1	5	4	3
1	5	4	3	2

Obr. 4 Ukázka lomených diagonál

18	22	10	14	1
9	11	3	17	25
2	20	24	6	13
21	8	12	5	19
15	14	16	23	7

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Obr. 5 Panmagické čtverce 5. řádu

Rozdíl v existenci semimagického čtverce oproti panmagickému čtverci je takový, že součet na jedné či obou hlavních diagonálách magickou konstantu vůbec nedává.

Za fascinující bereme následující čtverce, které mají v sobě skrytou souměrnost. Magický čtverec řádu n, jehož libovolné dva prvky umístěné souměrně podle jeho středu dávají součet $n^2 + 1$, nazýváme asociované [21].

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Obr. 6 Asociovaný čtverec

Koncentrické čtverce zůstanou magickými čtverci, i když budeme odstraňovat vnější obvodové vrstvy. Podobnou vlastnost, tj. zachování magičnosti i po provedení nějaké operace, mají čtverce bimagické, resp. trimagické, u nichž druhé, resp. třetí mocniny jednotlivých prvků tvoří magický čtverec [21].

Dále můžeme zmínit magické čtverce, které jsou utvořeny pouze z prvočísel. Na Obr. 7 můžeme vidět takto utvořený magický čtverec, který je typu $4 x 4$, ale není v něm uvedeno 16 po sobě jdoucích prvočísel. Nejmenší čtverec, který obsahuje po sobě jdoucí prvočísla, je typu $3 x 3$. O tom, že jeho nalezení nebylo zrovna jednoduché, se přesvědčíme na Obr. 8. Tento čtverec objevil v roce 1988 Harry Nelson, který takových čtverců 3. řádu sestrojil celkem 20 [2].

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

Obr. 7 Magický čtverec z prvočísel [2]

1480028159	1480028153	1880028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

Obr. 8 Magický čtverec utvořený z devíti po sobě jdoucích čísel [2]

Když zůstaneme ještě u magických čtverců, které jsou tvořeny z prvočísel, nemůže nám uniknout čtverec, který je tvořený prvními n prvočísly. Tento čtverec v roce 1913 dokázal J. N. Muncey. Pokud mezi prvočísla zařadíme číslo 1, tak nejmenší takový čtverec je typu $12\ x\ 12$ a můžeme ho vidět na Obr. 9 [21].

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	291
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

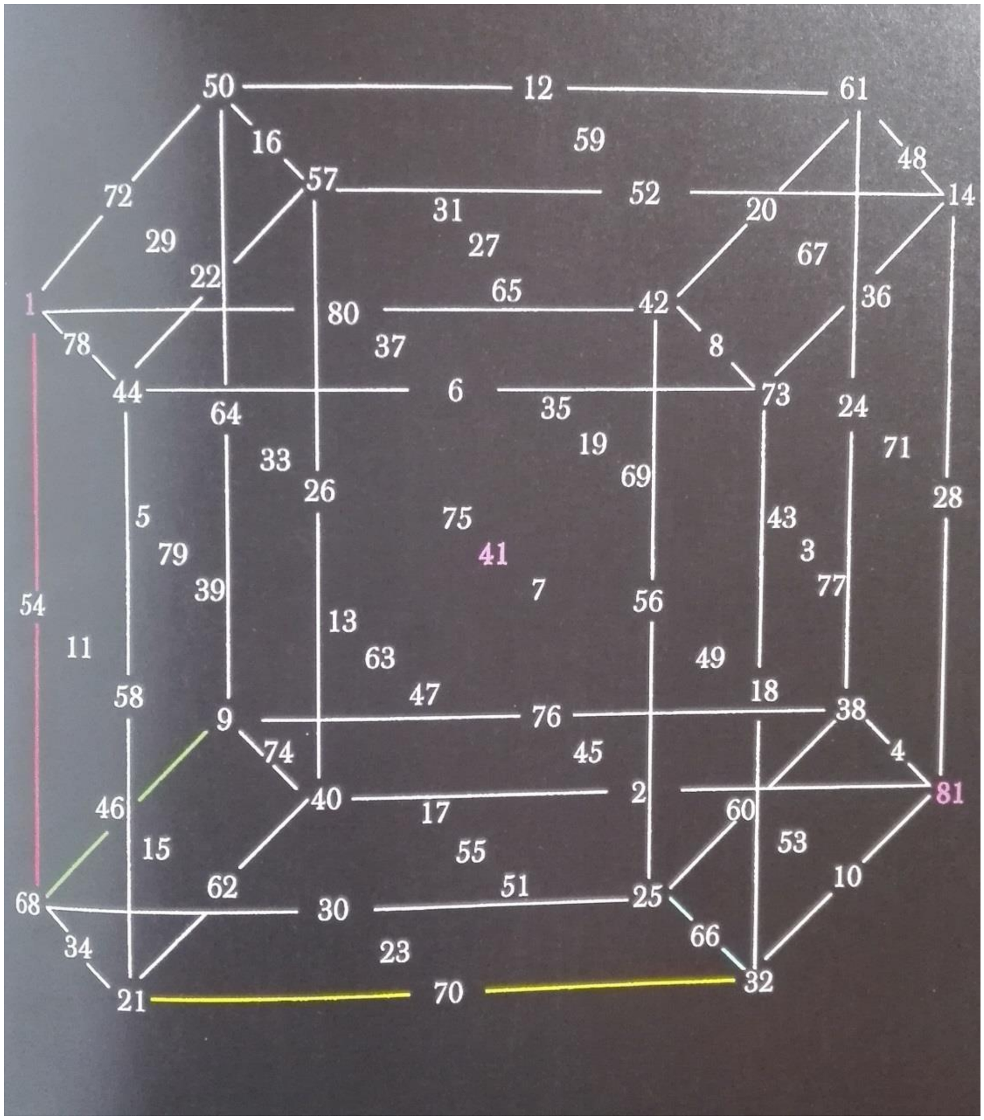
Obr. 9 Magický čtverec sestavený z prvních 144 prvočísel [2]

Můžeme také zmínit Franklinův magický čtverec, který je velikosti $8\ x\ 8$ a je plný skvělých symetrií a předpokládá se, že o některých zřejmě ani autor nevěděl. Součet každého jeho řádu a každého sloupce se rovná 260. Každá z obou polovin všech řádků a sloupců je polovina z 260. Dále součet 260 dává každý úhlopříčně lomený řádek, jeho příklady můžeme vidět na šedě zbarvených polích na Obr. 10. Příkladem rozpojeného lomeného řádku jsou černě orámovaná pole $(14 + 61 + 64 + 15 + 18 + 33 + 36 + 19)$, která také dávají součet 260. Další symetrii můžeme nalézt tak, že vezmeme čtyři rohy a čtyři čísla uprostřed a opět je jejich součet roven číslu 260. Součet čísel jakéhokoliv čtverečku $2\ x\ 2$ je 130 a součet kterýchkoli čtyř čísel stejně vzdálených od středového čtverce se také rovná číslu 130. Jediná symetrie v tomto čtverci chybí, hlavní úhlopříčky nedávají součet 260, takže Franklinův čtverec podle obvyklé definice za čistý magický čtverec označit nemůžeme. Jedna úhlopříčka dává součet 228 a druhá úhlopříčka součet 292, součet úhlopříček je 520, což můžeme brát také za další symetrii [19].

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Obr. 10 Franklinův magický čtverec [19]

V magickém teseraktu (neboli čtyřrozměrné krychli) jsou čísla od 1 do n^4 uspořádána tak, aby součet všech n^3 řádků, n^3 sloupců, n^3 sloupů, n^3 trojrozměrných stěn a osmi hlavních kvadragonál (procházejí středem a spojují protější rohy) byl konstantní veličinou $S = \frac{n(1+n^4)}{2}$, kde n je řád teseraktu. Celkem existuje 22 724 magických teseraktů 3. řádu. Termín dokonalý magický teserakt znamená, že magický součet se neobjevuje jen u řádků, sloupců, sloupů, trojrozměrných stěn a kvadragonál, ale i u diagonál a triagonál (prostorové diagonály krychlí teseraktu). K vytvoření dokonalého magického teseraktu je zapotřebí, aby dokonalé byly i všechny krychle a všechny čtverce (tzn. byly panmagické). Kanadský vědec John Hendricks dokázal, že dokonalý magický teserakt nemůže být nižšího řádu než 16. Dokonalý magický teserakt 16. řádu obsahuje čísla 1, 2, 3, …, 65 536 a jeho magický součet je 534 926. Dokonalý magický teserakt 16. řádu se dá zobrazit jen stěží. Na Obr. 11 máme Hendrickův magický teserakt třetího řádu s příkladem řádku (žlutá čára), sloupce (zelená čára), sloupu (červená čára), trojrozměrné stěny (světlemodrá čára) a kvadragonály (tři růžová čísla), jejichž součet je 123. Dnes víme, že nejmenší dokonalý magický teserakt je 16. řádu, nejmenší dokonalá krychle je 8. řádu a nejmenší dokonalý (panmagický) magický čtverec je 4. řádu [19].



Obr. 11 Dokonalý magický teserakt [19]

2.3 Historie magických čtverců

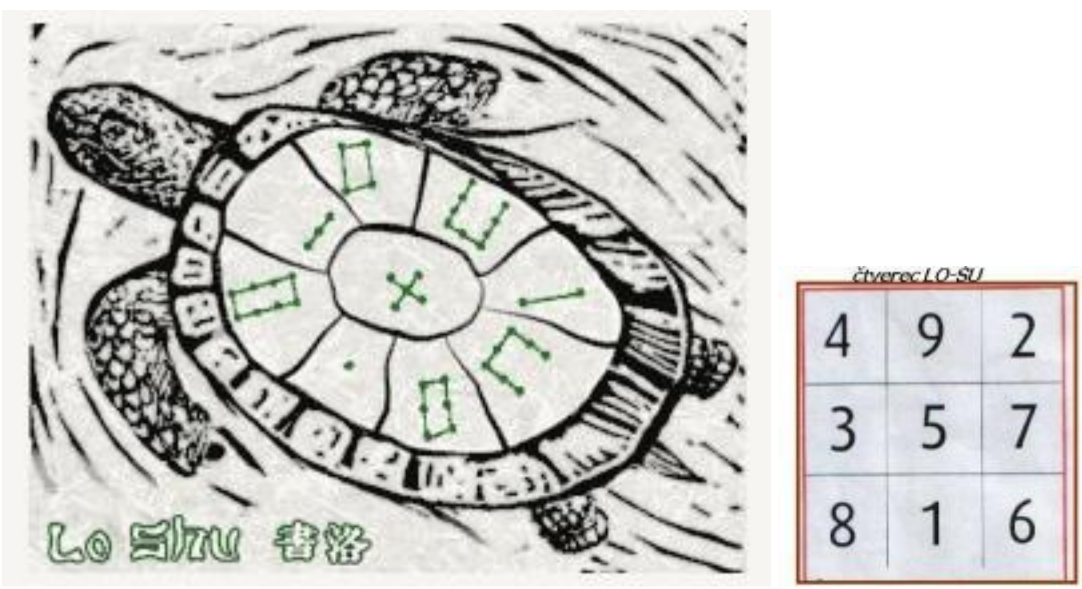
V této části diplomové práce se budeme zabývat nejdůležitějšími a nejznámějšími magickými čtverci, které se objevily v historii. Nějaké informace jen zmíníme, něco více rozvedeme, ale pokud bychom se chtěli zabývat historií magických čtverců dopodrobna, mohla by se na toto téma zpracovat nová bakalářská/diplomová práce.

2.3.1 Starověká Čína a magické čtverce

Když se podíváme na čínskou historii obecně, můžeme o ní říci, že je složitá, bohatá, krásná a také tajuplná. Obdobně to platí i o čínské kultuře. Je zkrátka jiná a pro nás

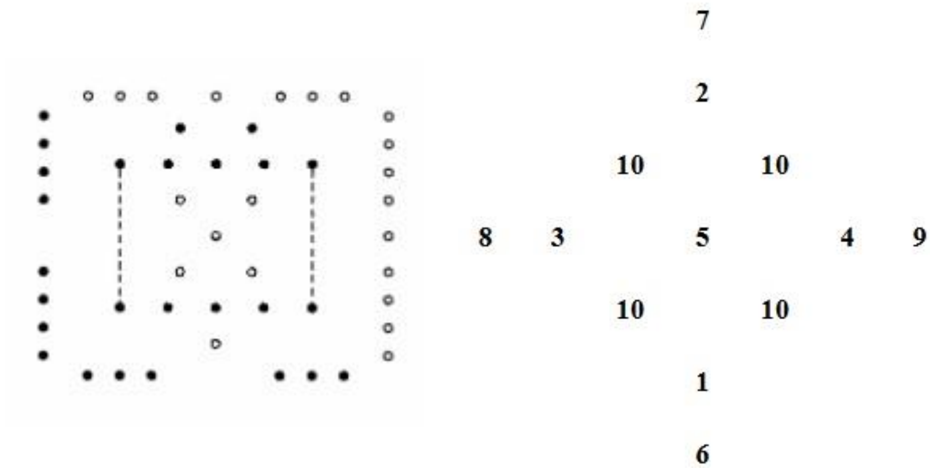
Evropany těžko pochopitelná. Vycházet budeme z knihy I-ťing, která je známá také pod názvem Kniha proměn. Tato kniha patří mezi nejstarší dochované texty čínské kultury a její autor i vznik knihy jsou pro nás velkou neznámou, a tak se jednotlivé údaje pouze odhadují a můžeme narazit na rozdílné názory. Z jedné legendy vyplývá, že kniha I-ťing by měla pocházet z roku kolem 2 200 př. n. l. Tato posvátná kniha obsahuje dvě legendy: „Velký plán", která je známá pod názvem Lo Shu a „Říční mapu" [2].

První písemnou zmínku o magických čtvercích nalézáme v Číně. Podle legendy o Lo Shu, která byla sepsána v letech 650 př. n. l., se dozvídáme o příběhu, jak se magický čtverec objevil na zemi. Za obrovské potopy řeky Lo objevil císař Yu želvu, která měla na zádech vzor čísel (Obr. 12). Jak je již zřejmé, šlo o magickou želvu, protože na zádech měla magický čtverec o straně 3 (tento čtverec je v Evropě známý i pod názvem Saturn). Lo Shu čtverec je ještě zajímavý tím, že kterýkoli magický čtverec o straně 3 lze vytvořit právě z Lo Shu čtverce pomocí zrcadlení a rotace. Magická konstanta v tomto čtverci má hodnotu 15, tzn., že součet prvků v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je stále stejný. Když ještě zůstaneme v Číně, tak půdorys některých chrámů má tvar čtverce o velikosti $3 x 3$ a uprostřed se nachází symbolické číslo 5, které Číňani brali jako jedno z nejvýznamnějších čísel. Lidé byli fascinováni uspořádáním čísel se stejným součtem v různých řadách a sloupcích, a tak těmto obrazcům přisuzovali magické vlastnosti a síly [10], [23].



Obr. 12 Želva s Lo Shu čtvercem a jeho přepis [6]

Druhá legenda o Říční mapě říká, že se posvátná želva vynořila z řeky Ho a na krunýři měla znázorněn magický čtverec, který je znázorněn na Obr. 13. Pohledem na mapu dobře vidíme středovou symetrii součtů protilehlých cifer $(5+3=8;\ 5+1=6; 3+10+2=8+7$ apod.$)$ [2].



Obr. 13 Říční mapa a její přepis [2]

Čtverec Lo Shu patří určitě mezi nejvýznamnější čínské symboly, který se ale nenachází v knize I-ťing. K pochopení těchto souvislostí zde musíme zmínit, kudy vedly myšlenky největších čínských učenců.

Čínská historie se opírá o dva hlavní filosofické směry – konfucianismus a taoismus. Konfucianismus založil mistr Konfucius, který se orientoval na člověka a jeho praktický život. Kniha Rozpravy, někdy také Hovory, je jeho nejvýznamnější dílo. Jeho starším současníkem byl Lao-c‘, který je považován za autora knihy taoismu Tao Te Ťing. Konfucius i Lao-c‘ údajně studovali Knihu proměn a své poznatky propojili do svých učení [21].

Pro taoisty bylo cílem dokonalé pochopení přírody. Přišli na to, že základem všeho je hmota, která je tvořena pěti elementy (voda, oheň, země, kov a dřevo). I zde můžeme nalézt symboliku čísla 5. Měli pět barev a vůní, znali pět planet a ty navíc spojili s elementy do dvojic: Merkur s vodou, Mars s ohněm, Jupiter se dřevem, Venuši s kovem a Saturn se zemí. Tyto elementy nejsou skutečné látky, ale pouze ztělesňující zobecněné vlastnosti. Vše se pohybuje a elementy mají snahu se neustále vyvíjet a přeměňovat, a tak mohou působit i proti sobě. Toto schéma nalezneme na Obr. 14 [21].

Obr. 14 Schéma koloběhu přírody [21]

U Lo Shu čtverce si můžeme všimnout, že se střídají sudá a lichá čísla po jeho obvodu. Viděli to i Číňané, a ti takové dvojici vždy přiřadili jeden z elementů. Uprostřed zůstala osamocena pětka, která symbolizuje zemi a především střed, protože kromě klasických čtyř světových stran byl právě střed podle čínských představ pátou a tou nejdůležitější. Tímto středem světa byla právě Čína, proto se jí říkalo také Říše Středu, svět měl mít tvar čtverce. Lo Shu čtverec se k tomuto účelu hodil, někdy bývá také nazýván jako zemský čtverec [21].

Obr. 15 Zemský čtverec [21]

2.3.2 Magické čtverce v mimoevropské civilizaci

Pro nás bude toto území představovat Střední Východ v oblasti mezi řekami Eufrat a Tigris, což můžeme označit za další kolébku lidské civilizace, kterou známe pod názvem Mezopotámie. K hlavním centrům na mezopotámském území patřil Harrám, kde se vše odehrávalo. Učenci (nazývaní jako Chaldejci) se dobře vyznali v oběžných drahách všech pěti okem viditelných planet (Merkur, Venuše, Mars, Jupiter a Saturn). V Harrámu považovali tyto planety spolu se Sluncem a Měsícem za božstva, každému z nich přiřadili jeden kov a z tohoto kovu byla zhotovena socha daného boha. Je celkem jasné, že Slunci bylo přiřazeno zlato a Měsíci stříbro. Ke každému z těchto chrámů vedl navíc jiný počet stupňů k trůnu. Vše teď popsané nalezneme na Obr. 16 [21].

Planeta	Kov	Počet stupňů k trůnu
Saturn	Olovo	9
Jupiter	Cín	8
Mars	Železo	7
Slunce	Zlato	6
Venuše	Měď	5
Merkur	Rtuť	4
Měsíc	Stříbro	3

Obr. 16 Symbolika planet, kovu a počty stupňů k trůnu

Magické čtverce byly ještě nacházeny z kamene a z kovu v podobě různých amuletů používaných v Číně, Indii a ve starém Egyptě. Pro tyto civilizace měly magické čtverce pravděpodobně spíše numerologický a astrologický význam. Magické čtverce se proto užívaly pro rozmanité magické účely, zdobily se jimi přívěsky a amulety, které nosili majitelé u sebe pro štěstí. V Orientu slouží tyto amulety k magickým a kouzelnickým účelům dodnes [23].

Dále se podíváme do arabských zemí, kde je nejznámější spis, který se překládá jako Traktáty Bratří Čistoty. Autor je neznámý, ale víme, že spis pochází z konce 10. století a čtverce, které jsou v něm uvedené, hrají spíše úlohu v souvislosti s talismany a amulety.

Podíváme se ještě do Indie, kde tamější matematici to vždy uměli s čísly, pravděpodobně znali i magické čtverce, ale nevěnovali se jim. Nejstarší magický čtverec, který pochází z Indie, je z první poloviny 11. století. Tento čtverec 4. řádu je vyřezaný do chrámu dveří svatyně Chotá Surang. Tento čtverec je panmagický a jeho konstantu získáme také součtem čísel v libovolném čtverci $2 x 2$, dále v rozích čtverců $3 x 3$, v rozích samotného čtverce a také součty $(2 + 16 + 11 + 5)$ a $(12 + 1 + 6 + 15)$ [2].

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

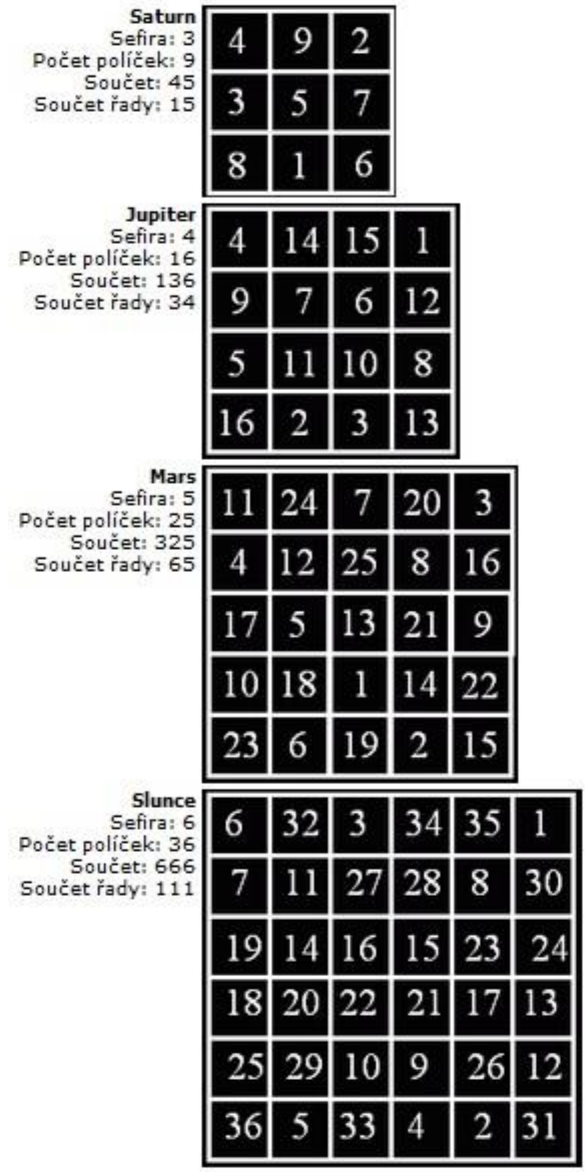
Obr. 17 Nejstarší indický magický čtverec [2]

2.3.3 Magické čtverce v Evropě

Konec antiky znamenal pro celou Evropu velký úpadek vzdělanosti a kultury. Evropa může být ráda, že arabští učenci přepsali antická vědecká díla, jinak by Evropa přišla o své duchovní dědictví. Zlepšení situace nastalo až kolem 11. - 12. století a Evropané čerpali právě z arabských poznatků. Předpokládáme, že se touto cestou nejpravděpodobněji dostaly magické čtverce do Evropy.

V Evropě se první zmínka o magických čtvercích objevila v roce 1300 od Řeka Manuela Maschopula, jak můžeme pochopit z jeho dopisu příteli. Maschopula se věnoval spíše matematické stránce magických čtverců. Kolem roku 1500 Ital Luca Pacioli shromažďuje ve své práci několik příkladů těchto magických čtverců. Tyto čtverce nakonec v práci nebyly uvedeny [23].

Důležitou prací magického pojetí je kniha Heinricha Cornelia Agrippa vydána v roce 1531. Jeho kniha Okultní filozofie se okamžitě rozšířila po celé Evropě. Magické čtverce přiřadil jednotlivým planetám a popsal jejich využití v přivolání ďáblů a andělů. Každý čtverec je zapsaný arabskými číslicemi a také ve verzi s hebrejskými písmeny. Na Obr. 18 můžeme vidět čtverec Saturnu, čtverec Jupiteru, čtverec Marsu a čtverec Slunce. Dále existují ještě čtverce Venuše, čtverce Merkuru a čtverec Luna. Někdy se magickým čtvercům dává název Agrippovy čtverce již podle zmíněného Heinricha Cornelia Agrippa [23].



Obr. 18 Magický čtverec Saturnu, Jupitera, Marsu a Slunce [12]

Za zmínku stojí další okultní učenec a lékař Paracelsus, vlastním jménem Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim. Učinil několik důležitých objevů a předpověděl vznik novodobého lékařství. Jméno Paracelsus přijal během svého života, aby vyjádřil své přesvědčení, že má větší schopnosti než dávno uznávaný římský lékař Celsus. Neuniklo mu spojení kovů s planetami a magickými čtverci. Nás bude zajímat jeho dílo Archidoxa magica, které je ukázkou léčebného užití magických čtverců. Rozebírá léčebnou sílu pečetí, ty jsou zhotoveny přesně daným postupem, podstatnou roli hrají na nich vyobrazené magické čtverce [2].

Pečeť Saturnova.

Pečeť tato musí býti zhotovena z čistého a jemného olova z Villachu, a to tak, aby na jedné straně pečeti vryt byl do jejího obvodu čtverec. Čtverec rozdělí se dvěma svislými a dvěma vodorovnými čarami na devět stejných čtverečků, z nichž do každého vepíše se číslo tak, aby čísla po sečtení všemi směry dávala součet 15. Na druhou stranu pečeti vryje se obraz planety, totiž starého muže s kosou v postoji, jakoby sekal trávu na zemi. Nad jeho hlavou hvězda a nahoře jméno — Saturnus.

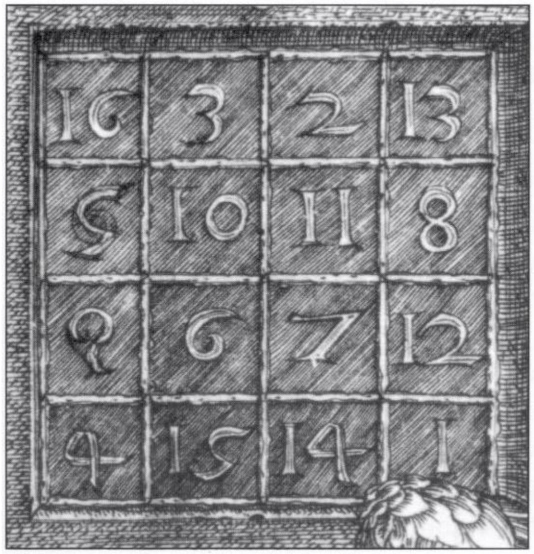
Obr. 19 Pro ukázku pečeť Saturnova [2]

2.3.4 Magické čtverce v umění a literatuře

Mnoho prací, které se zabývají studiem magických čtverců, odkazují na nejznámější magický čtverec, ten je namalován na obrazu Melancholia od známého německého malíře Albrechta Dürera (1471 - 1528) z roku 1514. Název obrazu neznamená melancholii, ale spíše nějaké zamyšlení. Na obrazu můžeme nalézt řadu matematických objektů a symbolů, ale v této práci se budeme zabývat pouze magickým čtvercem, který se nachází na obrazu vpravo nahoře. Obraz je také známý tím, že malíř na něm použil techniku zvanou mědiryt [23].

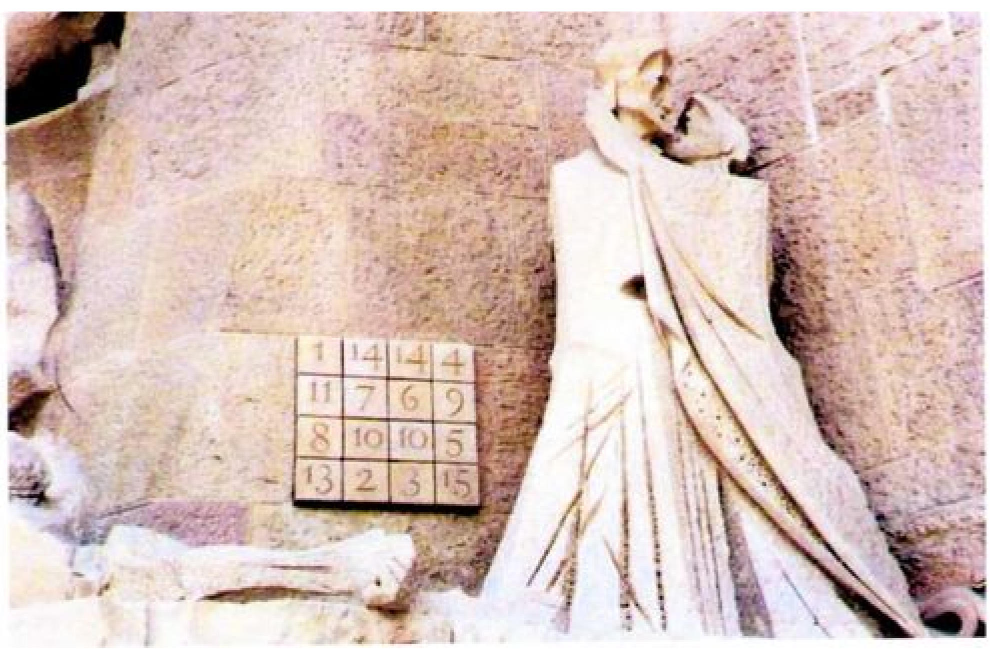
Obr. 20 Obraz Melancholia od Albrechta Dürera [16]

Magický čtverec na obrazu je 4. řádu a zajímavé je, že čísla 15 a 14 se v magickém čtverci vyskytují dole uprostřed, kde zdůrazňují rok vzniku obrazu. Rok 1514 může mít také symboliku se smrtí Dürerovy matky Barbary. Čtverec má ve všech řádcích, sloupcích i úhlopříčkách součet roven číslu 34. Dále můžeme nalézt součet 34 i v prostředním čtverci a rohová čísla čtverce také dávají součet 34. Na obrazu je tento magický čtverec, protože tehdejší vědci věřili, že magické čtverce mohou vyléčit lidi trpící melancholií [5], [23].



Obr. 21 Magický čtverec z obrazu Melancholia [16]

Za zmínku stojí i Gaudího katedrála v Barceloně (Španělsko), kde můžeme nalézt trochu pozměněný Dürerův magický čtverec. V podstatě se nejedná o magický čtverec, protože některá čísla se ve čtverci objevují vícekrát. Tato změna čísel je kvůli tomu, aby součet v řádcích i sloupcích dával číslo 33, což jsou tzv. Kristova léta.



Obr. 22 Gaudího katedrála v Barceloně [3]

Dále se můžeme o magických čtvercích dočíst v literatuře. Zde jsou čtverce sestaveny z písmen a důležitá je jejich role v historii. Mezi nejznámější písmenný magický čtverec můžeme zařadit čtverec, který je nazýván SATOR (viz Obr. 23). Magický čtverec SATOR je prastará, dosud ne plně objasněná formule, která existuje už asi 2 000 let (jeho původ i jeho stáří nejsou přesně známé). Pravděpodobně byla považována za symbol proti neštěstí, nemoci a požáru. O tomto čtverci se říká, že kdo tuto formuli nosil zavěšenou na krku, toho se netkla žádná kulka. Tento čtverec, ať se čte z kterékoliv strany, dává pokaždé totéž a obsahuje pět latinských slov: Sator, Arepo, Tenet, Opera a Rotas. Tato slova mají být údajně nějaké zaklínadlo, ale neví se, co má přesně znamenat. Formule zvaná čtverec SATOR byla nalezena při vykopávkách na stěně v Pompejích. V italské Pieve Terzagni u Cremony je v místním kostele z 11. století tento nápis v podlahové mozaice. Dále na ostrově Gotland byl nalezen starý pohár s tímto nápisem. Ve sbírce slezských obyčejů se dočteme, jak tuto formuli SATOR píší na dřevěný talíř a tím chtějí oheň udusit. V různých obměnách se používala u ostatních národů proti bolesti zubů, kousnutí vzteklého psa, nemocem lidským i zvířecím, uštknutí jedovatými hady apod. [12].

Obr. 23 Magický čtverec SATOR a jeho vyrytá varianta v Oppede (Francie) [14]

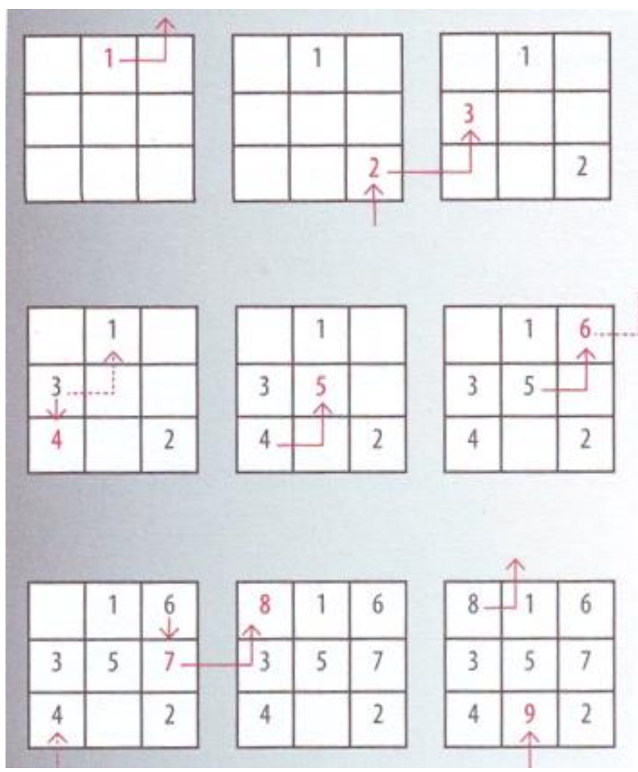
Jako další můžeme zmínit magický čtverec RVACH. Tento čtverec se používal na ochranu proti zlodějům. Říká se, že každý na něm uvízne a žádný vůz už přes něj nedokáže přejet. Formule RVACH je zřejmě permutací hebrejského slova rvach, které znamená duch [12].

2.4 Konstrukce magických čtverců

V dnešní době existuje spousta metod konstrukce magických čtverců, zde si uvedeme jen ty nejjednodušší. Magický čtverec o straně n jde udělat pro každé n, ale existuje jedna výjimka, pro kterou to nelze udělat a tou je $n = 2$. Budeme rozlišovat 3 druhy konstrukcí a to n liché, n dělitelné 4, n nedělitelné 4 [23].

2.4.1 Konstrukce pro *n* lichá

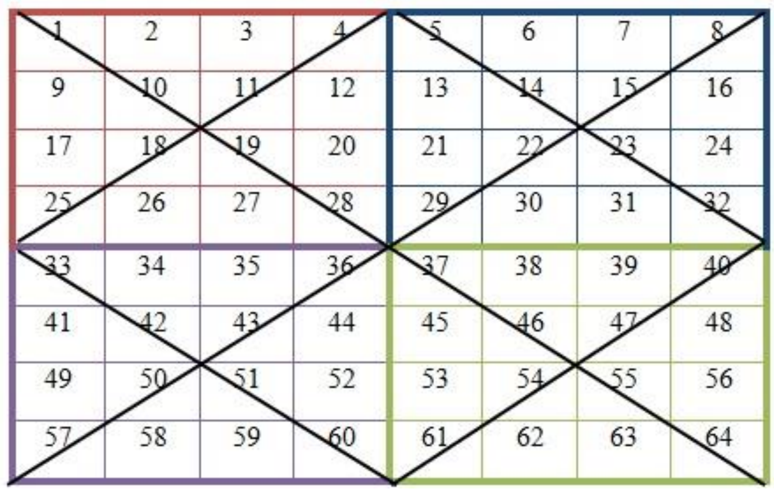
Při řešení magických čtverců pro n lichá se podíváme na Obr. 24, kde zjistíme, jak postupovat a jak magický čtverec funguje. Vždy začneme tím, že doprostřed prvního řádku napíšeme číslo 1. Nyní přidáme další čísla tak, že se posuneme ve čtverci doprava a nahoru. Jakmile se dostaneme na horní nebo pravou hranu, pokračujeme opět odspodu nebo zleva. Pokud je náš potřebný čtverec pro umístění čísla zaplněn, posuneme se o jeden čtverec dolů a zde napíšeme další číslo [22].



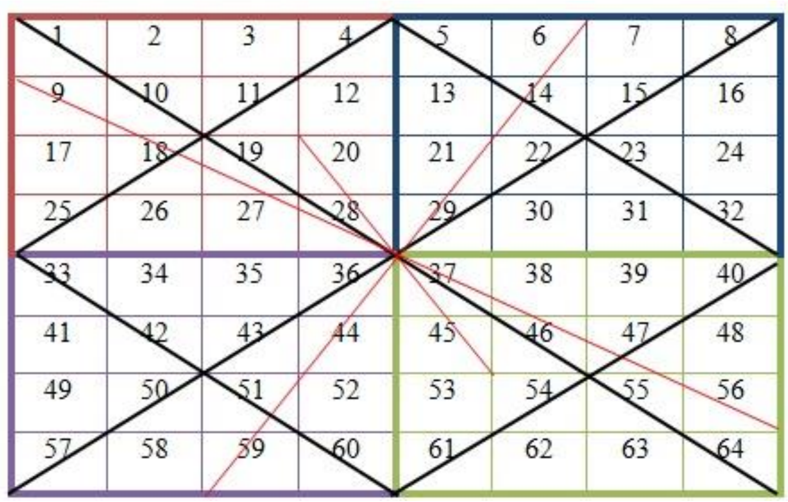
Obr. 24 Sestavení magického čtverce [22]

2.4.2 Konstrukce pro *n* dělitelná 4

Máme čtverec o velikosti $8 \, x \, 8$ a jako první očíslujeme všechna pole ve čtverci po řádcích zleva doprava, takže budeme mít v políčku vlevo nahoře 1, v políčku vpravo nahoře bude n, vlevo dole nalezneme $n^2 - n + 1$ a vpravo dole bude n^2. Následně si tabulku rozdělíme na čtverce o straně 4 a v nich si zvýrazníme obě diagonály. Poté dáme dohromady neoznačená políčka tak, že spojíme-li středy těchto políček úsečkou, pak střed této úsečky se bude shodovat se středem celé naší tabulky. Nakonec prohodíme čísla v každém takovém páru a dostaneme námi hledaný normální magický čtverec [23].



Obr. 25 Postup konstrukce pro n dělitelná 4 (1)



Obr. 26 Postup konstrukce pro n dělitelná 4 (2)

Na Obr. 27 můžeme vidět výsledný normální magický čtverec. Tučně jsou zvýrazněna čísla, která se ve čtverci vyměnila s jinými čísly.

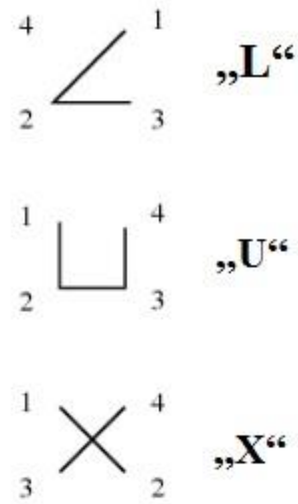
1	**63**	**62**	4	5	**59**	**58**	8
56	10	11	**53**	**52**	14	15	**49**
48	18	19	**45**	**44**	22	23	**41**
25	**39**	**38**	28	29	**35**	**34**	32
33	**31**	**30**	36	37	**27**	**26**	40
24	42	43	**21**	**20**	46	47	**17**
16	50	51	**13**	**12**	54	55	**9**
57	**7**	**6**	60	61	**3**	**2**	64

Obr. 27 Normální magický čtverec

2.4.3 Konstrukce pro sudá n nedělitelná 4

Poslední konstrukce pro sudá n nedělitelná 4, kterou můžeme také značit jako $n = 2(2k + 1), k \in \mathbb{N}$, patří mezi nejsložitější konstrukce magických čtverců. Použijeme na ni metodu zvanou LUX, kterou vymyslel a pojmenoval John H. Conway. Jeho postup určitě pochopíme podle Obr. 28 a Obr. 29. Nejprve máme tři způsoby zapisování čísla do čtverečků $2 \, x \, 2$, na jejichž síť čtverec požadovaného řádu rozdělíme. Postup pro konstrukci je takový, že prvních $k + 1$ řádků této sítě budeme vyplňovat schématem podle písmene „L“, poté bude jeden řádek schématu podle písmene „U“ a nakonec zbylých $k - 1$ řádků schématem podle písmene „X“. Dále prohodíme označení v prostředním řádku prostředního čtverečku se čtverečkem pod ním. Nakonec doplníme čtveřice čísel v pořadí příslušejícím k danému písmenu. Při této konstrukci si pomůžeme konstrukcí pro n lichá [11], [23].

Zjednodušeně můžeme říci, že čtverečky v prostřední řadě a v řadách nad ní označíme písmenem „L“, čtverečky v řadě pod prostřední řadou písmenem „U“ a zbytek čtverečků písmenem „X“. Nakonec prohodíme označení středového čtverečku se čtverečkem pod ním.



Obr. 28 Písmena v metodě LUX

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. 29 Metoda LUX a postup vyplňování čtverce

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

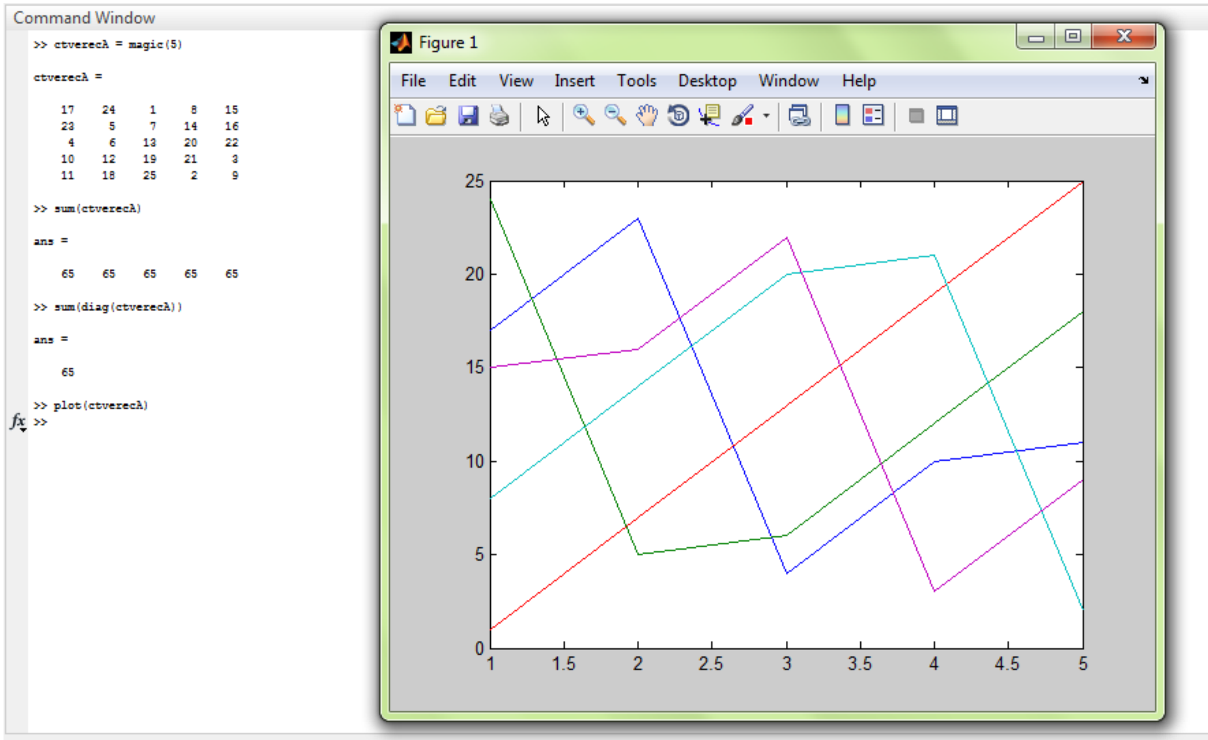
Obr. 30 Normální magický čtverec 10. řádu podle metody LUX

2. 5 Magické čtverce a program MATLAB

Jen v rychlosti se podíváme na program MATLAB a jeho využití v hodinách matematiky pro lepší pochopení magických čtverců. Název MATLAB vznikl zkrácením slov MATrix LABoratory, což v překladu znamená maticová laboratoř. Nebudeme nic programovat ani vytvářet, využijeme funkci, která je již v MATLABu předdefinována a tím je funkce „magic“. Konstrukce u těchto čtverců v programu probíhá tak, jak již známe a je popsaná v kapitole 2.4. Tedy zase jen si vystačíme s konstrukcemi pro n liché, n dělitelné 4 a n nedělitelné 4 [15].

Pro kontrolu, jestli máme magické čtverce dobře sestavené, použijeme funkce „sum“ a „sum(diag)“, ty nám hned spočítají magickou konstantu, která se objevuje v magickém čtverci. Pro zajímavost můžeme využít i funkci „plot“, která nám vykreslí daný magický čtverec do grafu.

Ukázku, jak bych si výuku s žáky představovala, můžeme vidět na Obr. 31. Myslím si, že bych žáky mohla zaujmout, sami by dále zkoušeli různou velikost magických čtverců a jejich magickou konstantu.



Obr. 31 Ukázka využití programu MATLAB

3 Latinské čtverce

Latinský čtverec je čtvercové schéma $n\ x\ n$ čísel mezi 1 a n takové, že každý řádek a každý sloupec obsahuje všechny čísla od 1 do n. To znamená, že všechna čísla v libovolném řádku jsou různá a totéž platí o sloupcích. Oproti magickým čtvercům neřešíme ve čtverci součet ani magickou konstantu [1].

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Obr. 32 Příklad latinského čtverce

Latinský čtverec se skládá z n množin čísel 1 až n sestavených tak, že žádný řádek ani sloupec neobsahuje dvě stejná čísla. Počty latinských čtverců počínaje řádem $n = 1$ činí postupně 1, 2, 12, 576, 161 280, 812 851 200, 61 479 419 904 000, 108 776 032 459 082 956 800, 10^{37} (= 9. řádu) a tak dále.

Dvojice latinských čtverců je ortogonální, jestliže všechny páry vytvořené juxtaponováním (= seřazení dvou čísel vedle sebe tak, aby vytvořila uspořádanou dvojici) čísel v odpovídajících políčkách obou čtverců budou rozdílné [19].

3	2	1
2	1	3
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Obr. 33 Ortogonální latinské čtverce 3. řádu

$$\begin{vmatrix} 32 & 23 & 11 \\ 21 & 12 & 33 \\ 13 & 31 & 22 \end{vmatrix}$$

Obr. 34 Matice latinského čtverce podle Obr. 33

Nejznámějším problémem, který můžeme spojit s latinskými čtverci, je problém šestatřiceti důstojníků. Představme si šest pluků, z nichž v každém slouží šest důstojníků různých hodností. Leonhard Euler si v roce 1779 položil otázku, zda je možné rozmístit těchto 36 důstojníků do čtverce $6\ x\ 6$ tak, aby v každé řadě i v každém zástupu byli po jednom zastoupeni důstojníci každého pluku a každé hodnosti. V matematice to znamená, že potřebujeme nalézt dva vzájemně ortogonální latinské čtverce 6. řádu. Euler vyslovil správnou domněnku, že jeho úloha nemá žádné řešení. V roce 1901 to dokázal francouzský matematik Gaston Tarry, který provedl porovnání všech možností. V rámci snah o řešení Eulerova problému vznikla řada prací v kombinatorice a v matematickém oboru, který se zabývá výběrem a uspořádáním objektů. Latinské čtverce sehrávají roli i v tvorbě samoopravných kódů a v komunikačních technologiích [19].

Euler nakonec vyslovil hypotézu, že pokud $n = 4k + 2$, přičemž k je celé číslo, poté žádný pár ortogonálních $n\ x\ n$ latinských čtverců neexistuje. Tato hypotéza byla vyvrácena až v roce 1959, kdy matematici Raj Chandra Bose, Sharadchandra Shikhande a Ernest Parker sestavili pár ortogonálních latinských čtverců $22\ x\ 22$. V dnešní době víme, že pár ortogonálních latinských čtverců $n\ x\ n$ existuje pro každé celé kladné číslo n s výjimkou $n = 2$ a $n = 6$ [19].

3.1 Ukázka z historie a z umění latinských čtverců

Poprvé se latinské čtverce objevily kolem roku 1 000 n. l. v arabské a indické kultuře, v podobě různých amuletů a rytin. Jako příklad uvedeme amulet, který pochází z Damašku (Obr. 35). Na jeho jedné straně jsou jména sedmi spáčů, kteří podle legendy usnuli v jeskyni a probudili se o 150 až 200 let později a na druhé straně je latinský čtverec [21].

Obr. 35 Amulet z Damašku [21]

V této části zmíníme ještě starou karetní hru, v níž je úkolem poskládat 16 nejvyšších hracích karet v systému $4\,x\,4$ tak, aby v každém řádku, sloupci i na obou hlavních diagonálách bylo vždy eso, král, dáma a kluk a zároveň byly zastoupeny všechny čtyři barvy. Hledáme dva vhodné latinské čtverce, první bude tvořený hodnotami karet a ten druhý jejich barvami. Řešení tohoto latinského čtverce můžeme vidět na Obr. 36, ale je to jen jedno z mnoha řešení [21].

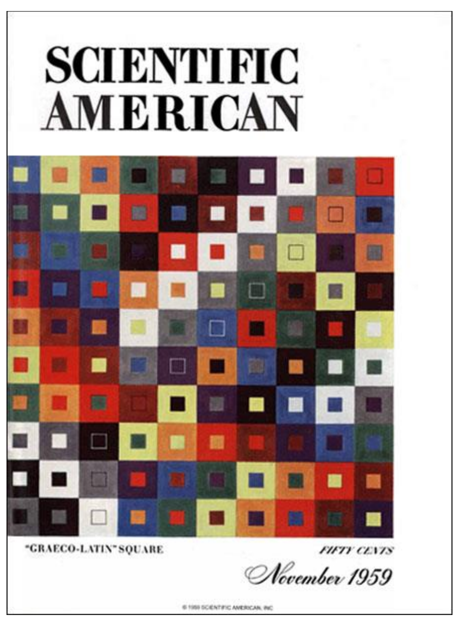
$A\spadesuit$	$K\heartsuit$	$Q\diamondsuit$	$J\clubsuit$
$Q\clubsuit$	$J\diamondsuit$	$A\heartsuit$	$K\spadesuit$
$J\heartsuit$	$Q\spadesuit$	$K\clubsuit$	$A\diamondsuit$
$K\diamondsuit$	$A\clubsuit$	$J\spadesuit$	$Q\heartsuit$

Obr. 36 Řešení karetní úlohy [21]

Z umění stojí za zmínku určitě okno na Cambridgeské univerzitě, které zachycuje latinský čtverec 7. řádu z barevného skla. Tento latinský čtverec na počest R. A. Fishera navrhl jeho student A. W. F. Edwards a vytvořila ho umělkyně Maria McClafferty [9].

Obr. 37 Okno na Cambridgeské univerzitě [9]

Jako poslední zmíníme latinský čtverec 10. řádu, který se nacházel v roce 1959 v listopadovém čísle na obálce časopisu Scientific American. Latinský čtverec se tam vyskytl v době, kdy se objevili dvojice ortogonálních čtverců 10. řádu.



Obr. 38 Obálka časopisu Scientific American [24]

4 Sudoku

Každé výsledné postavení populární hry Sudoku je speciálním případem latinského čtverce $9 \, x \, 9$. Jedná se o tabulku o devíti sloupcích a devíti řádcích s několika doplněnými jednocifernými číslicemi. Čtverec $9 \, x \, 9$ je ještě rozdělen na 9 čtverců velikosti $3 \, x \, 3$. Smyslem je v co nejkratším čase doplnit tabulku o zbývající číslice 1 až 9 tak, aby se žádná číslice v žádném sloupci, řádku a ani v jednom z devíti čtverců o straně 3 čtverečky neopakovala. To znamená, že v každém řádku, sloupci a tučně ohraničeném čtverečku musí být právě číslice 1-9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Každé Sudoku je ojedinělé a má jen jedno řešení [20].

	7					2	9	5
1		8		2				3
		4	7	3		6		8
	2	6		7				
	3	7	6		4	9	2	
8				5		3		
				9	1	4	6	
7				4	5			2
	1		3				5	

6	7	3	4	1	8	2	9	5
1	9	8	5	2	6	7	4	3
2	5	4	7	3	9	6	1	8
9	2	6	1	7	3	5	8	4
5	3	7	6	8	4	9	2	1
8	4	1	9	5	2	3	7	6
3	8	5	2	9	1	4	6	7
7	6	9	8	4	5	1	3	2
4	1	2	3	6	7	8	5	9

Obr. 39 Příklad Sudoku i s jeho řešením [25]

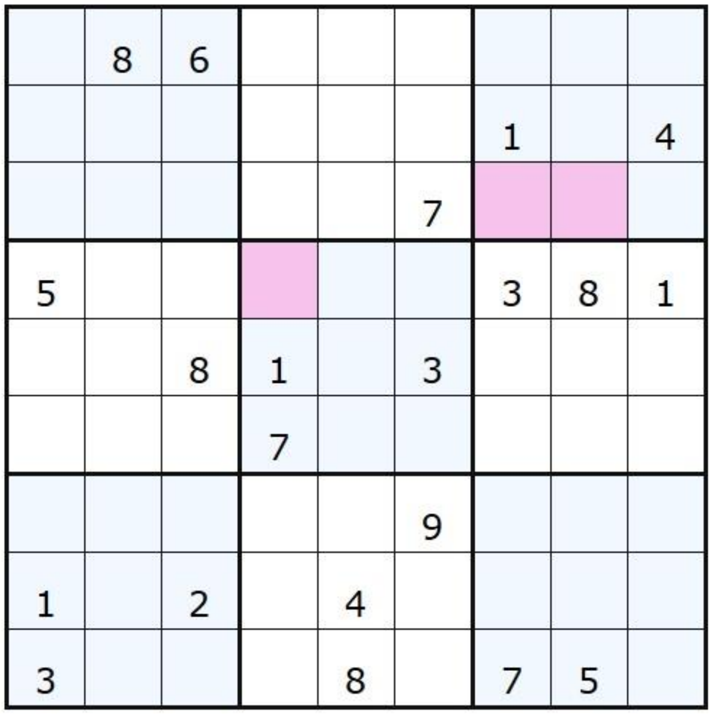
Sudoku se také někdy nazývá Rubikova kostka 21. století, protože mají mnoho společného. Rubikova kostka se dá otáčet třemi směry a každá její strana se skládá z $3 \, x \, 3$ čtverečků. U Sudoku nalezneme také 3 dimenze – řádky, sloupce a čtverce $3 \, x \, 3$. Každý z těchto $3 \, x \, 3$ čtverců má v sobě $3 \, x \, 3$ políček [18].

Hra Sudoku se poprvé objevila v USA roce 1979 v časopise Dell Magazines pod názvem Number Place a vymyslel ji architekt Howard Garns, který bohužel o několik let později zemřel, a tak se nedočkal jejího obrovského rozkvětu, který tato hra získala ve 21. století. Sudoku za svůj rozkvět vděčí zejména Wayne Gouldovi z Nového Zélandu, který se během svého pobytu v Japonsku seznámil s touto hrou a později vytvořil program, který automaticky generuje úlohy Sudoku velikosti $9\ x\ 9$ dávající jediná řešení. Do sítě $9\ x\ 9$ se postupně a zcela náhodně přidávají cifry od 1 do 9 tak, aby byla splněna pravidla výsledného postavení Sudoku. Jakmile program zjistí, že úloha má právě jedno řešení, přestane přidávat cifry a zadání Sudoku je hotové [18].

Název Sudoku je vlastně japonská zkratka věty: *„Suuji wa dokushin ni kagiru"*, což v překladu znamená „číslice musí zůstat samotná". Paradoxem je, že sami Japonci, kteří mají Sudoku velice v oblibě, používají pro ni původní anglický název Number Place. Název Sudoku vymyslelo nakladatelství Nikoli a nechalo si jej v Japonsku patentovat. Proto se japonští vydavatelé drží raději anglického názvu, aby se vyhnuli poplatkům. Tato registrace je platná pouze pro Japonsko, takže zbytek světa používá japonskou zkratku Sudoku [18].

Bylo jen otázkou času, kdy se o Sudoku začnou zajímat také matematici. Nejprve v roce 2003 byla vyřešena otázka počtu všech existujících standardních Sudoku stanovením čísla 6 670 903 752 021 072 936 960 (přibližně 6,67 triliard). S porovnáním s latinskými čtverci 9. řádu je to o více než milionkrát méně variant. Pokud se omezíme jen na skutečně unikátní řešení Sudoku (nepočítají se mezi ně ekvivalenty ve smyslu jakéhokoliv druhu symetrie), tak nám jejich počet klesne na 5 472 730 538 variant. Dalším problémem, kterým se zabývali, byla otázka, která se týkala minimálního počtu zadaných symbolů. Dosud je jím číslo 17 a při tomto omezení je známo více než 48 tisíc variant vedoucích k jednomu z originálních řešení [21].

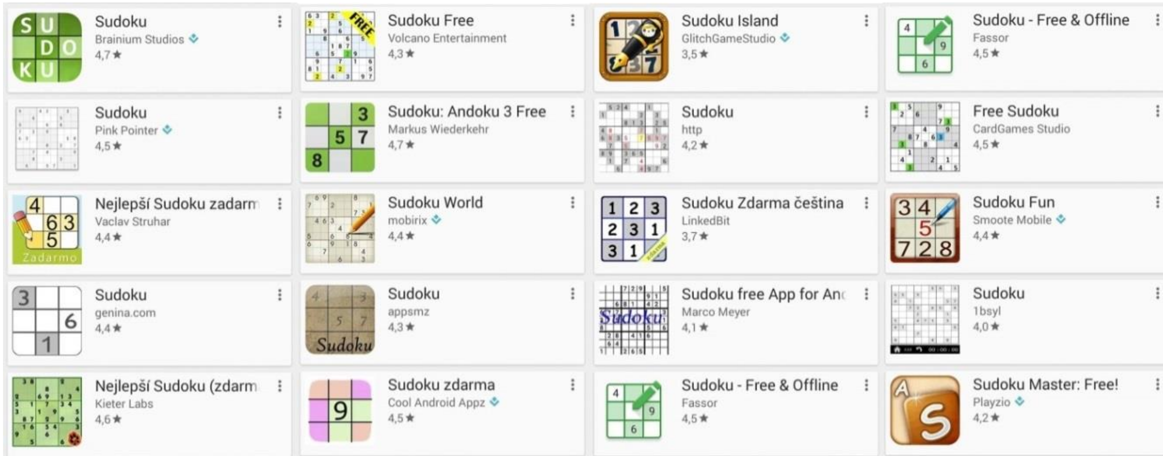
Každé Sudoku je jiné a má různé úrovně řešitelnosti – snadné, středně těžké, obtížné, velmi obtížné, zapeklité, diagonální, sudé/liché apod. Diagonální Sudoku je v podstatě podobné normálnímu Sudoku, jen s tím rozdílem, že čísla se nesmí opakovat ani v diagonálách (úhlopříčkách). Sudé/liché Sudoku je specifické tím, že některá políčka ve čtverci jsou vybarvena a na nich se může objevit jen sudé/liché číslo [25].



Obr. 40 Příklad lichého Sudoku (růžová pole mají obsahovat lichá čísla) [25]

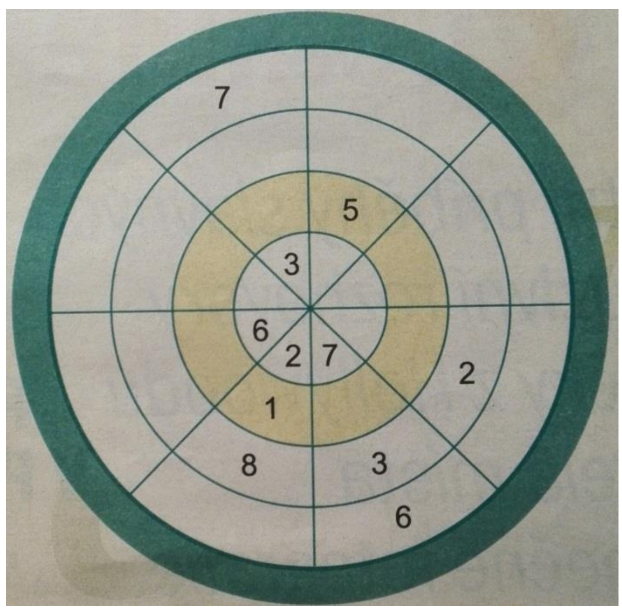
Jako vhodnou webovou stránku na procvičování hry Sudoku bych zvolila www.sudokuonline.cz, kde si každý může zvolit svojí úroveň obtížnosti a na konci zkontrolovat správnost vyřešeného Sudoku pomocí tohoto webu. Stránku bych doporučovala do výuky matematiky jen jako zpestření hodiny, rozhodně bych děti nenechala celou hodinu hrát Sudoku online. V dnešní době, kdy jsou už na většině škol tablety, můžeme zvolit i tuto možnost. Jen je potřeba naistalovat vhodnou aplikaci s hrou Sudoku do tabletu a žáci mohou procvičovat ve volných chvílích.

Na ukázku uvedu několik aplikací, které se nechají stáhnout na zařízení podporující operační systém Android. Operační systém Android patří mezi nejrozšířenější systém, který je používán právě na smartphonech, tabletech a v dnešní době i na chytrých televizích a dalších zařízeních. Mezi další operační systémy řadíme iOS a Windows.

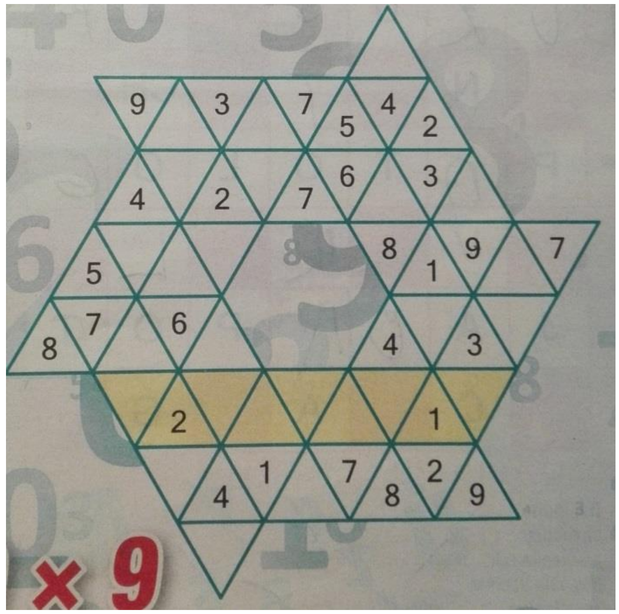


Obr. 41 Ukázka aplikací Sudoku, které podporuje operační systém Android

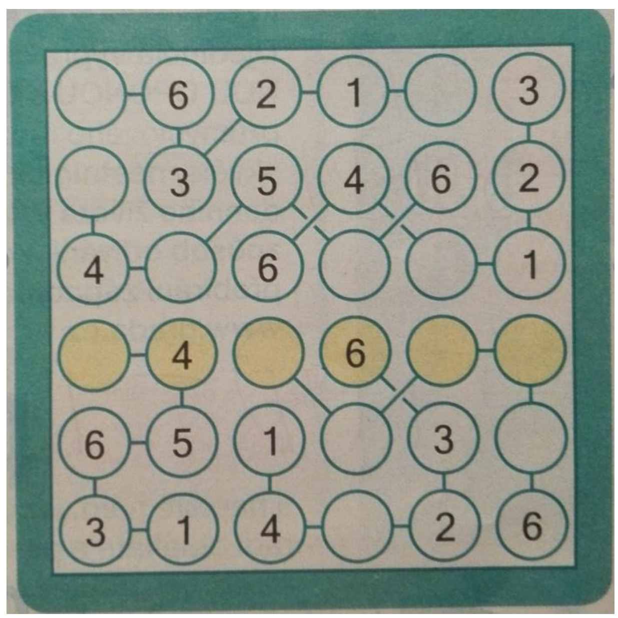
Na závěr si ještě ukážeme, že Sudoku nemusí existovat jen v pravidelných tvarech, jak jsme většinou zvyklí. Nalézt ho můžeme jako kruhové Sudoku, řetězové Sudoku nebo také jako hvězdicové (= star) Sudoku. Dále ještě početní Sudoku, šipkové Sudoku a menší/větší Sudoku (zde platí matematická znaménka větší než „>“ a menší než „<“ pro doplnění zadání).



Obr. 42 Ukázka kruhového Sudoku [4]



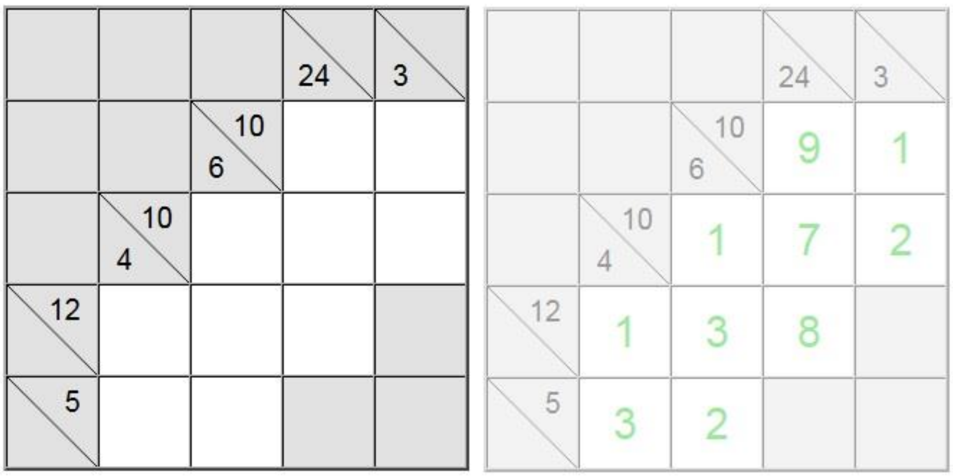
Obr. 43 Ukázka hvězdicového Sudoku [4]



Obr. 44 Ukázka řetězového Sudoku [4]

4 Kakuro

Kakuro je logická hra, která je podobná hře sudoku a klasické křížovce. Kakuro spočívá v tom, že se doplňují čísla do prázdných políček. Do dané části řádku či sloupce je potřeba doplnit různá čísla od 1 do 9 (čísla se v řádcích ani sloupcích nesmí opakovat) tak, aby jejich součet odpovídal zadanému číslu. Tato hra má také pouze jedno řešení [8].



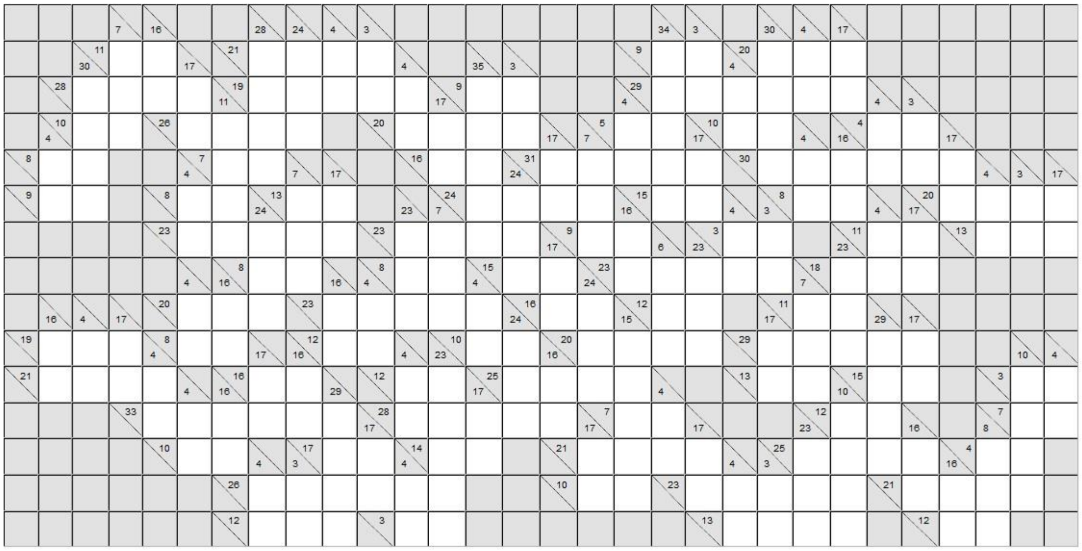
Obr. 45 Příklad Kakura i s jeho řešením [8]

Pro začátečníky hry Kakuro bych doporučovala udělat si tabulku s možnostmi kombinace čísel anebo použít vhodný program (např. http://www.kakuro.com/downloads/Kakuro%20helper.exe), který zná úplně všechny možné kombinace, které lze v Kakuro použít.

Počet políček	**Součet**	**Kombinace**
2	4	1+3
	16	7+9
5	15	1+2+3+4+5
	35	5+6+7+8+9
7	42	3+4+5+6+7+8+9
9	45	1+2+3+4+5+6+7+8+9

Obr. 46 Příklad tabulky s kombinacemi

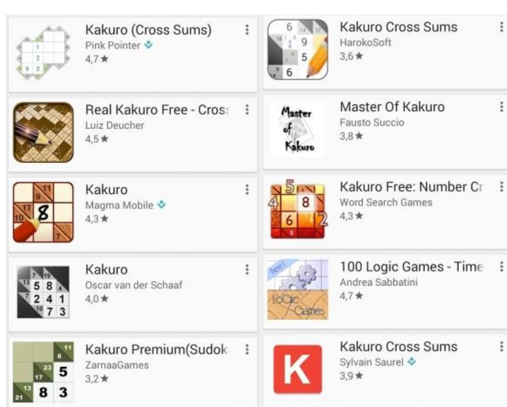
Teď jen pro ukázku, že Kakuro není mnohdy jen jednoduché luštění. Luštění tohoto Kakura na Obr. 47 může zabrat více času, než bychom očekávali.



Obr. 47 Ukázka obtížnějšího Kakura velikosti 15x30 [8]

V roce 1966 se hra Kakuro poprvé objevila pod názvem Cross Sums, kde ji Kanaďan Jacob E. Funk otiskl v časopise Dell. Hra ale moc nadšení u luštitelů nepřinesla. Do světa luštění ji znovu přivedl japonský obchodník, který si v roce 1980 při návratu z USA jednu tuto hru vyluštil a hra se mu zalíbila. Podnikavý Japonec začal vydávat vlastní číselné křížovky pod názvem Kakuro (zkratka japonského Kasan Kurosu, což v překladu znamená kříž). U Japonců tato hra vyvolala obdiv a nadšení [7].

I Kakuro můžeme nalézt mezi aplikacemi od operačního systému Android. Není jich samozřejmě tolik, jako aplikací se Sudoku, protože Kakuro není tak rozšířené a populární. Pro ukázku jich pár nalezneme na Obr. 48.



Obr. 48 Ukázka aplikací s hrou Kakuro

5 Využití v hodinách matematiky

Dostali jsme se k poslední, ale velmi důležité kapitole v této diplomové práci. Tato kapitola bude nabízet pracovní listy s využitím magických čtverců v hodinách matematiky. Pracovní listy byly sestaveny tak, aby měly využití na obou stupních základní školy, tedy aby se s nimi seznámili jak žáci v první třídě, tak i žáci v deváté třídě. V každém pracovním listě jsou jiné příklady k řešení, opakují se pouze tipy příkladů, čísla v magických čtvercích jsou vždy různá.

Jako další mohu doporučit publikaci od Šarounové Aleny *Magické čtverce a další číselná schémata*, v které můžeme najít další možné kombinace magických čtverců a jiné pracovní listy, které se mohou používat na procvičování v základních školách, než jsou uvedené v této části diplomové práce.

V souvislosti s pracovními listy s magickými čtverci mě napadlo využití v rámci mezipředmětových vztahů. Vždy by bylo potřeba seřadit dané pojmy podle nějakého kritéria a poté by se pojmy doplnily do čtverce podle kritérií magických čtverců. Na ukázku uvedu propojení matematiky se zeměpisem.

Př. Seřaďte státy Evropy podle jejich rozlohy od největšího po nejmenší a následně správně doplňte do čtverce.

Česká republika, Dánsko, Francie, Lucembursko, Maďarsko, Německo, Rakousko, Slovensko, Velká Británie

1. Francie (543 965 km^2)
2. Německo (357 023 km^2)
3. Velká Británie (243 610 km^2)
4. Maďarsko (93 030 km^2)
5. Rakousko (83 871 km^2)
6. Česká republika (78 867 km^2)
7. Slovensko (49 036 km^2)
8. Dánsko (43 094 km^2)
9. Lucembursko (2 586 km^2)

4. **Maďarsko**	**9.** **Lucembursko**	**2.** **Německo**
3. **VB**	**5.** **Rakousko**	**7.** **Slovensko**
8. **Dánsko**	**1.** **Francie**	**6.** **ČR**

Pracovní list č. 1 – Seznámení s magickými čtverci

Třída: první

Cíl aktivity: Žáci se hravou formou seznámí s magickými čtverci. Pomocí magických čtverců si procvičí sčítání a odčítání.

Předpokládané znalosti: sčítání a odčítání celých čísel do 20

Klíčové kompetence:

- **Kompetence k řešení problému** - žák pečlivě promýšlí různé možnosti vyplnění magických čtverců, hledá nejvhodnější rozložení čísel ve čtverci tak, aby získal výsledný magický čtverec, ověřuje správnost svých výsledků. Vyhledá informace vhodné k řešení problému, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.
- **Kompetence k učení** – žák procvičuje základní početní operace, poznává nové souvislosti v matematice, vytváří si komplexnější pohled na dané matematické jevy. Experimentuje s různými kombinacemi v doplňování magických čtverců, kriticky posuzuje své myšlenky a hledá optimální řešení. Samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti.
- **Kompetence komunikativní** – žák formuluje a vyjadřuje své myšlenky, názory a výsledky v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a matematicky správně.
- **Kompetence sociální a personální** – žák pracuje samostatně, přispívá k diskusi ve třídě, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, oceňuje zkušenosti druhých lidí.

Potřebný materiál: pracovní list, tužka

Metodický komentář: Žáci se pomocí pracovního listu seznámí s magickými čtverci, procvičí základní početní operace, trénují správnou strategii k doplnění chybějících čísel. Pracovní list má také rozvíjet samostatnost a schopnost logického myšlení.

PRACOVNÍ LIST

1) Vypište příslušná čísla na řádky a sečtěte je.

1. řádek ……………………………… …….
2. řádek ………………………………… ….
3. řádek ……………………………………..
1. sloupec ……………………………………
2. sloupec ……………………………………
3. sloupec ……………………………………
1. úhlopříčka …………………………………
2. úhlopříčka …………………………………

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Co jsme zjistili?

………………………………………………………………………………………………

2) Víme, že každý magický čtverec má nějakou magickou konstantu. Zkuste doplnit prázdné čtverečky v následujících čtvercích. Do kolečka napište magickou konstantu příslušného čtverce.

8	**1**	**6**
3		**7**
	9	

5		
4	**6**	
9	**2**	**7**

6		**4**
	7	**9**
		8

PRACOVNÍ LIST - ŘEŠENÍ

1) Vypište příslušná čísla na řádky a sečtěte je.

1. řádek $4 + 9 + 2 = 15$
2. řádek $3 + 5 + 7 = 15$
3. řádek $8 + 1 + 6 = 15$
1. sloupec $4 + 3 + 8 = 15$
2. sloupec $9 + 5 + 1 = 15$
3. sloupec $2 + 7 + 6 = 15$
1. úhlopříčka $4 + 5 + 6 = 15$
2. úhlopříčka $2 + 5 + 8 = 15$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Co jsme zjistili?

Všude se objevuje výsledek 15 = magická konstanta magického čtverce

2) Víme, že každý magický čtverec má nějakou magickou konstantu. Zkuste doplnit prázdné čtverečky v následujících čtvercích. Do kolečka napište magickou konstantu příslušného čtverce.

15

8	1	6
3	5	7
4	9	2

18

5	10	3
4	6	8
9	2	7

21

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Pracovní list č. 2 – Počítání do 100 s magickými čtverci

Třída: druhá - třetí

Cíl aktivity: Hravou a nenásilnou formou si žáci procvičí základní početní operace s čísly do 100.

Předpokládané znalosti: sčítání a odčítání celých čísel do 100

Klíčové kompetence:

- **Kompetence k řešení problému -** žák pečlivě promýšlí různé možnosti vyplnění magických čtverců, hledá nejvhodnější rozložení čísel ve čtverci tak, aby získal výsledný magický čtverec, ověřuje správnost svých výsledků. Vyhledá informace vhodné k řešení problému, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.
- **Kompetence k učení** – žák procvičuje základní početní operace, poznává nové souvislosti v matematice, vytváří si komplexnější pohled na dané matematické jevy. Experimentuje s různými kombinacemi v doplňování magických čtverců, kriticky posuzuje své myšlenky a hledá optimální řešení. Samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti.
- **Kompetence komunikativní** – žák formuluje a vyjadřuje své myšlenky, názory a výsledky v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a matematicky správně.
- **Kompetence sociální a personální** – žák pracuje samostatně, přispívá k diskusi ve třídě, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, oceňuje zkušenosti druhých lidí.

Potřebný materiál: pracovní list, tužka

Metodický komentář: Žáci se pomocí pracovního listu seznámí s jinými příklady, než jsou zvyklí, procvičí základní početní operace, trénují správnou strategii k doplnění chybějících čísel. Pracovní list má také za cíl rozvíjet samostatnost a schopnost logického myšlení.

PRACOVNÍ LIST

1) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl:

a) 15

4		**2**
	5	

b) 30

15		
		12
7		

c) 33

13		
	11	
6		

d) 30

	10	
12		**16**

e) 24

7		
12	**8**	

f) 39

16		
12		**10**

2) Jsou následující čtverce magické? Zjisti to výpočtem.

13	7	9	
4	8	17	
12	14	3	

5	10	9	
12	8	4	
7	6	11	

2	9	14	13	
15	12	3	8	
5	6	17	10	
16	11	4	7	

2	24	14	28	
16	26	33	22	
20	6	32	10	
30	11	18	8	

PRACOVNÍ LIST – ŘEŠENÍ

1) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl:

a) 15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

b) 30

15	2	13
8	10	12
7	18	5

c) 33

13	4	16
14	11	8
6	18	9

d) 30

4	18	8
14	10	6
12	2	16

e) 24

7	6	11
12	8	4
5	10	9

f) 39

16	9	14
11	13	15
12	17	10

2) Jsou tyto čtverce magické? Zjisti to výpočtem.

NENÍ MAGICKÝ ČTVEREC

			29
13	7	9	29
4	8	17	29
12	14	3	29
29	29	29	24

MAGICKÝ ČTVEREC

			24
5	10	9	24
12	8	4	24
7	6	11	24
24	24	24	24

MAGICKÝ ČTVEREC

				38
2	9	14	13	38
15	12	3	8	38
5	6	17	10	38
16	11	4	7	38
38	38	38	38	38

NENÍ MAGICKÝ ČTVEREC

				97
2	24	14	28	68
16	26	33	22	97
20	6	32	10	68
30	11	18	8	67
68	67	97	68	68

Pracovní list č. 3 – Počítání do 1 000 s magickými čtverci

Třída: čtvrtá - pátá

Cíl aktivity: Hravou a nenásilnou formou si žáci procvičí základní početní operace s čísly do 1 000.

Předpokládané znalosti: sčítání a odčítání celých čísel do 1 000

Klíčové kompetence:

- **Kompetence k řešení problému -** žák pečlivě promýšlí různé možnosti vyplnění magických čtverců, hledá nejvhodnější rozložení čísel ve čtverci tak, aby získal výsledný magický čtverec, ověřuje správnost svých výsledků. Vyhledá informace vhodné k řešení problému, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.
- **Kompetence k učení** – žák procvičuje základní početní operace, poznává nové souvislosti v matematice, vytváří si komplexnější pohled na dané matematické jevy. Experimentuje s různými kombinacemi v doplňování magických čtverců, kriticky posuzuje své myšlenky a hledá optimální řešení. Samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti.
- **Kompetence komunikativní** – žák formuluje a vyjadřuje své myšlenky, názory a výsledky v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a matematicky správně.
- **Kompetence sociální a personální** – žák pracuje samostatně, přispívá k diskusi ve třídě, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, oceňuje zkušenosti druhých lidí.

Potřebný materiál: pracovní list, tužka

Metodický komentář: Žáci se pomocí pracovního listu seznámí s jinými příklady, než jsou zvyklí, procvičí základní početní operace, trénují správnou strategii k doplnění chybějících čísel. Pracovní list má také za cíl rozvíjet samostatnost a schopnost logického myšlení.

PRACOVNÍ LIST

1) Najdeš v magických čtvercích chybu? V každém čtverci jsou vždy dva čtverečky navzájem vyměněné. Najdi a zakroužkuj je. Nápovědou ti je to, že se jedná o magické čtverce.

16	3	2	13
5	10	9	8
11	6	7	12
4	15	14	1

7	12	3	4
2	13	8	11
16	1	10	5
9	6	15	4

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
15	6	19	2	23

10	9	14
11	13	15
12	17	16

2) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl stejný. Do kolečka napiš konstantu, která se objevuje ve čtverci.

30		
	33	
37		**36**

	209	
211	**213**	
	217	

321		**319**
	322	
		323

134		**145**	**131**
	137		
135	**141**	**140**	
146			**143**

PRACOVNÍ LIST - ŘEŠENÍ

1) Najdeš v magických čtvercích chybu? V každém čtverci jsou vždy dva čtverečky navzájem vyměněné. Najdi a zakroužkuj je. Nápovědou ti je to, že se jedná o magické čtverce.

16	3	2	13
5	10	9	8
11	6	7	12
4	15	14	1

7	12	3	4
2	13	8	11
16	1	10	5
9	6	15	4

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
15	6	19	2	23

10	9	14
11	13	15
12	17	16

2) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl stejný. Do kolečka napiš konstantu, která se objevuje ve čtverci.

99

30	35	34
37	33	29
37	31	36

639

216	209	214
211	213	215
212	217	210

966

321	326	319
320	322	327
325	318	323

554

134	144	145	131
139	137	136	142
135	141	140	138
146	132	133	143

Pracovní list č. 4 – Desetinná čísla v magických čtvercích

Třída: šestá - sedmá

Cíl aktivity: Hravou a nenásilnou formou si žáci procvičí základní početní operace s celými čísly i desetinnými čísly.

Předpokládané znalosti: sčítání a odčítání celých a desetinných čísel

Klíčové kompetence:

- **Kompetence k řešení problému -** žák pečlivě promýšlí různé možnosti vyplnění magických čtverců, hledá nejvhodnější rozložení čísel ve čtverci tak, aby získal výsledný magický čtverec, ověřuje správnost svých výsledků. Vyhledá informace vhodné k řešení problému, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.
- **Kompetence k učení** – žák procvičuje základní početní operace, poznává nové souvislosti v matematice, vytváří si komplexnější pohled na dané matematické jevy. Experimentuje s různými kombinacemi v doplňování magických čtverců, kriticky posuzuje své myšlenky a hledá optimální řešení. Samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti.
- **Kompetence komunikativní** – žák formuluje a vyjadřuje své myšlenky, názory a výsledky v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a matematicky správně.
- **Kompetence sociální a personální** – žák pracuje samostatně, přispívá k diskusi ve třídě, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, oceňuje zkušenosti druhých lidí.

Potřebný materiál: pracovní list, tužka

Metodický komentář: Žáci se pomocí pracovního listu seznámí s jinými příklady, než jsou zvyklí, procvičí základní početní operace, trénují správnou strategii k doplnění chybějících čísel. Pracovní list má také za cíl rozvíjet samostatnost a schopnost logického myšlení.

PRACOVNÍ LIST

1) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl stejný. Do kolečka napiš konstantu, která se objevuje ve čtverci.

120

32		
24	40	

300		
	900	100
		1500

2,7	1,2	3,3
3,0		
	3,6	

		5,7
	6,2	
6,7		7,7

51,9

20,75		18,45
		13,85

7,4		
	6,6	
2,3		5,8

7,5		
13,5	11,1	
12,3		

		26,1
	23,6	
21,1	18,6	

6,39

	2,09	
	2,13	
		2,10

PRACOVNÍ LIST - ŘEŠENÍ

1) Doplň čísla do čtverce tak, aby součet v každém řádku, sloupci i v obou úhlopříčkách byl stejný. Do kolečka napiš konstantu, která se objevuje ve čtverci.

120

32	72	16
24	40	56
64	8	48

2700

300	1300	1100
1700	900	100
700	500	1500

7,2

2,7	1,2	3,3
3,0	2,4	1,8
1,5	3,6	2,1

18,6

4,7	8,2	5,7
7,2	6,2	5,2
6,7	4,2	7,7

51,9

20,75	12,7	18,45
15	17,3	19,6
16,15	21,9	13,85

19,8

7,4	1,5	10,9
10,1	6,6	3,1
2,3	11,7	5,8

33,3

7,5	15,9	9,9
13,5	11,1	8,7
12,3	6,3	14,7

70,8

16,1	28,6	26,1
33,6	23,6	13,6
21,1	18,6	31,1

6,39

2,16	2,09	2,14
2,11	2,13	2,15
2,12	2,17	2,10

Pracovní list č. 5 – Opakování s magickými čtverci

Třída: osmá - devátá

Cíl aktivity: Hravou a nenásilnou formou si žáci procvičí základní početní operace s celými čísly i desetinnými čísly.

Předpokládané znalosti: sčítání a odčítání celých a desetinných čísel

Klíčové kompetence:

- **Kompetence k řešení problému** - žák pečlivě promýšlí různé možnosti vyplnění magických čtverců, hledá nejvhodnější rozložení čísel ve čtverci tak, aby získal výsledný magický čtverec, ověřuje správnost svých výsledků. Vyhledá informace vhodné k řešení problému, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.
- **Kompetence k učení** – žák procvičuje základní početní operace, poznává nové souvislosti v matematice, vytváří si komplexnější pohled na dané matematické jevy. Experimentuje s různými kombinacemi v doplňování magických čtverců, kriticky posuzuje své myšlenky a hledá optimální řešení. Samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti.
- **Kompetence komunikativní** – žák formuluje a vyjadřuje své myšlenky, názory a výsledky v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a matematicky správně.
- **Kompetence sociální a personální** – žák pracuje samostatně, přispívá k diskusi ve třídě, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, oceňuje zkušenosti druhých lidí.

Potřebný materiál: pracovní list, tužka

Metodický komentář: Žáci se pomocí pracovního listu seznámí s jinými příklady, než jsou zvyklí, procvičí základní početní operace, trénují správnou strategii k doplnění chybějících čísel. Pracovní list má také za cíl rozvíjet samostatnost a schopnost logického myšlení.

PRACOVNÍ LIST

1) Doplň magický čtverec a magickou konstantu.

6	3		15
	16	5	4
7		11	
			1

1,7	7,7	
10,1		0,5
4,1		

300		486
	579	
		858

11			20	3
	12			16
17		13	21	9
10		1	14	
23	6			15

2) Doplň následující čísla do čtverce tak, aby vznikl magický čtverec.
135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175

3) Sestav magický čtverec velikosti 3 x 3 tak, aby magická konstanta byla 18.

18

Nápověda k jednomu z řešení:

4	**9**	**2**
	5	

PRACOVNÍ LIST – ŘEŠENÍ

1) Doplň magický čtverec a magickou konstantu.

34

6	3	10	15
9	16	5	4
7	2	11	14
12	13	8	1

15,9

1,7	7,7	6,5
10,1	5,3	0,5
4,1	2,9	8,9

1737

300	951	486
765	579	393
672	207	858

65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

2) Doplň následující čísla do čtverce tak, aby vznikl magický čtverec.
135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175

465

170	135	160
145	155	165
150	175	140

3) Sestav magický čtverec velikosti 3 x 3 tak, aby magická konstanta byla 18.

18

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Nápověda k jednomu z řešení:

15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6 Závěry a doporučení

Hlavním cílem diplomové práce je studium základních vlastností a historický pohled na magické čtverce. Velká část je také věnována využití magických čtverců v hodinách matematiky.

Celkově zájem o matematiku na základních školách klesá, a tak mají učitelé matematiky těžký úkol, aby zvýšili u žáků zájem o tento předmět. Určitě jednou z cest je využití různých moderních technologií v hodinách matematiky. Ať už se jedná o tablety nebo interaktivní tabule, vždy je třeba promyslet, aby se s nimi pracovalo za nějakým účelem a ne jen využít zbytek času, který zbývá do konce hodiny. Pro učitele tyto technologie urychlují a usnadňují práci, žákům mohou pomoci v názornosti a lepší pochopení dané problematiky. V současné době jsou děti obklopeni IT technologiemi, ať už v každodenním životě nebo ve škole, a proto pracovní listy v papírové podobě mohou být pro žáky příjemným zpestřením.

Na malém vzorku žáků jsem vyzkoušela vyplňování pracovních listů. Většina žáků se shodla, že opakování probírané látky si rádi zpestří touto formou. Práce s pracovními listy se žákům líbila a uvítali by ji při výuce matematiky.

Touto diplomovou prací jsem chtěla čtenáře seznámit s magickými čtverci a jejich historií, s latinskými čtverci, Sudoku a Kakuro. Díky pracovním listům, které jsou uvedeny v poslední kapitole, má tato práce sloužit k tomu, aby se žáci na základních školách seznámili s magickými čtverci. Pro učitele to může být návod, jak s žáky procvičovat danou látku jinými způsoby, než jen běžným počítáním.

Seznam použité literatury

[1] BOSÁK, Juraj. *Latinské štvorce*. Praha: Mladá fronta, 1976, 88 s. Škola mladých matematiků.

[2] FUCHS, Eduard. *Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti.* [online] Přírodovědecká fakulta MU, Ústav matematiky a statistiky. Dostupné z www: <https://www.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf>.

[3] Gaudího katedrála. [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <http://astrologie-dagmar.cz/obrazek/jantra5.jpg>.

[4] *Chvilka pro tebe*. Praha: Europress, 2017, č. 1. ISSN 1211-4324.

[5] HEINZ, Harvey. Magic Square. [online]. [cit. 2017-02-15]. Dostupné z www: <http://www.magic-squares.net/square-update.htm>.

[6] Historie magického čtverce. Hlavolamy.info. [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <http://www.hlavolamy.info/news/historie-magickeho-ctverce-predchudce-patnactky>.

[7] Kakuro. Wikipedia. [online]. [cit. 2017-02-22]. Dostupné z www: <https://en.wikipedia.org/wiki/Kakuro>.

[8] Kakuro online. [online]. [cit. 2017-02-22]. Dostupné z www: <www.kakuros.com/>.

[9] Latinské čtverce. Wikipedia. [online]. [cit. 2017-03-01]. Dostupné z www: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Latinsk%C3%BD_%C4%8Dtverec>.

[10] Magic square. Wikipedia. [online]. [cit. 2017-02-22]. Dostupné z www: <https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square>.

[11] Magic Square. Wolfram Mathworld. [online]. [cit. 2017-02-15]. Dostupné z www: <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.htmlI>.

[12] Magické čtverce. Magický deník. [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <http://nina-pina.webgarden.cz/prispevky/magie/magicke-ctverce>.

[13] Magické čtverce. Mysteria. [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <http://okultismus.mysteria.cz/index2.php?m=002ctverce>.

[14] Magický čtverec Sator [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/71/Sator_Square_at_Opp%C3%A8de.jpg/220px-Sator_Square_at_Opp%C3%A8de.jpg>.

[15] MATLAB. Wikipedia. [online]. [cit. 2017-03-12]. Dostupné z www: <https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>.

[16] Melancolia I. Wikipedia. [online]. [cit. 2016-10-31]. Dostupné z www: <https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I>.

[17] MOHELSKÁ, Eva. *Využití magických čtverců, hlavolamů sudoku a číselných schémat ve vyučování matematiky a v zájmové matematice na 1. stupni základní školy.* Diplomová práce. Pedagogická fakulta MU, Brno 2007, 102 s.

[18] KATRNOŠKA, František, KŘÍŽEK, Michal, SOMER, Lawrence. *Magické čtverce a sudoku.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2008, roč. 53, č. 2, s. 113-124.

[19] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky.* Praha: Argo/Dokořán, 2012, 542 s. ISBN 978-80-257-0705-0.

[20] PEŠKOVÁ, Lucie. *Matematika Sudoku*. Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc 2011, 65 s.

[21] POLÁŠEK, Martin. *Latinské a magické čtverce.* Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta MU, Brno 2011, 64 s.

[22] ROONEY, Anne. *50 supertriků pro děti jak na matematiku*. Praha: Fortuna, 2012, 192 s. ISBN 978-80-7321-621-4.

[23] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce*. [online], Matematický korespondenční seminář. Dostupné z www: <https://mks.mff.cuni.cz/library/MagickeCtverceTR/MagickeCtverceTR.pdf>.

[24] Scientific American. [online]. [cit. 2017-03-01]. Dostupné z www: <http://martin-gardner.org/pix/MGJ%20SciAm%201959_11.jpg>.

[25] Sudoku online. [online]. [cit. 2017-02-14]. Dostupné z www: <http://sudokuonline.cz/>.

[26] ŠAROUNOVÁ, Alena. *Magické čtverce a další číselná schémata: alfabetník 2*. Praha: Prometheus, 2005, 77 s. ISBN 80-7196-315-1.

Seznam obrázků