

## Oponentský posudek diplomové práce

*Autor práce:* Bc. Pavel Holšán

*Studijní obor:* Učitelství fyziky a matematiky pro střední školy, Přírodovědecká fakulta JČU, ČB

*Název práce:* Okrajová úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s jednostrannou podmínkou.

*Zpracovatel posudku:* doc. Dr. rer. nat. Ing. Jan Valdman

Předložená práce je věnována řešení okrajové úlohy 4. řádu, která představuje linearizaci nelineárního modelu nosníku v malých deformacích. Pro dosažení jednoznačnosti řešení se volí 4 okrajové podmínky. Protože je úloha analyzována v jedné prostorové dimenzi, volí se dvě okrajové podmínky na levém a dvě na pravém konci intervalu. Kromě předepsané hodnoty funkce na koncích se uvažují buď hodnoty první nebo druhé derivaci funkce. Zajímavé je v práci především zahrnutí jednostranné vazby ve vnitřním bodě intervalu. To mechanicky představuje zavedení jednostranné podpory (překážky), přes kterou se nosník nemůže prohnout. Pro všechny případy, ať už s překážkou nebo bez ní, se odvozují vlastní funkce operátoru 4. řádu z odpovídající úlohy na vlastní čísla. Vlastní číslo fakticky představuje tlakovou sílu působící na nosník. Nalezení vlastních čísel a odpovídajících vlastních funkcí lze plně analyticky; charakteristická rovnice je 4. řádu a vlastní funkce jsou ve tvaru periodických funkcí ve tvaru komplexních vln. Tvary nalezených vlastních funkcí jsou zobrazovány v systému Mathematica v rámci četných příkladů.

Práce je formálně precizně zpracována, obsahuje také několik překlepů, které by se dalo vylepšit. Protože je autor zároveň student učitelství, navrhl bych použitá odvození systematicky začlenit do systému Mathematica s tím, že by se po zadání vstupních parametrů (např. délky intervalu, umístění jednostranné podpory a specifikace okrajových podmínek) automaticky vygenerovala vlastní čísla a odpovídající vlastní funkce. Vznikl by tím programový kód, který by měl obecnější uplatnění pro ostatní uživatele a studenty, čímž by se zvýšila užitečnost práce. V závěru se autor zmiňuje o možnosti zobecnění pro dvě jednostranné podpory. Mě by rovněž zajímalo, jak by autor prakticky využil získané vlastní funkce pro řešení úlohy na průhyb nosníku s konkrétní pravou stranou, např. konstantní silou, která tlačí na nosník. Takový linearizovaný model (bez uvážení podpory) by zřejmě vedl na tzv. Timoshenkův nosník.

Celkově hodnotím práci za zdařilou a doporučuji.

V Českých Budějovicích, dne 10. 5. 2016.



doc. Dr. rer. nat. Ing. Jan Valdman  
Ústav matematiky a biomatematiky  
Přírodovědecká fakulta, JČU, ČB

## Posudek oponenta diplomové práce

Autor	Bc. Pavel Holšan
Název práce	Okrajová úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s jednostrannou podmínkou
Obor	Matematika Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Přírodovědecká fakulta Ústav matematiky a biomatematiky

Diplomová práce pana Bc. Pavla Holšana je věnována úloze na vlastní čísla pro lineární diferenciální rovnici 4. řádu s konstantními koeficienty

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0 \quad x \in (0, l) \quad (1)$$

s různými okrajovými a dodatečnými podmínkami, kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  je spektrální parametr.

Pan Bc. Pavel Holšan postupuje velice systematicky. První kapitola je úvod do problematiky. V kapitolách 2 a 3 vyšetřuje úlohu pro 3 typy homogenních okrajových podmínek, které označil  $0 - 2, 0 - 2$ ,  $0 - 2, 0 - 1$ ,  $0 - 1, 0 - 1$  podle vyskytujících se derivací, kde např.  $0 - 2, 0 - 2$  znamená  $u(0) = 0, u''(0) = 0, u(l) = 0, u''(l) = 0$ . Zde se jedná vesměs o známé výsledky pro lineární úlohu na vlastní čísla. Jedná se o přípravné kapitoly, jejichž výsledky následně používá v dalších kapitolách. Zaujala mě systematickost s jakou téma zpracoval. Tuto část textu lze určitě použít při výuce úloh na vlastní čísla pro rovnice 4. řádu v kurzech diferenciálních rovnic.

V kapitolách 4 a 5 autor studuje úlohu s oboustrannou překážkou ve vnitřním bodě  $x_0$ . Studované úlohy na vlastní čísla se pak sestávají z rovnice (1), okrajových podmínek výše uvedeného typu a přechodové podmínky, kterou zde přepisují přesně dle hodnocené práce:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 0 \\ u'_-(x_0) &= u'_+(x_0) \\ u''_-(x_0) &= u''_+(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} u'''(x) &\leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u'''(x). \end{aligned}$$

Zde mi nebylo jasné, proč se pro jednostranné limity pro první a druhou derivaci používá jiný zápis než pro jednostranné limity pro třetí derivaci. Dále následuje podrobná analýza nalezení posloupnosti vlastních čísel a vlastních funkcí. Stále se jedná o lineární úlohu i když nestandardního typu. Vlastní čísla a vlastní funkce jsou nalezeny pomocí metody napojení jedné lineární kombinace fundamentálního systému s jinou lineární kombinací fundamentálního systému tak, aby byly splněny okrajové podmínky i přechodová podmínka. Opět pan Bc. Pavel Holšan postupuje velmi systematicky.

Kapitoly 5 a 6 se týkají jednostranné podmínky  $u(x_0) \geq 0$ . Zde se již jedná o nelineární úlohu, která je ovšem stále pozitivně homogenní. Takže můžeme definovat vlastní funkce a vlastní čísla. Postup je opět založen na napojování a rozlišení několika případů vzhledem ke splnění přechodové podmínky. Nechybí ani analýza hladkosti řešení. Tato část je na celé práci z vědeckého hlediska nejcennější. Pravděpodobně by si zasloužila sepsat a publikovat v časopise.

K práci mám dvě drobné výtky:

- Grafy funkcí by měly být odlišeny typem čar spíše než barvou (s ohledem na tisk). Barevný tisk je stále mnohem dražší.
- Systematicky se v práci vyskytuje tato formální chyba: přibližně se vypočte vlastní číslo a zapíše se např.  $\lambda_1 \doteq 39.48$  a následně se napíše, že odpovídající vlastní funkce je  $u_1(x) = K_1 (\cos(39.48x) - 1)$ . Mělo by se ale správně psát:  $u_1(x) \doteq K_1 (\cos(39.48x) - 1)$ .

Dále mám dva dotazy:

- Proč je volena přechodová podmínka zrovna takto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} u'''(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u'''(x)$$

Lze uvažovat opačnou nerovnost?

- Co se stane, je-li  $x_0 = l/2$  ?

Práci hodnotím jako velmi zdařilou a doporučuji ji k obhajobě. Navrhuji hodnocení **Výborně**.

V Plzni dne 22.5.2016

  
Petr Girg  
oponent