Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu iterační metodou

Bakalářská práce

Michaela Zahradníková

Školitel: Prof. RNDr. Josef Daněček, CSc.

České Budějovice 2016

Zahradníková, M., 2016: Řešení obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu iterační metodou. [Solving second order ordinary differential equations using iterative method. Bc. Thesis, in Czech] - 39 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
The subject of this Thesis is to show the existence of solution to Dirichlet boundary value problems for quasilinear ordinary differential equations of second order. The main tool is an iterative process which under certain conditions converges to the solution of the given problem. Theoretical results are applied in several concrete examples.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 10. dubna 2016 ....

Michaela Zahradníková

Poděkování

Děkuji svému školiteli Prof. RNDr. Josefu Daněčkovi, CSc. za odborné vedení práce, cenné rady a věnovaný čas.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá řešením obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu iterační metodou. Budeme uvažovat kvazilineární (tj. lineární vzhledem k nejvyšší derivaci) rovnice tvaru

$$\frac{d}{dt}F(t, u(t), u'(t)) - f(t, u(t), u'(t)) = 0 \tag{1.1}$$

na intervalu $(0, 1)$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Zavedeme iterační proces, pomocí něhož budeme hledat řešení této okrajové úlohy. Ukážeme, že při splnění jistých podmínek kladených na funkce F a f řešení existuje a iterační proces k tomuto řešení konverguje nezávisle na volbě počáteční funkce.

Text je členěn do několika kapitol. Nejprve zavedeme základní pojmy používané v průběhu celé práce. Kapitoly 3 a 4 vycházejí z knihy A. I. Koševeleva [5]. Jsou věnovány iteračnímu procesu, jeho aplikaci pro řešení kvazilineárních diferenciálních rovnic 2. řádu a důkazu existence řešení. V poslední kapitole pak demonstrujeme teoretické výsledky na konkrétních příkladech. Na závěr diskutujeme použitelnost iteračního procesu (rychlost konvergence, jeho univerzálnost apod.)

V práci je užíváno obvyklé matematické značení. Definice, věty a pomocná tvrzení jsou číslovány dle umístění v jednotlivých kapitolách. Text je vysázen systémem LaTeX a obrázky vykresleny v programech Gnuplot a Maple 12.

Kapitola 2

Základní pojmy

2.1 Normované lineární prostory, Hilbertovy prostory

2.1.1 Normované lineární prostory

Definice 2.1 ([1, Definice 1.18]) Nezápornou konečnou funkci $\| \cdot \|_X : X \to [0, \infty)$ na lineárním prostoru X nazveme *normou*, jestliže pro všechna $u, v \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

(i) $\|u\|_X = 0$, právě když $u = o$, kde o je nulový prvek X,

(ii) $\lambda\|u\|_X = |\lambda|\|u\|_X$,

(iii) $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$ (trojúhelníhová nerovnost).

Dvojici $(X, \| \cdot \|_X)$ nazýváme *normovaný lineární prostor.*

Definice 2.2 [1, Definice 1.19] Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je *Cauchyovská v normě* $\|\cdot\|_X$ pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ platí $\|u_m - u_n\|_X < \varepsilon$.

Definice 2.3 ([1, Definice 1.19]) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že je tento prostor *Banachův*, jestliže každá Cauchyovská posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ v normě $\| \cdot \|_X$ konverguje v téže normě k nějakému prvku $u \in X$.

Lemma 2.1 *Nechť $(X, \| \cdot \|_X)$ je normovaný lineární prostor. Nechť pro posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ existuje konstanta $K \in (0, 1)$ taková, že*

$$\|u_{n+1} - u_n\|_X \leq K\|u_n - u_{n-1}\|_X \tag{2.1}$$

pro všechna $n = 2, 3, 4, \cdots$. Potom je tato posloupnost Cauchyovská.

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ splňuje (2.1) s nějakým $K \in (0,1)$. Několikanásobným použitím trojúhelníkové nerovnosti normy $\|\cdot\|_X$ máme pro všechna $n, k = 1, 2, \cdots$, že

$$\begin{aligned} \|u_{n+k} - u_n\|_X \leq \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\|_X + \|u_{n+k-1} - u_{n+k-2}\|_X \\ + \cdots + \|u_{n+2} - u_{n+1}\|_X + \|u_{n+1} - u_n\|_X \,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Opakovaným použitím (2.1) dostáváme dále, že

$$\begin{aligned} \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\|_X &\leq K\|u_{n+k-1} - u_{n+k-2}\|_X \leq K^2\|u_{n+k-2} - u_{n+k-3}\|_X \\ &\leq \cdots \leq K^{k-2}\|u_{n+2} - u_{n+1}\|_X \\ &\leq K^{k-1}\|u_{n+1} - u_n\|_X \,. \end{aligned}$$

Takto odhadneme postupně všechny členy v (2.2) a díky $K \in (0,1)$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} \|u_{n+k} - u_n\|_X &\leq K^{k-1}\|u_{n+1} - u_n\|_X + K^{k-2}\|u_{n+1} - u_n\|_X \\ &\quad + \cdots + K\|u_{n+1} - u_n\|_X + \|u_{n+1} - u_n\|_X \\ &= (K^{k-1} + K^{k-2} + \cdots + K + 1)\|u_{n+1} - u_n\|_X \\ &= \tfrac{1-K^k}{1-K}\|u_{n+1} - u_n\|_X \leq \tfrac{1}{1-K}\|u_{n+1} - u_n\|_X \,. \end{aligned}$$

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ tedy máme odhad

$$\|u_m - u_n\|_X \leq \frac{1}{1-K}\|u_{n+1} - u_n\|_X \,,$$

ze kterého n-násobným použitím (2.1) plyne, že

$$\|u_m - u_n\|_X \leq \frac{1}{1-K}K^n\|u_1 - u_0\|_X \,.$$

Pro důkaz toho, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská, stačí tedy ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{1-K}K^n\|u_1 - u_0\|_X < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq n_0$. To splňuje volba

$$n_0 \geq \log_K \frac{(1-K)\varepsilon}{\|u_1 - u_0\|_X} \,.$$

□

2.1.2 Hilbertovy prostory

Definice 2.4 ([1, Definice 1.25]) Nechť X je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ je *skalární součin* na X, jestliže pro všechna $u, v, w \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

(i) $(u|u) \geq 0$ a $(u|u) = 0$ právě když $u = o$, kde o je nulový prvek X (pozitivní definitnost),

(ii) $(u|v) = (v|u)$ (symetrie),

(iii) $(\lambda u|v) = \lambda(u|v)$ a $(u + w, v) = (u|v) + (w|v)$.

Dvojici $(X, (\cdot|\cdot))$ nazýváme *prostor se skalárním součinem* nebo též *unitární prostor*.

Věta 2.2 *(Norma indukovaná skalárním součinem, [1, Věta 1.26]) Nechť $(X, (\cdot|\cdot))$ je unitární prostor. Zobrazení $\|\cdot\|_{(X,(\cdot|\cdot))} : X \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{(u|u)}$ je norma na X.*

Poznámka 2.1 Normu na unitárním prostoru $(X, (\cdot|\cdot))$ budeme také někdy značit zkráceně $\|\cdot\|_X$.

Věta 2.3 *([1, Věta 1.27]) Nechť $(X, (\cdot|\cdot))$ je unitární prostor. Potom pro všechna $u, v \in X$ platí tzv. Cauchyova-Schwarzova nerovnost*

$$(u|v) \leq \|u\|_X \|v\|_X \tag{2.3}$$

a rovnoběžníkové pravidlo

$$\|u + v\|_X^2 + \|u + v\|_X^2 \leq 2 \left(\|u\|_X + \|v\|_X\right). \tag{2.4}$$

Definice 2.5 (Hilbertův prostor, [1, Definice 1.29]) Nechť $(X, (\cdot|\cdot))$ je unitární prostor a $(X, \|\cdot\|_X)$ je Banachův prostor. Potom $(X, (\cdot|\cdot))$ se nazývá *Hilbertův prostor*.

Pro účely dalšího textu nyní zavedeme pojem lineárního operátoru (zobrazení).

Definice 2.6 Nechť X, Y jsou lineární prostory. Zobrazení $T : X \to Y$ nazveme *lineárním*, jestliže platí:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \qquad \forall u, v \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

V případě $Y = \mathbb{R}$ nazýváme lineární zobrazení *lineárním funkcionálem* a značíme obvykle F, případně f.

Definice 2.7 ([3, Definice 3.4]) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Řekneme, že lineární operátor $T : X \to Y$ je *spojitý*, jestliže pro každou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a prvek $u \in X$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{v } X$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = T(u) \quad \text{v } Y\,.$$

Definice 2.8 ([3, Definice 3.4]) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Řekneme, že lineární operátor $T : X \to Y$ je *omezený*, existuje-li konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$\|T(u)\|_Y \leq c\|u\|_X\,. \tag{2.5}$$

Věta 2.4 *([3, Věta 3.2]) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Lineární operátor $T : X \to Y$ je spojitý právě tehdy, je-li omezený.*

Definice 2.9 Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ je Banachův prostor. Prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na X nazveme *duálním prostorem* k prostoru X a budeme ho značit X', resp. $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.

Definice 2.10 Na duálním prostoru $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ je norma definována jako

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})} = \sup_{\substack{u\in X,\\ \|u\|_X=1}} |F(u)|\,. \tag{2.6}$$

Definice 2.11 ([1], str. 9) Nechť $M \subset H$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Definujme lineární zobrazení $P_M : H \to M$ tak, že pro všechna $f \in H$ je $P_M f$ jediný prvek $u \in M$ splňující

$$(f - u|v)_H = 0 \quad \forall v \in M\,.$$

Toto zobrazení se nazývá *ortogonální projekce*.

Věta 2.5 *(Rieszova věta o reprezentaci, [1, Věta 1.36]) Nechť H je Hilbertův prostor a f spojitý lineární funkcionál na H. Pak existuje jediný prvek $y \in H$ tak, že*

$$f(x) = (x|y)_H \quad \forall x \in H. \tag{2.7}$$

Navíc $\|f\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \|y\|_H$.

Důkaz. ([1], str. 10) Je-li $f \equiv 0$, položíme $y = o$. V opačném případě je

$$M = \{x \in H \,:\, f(x) = 0\}$$

díky linearitě a spojitosti funkcionálu f uzavřený podprostor H, přičemž $M^\perp \neq \emptyset$ (neboť $M \neq H$). Zvolme $h \in H$ tak, aby $h \notin M$. Nechť

$$h^\perp = \frac{h - P_M h}{\|h - P_M h\|_H},$$

kde $P_M : H \to M$ je ortogonální projekce na M. Potom

$$\|h^\perp\|_H = 1 \tag{2.8}$$

a

$$(h^\perp | x)_H = 0 \quad \forall x \in M. \tag{2.9}$$

Pro libovolné $x \in H$ položme

$$v = x - \frac{f(x)}{f(h^\perp)} h^\perp,$$

kde $f(h^\perp) \neq 0$, neboť $h^\perp \notin M$ ($h^\perp \in M$ by totiž podle (2.9) implikovalo $\|h^\perp\|_H = 0$, což by byl spor s (2.8)). Vzhledem k linearitě f dostáváme

$$f(v) = f(x) - \frac{f(x)}{f(h^\perp)} f(h^\perp) = f(x) - f(x) = 0\,,$$

a tedy $v \in M$. Podle (2.9) je

$$0 = (h^\perp | v)_H = \left(h^\perp \,\middle|\, x - \frac{f(x)}{f(h^\perp)} h^\perp \right)_H = (h^\perp | x)_H - \left(h^\perp \,\middle|\, \frac{f(x)}{f(h^\perp)} h^\perp \right)_H .$$

Odtud a z (2.8) platí

$$(h^\perp | x)_H = \frac{f(x)}{f(h^\perp)}\,.$$

Odtud po úpravě

$$f(x) = f(h^\perp)(h^\perp | x)_H = (f(h^\perp) h^\perp | x)_H$$

odkud je již vidět, že hledané $y \in H$ je $y = f(h^\perp) h^\perp$.

Kdyby existovaly dva prvky $y_1, y_2 \in H$ splňující (2.7) potom by pro všechna $x \in H$ platilo

$$(x | y_1 - y_2)_H = (x | y_1)_H - (x | y_2)_H = f(x) - f(x) = 0$$

a volbou $x = y_1 - y_2$ bychom dostali

$$\|y_1 - y_2\|_H^2 = (y_1 - y_2 | y_1 - y_2)_H = 0\,,$$

tedy $y_1 = y_2$.

Podle (2.6) a (2.7) máme

$$\|f\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \sup_{\substack{x\in H,\\ \|x\|_H=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in H,\\ \|x\|_H=1}} |(x|y)_H| \,.$$

Na jednu stranu je podle (2.3)

$$\sup_{\substack{x\in H,\\ \|x\|_H=1}} |(x|y)_H| \leq \sup_{\substack{x\in H,\\ \|x\|_H=1}} \|x\|_H \|y\|_H = \|y\|_H$$

na druhou stranu volbou $x = y/\|y\|_H$ máme

$$\sup_{\substack{x\in H,\\ \|x\|_H=1}} |(x|y)_H| \geq \left(\frac{y}{\|y\|_H} \middle| y \right) = \|y\|_H \,.$$

Tedy $\|f\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})} = \|y\|_H$. □

2.2 Prostory funkcí

2.2.1 Prostory spojitých funkcí

Definice 2.12 Symbolem $C_0^\infty((a,b))$ označme množinu všech funkcí u z prostoru $C^\infty((a,b))$, pro které navíc

$$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0 \,, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Příklad 2.1 Funkce

$$u(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{pro } x \notin (-1,1) \end{cases}$$

patří do $C_0^\infty((a,b))$ pro všechna $-\infty \leq a < -1$, $1 < b \leq \infty$.

Definice 2.13 Řekneme, že funkce f je *Hölderovsky spojitá* na intervalu $[a,b]$ s exponentem $0 < \lambda \leq 1$, jestliže existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro každé $x, y \in [a,b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\lambda \,.$$

Prostor Hölderovsky spojitých funkcí budeme značit $C^{0,\lambda}([a,b])$. Pro $\lambda = 1$ těmto funkcím říkáme *Lipschitzovsky spojité* funkce.

Příklad 2.2 Funkce

$$f(x) = |x|^{\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

je Hölderovsky spojitá na intervalu $[-1, 1]$, ale nemá derivaci v bodě 0 pro žádné $\lambda \in (0, 1]$, tj. není třídy $C^1([-1, 1])$.

Definice 2.14 Řekneme, že funkce f je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro jakákoliv $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b$ platí implikace

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon.$$

Prostor absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ budeme značit $AC([a, b])$.

Věta 2.6 *([1, Věta 1.116]) Nechť funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá. Potom derivace f' existuje pro skoro všechna $x \in (a, b)$ a pro všechna $x, y \in [a, b]$ platí*

$$f(y) - f(x) = \int\limits_{x}^{y} f'(\xi) d\xi \,.$$

Příklad 2.3

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je absolutně spojitá funkce.

Příklad 2.4 Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá, ale není absolutně spojitá.

2.2.2 L_p prostory

Definice 2.15 (Lebesgueův integrál, [8], str. 296) Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b]$ Lebesgueův integrál, když existuje absolutně spojitá funkce $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tak, že platí $F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$. Lebesgueův integrál definujeme rovností

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Definice 2.16 ([4, Sekce 12.7]) Nechť $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$. Množinu všech funkcí u, pro které je Lebesgueгův integrál

$$\int_a^b |u(x)|^p dx < \infty \,,$$

značíme $L_p((a,b))$.

Poznámka 2.2 ([4], str. 73) Dvě funkce $u_1, u_2 \in L_2((a,b))$ budeme považovat za sobě rovné (totožné), budou-li se lišit pouze na množině nulové míry.

Definice 2.17 ([4, Sekce 12.7, 12.8]) Na prostoru $L_p((a,b))$ je definována norma [1]

$$\|u\|_{L_p((a,b))} = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} , \quad 1 \leq p < \infty \,,$$

respektive pro $p = \infty$

$$\|u\|_{L_\infty((a,b))} = \|u\|_\infty = \mathrm{esssup}_{(a,b)} |u(x)| = \inf_{E \subset (a,b), m(E)=0} \; \sup_{x \in (a,b) \setminus E} |u(x)| \,.$$

Prostor $L_p((a,b))$ opatřený touto normou je Banachův prostor. Na prostoru $L_2((a,b))$ můžeme navíc definovat skalární součin vztahem

$$(u|v)_{L_2((a,b))} = \int_a^b u(x)v(x)dx \,.$$

Poznámka 2.3 Prostor $L_2((a,b))$ opatřený skalárním součinem a normou z Definice 2.17 je úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem, tedy tzv. *Hilbertův prostor.*

Věta 2.7 *([4], str. 74) Prostory $L_p((a,b))$ mají následující vlastnosti:*

(i) Množina $C_0^\infty((a,b))$ je hustá v prostoru $L_p((a,b))$, $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) Prostor $L_p((a,b))$, $1 \leq p < \infty$, je separabilní.

(iii) Platí tzv. Hölderova nerovnost: Budiž $p > 1$ a definujme číslo $q > 1$ tak, že $1/p + 1/q = 1$ (v případě $p = 1$ položíme $q = \infty$). Nechť $u \in L_p((a,b))$ a $v \in L_q((a,b))$. Pak platí

$$\int_a^b |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L_p} \|v\|_{L_q} \,.$$

Pro $p = 2$ můžeme psát

$$|(u|v)|_{L_2} \leq \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} .$$

Tato nerovnost bývá označována jako Cauchyova (Cauchy-Schwartzova) nerovnost.

[1] zde využíváme právě zavedené rovnosti funkcí z Poznámky 2.2, bez níž by výraz $\|\cdot\|_{L_2((a,b))}$ nedefinoval normu.

(iv) Pro $1 \leq p \leq \infty$ platí tzv. Minkowského nerovnost: Budiž $u, v \in L_p((a,b))$. Pak je

$$\|u+v\|_{L_p} \leq \|u\|_{L_p} + \|v\|_{L_p}.$$

Příklad 2.5 Všechny spojité funkce na intervalu $[a,b]$ patří do $L_2((a,b))$.

Příklad 2.6 Funkce $u(x) = x^\alpha$ patří do $L_2((0,1))$ pro $\alpha > -1/2$.

Lemma 2.8 *Předpokládejme, že $f \in L_1((a,b))$ ($f \in C([a,b])$) a*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((a,b)).$$

Pak $f = 0$ skoro všude na $[a,b]$ ($f = 0$ všude v $[a,b]$).

Důkaz. Důkaz provedeme pro $f \in C([a,b])$. Předpokládejme, že f není nulová. Pak existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) \neq 0$. Existuje tedy okolí $U_\varepsilon(x_0) \subset (a,b)$ takové, že $f(x_0) \geq c > 0$ ($f(x_0) \leq c < 0$) na $U_\varepsilon(x_0)$. Zvolíme funkci

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp - \frac{1}{\varepsilon^2 - (x-x_0)^2} & x \in U_\varepsilon(x_0), \\ 0 & x \notin U_\varepsilon(x_0)\,. \end{cases}$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx \geq c \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)dx > 0\,,$$

což je spor. □

Definice 2.18 ([3, Definice 2.22]) Budiž $1 \leq p < \infty$. Symbolem

$$L_{p,\,loc}((a,b))$$

označíme množinu všech funkcí $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ takových, že $f \in L_p((c,d))$ pro všechna $a < c < d < b$.

Příklad 2.7 ([3, Příklad 2.13]) Funkce $u(x) = 1/x$ nepatří do $L_1((0,1))$, ale patří do $L_{1,\,loc}((0,1))$.

Věta 2.9 *Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Platí následující inkluze*

$$L_2((a,b)) \subset L_1((a,b)) \subset L_{1,\,loc}((a,b))\,.$$

2.2.3 Sobolevovy prostory

Definice 2.19 (slabá derivace, [2, Definice 2], str. 19) Předpokládejme, že funkce $u \in L_{1,loc}((a,b))$. Řekneme, že funkce $u'_w \in L_{1,loc}((a,b))$ je *slabá derivace* funkce u, právě když

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b u'_w(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty((a,b)).$$

Příklad 2.8 ([7], str. 61) Mějme funkci $u(x) = |x|$ definovanou pro $x \in [-1,1]$. Derivace této funkce existuje pro všechna $x \in [-1,1]$ kromě $x = 0$. Funkce

$$u'_w(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in [-1,0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x \in (0,1] \end{cases}$$

je slabou derivací funkce u a je rovna funkci $u'(x)$ pro všechna $x \in [-1,1]$, $x \neq 0$.

Příklad 2.9 Funkce

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pro } x \in (-1,0) \end{cases}$$

nemá na intervalu $(-1,1)$ slabou derivaci.

Důkaz. Pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in C_0^\infty((-1,1))$ je

$$\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 \varphi'(x)dx = -\varphi(0)\,.$$

Slabá derivace $u'_w(x)$ funkce $u(x)$ by tak musela splňovat

$$\int_{-1}^1 u'_w(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty((-1,1))\,.$$

V případě testovacích funkcí, pro něž $\varphi(0) = 0$, je dle Lemma 2.8 $u'_w = 0$ pro skoro všechna $x \in (-1,1)$. Tedy platí

$$\varphi(0) = \int_{-1}^1 u'_w(x)\varphi(x)dx = \int_{-1}^1 0 \cdot \varphi(x)dx = 0\,,$$

což není splněno pro funkce φ takové, že $\varphi(0) \neq 0$.

Lemma 2.10 *([2, Lemma 1], str. 19) Nechť* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *a* $u' \in C((a,b))$. *Pak* $u' = u'_w$.

Definice 2.20 ([4], str. 83) Symbolem $W_2^1((a,b))$ označme množinu všech funkcí z Lebesgueova prostoru $L_2((a,b))$, jejichž slabá derivace také patří do Lebesgueova prostoru $L_2((a,b))$.

Definice 2.21 Na prostoru $W_2^1((a,b))$ je definován skalární součin vztahem

$$(u|v)_{W_2^1((a,b))} = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx\,,$$

a tedy norma

$$\|u\|_{W_2^1((a,b))} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u'(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Definice 2.22 (druhá slabá derivace, [2, Definice 2], str. 19) Předpokládejme, že funkce $u \in L_{1,loc}((a,b))$. Řekneme, že funkce $u''_w \in L_{1,loc}((a,b))$ je *druhá slabá derivace* funkce u, právě když

$$\int_a^b u(x)\varphi''(x)dx = \int_a^b u''_w(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty((a,b)).$$

Definice 2.23 ([4], str. 83) Symbolem $W_2^2((a,b))$ označme množinu všech funkcí z Lebesgueova prostoru $L_2((a,b))$, jejichž první i druhá slabá derivace rovněž patří do Lebesgueova prostoru $L_2((a,b))$.

Definice 2.24 ([2, Remark 8], str. 30) Na prostoru $W_2^2((a,b))$ je definován skalární součin vztahem

$$(u|v)_{W_2^2((a,b))} = \int_a^b u(x)v(x)dx + \int_a^b u''(x)v''(x)dx\,,$$

a tedy norma

$$\|u\|_{W_2^2((a,b))} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u''(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Poznámka 2.4 Lineární prostory definované v Definici 2.20 a 2.23 opatřené výše definovanými normami se obvykle nazývají *Sobolevovy prostory.*

Věta 2.11 *([4, Sekce 13.3], str. 84, 85) Prostory $W_2^1((a,b))$ a $W_2^2((a,b))$ mají následující vlastnosti:*

(i) Množina $C_0^\infty((a,b))$ je hustá v prostorech $W_2^1((a,b))$, $W_2^2((a,b))$.

(ii) Prostory $W_2^1((a,b))$, $W_2^2((a,b))$ jsou separabilní.

(iii) Prostory $W_2^1((a,b))$, $W_2^2((a,b))$ jsou Hilbertovy prostory (viz [2, Remark 8], str. 30).

Definice 2.25 ([4, Sekce 13.11], str. 89) Symbolem $\overset{\circ}{W}{}_2^1((a,b))$ označme množinu všech funkcí u ze Sobolevova prostoru $W_2^1((a,b))$ splňujících

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Věta 2.12 *([3, (2.43)], str.57) Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Platí následující inkluze:*

$$C_0^\infty((a,b)) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1((a,b)) \subset W_2^1((a,b)) \subset L_2((a,b)). \tag{2.12}$$

Definice 2.26 ([1, Definice 1.24]) Nechť jsou dány dva Banachovy prostory X s normou $\|\cdot\|_X$ a Y s normou $\|\cdot\|_Y$. Řekneme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y, pokud platí:

$$X \subset Y$$

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in X : \|u\|_Y \leq C\|u\|_X$$

Věta 2.13 *(Věta o vnoření, [4, Věta 16.6]) Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Platí:*

$$W_2^1((a,b)) \hookrightarrow C([a,b]). \tag{2.13}$$

Přesněji platí (viz [6] str. 300)

$$W_2^1((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\lambda}((a,b))\,, \qquad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}\,.$$

Věta 2.14 *Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Potom platí*

$$C^2([a,b]) \subset W_2^2((a,b))$$

a

$$W_2^2((a,b)) \hookrightarrow C^{1,\lambda}((a,b))\,, \qquad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}\,.$$

Kapitola 3

Univerzální iterační proces

Lemma 3.1 *([5], str. 18) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ a platí*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f'(x) = \nu_0 \geq f'(x) \geq \mu_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}} f'(x) > 0\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Definujme funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako

$$\psi(x) = x - \varepsilon f(x)\,, \tag{3.2}$$

kde

$$\varepsilon = \frac{2}{\mu_0 + \nu_0}\,. \tag{3.3}$$

Potom iterační proces

$$x_{n+1} = \psi(x_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

pro libovolnou počáteční iteraci $x_0 \in \mathbb{R}$ konverguje k pevnému bodu x^* funkce ψ, tj. k řešení rovnice

$$f(x) = 0\,, \tag{3.5}$$

a to jako geometrická posloupnost s kvocientem

$$K = \frac{\nu_0 - \mu_0}{\mu_0 + \nu_0} \in (0, 1)\,. \tag{3.6}$$

Důkaz. Uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme libovolnou počáteční iteraci $x_0 \in \mathbb{R}$ a definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí (3.4). Odečteme-li dva po sobě jdoucí členy této posloupnosti

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \varepsilon f(x_n)\,, \\ x_n &= x_{n-1} - \varepsilon f(x_{n-1})\,, \quad n = 1, 2, \dots\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

dostáváme

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} - \varepsilon(f(x_n) - f(x_{n-1}))\,.$$

Na poslední závorku aplikujeme větu o střední hodnotě, takže předchozí rovnost přejde na tvar

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} - \varepsilon f'(\xi)(x_n - x_{n-1})\,,$$

což je po úpravě

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})(1 - \varepsilon f'(\xi))\,,$$

kde ξ leží mezi x_n a x_{n-1}. Z poslední rovnosti plyne, že

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |1 - \varepsilon f'(\xi)||(x_n - x_{n-1})|\,.$$

Označme $K(\varepsilon) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |1 - \varepsilon f'(\xi)|$. Vzhledem k tomu, že funkce

$$\eta(s) = |1 - \varepsilon s|$$

nabývá svého maxima na intervalu $s \in [\mu_0, \nu_0]$ v některém z krajních bodů, tj. buď pro $s = \mu_0$ nebo pro $s = \nu_0$, dostáváme, že

$$K(\varepsilon) = \max\{|1 - \varepsilon\mu_0|, |1 - \varepsilon\nu_0|\}\,. \tag{3.8}$$

Funkce $K(\varepsilon)$ nabývá svého minima

$$K = \frac{\nu_0 - \mu_0}{\nu_0 + \mu_0}$$

v bodě

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{\mu_0 + \nu_0}\,.$$

Jelikož $K < 1$, posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská a tedy konverguje k pevnému bodu x^* funkce ψ, neboť z limitního přechodu v (3.7) máme

$$x^* = x^* - \varepsilon f(x^*) = \psi(x^*)$$

a odtud plyne

$$0 = -\varepsilon f(x^*)\,.$$

Jelikož $\varepsilon \neq 0$, je x^* kořenem funkce f.

□

Kapitola 4

Iterační proces pro diferenciální rovnice druhého řádu

4.1 Formulace úlohy

Uvažujme kvazilineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$L(u) \equiv \frac{d}{dt}F(t,u,u') - f(t,u,u') = 0. \tag{4.1}$$

Předpokládejme, že skalární funkce F a f jsou definované na množině $\Omega = [0,1] \times \mathbb{R}^2$, jsou spojité na Ω a mají na této množině parciální derivace podle druhé a třetí proměnné a funkce F také podle proměnné t.

Budeme dále předpokládat, že funkce F a f a jejich derivace splňují na Ω následující podmínky:

1. Existují μ a ν kladné konstanty tak, že pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} &\nu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &\qquad \geq F_p'(t,u,p)\xi_1^2 + \left[F_u'(t,u,p) + f_p'(t,u,p)\right]\xi_1\xi_2 + f_u'(t,u,p)\xi_2^2 \\ &\qquad \geq \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

2. Pro všechna $t \in [0, 1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned}
|F(t, u, p)| &\leq C(1 + u^2 + p^2)^{1/2} \\
|f(t, u, p)| &\leq C(1 + u^2 + p^2)^{1/2} \\
|F'_u(t, u, p)| &\leq C \\
|F'_t(t, u, p)| &\leq C(1 + u^2 + p^2)^{1/2} \\
|f'_p(t, u, p)| &\leq C.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Operátor L vyhovující podmínkám (4.2) a (4.3) se nazývá *operátor s ohraničenými nelinearitami* (viz [5], str. 224).

Spolu s rovnicí (4.1) dále uvažujme Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{4.4}$$

4.2 Slabý iterační proces

Definice 4.1 Funkci $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 ((a, b))$ nazveme *slabým řešením* úlohy (4.1), (4.4) pokud je splněna následující integrální identita

$$\int_0^1 F(t, u_n, u'_n)v' \, dt + \int_0^1 f(t, u_n, u'_n)v \, dt = 0 \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (0, 1) \, . \tag{4.5}$$

Zavedeme označení

$$DuDv = uv + u'v' \, .$$

Pro řešení (4.1) s (4.4) uvažujme iterační proces

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 Du_{n+1}Dv \, dt \\
&\quad = \int_0^1 Du_nDv \, dt - \varepsilon \left[\int_0^1 F(t, u_n, u'_n)v' \, dt + \int_0^1 f(t, u_n, u'_n)v \, dt \right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$n = 0, 1, \ldots \, ,$$

kde $u_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (0, 1)$ a u_0 je daná funkce, $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (0, 1)$ je libovolná.

Věta 4.1 *([5, Věta 1.1], str. 21) Nechť jsou splněny předpoklady (4.2) a (4.3), pak existuje slabé řešení $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (0, 1)$ úlohy (4.1), (4.4) a iterační proces (4.6) konverguje k slabému řešení této úlohy pro libovolnou funkci $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (0, 1)$ a vhodně vybrané $\varepsilon > 0$.*

Důkaz. Jestliže $u_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$, pak z podmínek (4.2) a (4.3) vyplývá, že pravá strana rovnice (4.6) je spojitým lineárním funkcionálem na prostoru $\overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$. Podle Rieszovy věty může být tedy pravá strana (4.6) zapsána jednoznačně ve tvaru skalárního součinu $\int_0^1 Dg_n Dv\,dt$.

Odtud tedy vyplývá, že $u_{n+1} = g_n$ a v důsledku je zřejmé, že iterační proces může být realizován v prostoru $\overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$.

Nyní dokážeme, že při vhodném $\varepsilon > 0$ iterační proces konverguje. Odečteme-li dva po sobě jdoucí iterační kroky z (4.6), dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 D(u_{n+1} - u_n)Dv\,dt \\
&\quad = \int_0^1 \left((u_n' - u_{n-1}') - \varepsilon\left[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right) v'\,dt \\
&\quad\quad + \int_0^1 \left[(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left(f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right)\right] v\,dt.
\end{aligned}$$

Použijeme-li na integrály na pravé straně předešlé nerovnice Cauchyovu nerovnost, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 D(u_{n+1} - u_n)Dv\,dt\right| = \left|\int_0^1 \left[(u_{n+1}' - u_n')v' + (u_{n+1} - u_n)v\right]\,dt\right| \\
&\le \left(\int_0^1 \left|(u_n' - u_{n-1}') - \varepsilon\left[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v'|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left|(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left[f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v|^2\,dt\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

což po umocnění na druhou dává

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \left[(u_{n+1}' - u_n')v' + (u_{n+1} - u_n)v\right]\,dt\right|^2 \\
&\le \left(\int_0^1 \left|(u_n' - u_{n-1}') - \varepsilon\left[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right) \left(\int_0^1 |v'|^2\,dt\right) \\
&+2\left(\int_0^1 \left|(u_n' - u_{n-1}') - \varepsilon\left[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v'|^2\,dt\right)^{1/2} \times \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left|(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left[f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left|(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left[f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right) \left(\int_0^1 |v|^2\,dt\right).
\end{aligned}$$

Pokud na prostřední součin použijeme nerovnost $2\sqrt{a}\sqrt{b} \le a + b$, kde za a, b volíme

$$\begin{aligned}
a &= \left(\int_0^1 \left|(u_n' - u_{n-1}') - \varepsilon\left[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right) \left(\int_0^1 |v|^2\,dt\right), \\
b &= \left(\int_0^1 \left|(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left[f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\right]\right|^2 dt\right) \left(\int_0^1 |v'|^2\,dt\right),
\end{aligned}$$

dostaneme po vytknutí členu

$$\int_0^1 \left[|v'|^2 + |v|^2\right]\, dt$$

následující nerovnost

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \left[(u'_{n+1} - u'_n)v' + (u_{n+1} - u_n)v\right]\, dt\right|^2 \\
&\quad\le \left(\int_0^1 \left|(u'_n - u'_{n-1}) - \varepsilon\left[F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right]\right|^2\, dt\right. \\
&\quad\left.+ \int_0^1 \left|(u_n - u_{n-1}) - \varepsilon\left[f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right]\right|^2\, dt\right) \int_0^1 \left[|v'|^2 + |v|^2\right]\, dt.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li v předešlém $v = u_{n+1} - u_n$ a vydělíme-li nerovnost členem

$$\int_0^1 \left[(u'_{n+1} - u'_n)^2 + (u_{n+1} - u_n)^2\right]\, dt,$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[|u'_{n+1} - u'_n|^2 + |u_{n+1} - u_n|^2\right]\, dt \\
&\qquad\le \int_0^1 \Big[|u'_n - u'_{n-1}|^2 + |u_n - u_{n-1}|^2 \\
&\qquad\qquad -2\varepsilon\left[F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right](u'_n - u'_{n-1}) \\
&\qquad\qquad -2\varepsilon\left[f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right](u_n - u_{n-1}) \\
&\qquad\qquad +\varepsilon^2\Big(\left[F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right]^2 \\
&\qquad\qquad\qquad + \left[f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1})\right]^2\Big)\Big]\, dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Upravíme rozdíl ve druhém členu pravé strany v nerovnici (4.7) na tvar

$$F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_n) + F(t, u_{n-1}, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1})$$

a na oba vzniklé rozdíly aplikujeme větu o střední hodnotě. Dostáváme

$$\begin{aligned}
F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_n) &= F'_u(t, \eta_1 u_n + (1 - \eta_1)u_{n-1}, u'_n)(u_n - u_{n-1}), \\
F(t, u_{n-1}, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) &= F'_p(t, u_{n-1}, \eta_2 u'_n + (1 - \eta_2)u'_{n-1})(u'_n - u'_{n-1})
\end{aligned}$$

kde $\eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$.

Obdobně postupujeme u třetího členu pravé strany v nerovnici (4.7), ze kterého dostaneme

$$\begin{aligned}
f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_n) &= f'_u(t, \eta_3 u_n + (1 - \eta_3)u_{n-1}, u'_n)(u_n - u_{n-1}), \\
f(t, u_{n-1}, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) &= f'_p(t, u_{n-1}, \eta_4 u'_n + (1 - \eta_4)u'_{n-1})(u'_n - u'_{n-1})
\end{aligned}$$

kde $\eta_3, \eta_4 \in (0,1)$.

Použijeme-li pro jednotlivé derivace dolní odhad z (4.2) s

$$\xi_1 = u_n' - u_{n-1}', \quad \xi_2 = u_n - u_{n-1},$$

dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\big[F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big](u_n' - u_{n-1}') \\
&\qquad + \big[f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big](u_n - u_{n-1})\Big)\, dt \\
&\quad = \int_0^1 \big[F_u'(t,\eta_1 u_n + (1-\eta_1)u_{n-1},u_n')(u_n - u_{n-1})(u_n' - u_{n-1}') \\
&\qquad + F_p'(t,u_n,\eta_2 u_n' + (1-\eta_2)u_{n-1}')(u_n' - u_{n-1}')^2 \\
&\qquad + f_u'(t,\eta_3 u_n + (1-\eta_3)u_{n-1},u_n')(u_n - u_{n-1})^2 \\
&\qquad + f_p'(t,u_n,\eta_4 u_n' + (1-\eta_4)u_{n-1}')(u_n' - u_{n-1}')(u_n - u_{n-1})\big]\, dt \\
&\qquad\qquad \geq \mu \int_0^1 \big[|u_n' - u_{n-1}'|^2 + |u_n - u_{n-1}|^2\big]\, dt.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Z věty o střední hodnotě také máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\big|F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big|^2 + \big|f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big|^2\Big]\, dt \\
&\quad = \int_0^1 [|F_u'(t,\eta_1 u_n + (1-\eta_1)u_{n-1},u_n')(u_n - u_{n-1}) \\
&\qquad\quad + F_p'(t,u_n,\eta_2 u_n' + (1-\eta_2)u_{n-1}')(u_n' - u_{n-1}')\big|^2 \\
&\qquad + |f_u'(t,\eta_3 u_n + (1-\eta_3)u_{n-1},u_n')(u_n - u_{n-1}) \\
&\qquad\quad + f_p'(t,u_n,\eta_4 u_n' + (1-\eta_4)u_{n-1}')(u_n' - u_{n-1}')\big|^2\Big]\, dt.
\end{aligned}$$

Roznásobením kvadratických členů dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\big|F(t,u_n,u_n') - F(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big|^2 + \big|f(t,u_n,u_n') - f(t,u_{n-1},u_{n-1}')\big|^2\Big]\, dt \\
&\quad \leq \int_0^1 \big[|F_u'(t,\eta_1 u_n + (1-\eta_1)u_{n-1},u_n')|^2 (u_n - u_{n-1})^2 \\
&\qquad + 2\,|F_u'(t,\eta_1 u_n + (1-\eta_1)u_{n-1},u_n')|\,|u_n - u_{n-1}| \times \\
&\qquad\quad \times \big|F_p'(t,u_n,\eta_2 u_n' + (1-\eta_2)u_{n-1}')\big|\,\big|u_n' - u_{n-1}'\big| \\
&\qquad + \big|F_p'(t,u_n,\eta_2 u_n' + (1-\eta_2)u_{n-1}')\big|^2 |u_n' - u_{n-1}'|^2 \\
&\qquad + |f_u'(t,\eta_3 u_n + (1-\eta_3)u_{n-1},u_n')|^2 (u_n - u_{n-1})^2 \\
&\qquad + 2\,|f_u'(t,\eta_3 u_n + (1-\eta_3)u_{n-1},u_n')|\,|u_n - u_{n-1}| \times \\
&\qquad\quad \times \big|f_p'(t,u_n,\eta_4 u_n' + (1-\eta_4)u_{n-1}')\big|\,\big|u_n' - u_{n-1}'\big| \\
&\qquad + \big|f_p'(t,u_n,\eta_4 u_n' + (1-\eta_4)u_{n-1}')\big|^2 |u_n' - u_{n-1}|^2\Big]\, dt.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Nyní si uvědomíme, že z předpokladu elipticity (4.2) mimo jiné plyne vhodnou volbou ξ_1, ξ_2, že

$$\begin{aligned}
\mu \le F'_p(t, u_n, \eta_2 u'_n + (1-\eta_2)u'_{n-1}) \le \nu \quad &\text{volbou } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0,\\
\mu \le f'_u(t, \eta_3 u_n + (1-\eta_3)u_{n-1}, u'_n) \le \nu \quad &\text{volbou } \xi_1 = 0, \xi_2 = 1.
\end{aligned}$$

Pomocí těchto odhadů a z předpokladu (4.3) dostaneme z nerovnosti (4.9), že

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\left| F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) \right|^2 + \left| f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) \right|^2 \right] dt \\
&\quad \le \int_0^1 \left[C^2 \left| u_n - u_{n-1} \right|^2 + 2C\nu \left| u_n - u_{n-1} \right| \left| u'_n - u'_{n-1} \right| + \nu^2 |u'_n - u'_{n-1}|^2 \right. \\
&\qquad \left. + \nu^2 |u_n - u_{n-1}|^2 + 2C\nu \left| u_n - u_{n-1} \right| \left| u'_n - u'_{n-1} \right| + C^2 |u'_n - u'_{n-1}|^2 \right] dt \\
&\quad = \int_0^1 \left[(C^2 + \nu^2) \left| u_n - u_{n-1} \right|^2 + 4C\nu \left| u_n - u_{n-1} \right| \left| u'_n - u'_{n-1} \right| \right. \\
&\qquad \left. + (C^2 + \nu^2) \left| u'_n - u'_{n-1} \right|^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Pokud na druhý člen v posledním integrálu použijeme nerovnost $2ab \le a^2 + b^2$, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\left| F(t, u_n, u'_n) - F(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) \right|^2 + \left| f(t, u_n, u'_n) - f(t, u_{n-1}, u'_{n-1}) \right|^2 \right] dt \\
&\quad \le \int_0^1 \left[(C^2 + \nu^2) \left| u_n - u_{n-1} \right|^2 + 2C\nu \left(|u_n - u_{n-1}|^2 + |u'_n - u'_{n-1}|^2 \right) \right. \\
&\qquad \left. + (C^2 + \nu^2) \left| u'_n - u'_{n-1} \right|^2 \right] dt. \\
&\quad = (C + \nu)^2 \int_0^1 \left[|u'_n - u'_{n-1}|^2 + |u_n - u_{n-1}|^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Použitím tohoto odhadu a nerovnosti (4.8) v (4.7) máme

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[|u'_{n+1} - u'_n|^2 + |u_{n+1} - u_n|^2 \right] dt \\
&\quad \le (1 - 2\mu\varepsilon + (C + \nu)^2 \varepsilon^2) \int_0^1 \left[|u'_n - u'_{n-1}|^2 + |u_n - u_{n-1}|^2 \right] dt.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Zvolíme-li

$$\varepsilon < \varepsilon_M := \frac{2\mu}{(C + \nu)^2}, \tag{4.11}$$

bude splněna nerovnost

$$K(\varepsilon) := 1 - 2\mu\varepsilon + (C + \nu)^2 \varepsilon^2 < 1$$

a dostaneme tvrzení věty. $\square$

Poznámka 4.1 Konstanta $K(\varepsilon) = 1 - 2\mu\varepsilon + (C + \nu)^2 \varepsilon^2$ v odhadu (4.10) závisí na proměnné ε kvadraticky. Je zřejmé, že

$$K(0) = K(\varepsilon_M) = 1$$

a že $K(\varepsilon)$ nabývá svého minima pro

$$\varepsilon = \varepsilon_* := \frac{\varepsilon_M}{2} = \frac{\mu}{(C+\nu)^2}. \tag{4.12}$$

Tato volba parametru ε je teoreticky optimální a iterační proces (4.6) pro toto ε konverguje teoreticky nejrychleji. Dodejme, že

$$K(\varepsilon_*) = 1 - 2\mu\frac{\mu}{(C+\nu)^2} + (C+\nu)^2\frac{\mu^2}{(C+\nu)^4} = 1 - \left(\frac{\mu}{C+\nu}\right)^2. \tag{4.13}$$

Věta 4.2 *([4, Věta 17.5], str. 155) Nechť $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$ je slabé řešení Dirichletovy úlohy (4.4) pro rovnici (4.1), jejíž koeficienty splňují podmínky (4.2) a (4.3). Pak $u \in C^2([0,1])$, u splňuje rovnici (4.1) a vyhovuje podmínkám (4.4).*

Pro funkce $u_n \in W_2^2((0,1))$ splňující Dirichletovy okrajové podmínky

$$u_n(0) = u_n(1) = 0\,. \tag{4.14}$$

můžeme v rovnici (4.6) provést per-partes a díky Lemmatu 2.8 přepsat (4.6) ve tvaru

$$u''_{n+1} - u_{n+1} = u''_n - u_n - \varepsilon L(u_n), \quad n = 0,1,\ldots \tag{4.15}$$

kde ε je dostatečně malé kladné číslo.

Zvolíme-li navíc $u_0 \in C^2([0,1])$, je (4.15), (4.14) klasickou verzí (4.6), kterou budeme používat pro řešení konkrétních příkladů.

V každém iteračním kroku hledáme funkci u_{n+1} jako řešení nehomogenní okrajové úlohy

$$y'' - y = h \tag{4.16}$$

s příslušnými okrajovými podmínkami. Zde funkce

$$h(t) = u''_n(t) - u_n(t) - \varepsilon L(u_n(t))$$

je vyjádřená pomocí již známé funkce u_n z předchozího kroku. Rovnice (4.16) je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstatními koeficienty a spojitou pravou stranou. Pro získání funkce u_{n+1} najdeme nejprve obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$y'' - y = 0$$

a metodou variace konstant také partikulární řešení nehomogenní rovnce. Obě reálné konstanty z obecného řešení získáme vyřešením soustavy dvou lineárních rovnic vzniklých dosazením do okrajových podmínek (4.14).

Kapitola 5

Příklady

Lemma 5.1 *Pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí*

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{5.1}$$

$$\pm\, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \tag{5.2}$$

$$|a + b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \tag{5.3}$$

$$|a + b + c| \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{5.4}$$

Důkaz. První nerovnost (tzv. trojúhelníková nerovnost) platí, protože absolutní hodnota je norma v prostoru reálných čísel $\mathbb{R}$.

Nerovnost (5.2) plyne z binomické věty, neboť

$$0 \leq (a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2,$$

a tedy

$$\pm 2ab \leq a^2 + b^2.$$

Pro důkaz (5.3) si stačí uvědomit, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ vzhledem k předešlému platí

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) \tag{5.5}$$

a původní nerovnost dostaneme odmocněním (5.5).

Obdobně pro poslední nerovnost (5.4) díky trojnásobnému použití (5.2) platí

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

$\square$

5.1 Lineární diferenciální rovnice

Příklad 5.1 Uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$u''(t) - (t+1)u(t) + t^3 - t - 2 = 0 \quad \text{na } (0,1). \tag{5.6}$$

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru (4.1) pro

$$F(t,u,p) = p, \quad f(t,u,p) = (t+1)u - t^3 + t + 2.$$

Nyní najdeme kladné konstanty μ, ν a C, se kterými budou pro tyto funkce splněny podmínky (4.2) a (4.3).

Ze tvaru funkcí vyplývá, že

$$\begin{aligned} F'_p(t,u,p) &= 1, \qquad & F'_u(t,u,p) &= 0, \\ f'_p(t,u,p) &= 0, \qquad & f'_u(t,u,p) &= (t+1). \end{aligned}$$

Pro odhady (4.2) hledáme $\mu, \nu > 0$, aby pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$ platilo

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le \xi_1^2 + (t+1)\xi_2^2 \le \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Protože $t \in [0,1]$, dostáváme

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \le \xi_1^2 + 2\xi_2^2 \le 2(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

a tedy hledané konstanty jsou

$$\mu = 1, \quad \nu = 2. \tag{5.7}$$

Pro odhady z (4.3) postupnými úpravami a použitím odhadů z Lemma 5.1 dostáváme pro všechna $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$, že

$$|F(t,u,p)| = |p| = \sqrt{p^2} \le \sqrt{1 + u^2 + p^2}\,,$$

$$\begin{aligned} |f(t,u,p)| &= |(t+1)u - t^3 + t + 2| = |(t+1)u - t(t^2-1) + 2| \\ &\le |t+1||u| + |t(t^2-1)| + 2 \le 2|u| + \tfrac{2\sqrt{3}}{9} + 2 = 2|u| + \tfrac{18+2\sqrt{3}}{9} \\ &\le \tfrac{18+2\sqrt{3}}{9}(1+|u|) \le \tfrac{18+2\sqrt{3}}{9}\sqrt{2}\sqrt{1+u^2} \le \tfrac{18+2\sqrt{3}}{9}\sqrt{2}\sqrt{1+u^2+p^2}\,, \end{aligned}$$

$$|F'_u(t,u,p)| = 0, \quad |F'_t(t,u,p)| = 0, \quad |f'_p(t,u,p)| = 0.$$

V odhadu pro $|f(t,u,p)|$ je

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} = \max_{t \in [0,1]} |t(t^2-1)|\,.$$

Hledanou konstantou $C > 0$ je tedy

$$C = \frac{18 + 2\sqrt{3}}{9}\sqrt{2}. \tag{5.8}$$

Vzhledem k Poznámce 4.1 je

$$\varepsilon_* = \frac{\mu}{(C+\nu)^2} = \frac{1}{(\frac{18+2\sqrt{3}}{9}\sqrt{2}+2)^2} \approx 0.03464$$

a

$$K(\varepsilon_*) = 1 - \mu\varepsilon_* = 1 - \frac{1}{(\frac{18+2\sqrt{3}}{9}\sqrt{2}+2)^2} \approx 0.96536.$$

Uvažujme nyní okrajovou úlohu pro rovnici (5.6) doplněnou Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{5.9}$$

Funkce

$$u(t) = t(t-1) \tag{5.10}$$

je analytickým řešením této okrajové úlohy, neboť

$$u'(t) = 2t - 1, \qquad u''(t) = 2$$

a pro všechna $t \in [0,1]$ platí

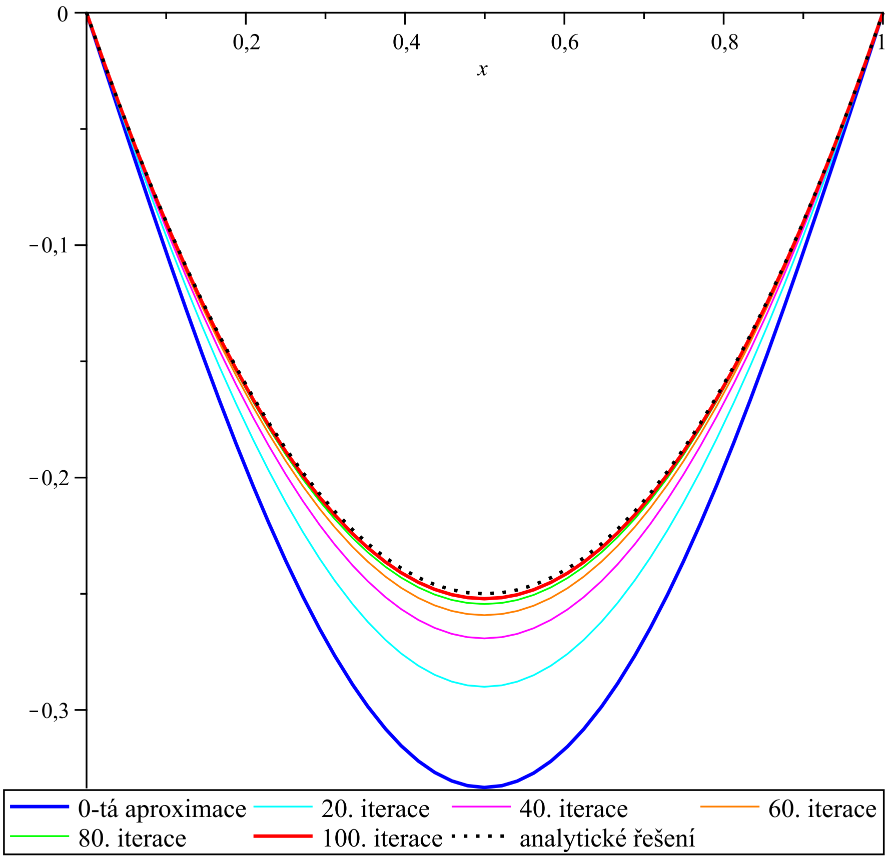
$$\begin{aligned} u''(t) - (t+1)u(t) + t^3 - t - 2 &= 2 - (t+1)t(t-1) + t^3 - t - 2 \\ &= 2 - t(t^2-1) + t(t^2-1) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Na Obrázku 5.1 jsou graficky znázorněny vybrané iterace konvergující na intervalu $[0,1]$ k analytickému řešení $u(t) = t(t-1)$ okrajové úlohy (5.6), (5.9). Jako počáteční aproximace byla zvolena funkce

$$u_0(t) = -\frac{1}{3}\sin(\pi t)\,,$$

která zřejmě patří do $C^2([0,1])$.

Poznámka 5.1 V tomto i ve všech následujících příkladech byl výpočet prováděn na osobním počítači HP Pavilion g6 s procesorem Intel Core i7-3632QM v programu Maple 12. Doba výpočtu τ pro daný počet iterací je uvedena v popisku u příslušných obrázků.



Obrázek 5.1: Grafické znázornění numerického řešení Příkladu 5.1 iterační metodou. Pro 100 iterací byla doba výpočtu $\tau \approx 2$ s.

Příklad 5.2 Uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$u''(t) - u'(t) - u(t) + te^{t-1} = 0 \quad \text{na } (0,1). \tag{5.11}$$

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru (4.1) pro

$$F(t,u,p) = p, \quad f(t,u,p) = p + u - te^{t-1}.$$

Nyní najdeme kladné konstanty μ, ν a C, se kterými budou pro tyto funkce splněny podmínky (4.2) a (4.3).

Ze tvaru funkcí vyplývá, že

$$\begin{aligned} F'_p(t,u,p) &= 1, & F'_u(t,u,p) &= 0, \\ f'_p(t,u,p) &= 1, & f'_u(t,u,p) &= 1. \end{aligned}$$

Pro odhady (4.2) hledáme $\mu, \nu > 0$, aby pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$ platilo

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \leq \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Na součin v prostředním výrazu (u kterého neznáme znaménko) použijeme odhady (5.2) s $a = \xi_1$, $b = \xi_2$ a dostaneme

$$\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \leq \frac{3}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,.$$

Hledané konstanty jsou tedy

$$\mu = 1/2, \quad \nu = 3/2. \tag{5.12}$$

Pro odhady z (4.3) postupnými úpravami a použitím odhadů z Lemma 5.1 dostáváme pro všechna $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$, že

$$\begin{aligned} |F(t,u,p)| &= |p| = \sqrt{p^2} \leq \sqrt{1 + u^2 + p^2}, \\ |f(t,u,p)| &= |p + u - t\mathrm{e}^{t-1}| \leq |t\mathrm{e}^{t-1}| + |p| + |u| \\ &\leq 1 + |u| + |p| \leq \sqrt{3}\sqrt{1 + u^2 + p^2}\,, \\ |F'_u(t,u,p)| = 0, &\quad |F'_t(t,u,p)| = 0, \quad |f'_p(t,u,p)| = 1. \end{aligned}$$

V odhadu $|f(t,u,p)|$ jsme využili faktu, že funkce $g(t) = t\mathrm{e}^{t-1}$ má na intervalu $[0,1]$ kladnou derivaci

$$g'(t) = t\mathrm{e}^{t-1} + \mathrm{e}^{t-1} = (t+1)\mathrm{e}^{t-1}\,,$$

tudíž je na tomto intervalu rostoucí a tedy omezená hodnotou svého maxima, jehož dosáhne pro $t = 1$. Navíc díky nezápornosti funkce $g(t)$ můžeme psát

$$|g(t)| \leq g(1) = 1.$$

Hledanou konstantou $C > 0$ je tedy

$$C = \sqrt{3}. \tag{5.13}$$

Vzhledem k Poznámce 4.1 je

$$\varepsilon_* = \frac{\mu}{(C+\nu)^2} = \frac{1}{2(\sqrt{3} + 3/2)^2} \approx 0.04786$$

a

$$K(\varepsilon_*) = 1 - \mu\varepsilon_* = \frac{4(5 + 3\sqrt{3})}{(3 + 2\sqrt{3})^2} \approx 0.97607.$$

Uvažujme nyní okrajovou úlohu pro rovnici (5.11) doplněnou Dirichletovými okrajovými podmínkami (5.9). Vzhledem k tomu, že (5.11) je nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty, lze její obecné řešení napsat ve tvaru

$$u(t) = c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\mathrm{e}^{r_2 t} + (t+1)\mathrm{e}^{t-1}\,, \tag{5.14}$$

kde r_1, r_2 jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice

$$r^2 - r - 1 = 0\,,$$

tedy

$$r_1 = (1+\sqrt{5})/2\,, \quad r_2 = (1-\sqrt{5})/2\,, \tag{5.15}$$

a

$$u_p = (t+1)\mathrm{e}^{t-1}$$

je partikulární řešení nehomogenní rovnice získané metodou neurčitých koeficientů díky tvaru nehomogenního členu $t\mathrm{e}^{t-1}$. Dosazením (5.14) do okrajových podmínek (5.9) dostaneme soustavu rovnic pro neznámé konstanty c_1, c_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 + \mathrm{e}^{-1} = 0, \\ u(1) &= c_1\mathrm{e}^{r_1} + c_2\mathrm{e}^{r_2} + 2 = 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je pomocí Cramerova pravidla dvojice

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^{-1} & 1 \\ -2 & \mathrm{e}^{r_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{r_1} & \mathrm{e}^{r_2} \end{vmatrix}} = -\frac{\mathrm{e}^{r_2-1}-2}{\mathrm{e}^{r_2}-\mathrm{e}^{r_1}}\,, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e}^{r_1} & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{r_1} & \mathrm{e}^{r_2} \end{vmatrix}} = \frac{\mathrm{e}^{r_1-1}-2}{\mathrm{e}^{r_2}-\mathrm{e}^{r_1}}\,.$$

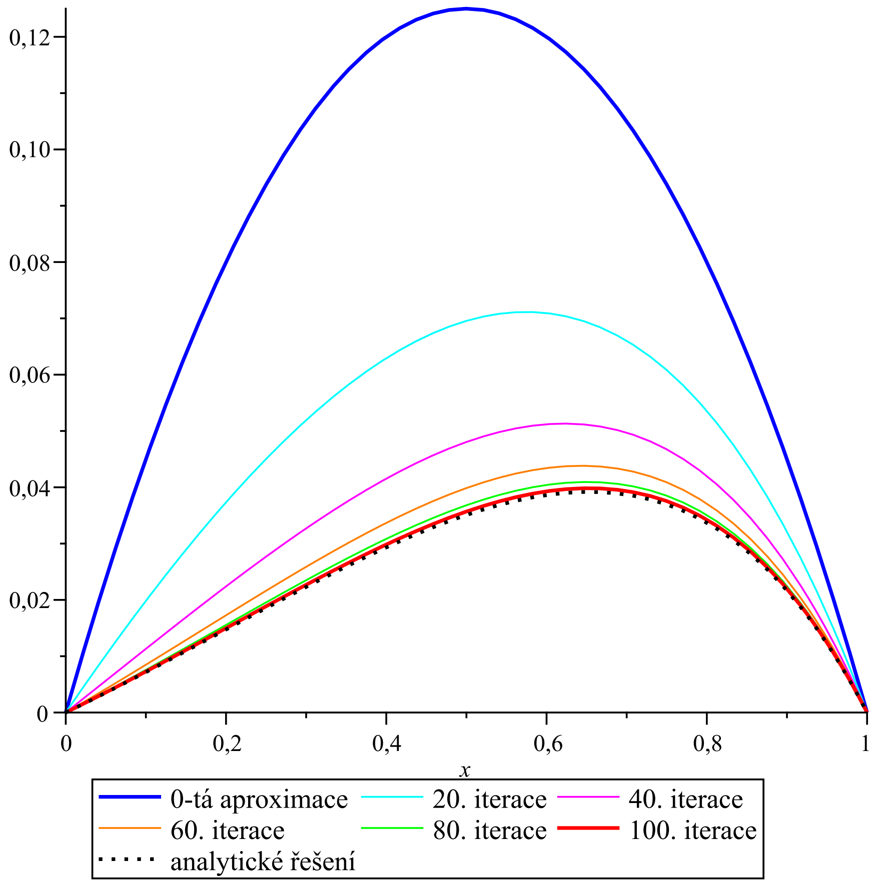
Na Obrázku 5.2 jsou graficky znázorněny vybrané iterace konvergující na intervalu $[0,1]$ k analytickému řešení

$$u(t) = -\frac{\mathrm{e}^{r_2-1}-2}{\mathrm{e}^{r_2}-\mathrm{e}^{r_1}}\mathrm{e}^{r_1 t} + \frac{\mathrm{e}^{r_1-1}-2}{\mathrm{e}^{r_2}-\mathrm{e}^{r_1}}\mathrm{e}^{r_2 t} + (t+1)\mathrm{e}^{t-1}$$

(kde r_1, r_2 jsou z (5.15)) okrajové úlohy (5.11), (5.9). Jako počáteční aproximace byla zvolena funkce

$$u_0(t) = \frac{1}{2}t(1-t)\,,$$

která zřejmě patří do $C^2([0,1])$.



Obrázek 5.2: Grafické znázornění numerického řešení Příkladu 5.2 iterační metodou. Pro 100 iterací byla doba výpočtu $\tau \approx 7$ s.

Příklad 5.3 Uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$\delta u''(t) - (t^2+1)u'(t) - 2u(t) + t = 0 \quad \text{na } (0,1), \tag{5.16}$$

kde $\delta > 1$ je reálný parametr.

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru (4.1) pro

$$F(t,u,p) = \delta p, \quad f(t,u,p) = (t^2+1)p + 2u - t.$$

Nyní najdeme kladné konstanty μ, ν a C, se kterými budou pro tyto funkce splněny podmínky (4.2) a (4.3).

Ze tvaru funkcí vyplývá, že

$$F'_p(t,u,p) = \delta, \qquad F'_u(t,u,p) = 0,$$
$$f'_p(t,u,p) = t^2+1, \qquad f'_u(t,u,p) = 2.$$

Pro odhady (4.2) hledáme $\mu, \nu > 0$, aby pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$ platilo

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le \delta\xi_1^2 + (t^2+1)\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 \le \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Na součin v prostředním výrazu (u kterého neznáme znaménko) použijeme odhady (5.2) s $a = \xi_1$, $b = \xi_2$ a vzhledem k tomu, že $1 \le t^2 + 1 \le 2$, dostaneme

$$(\delta - 1)\xi_1^2 + \xi_2^2 \le \xi_1^2 + (t^2+1)\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 \le (\delta+1)\xi_1^2 + 3\xi_2^2\,.$$

Hledané konstanty jsou tedy

$$\mu = \min\{\delta - 1; 1\}, \quad \nu = \max\{\delta + 1; 3\}. \tag{5.17}$$

Pro odhady z (4.3) postupnými úpravami a použitím odhadů z Lemma 5.1 dostáváme pro všechna $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$, že

$$|F(t,u,p)| = \delta|p| = \delta\sqrt{p^2} \le \delta\sqrt{1+u^2+p^2},$$

$$\begin{aligned} |f(t,u,p)| &= |(t^2+1)p + 2u - t| \le |t| + 2|u| + (t^2+1)|p| \\ &\le 2(1+|u|+|p|) \le 2\sqrt{3}\sqrt{1+u^2+p^2}\,, \end{aligned}$$

$$|F'_u(t,u,p)| = 0, \quad |F'_t(t,u,p)| = 0,$$

$$|f'_p(t,u,p)| = |t^2+1| \le 2 \le 2(1+|u|+|p|) \le 2\sqrt{3}\sqrt{1+u^2+p^2}\,.$$

Hledanou konstantou $C > 0$ je tedy

$$C = \max\{\delta, 2\sqrt{3}\}\,. \tag{5.18}$$

Pro numerické výpočty jsme zvolili $\delta = 2$, které dává konstanty

$$\mu = 1, \quad \nu = 3, \quad C = 2\sqrt{3}$$

a vzhledem k Poznámce 4.1 také

$$\varepsilon_* = \frac{\mu}{(C+\nu)^2} = \frac{1}{(3+2\sqrt{3})^2} \approx 0.02393\,,$$

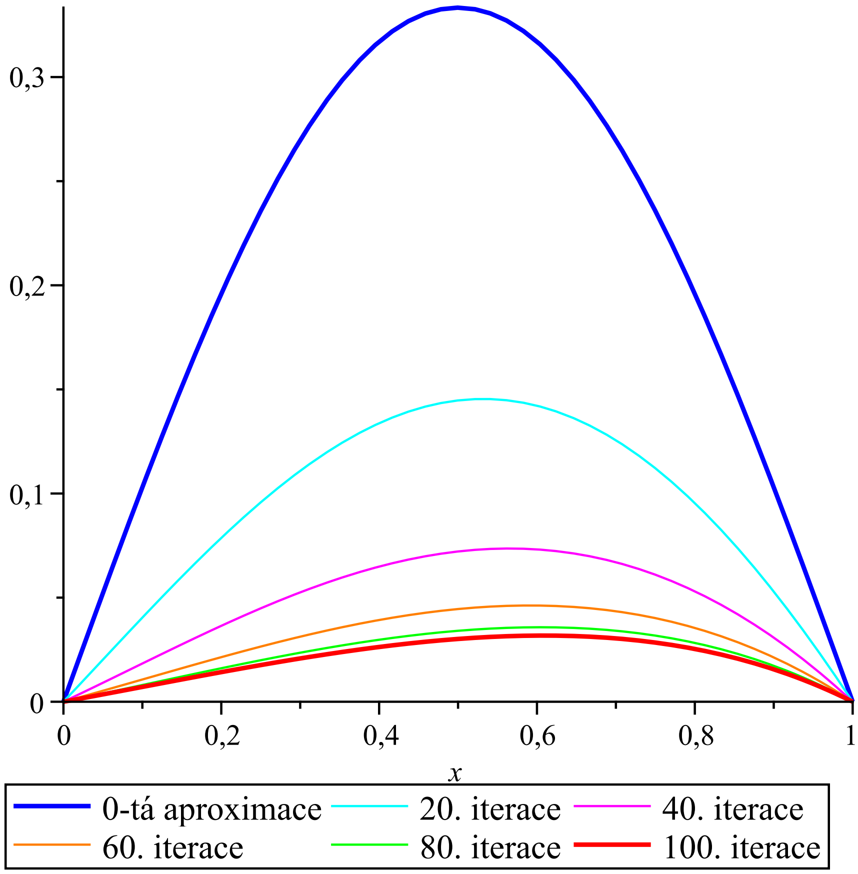
a

$$K(\varepsilon_*) = 1 - \mu\varepsilon_* = \frac{4(5+3\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})^2} \approx 0.97607\,.$$

Na Obrázku 5.3 jsou graficky znázorněny vybrané iterace konvergující na intervalu $[0,1]$ k numerickému řešení okrajové úlohy (5.11), (5.9). Analytické řešení není v tomto případě známé. Jako počáteční aproximace byla zvolena funkce

$$u_0(t) = \frac{1}{3}\sin(\pi t)\,,$$

která zřejmě patří do $C^2([0,1])$.



Obrázek 5.3: Grafické znázornění numerického řešení Příkladu 5.3 iterační metodou. Pro 100 iterací byla doba výpočtu $\tau \approx 5$ s.

5.2 Nelineární diferenciální rovnice

Příklad 5.4 Uvažujme nelineární diferenciální rovnici

$$u''(t) - \frac{u'(t)}{1+(u'(t))^2} - u(t) - t^2 + t + 2 - \frac{t - 1/2}{2t^2 - 2t + 1} = 0 \qquad (5.19)$$

na intervalu $(0, 1)$.

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru (4.1) pro

$$F(t, u, p) = p, \quad f(t, u, p) = \frac{p}{1+p^2} + u + t^2 - t - 2 + \frac{t - 1/2}{2t^2 - 2t + 1}\,.$$

Nyní najdeme kladné konstanty μ, ν a C, se kterými budou pro tyto funkce splněny podmínky (4.2) a (4.3).

Ze tvaru funkcí vyplývá, že

$$\begin{aligned} F'_p(t, u, p) &= 1, & F'_u(t, u, p) &= 0, \\ f'_p(t, u, p) &= \tfrac{1-p^2}{(1+p^2)^2}, & f'_u(t, u, p) &= 1. \end{aligned}$$

Pro odhady (4.2) hledáme $\mu, \nu > 0$, aby pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{R}$ platilo

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le \xi_1^2 + \frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \le \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,.$$

Na součin v prostředním výrazu (u kterého neznáme znaménko) použijeme odhady (5.2) s $a = \xi_1$, $b = \xi_2$ a dostaneme

$$\left(1 - \frac{|g(p)|}{2}\right)(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le \xi_1^2 + g(p)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \le \left(1 + \frac{|g(p)|}{2}\right)(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,,$$

kde

$$g(p) := \frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}\,.$$

Pro určení konstant μ a ν potřebujeme určit maximum $|g(p)|$. Je vidět, že g je sudá funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ a její derivace

$$g'(p) = \frac{-2p(3-p^2)}{(1+p^2)^3}$$

je nulová v bodech $p = 0$ a $p = \pm\sqrt{3}$. Protože navíc g' v těchto bodech střídá znaménko, jedná se o extremální body funkce g. V bodě $p = 0$ nabývá funkce g svého maxima $g(0) = 1$ a v bodech $p = \pm\sqrt{3}$ svého minima $g(\pm\sqrt{3}) = -1/8$. Z toho vyplývá, že

$$|g(p)| \le 1 \quad \forall p \in \mathbb{R} \tag{5.20}$$

a hledané konstanty jsou

$$\mu = 1/2, \quad \nu = 3/2. \tag{5.21}$$

Pro odhady z (4.3) postupnými úpravami a použitím odhadů z Lemma 5.1 dostáváme pro všechna $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$, že

$$|F(t,u,p)| = |p| = \sqrt{p^2} \le \sqrt{1 + u^2 + p^2}\,,$$

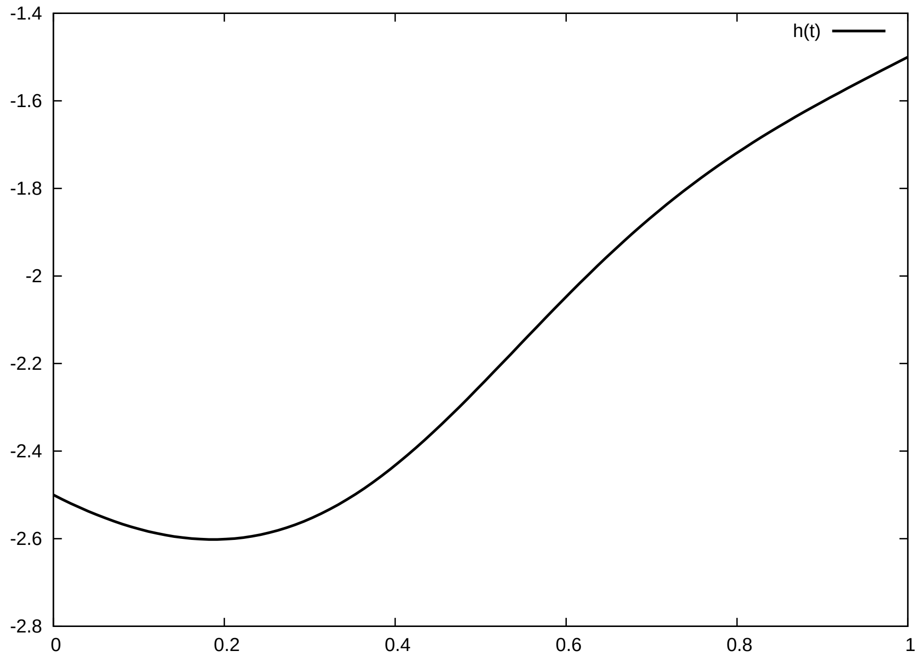
$$\begin{aligned}
|f(t,u,p)| &= \left|\tfrac{p}{1+p^2} + u + t^2 - t - 2 + \tfrac{t-1/2}{2t^2-2t+1}\right| \le \\
&\le \left|t^2 - t - 2 + \tfrac{t-1/2}{2t^2-2t+1}\right| + |u| + \left|\tfrac{p}{1+p^2}\right| \\
&\le 2.7 + |u| + |p| \le 2.7\sqrt{3}\sqrt{1+u^2+p^2}\,,
\end{aligned}$$

$$|F'_u(t,u,p)| = 0, \quad |F'_t(t,u,p)| = 0,$$

$$|f'_p(t,u,p)| = \left|\tfrac{1-p^2}{(1+p^2)^2}\right| = |g(p)| \le 1.$$

V odhadu $|f(t,u,p)|$ jsme využili faktu, že funkce

$$h(t) = t^2 - t - 2 + \frac{t - 1/2}{2t^2 - 2t + 1}$$



Obrázek 5.4: Grafické znázornění funkce $h(t)$.

je na intervalu $[0,1]$ záporná a zdola ji můžeme odhadnout hodnotou -2.7, jak je vidět z Obrázku 5.4.

Hledanou konstantou $C > 0$ je tedy

$$C = 2.7\sqrt{3}. \tag{5.22}$$

Vzhledem k Poznámce 4.1 je

$$\varepsilon_* = \frac{\mu}{(C+\nu)^2} = \frac{1}{2(2.7\sqrt{3}+3/2)^2} \approx 0.01311$$

a

$$K(\varepsilon_*) = 1 - \mu\varepsilon_* = 1 - \frac{1}{4(2.7\sqrt{3}+3/2)^2} \approx 0.99345.$$

Uvažujme nyní okrajovou úlohu pro rovnici (5.6) doplněnou Dirichletovými okrajovými podmínkami (5.9). Funkce

$$u(t) = t(1-t) \tag{5.23}$$

je analytickým řešením této okrajové úlohy, neboť

$$u'(t) = 1 - 2t, \qquad u''(t) = -2$$

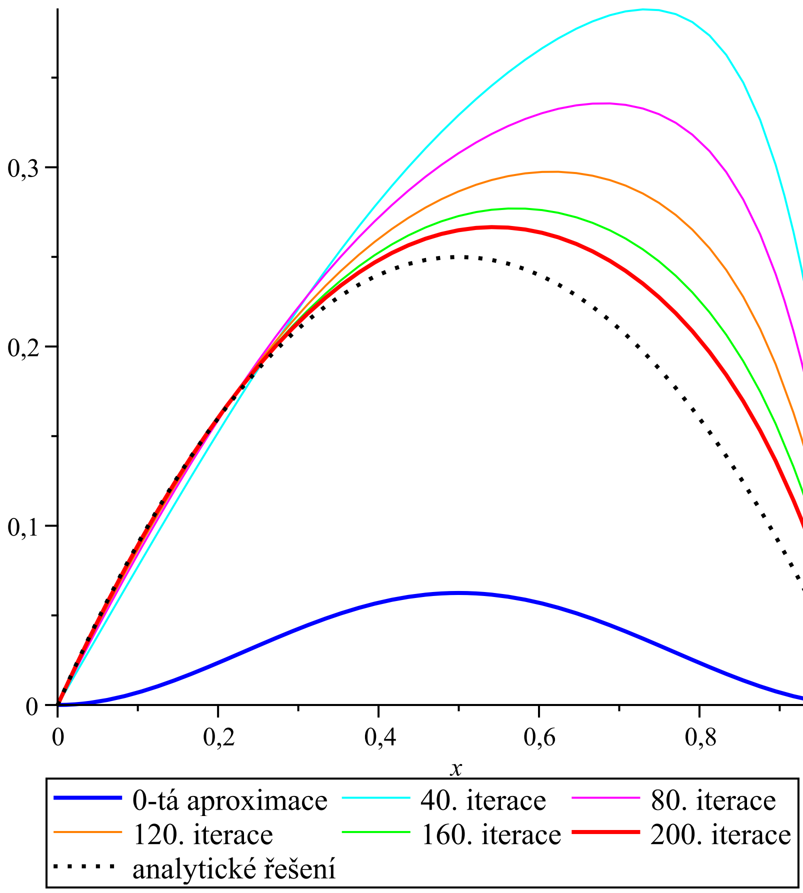
a pro všechna $t \in [0,1]$ platí

$$
\begin{aligned}
& u''(t) - \tfrac{u'(t)}{1+(u'(t))^2} - u(t) - t^2 + t + 2 - \tfrac{t-1/2}{2t^2-2t+1} \\
&= -2 - \tfrac{1-2t}{1+(1-2t)^2} - t(1-t) - t^2 + t + 2 - \tfrac{t-1/2}{2t^2-2t+1} \\
&= -2 - \tfrac{1-2t}{2-4t+4t^2} - t(1-t) + t(1-t) + 2 - \tfrac{t-1/2}{2t^2-2t+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Na Obrázku 5.5 jsou graficky znázorněny vybrané iterace konvergující na intervalu $[0,1]$ k analytickému řešení $u(t) = t(1-t)$ okrajové úlohy (5.19), (5.9). Jako počáteční aproximace byla zvolena funkce

$$u_0(t) = \frac{1}{4} t(1-t)\sin(\pi t)\,,$$

která zřejmě patří do $C^2([0,1])$.



Obrázek 5.5: Grafické znázornění numerického řešení Příkladu 5.4 iterační metodou. Pro 200 iterací byla doba výpočtu $\tau \approx 20$ s.

Příklad 5.5 Uvažujme nelineární diferenciální rovnici

$$u''(t) - 4u(t) - \operatorname{arctg}(1 + u^2(t)) + 2\sin(2\pi t) = 0 \quad \text{na } (0,1). \tag{5.24}$$

Tuto rovnici lze zapsat ve tvaru (4.1) pro

$$F(t,u,p) = p, \quad f(t,u,p) = 4u + \operatorname{arctg}(1+u^2) - 2\sin(2\pi t)\,.$$

Nyní najdeme kladné konstanty μ, ν a C, se kterými budou pro tyto funkce splněny podmínky (4.2) a (4.3).

Ze tvaru funkcí vyplývá, že

$$\begin{aligned} F'_p(t,u,p) &= 1, & F'_u(t,u,p) &= 0,\\ f'_p(t,u,p) &= 0, & f'_u(t,u,p) &= 4 + \tfrac{2u}{1+(1+u^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Pro odhady (4.2) hledáme $\mu, \nu > 0$, aby pro všechna $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $u \in \mathbb{R}$ platilo

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \le \xi_1^2 + \left(4 + \frac{2u}{1+(1+u^2)^2}\right)\xi_2^2 \le \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

To bude splněno pro

$$\mu = \min\left\{1, 4 + \min_{u\in\mathbb{R}} \frac{2u}{1+(1+u^2)^2}\right\}, \ \nu = \max\left\{1, 4 + \max_{u\in\mathbb{R}} \frac{2u}{1+(1+u^2)^2}\right\}.$$

Hledejme proto extrémy funkce

$$g(u) := \frac{u}{1+(1+u^2)^2}\,.$$

Funkce g je lichá funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$. Její derivace

$$g'(u) = \frac{1+(1+u^2)^2 - 4u^2(1+u^2)}{(1+(1+u^2)^2)^2} = \frac{-3u^4 - 2u^2 + 2}{(1+(1+u^2)^2)^2}$$

je rovna nule, právě když

$$-3u^4 - 2u^2 + 2 = 0\,,$$

což nastane v bodech

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}\,.$$

(Další dva kořeny této bikvadratické rovnice nejsou reálné). Navíc funkce $g'(u)$ v bodech u_1, u_2 mění znaménko. Protože g je funkce lichá a kladná pro $u > 0$, nabývá svého maxima v bodě u_1 a minima v bodě u_2. Přitom platí, že

$$g(u_1) = -g(u_2) = \frac{\sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}}{1 + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} \approx 0.21796\,.$$

Hledané konstanty jsou tedy

$$\begin{aligned} \mu &= \min\{1, 4 + 2g(u_2)\} = \min\{1, 3.56408\} = 1, \\ \nu &= \max\{1, 4 + 2g(u_1)\} \approx \max\{1, 4.4359\} = 4.4359\,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Pro odhady z (4.3) postupnými úpravami a použitím odhadů z Lemma 5.1 dostáváme pro všechna $t \in [0,1]$ a $u, p \in \mathbb{R}$, že

$$|F(t,u,p)| = |p| = \sqrt{p^2} \leq \sqrt{1 + u^2 + p^2},$$

$$\begin{aligned} |f(t,u,p)| &= |4u + \operatorname{arctg}(1 + u^2) - 2\sin(2\pi t)| \\ &\leq 4|u| + |\operatorname{arctg}(1 + u^2)| + 2|\sin(2\pi t)| \\ &\leq 4|u| + \pi/2 + 2 \leq 4(|u| + 1) \leq 4\sqrt{2}\sqrt{1 + u^2} \\ &\leq 4\sqrt{2}\sqrt{1 + u^2 + p^2}\,, \end{aligned}$$

$$|F'_u(t,u,p)| = 0\,, \quad |F'_t(t,u,p)| = 0\,, \quad |f'_p(t,u,p)| = 0\,.$$

Odtud

$$C = 4\sqrt{2}. \tag{5.26}$$

Vzhledem k Poznámce 4.1 je

$$\varepsilon_* = \frac{\mu}{(C + \nu)^2} = \frac{1}{(4\sqrt{2} + 4 + 2g(u_1))^2} \approx 0.009817$$

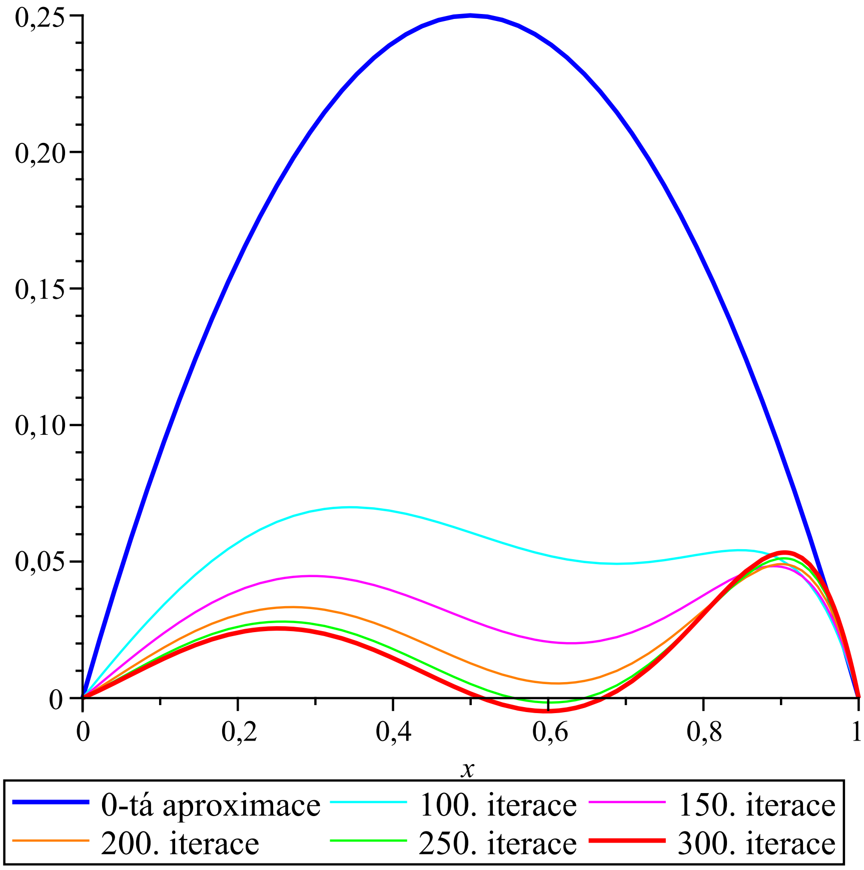
a

$$K(\varepsilon_*) = 1 - \mu\varepsilon_* = 1 - \varepsilon_* \approx 0.990183\,.$$

Na Obrázku 5.6 jsou graficky znázorněny vybrané iterace konvergující na intervalu $[0,1]$ k numerickému řešení okrajové úlohy (5.24), (5.9). Analytické řešení není v tomto případě známé. Jako počáteční aproximace byla zvolena funkce

$$u_0(t) = t(1 - t)\,,$$

která zřejmě patří do $C^2([0,1])$.



Obrázek 5.6: Grafické znázornění numerického řešení Příkladu 5.5 iterační metodou. Pro 300 iterací byla doba výpočtu $\tau \approx 43$ s.

Kapitola 6

Závěr

V této bakalářské práci jsme studovali kvazilineární diferenciální rovnice 2. řádu a jejich řešitelnost pomocí definovaného iteračního procesu. Vycházeli jsme přitom z knihy [5]. Ukázali jsme, že iterace tvoří Cauchyovskou posloupnost, protože vzdálenost po sobě jdoucích iterací $\|u_{n+1} - u_n\|$ klesá pro $n \to \infty$ k nule jako geometrická posloupnost s kvocientem $K \in (0, 1)$. Ve všech námi zvolených příkladech je však tento kvocient roven téměř jedné, proto jsme museli volit velký počet iterací a výpočty tak trvaly až desítky sekund. Vzhledem k tomu, že jsme K počítali analyticky pomocí známých nerovností, je možné, že iterační proces ve skutečnosti konverguje rychleji.

Nespornou výhodou tohoto iteračního procesu je to, že konverguje pro libovolnou počáteční iteraci. To je nezbytné u všech úloh, jejichž řešení neumíme najít analyticky.

Předmětem dalšího studia by mohlo být například použití iterační metody pro jiné typy okrajových podmínek, případně pro úlohy vyšších řádů či úlohy ve vyšší dimenzi.

Literatura

[1] BENEDIKT, Jiří a Petr GIRG. *Prostory funkcí a řešitelnost základních typů parciálních diferenciálních rovnic.* Plzeň, 2011. Matematika pro inženýry 21. století [online]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/prostory_funkci_a_resitelnost_zakladnich_typu_pdr.pdf

[2] BURENKOV, Victor I. *Sobolev spaces on domains.* Stuttgart: B.G. Teubner, 1998. ISBN 3-8154-2068-7.

[3] DRÁBEK, Pavel a Alois KUFNER. *Úvod do funkcionální analýzy.* 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 1993, 114 s. ISBN 80-7082-124-8.

[4] FUČÍK, Svatopluk a Alois KUFNER. *Nelineární diferenciální rovnice.* 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1978, 344 s. Teoretická knižnice inženýra.

[5] KOŠELEV, Aleksandr Ivanovič. *Regularita řešení eliptických rovnic a systémů* (rusky). Moskva: Nauka, 1986, 240 s.

[6] KUFNER, Alois, Oldřich JOHN a Svatopluk FUČÍK. *Function spaces.* Leyden: Noordhoff International Pub, 1977. ISBN 90-286-0015-9.

[7] MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.* 2., upravené vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983, 92 s. Matematika pro vysoké školy technické.

[8] SCHWABIK, Štefan. *Integrace v R: (Kurzweilova teorie).* 1. vyd. Praha: Karolinum, 1999, 326 s. ISBN 80-7184-967-7.