Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Nekonečné funkční řady a jejich aplikace

Bakalářská práce

Lucie Studená

Školitel: prof. RNDr. Josef Daněček, CSc.

České Budějovice 2016

Bibliografické údaje

Studená, L., 2016: Nekonečné funkční řady a jejich aplikace. [Infinite function series and their applications. Bc. Thesis, in Czech.] – p. 53, Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

The Theses deals with infinite function series, mainly its special type – power series, and their applications. The introduction of the Theses summrizes history of infinity series from Archimedes to modern mathematicians. The first part of the Theses, which is more theoretical, concerns with convergence of function series and attributes of convergence, derivation and integration term by term, algebraic operations of power series and also representation of functions by Taylor series. The second part deals with mathematical applications of power series – calculation of function values, determination of limits, calculation of integrals and also power series solutions to first and second order ordinary differential equations.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 7. dubna 2016 ....

Lucie Studená

Poděkování

Děkuji školiteli své bakalářské práce prof. RNDr. Josefu Daněčekovi, CSc. za odborné vedení práce, čas poskytnutý konzultacím, cenné rady a připomínky a také za zapůjčení odborné literatury.

Obsah

1. Úvod

1.1 Historie nekonečných řad

První doložená zmínka o nekonečných řadách pochází z antiky ze 3. století př. n. l. **Archimédes** (287 př. n. l. – 212 př. n. l.) ve svém geometrickém pojednání *Kvadratura paraboly* využil součtu nekonečné geometrické řady při určování kvadratury paraboly. Nekonečné řady se dále v antice objevovaly pouze v některých iteračních algoritmech. Mezi filozofy starého Řecka panovala jakási hrůza z nekonečna, z toho důvodu se tématem nekonečných řad příliš nezabývali.[1]

Scholastičtí filosofové pozdního středověku naopak často nekonečno zmiňovali a považovali ho nejen jako možnou teorii, ale i jako skutečnost (nebo jako něco „dokončeného“). Matematici západního světa ve 14. století sice měli představivost a exaktní myšlení, ale postrádali algebraickou a geometrickou zdatnost. Jejich přínos vědě proto nespočíval v rozšíření starověkého díla, ale ve zcela novém úhlu pohledu. Mezi to patřilo právě zabývání se nekonečnými řadami, což bylo v té době na Západě velmi originální, nové a klíčové téma, které bylo doposud zmíněno jen v některých antických iteračních algoritmech již zmiňovaného Archiméda.[1]

V polovině 14. století anglický logik jménem **Richard Suiseth** (jeho životní data nejsou známa, působil na Merton College v Oxfordu v letech 1340 – 1354), přezdívaný „Výpočtář“, sečetl na základě fyzikálních úvah první nekonečnou řadu, která nebyla geometrická a to řadu

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k} + \ ... \ = 2.$$

Suiseth podal dlouhý a únavný slovní důkaz, aniž by znal pro to grafické znázornění. Avšak francouzský scholastický učenec **Nicolas d´Oresme** (mezi lety 1320/1330 – 1382) ještě v témže století použil svoji grafickou metodu k mnohem snadnějšímu důkazu této věty. Oresme si také poradil s případem jako

$$\frac{1 \cdot 3}{4} + \frac{2 \cdot 3}{16} + \frac{3 \cdot 3}{64} + ... + \frac{k \cdot 3}{4^k} + \ ...,$$

kde je součet $\frac{4}{3}$. Problémy podobné těmto zaměstnávaly učence i během následujícího století a půl. Mezi další Oresmovy přínosy týkající se nekonečných řad patřil důkaz divergence harmonické řady. Seskupil po sobě jdoucí členy řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ ... \ + \frac{1}{k} + \ ...,$$

umístěním prvního členu do první skupiny, dalšími dvěma členy do druhé skupiny, následujícími čtyřmi členy do třetí skupiny a tak dále, až k-tá skupina tak obsahovala 2^{k-1} členů. Pak je zřejmé, že máme nekonečně mnoho skupin a že součet členů uvnitř každé skupiny je nejméně $\frac{1}{2}$. A proto přidáním dohromady dostatečného množství členů ve správném pořadí, můžeme převýšit jakékoli dané číslo. [1]

Na konci 14. století indický matematik **Madhava** (1340 – 1425) objevil mocninné řady pro funkce $\sin x$ a $\cos x$, které byly později pojmenovány po Newtonovy, a řadu pro $\frac{\pi}{4}$, která je připisována Leibnizovy. Co se týče funkčních řad patří mezi jeho zásluhy i vynalezení mocninné řady pro $\operatorname{arctg} x$, která je přisuzována Gregorymu, a také mnoho dalších řad. [1]

Teorie nekonečných řad vznikla až v druhé polovině 17. století v souvislosti s formováním infinitezimálního počtu. V roce 1668 **James Gregory** (1638 – 1675) publikoval dvě díla – *Všeobecnou část geometrie a Geometrické cvičení* – zahrnující poznatky z Francie, Itálie, Holandska a Anglie a samozřejmě jeho vlastní. Obě tato díla obsahovala mj. poznatky o funkčních řadách. Objevil skrz proces, který je ekvivalentní po sobě jdoucím derivacím, Taylorovu řadu více než 40 let předtím, než ji Taylor publikoval. Maclaurinovy řady pro funkce $\tan x$ a $\sec x$ a pro $\arctan x$ a pro $\operatorname{arcsec} x$ mu byly všechny známy, ale jen jedna z nich, řada pro $\operatorname{arctg} x$, nese jeho jméno. V Itálii se pravděpodobně dozvěděl, že plocha pod křivkou $y = \frac{1}{1+t^2}$ od 0 do x je $\operatorname{arctg} x$ a jednoduché dělení mění výraz $\frac{1}{1+t^2}$ na $1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$. Z Cavalieriho vzorce [1] je zřejmé, že

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \operatorname{arctg} x.$$

Tento výsledek je dosud znám jako Gregoryho řada. [1]

Poněkud analogický výsledek Gregoryho řady byl odvozený přibližně ve stejnou dobu **Nicolausem Mercatorem** (1620 – 1687) a publikován v díle *Logarithmotechnia* roku 1668. Část tohoto díla zahrnuje různé vzorce aproximací pro logaritmy, jeden z nich je v podstatě dnes znám jako Merkatorova řada. Z Gregoryho díla, bylo známo, že plocha pod hyperbolou $y = \frac{1}{1+t}$ od 0 do x je $\ln(1+x)$. A proto použitím metody Jamese Gregoryho „integrování

[1]
$$\int_0^a x^k \,\mathrm{d}x = \frac{a^{k+1}}{k+1},\ k \geq 0$$

dlouhého dělení", dostáváme

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + ...)\,\mathrm{d}t = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} ... \,.$$

Merkator pro dané hodnoty převzal jméno „přirozený logaritmus" od italského matematika **Pietra Mengoliho** (1626 – 1686) a získal prostřednictvím toho tuto řadu. Ačkoli řada nese Merkatorovo jméno, ukázalo se, že byla známa dříve jak holandským matematikem **Johannesem Huddem** (1628 – 1704), tak i Isaacem Newtonem (o něm více později), i když ani jedním z nich nebyla publikována. [1]

V 50. a 60. letech 17. století bylo objeveno velké množství metod, které se zabývají nekonečnem. Ku příkladu nepatrná část do nekonečna pokračujícího rozvoje pro π, na kterou přišel **William Brounckerem** (1620 – 1684). Brouncker a Gregory nalezli mimo jiné některé nekončné řady pro logaritmy. Jejich práce ale byla byla zastíněna větší jednoduchostí Merkatorových řad pro logaritmy. [1]

Brook Taylor (1685 – 1731) v roce 1715 publikoval své dílo *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, ve kterém formálně představil teorii Taylorových řad

$$f(x+a) = f(a) + xf^{'}(a) + \frac{x^2}{2!}f^{''}(a) + \frac{x^3}{3!}f^{'''}(a) + ... + \frac{x^{(k)}}{k!}f^{(k)}(a) + ...$$

a se kterou je dodnes spojováno jeho jméno. Dobře známými se tyto řady staly hlavně při nahrazení čísla a nulou — tzv. Maclaurinovy řady, které jsou pojmenovány podle britského matematika **Colina Maclaurina** (1698 – 1746). Maclaurinovy řady jsou pouze speciálním případem řad Taylorových. Obecné Taylorovy řady avšak byly známy již mnoho let před Jamesem Gregorym, i když Brook Taylor si toho nebyl vědom. Navíc Maclaurinovy řady se objevily v díle *Methodus Differentialis* z roku 1730 **Jamese Stirlinga** (1692 – 1770) více než 12 let před tím, než byly publikovány Maclaurinem. Stirlingovo dílo totiž obsahuje významný přínos ve studiu konvergence nekonečných řad, interpolace a speciálních funkcí definovaných řadami. Konvergencí nekonečných řad se zabývá i Maclaurin ve svém díle *Treatise of Fluxions*, kde uvádí mj. integrální kritérium konvergence. [1]

První objevy **Isaaca Newtona** (1642 – 1726/7) datující se do roku 1665 se týkaly nekonečných řad. Newton spojil dohromady tyto dva problémy – nekonečné řady a míru změny (podíl změny funkční hodnoty a změny proměnné). Newton se také v letech 1664 nebo 1665 zabýval binomickou větou a objevil obecnou binomickou řadu

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + ... + \binom{a}{k}x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k, \qquad x \in (-1,1),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo $\binom{a}{k}$ je binomický koeficient. Newton ale objevil něco daleko důležitějšího než než binomickou větu – zjistil, že analýza pomocí nekonečných řad má stejnou vnitřní jednolitost a je objektem stejných obecných pravidel jako algebra a konečné veličiny. Nekonečné funkční řady už dále nebyly pokládány jen za prostředek aproximace, ale začaly být vnímány jako alternativní formy funkcí, které reprezentují. Newton sám nikdy binomickou větu nepublikoval, ani ji nedokázal, ale sepsal a publikoval několik výkladů o své nekonečné analýze. [1]

Stejně jako u Newtona, hrály nekonečné řady velkou roli i v rané tvorbě německého matematika **Gottfrieda Wilhelma von Leibniz** (1646 – 1716). Nizozemský vědec **Christiaan Huygens** (1629 – 1695) vytvořil problém týkající se nalezení součtu převrácených hodnot trojúhelníkových čísel[2], který je $\frac{2}{k(k+1)}$, a kterým se Leibniz zabýval. Chytře napsal každý člen jako součet dvou zlomků použitím

$$\frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

z čehož je zřejmé vypsáním pár členů, že součet prvních k členů je

$$2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right),$$

a proto platí, že součet této nekonečné řady je 2. Leibniz z tohoto úspěchu vyvodil, že je schopen najít součet většiny nekonečných řad. Leibniz a také Newton našli funkční řadu pro e^x. Lebnizovo jméno je také spojováno s nekonečnou řadou pro $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$, což byl jeden z jeho prvních matematických objevů. Tato řada, která pochází z jeho kvadratury kruhu je jen speciálním případem rozvoje $\operatorname{arctg} x$, který již dříve nalezl Gregory. [1]

Italský matematik **Quido Grandi** (1671 – 1742) je známý také jako ten, kdo se shodoval s Leibnizem v otázce, zda součet alternující nekonečné řady $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ může být $\frac{1}{2}$. Tento součet je chápán nejen jako aritmetický průměr dvou částečných součtů prvních k-členů, ale také jako hodnota pro $x = 1$ z generující funkce $\frac{1}{1+x}$, ze které dělením obdržíme funkci $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$. Grandi ukázal, že se zde naskýtá veliký paradox, a to když jsou seskupovány členy alternující nekonečné řady do párů, získáme výsledek $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 ... = 0 + 0 + 0 + 0 + \ ... = \frac{1}{2}$, který je analogický vytvoření světa z ničeho. [1]

V 18. století švýcarský vědec **Leonhard Euler** (1707 – 1783) objevil speciální mocninné řady – hypergeometrické řady, systematicky popsal a rozšířil poznatky o nekonečných řadách

[2]Trojúhelníkové číslo je součet k přirozených čísel od 1 do k: $T_k = 1 + 2 + ... + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

včetně rozvojů funkcí e^x, $\sin x, \cos x$ apod.[1] Toto je pouhý zlomek z Eulerovy práce, neboť jeho dílo zabývající se nekonečnými řadami je velmi rozsáhlé.

Francouzský matematik a fyzik **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768 – 1830) je dnes nejvíce znám díky svému oslavovanému dílu *Analytická teorie tepla* z roku 1822. Tato kniha, kterou **Lord Kelvin** (1824 – 1907) nazval „skvělou matematickou básní“, mu o 10 let později zaručila výhru Ceny akademie za esej o matematické teorii tepla. Hlavní část Fourierova přínosu matematice byla myšlenka, kterou nastínil **Daniel Bernoulli** (1700 – 1782), že jakákoliv funkce $y = f(x)$ může být vyjádřena řadou ve tvaru

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + ... + a_k\cos(kx) + ... \\ + \; b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + ... + b_k\sin(kx) + ... \, . \end{aligned}$$

Takovéto funkční řady jsou nyní známy jako Fourierovy řady. Fourierovy řady dokáží vyjádřit mnohem obecnější typy funkcí než Taylorovy řady. Funkce má Fourierův rozvoj dokonce i v případě, když existuje mnoho bodů, ve kterých funkce nemá derivaci, nebo ve kterých není funkce spojitá. Tento rozvoj lze snadlo nalézt tímto způsobem

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \;\; a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \;\; b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x,$$

kde $k = 1, 2...$. Fourier později upadl v nemilost, když se Bourboni v roce 1815 po vyhnání Napoleona opět ujali francouzského trůnu. Jeho dílo ale od té doby bylo v matematice a fyzice zcela zásadním. Už nebylo potřeba, aby se funkce „chovaly pěkně“ a aby je vědci dobře znali. [1]

19. století by si zasloužilo označení „Zlatá éra matematiky“, neboť bylo plné přínosných objevů, které se mimo jiné týkaly i nekonečných procesů. Jedním z matematiků tohoto období byl slavný německý matematik a fyzik **Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855). Jeho talent se objevil již v dětství, když jako desetiletý chlapec z hlavy sečetl aritmetickou posloupnost čísel $1, 2, ...100$. Gaussův přínos na poli nekonečných řad byl především v oblasti jejich konvergence. V roce 1812 Gauss použil podílové kritérium, aby ukázal, že hypergeometrická řada tvaru

$$\begin{aligned} 1+&\frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + ... \\ +&\frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)...(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{1\cdot 2...(k-1)\gamma(\gamma+1)...(\lambda+k-1)}x^k + ... \end{aligned}$$

konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje $|x| > 1$. Zdá se, že však toto kritérim bylo použito mnohem dříve angličanem **Edwardem Waringem** (asi 1736 — 1798), ačkoliv je obvykle pojmenován po **Jeanu d'Alembertovi** (1717 – 1784). [1]

V revolučním roce 1789 se narodil další slavný francouzský matematik **Augustin-Luis Cauchy** (1789 – 1857), jehož jméno je společně se jménem českého kněze **Bernharda Bolzana** (1781 – 1848) spojováno s důležitým kritériem konvergence pro nekonečné řady, i když pojem konvergence a divergence byl sice znám už od Gregoryho. V díle Bolzana a Cauchyho týkajícího se aritmetizace matematické analýzy, definice limit, spojitosti a konvergence byly podobnosti, což byla jen náhoda, oba však, zdá se, měli jistý „strach z nekonečna", protože trvali na tom, že v matematice neexistuje „dokončené nekonečno". Již před Cauchym a Bolzanem se zde občas vyskytla upozornění na potřebu kritérií konvergence pro nekonečné řady. Cauchyovo jméno se dodnes objevuje ve spojení s množstvím teorií o nekonečných řadách. Mějme definovanou řadu, která pro vzrůstající hodnotu k konverguje, pokud součet prvních k členů s_k se přibližuje k limitě s, nazývané součet řady, Cauchy dokázal, že nutná a dostačující podmínka konvergence nekonečné řady je, že pro danou hodnotu n velikost rozdílu mezi s_k a s_{k+n} jde k nule s tím, jak k roste do nekonečna. Tato podmínka se proslavila jako Cauchyovo kritérium, ale znal ji již před tím Bolzano (a možná také mnohem dříve Euler). [1]

Hlavní berlínský analytik druhé poloviny 19. století a největší učitel matematiky své doby byl **Karl Weierstrass** (1815 – 1897). Weierstrass byl už v mládí nadšený z mocninných řad jako užitečného prostředku pro vyjadřování funkcí a v tomto propojení Weierstrass vytvořil své největší dílo, následujíce při tom kroky norského matematika **Nielse Henrika Abela** (1802 – 1829). Již před 50. léty 19. století bylo obecně shrnuto, že pokud nekonečná řada konverguje v nějakém intervalu ke spojité a diferencovatelné funkci $f(x)$, pak druhá řada získaná derivací původní řady člen po členu, bude nutně konvergovat ve stejném intervalu k funkci $f'(x)$. Někteří matematici dokázali, že to není nutnou podmínkou a že derivování člen po členu se může věřit jen, pokud je řada stejnoměrně konvergentní v daném intervalu, a že částečný součet $s_k(x)$ se bude lišit od součtu $s(x)$ řady méně než dané ϵ pro všechny $k > k_0$. Weierstrass dokázal, že pro stejnoměrně konvergentní řady je také možné integrování člen po členu. Co se týče záležitosti stejnoměrné konvergence funkčních řad, Weierstrass nebyl sám, tímto konceptem se ve stejnou dobu (v 40. a 50. letech 19. století) nezávisle zabývali nejméně tři tři další matematici – Cauchy ve Francii, Stokes v Cambridge a Seidel v Německu. [1]

2. Nekonečné funkční řady

V této kapitole se budeme zabývat elementy obecné teorie funkčních řad, a to především tou částí teorie, která je posléze uplatněna v teorii mocninných řad a v jejich aplikacích.

2.1 Základní poznatky

Nekonečná funkční řada (nazývána též nekonečná řada funkcí) je řada ve tvaru $\sum f_k(x)$, jejíž členy jsou tvořeny funkcemi $f_k(x)$. Tato řada pak, pokud je konvegentní, konverguje k nějakému svému součtu – funkci $f(x)$. Nekonečné funkční řady mají v matematice široké uplatnění, neboť je jimi možné definovat nejrůznější funkce. Budeme zde uvažovat pouze reálné funkce jedné proměnné.

Definice 2.1.1 (Posloupnost částečných součtů, nekonečná funkční řada)**.** Nechť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině $D \subset \mathbb{R}$ a nechť je dána rekurence:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x) + f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Pak tato rekurence definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme posloupností částečných součtů řady tvořenou posloupností $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Nechť existuje limita posloupnosti $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, pak tuto limitu označujeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ ... \ + f_k(x) + \ ... \ . \tag{2.1}$$

Výraz tvaru (2.1) nazýváme nekonečnou funkční řadou, kde funkce $f_k(x)$, pro $k = 1, 2, ...$, jsou nazývány k-tými členy funkční řady (2.1) .

Ilustrativní příklady funkčních řad:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5x)^k}{1+k^2}$ je funkční řada, která absolutně konverguje v intervalu $\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \rangle$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} 2x^3 \, e^{-kx}$ je funkční řada, která absolutně konverguje v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Speciální případy funkčních řad: Výraz $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je obecný tvar nekonečné funkční řady. Existují však speciální případy nekonečných funkčních řad, které mají velké využití nejen v oblastech matematiky a fyziky (více v kapitole 5 Aplikace nekonečných funkčních řad).

1. Budeme se zde zabývat především mocninnými řadami, které mají z praktického hlediska největší význam. **Mocninná řada** vzniká tak, že za funkci $f_k(x)$ dosadíme polynom stupně k, tj. $f_k(x) = a_k x^k$ a $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, kde $k = 0, 1, \dots$. Tato řada je tedy ve tvaru
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$
2. Dalším speciálním případem jsou např. trigonometrické řady, které se uplatňují všude tam, kde se setkáváme s jevy s periodickým charakterem. **Trigonometrická řada** je tvořena pomocí goniometrických funkcí a je ve tvaru
$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$
kde $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $k = 1, 2, \dots$.

2.2 Konvergence funkčních řad

Důležitou vlastností funkčních řad je jejich konvergence, zejména stejnoměrná, protože se stejnoměrnou konvergencí řady jsou spjaté významné vlastnosti funkčních řad a jejich součtů, jako je např. spojitost.

Definice 2.2.1 (Bodová konvergence funkční řady)**.** (viz [5], s. 134) Funkční řada
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{2.2}$$
konverguje v bodě $x_0 \in I$, jestliže konverguje číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$. Obor (bodové) konvergence funkční řady (2.2) je pak množina D všech bodů $x_0 \in I$, ve kterých tato řada konverguje.

Definice 2.2.2 (O součtové funkci)**.** (viz [2], s. 391) Nechť $D \neq \emptyset$ je obor konvergence řady (2.2). Jestliže pro každý bod $x_0 \in D \subset I$ je funkce $s(x_0)$ součtem číselné řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$, pak je na množině D definovaná tzv. součtová funkce $s(x)$ řady (2.2). Píšeme
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x) \quad \forall x \in D. \tag{2.3}$$
Výraz (2.3) někdy též čteme: Řada (2.2) bodově konverguje k funkci $s(x)$ na množině D.

Poznámka 2.2.1. Z definice bodové konvergence 2.2.1 je zřejmé, že pojem konvergence řady v daném bodě je analogický s pojmem konvergence příslušné číselné řady. Proto můžeme také mluvit o absolutní konvergenci funkční řady v daném bodě a i na celém jejím definičním oboru.

Definice 2.2.3 (Absolutní konvergence)**.** (viz [2], s. 391) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ je konvergentní řada pro všechna $x \in D$, pak říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně na množině D.

Příklad 2.2.1. Vyšetřete bodovou konvergenci následujících řad:

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{k+1}}{3+k^2} \tag{2.4}$$

Konvergenci řady zjistíme pomocí limitního podílového kritéria, tj. jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \right| < 1,$$

pak daná funkční řada konverguje. Pro danou řadu tedy platí

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{k+1}x^{k+2}}{3+(k+1)^2}}{\frac{2^k x^{k+1}}{3+k^2}} \right| = 2|x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{(3+k^2)}{k^2+2k+4} = 2|x| < 1.$$

Dále ještě vyšetříme konvergenci řady pro $|x| = \frac{1}{2}$ (protože o konvergenci v tomto bodě nám kritérium nerozhodlo) a tím získáme dvě absolutně konvergující řady $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3+k^2}$ a $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+k^2}$. Řada (2.4) proto konverguje absolutně v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{x^4+5^k} \tag{2.5}$$

Konvergenci vyšetříme pomocí srovnávacího kritéria, tj. jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ jsou dvě funkční řady s nezápornými členy a platí $0 \le f_k(x) \le g_k(x)$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$. Danou řadu srovnáme s geometrickou řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$, která konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Protože platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{x^4+5^k} \le 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

neboť

$$x^4 + 5^k \ge 5^k \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

a tedy řada (2.5) konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cos^k x}{k^3}, \quad x \in (0, 2\pi) \tag{2.6}$$

Konvergenci vyšetříme pomocí limitního odmocninového kritéria, tj. daná řada konverguje, pokud platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k(x)|} < 1.$$

Dostaneme tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(2\cos x)^k}{k^3}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|2\cos x|^k}{k^3}} = 2|\cos x| < 1.$$

Pro $2|\cos x| = 1$ získáme čtyři divergentní řady. Tudíž funkční řada (2.6) na intervalu $(0, 2\pi)$ konverguje absolutně pro všechna $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

Definice 2.2.4 (Stejnoměrná konvergence funkční řady)**.** (viz [5], s. 137) Nechť je dána řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, pak tato řada konverguje na intervalu I stejnoměrně k součtové funkci $s(x)$, právě když posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n(x)\}$ konverguje na I k funkci $s(x)$ stejnoměrně.

Poznámka 2.2.2. Provedeme si srovnání bodové a stejnoměrné konvergence za pomoci kvantifikátorů:

- $f_k(x) \to f(x)$: $(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists k_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0(x, \epsilon))$
  $(|f_k(x) - f(x)| < \epsilon)$
- $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$: $(\forall \epsilon > 0)(\exists k_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0(\epsilon))(\forall x \in I)$
  $(|f_k(x) - f(x)| < \epsilon)$

Vidíme, že definice bodové a stejnoměrné konvergence se navzájem liší pouze v „pořadí kvantifikátorů“, tento rozdíl je však z hlediska vlastností obou konvergencí velmi podstatný. V definici bodové konvergence závisí číslo k_0 na volbě bodu $x \in I$ a také na volbě čísla $\epsilon > 0$, kdežto v definici stejnoměrné konvergence záleží číslo k_0 pouze na volbě čísla $\epsilon > 0$.

Poznámka 2.2.3. Pokud funkční řada konverguje ke své součtové funkci na nějakém intervalu stejnoměrně, pak také na témže intervalu konverguje bodově. Obráceně však tato implikace neplatí. Stejnoměrná konvergence je proto mnohem „silnější“ vlastnost než bodová konvergence.

Poznámka 2.2.4. Funkční řada konverguje stejnoměrně na otevřeném intervalu I, jestliže konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu intervalu I.

Věta 2.2.1 (Bolzano-Cauchyovo kritérium pro řady funkcí)**.** (viz [3], s. 110) *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I *právě tehdy, když pro každé* $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, *existuje* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že po všechna* $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, *libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *a pro všechna* $x \in I$ *platí*

$$|f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + ... + f_{k+n}(x)| < \epsilon$$

Důkaz: Z definice stejnoměrné konvergence 2.2.4 víme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I právě, když posloupnost částečných součtů $\{s_k(x)\}$ příslušící této řadě stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$. Podle věty 2.2.1 je tato podmínka splněna právě tehdy, když ke každému $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, existuje takové $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, kde $k \geq k_0$, libovolné $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in I$ platí:

$$|s_{k+n}(x) - s_k(x)| = |f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + ... + f_{k+n}(x)| < \epsilon \; .$$

Věta 2.2.2 (Weierstrassovo kritérium)**.** (viz [5], s. 139) *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *je řada definovaná na intervalu* I *a nechť existuje číselná konvergentní řada (tzv. majorantní řada)* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *s nezápornými členy taková, že platí:* $|f_k(x)| \leq a_k$ *pro všechna* $x \in I$ *a všechna* $k \in \mathbb{N}$*. Pak řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I.

Důkaz: Předpokládejmě, že jsou splněny podmínky věty 2.2.2. Zvolíme libovolné $\epsilon > 0$. Podle postačující podmínky pro konvergenci číselné řady existuje pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $k \geq k_0$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n}| < \epsilon$. Pak pro $\forall n \geq n_0$, libovolné $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in I$ platí

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + ... + f_{k+n}(x)| &\leq |f_{k+1}(x)| + |f_{k+2}(x)| + ... + |f_{k+n}(x)| \\ &\leq |a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n}| < \epsilon. \end{aligned}$$

Příklad 2.2.2. Určete obor stejnoměrné konvergence následujících řad pomocí Weierstrassova kritéria, viz věta 2.2.2:

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2} \tag{2.7}$$

K dané řadě najdeme majorantní řadu, o které víme, že konverguje. Majorantní řadou je zde např. řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, jejíž oborem konvergence je celé $\mathbb{R}$. Řadu (2.7) porovnáme s řadou majorantní:

$$\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2},$$

neboť

$$|\sin kx| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

Funkční řada (2.7) proto stejnoměrně konverguje pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kx^2 + k^2} \tag{2.8}$$

Srovnání zde provedeme pomocí řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k)}$, jejíž oborem konvergence je celé $\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{kx^2 + k^2}\right| \leq \frac{1}{k(1+k)} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$k(x^2 + k) \geq k(1 + k)$$

a tedy platí také

$$x^2 \geq 1 \quad \forall x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty),$$

Zjistili jsme, že funkční řada (2.8) konverguje stejnoměrně pro všechna $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Věta 2.2.3 (Modifikace Weierstrassova kritéria)**.** ([5], s. 148) *Nechť na intervalu D platí $a_k = \sup_{x \in D} |f_k(x)|$. Jestliže číslená řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, pak funkční řada $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konverguje na D stejnoměrně.*

Důkaz: Viz např. [5] na straně 148.

2.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergujících řad

Uvedeme si zde některé věty o stejnoměrně konvergentních řadách, které později uplatníme v teorii mocninných řad.

Věta 2.3.1. (viz [5], s. 138) *Nechť řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje na intervalu I stejnoměrně k součtové funkci $s(x)$, pak funkce $s(x)$ je na intervalu I spojitá.*

Důkaz: Viz např. [5] na straně 138.

Věta 2.3.2. (viz [5], s. 140) *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je řada spojitých funkcí konvergujících k součtové funkci $s(x)$ na libovolném intervalu I. Nechť dále na každém uzavřeném omezeném podintervalu intervalu I konverguje daná řada stejnoměrně. Potom je součtová funkce $s(x)$ na intervalu I spojitá.*

Důkaz: Viz např. [5] na straně 140.

Věta 2.3.3 (Derivování řad funkcí člen po členu)**.** (viz [5], s. 146) *Něchť je dána řada funkcí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) \tag{2.9}$$

s těmito s těmito vlastnostmi:

a. *Všechny funkce $F_k(x)$ mají v intervalu (a, b) konečné derivace a platí $F_k^{'}(x) = f_k(x)$,*

b. *existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(c)$ konverguje.*

c. *řada derivovaných funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje na (a, b) stejnoměrně.*

Za uvedených předpokladů konverguje řada (2.9) na intervalu (a, b) stejnoměrně, existuje derivace limitní funkce $S(x)$ pro $x \in (a, b)$ a platí

$$S^{'}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_k(x).$$

Důkaz: Viz např. [5] na straně 147.

Věta 2.3.4 (Integrování řad funkcí člen po členu)**.** (viz [5], s. 143) *Něchť je dána řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ s těmito s těmito vlastnostmi:*

a. *Pro $k \in \mathbb{N}$ je funkce $f_k(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

b. *řada konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b \rangle$ k limitní funkci $s(x)$.*

Pak platí:

1.
$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

   pro $a \leq \alpha \leq \beta \leq a$*,*

2. *je-li*
$$S(x) = \int_{a}^{x} s(t)\,\mathrm{d}t,$$

   pak řada funkcí
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a}^{x} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

   konverguje na $\langle a, b\rangle$ *k funkci* $S(x)$ *stejnoměrně.*

Důkaz: Viz např. [5] na straně 144.

3. Mocninné řady

3.1 Základní pojmy

Mocninná řada je důležitým speciálním případem funkční řady, jejímiž členy jsou funkce tvaru $f_k(x) = a_k(x-c)^k$, $k = 0, 1\dots$. Mocninnými řadami lze vyjadřovat funkce, což lze využít u spousty důležitých aplikací jako je např. přibližný výpočet funkčních hodnot, vypočítání limity, přibližný výpočet integrálů nebo řešení diferenciálních rovnic. Využití mocninných řad je věnována kapitola 5 Aplikace nekonečných funkčních řad.

Definice 3.1.1 (Mocninná řada). Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Funkční řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_k(x-c)^k + \dots, \tag{3.1}$$

kde c je dané reálné číslo, nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě c. Čísla a_k, $k = 1, 2\dots$, nazýváme koeficienty mocninné řady.

Narozdíl od obecných funkčních řad, mají mocninné řady různé dobré vlastnosti, mezi které patří například to, že jejich obor konvergence tvoří zhruba jistý kruh okolo středu mocninné řady, tj. $|x-c| < R$, kde R je tzv. poloměr konvergence. V tomto okruhu (oboru konvergence) lze tyto řady derivovat a integrovat člen po členu.

Substitucí $y = x-c$ lze mocninnou řadu (3.1) se středem v c snadno převést na mocninnou řadu tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$, a tím získat řadu se středem v bodě 0. Pro zjednodušení zápisu se často studují pouze řady se středem v bodě 0.

Příklady mocninných řad:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-2)^k = (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{k!}(x-2)^k + \dots$.

   Tato mocninná řada má střed v bodě 2.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$.

   Tato mocninná řada se nazývá geometrická řada a jedná se o nejjednodušší případ mocninné řady. Její střed je v počátku.

3.2 Konvergence mocninných řad

Definice 3.2.1 (Poloměr a obor konvergence)**.** (viz [6], s. 209) Nechť

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k \tag{3.2}$$

je mocninná řada. Číslo R, $0 \leq R \leq \infty$, které má tu vlastnost, že pro $|x-c| < R$ mocninná řada (3.2) konverguje a pro $|x-c| > R$ diverguje, se nazývá poloměr konvergence řady (3.2). Obor konvergence řady (3.2) je množina $\{x;\ |x-c| < R\}$ sjednocená s těmi body $c-R$ a $c+R$, ve kterých řada konverguje.

Věta 3.2.1 (O konvergenci mocninné řady)**.** (viz [2], s. 401) *Mějme mocninnou řadu* (3.2)*, pak nastane právě jeden z následujících tří případů:*

1. *Řada* (3.2) *konverguje pouze pro* $x = c$*,*
2. *řada* (3.2) *konverguje pro každé* $x \in \mathbb{R}$*,*
3. *existuje číslo* $R \geq 0$ *takové, že na intervalu* $I = (c - R, c + R)$ *mocninná řada* (3.2) *konverguje a pro všechna* $x \notin I$ *řada* (3.2) *diverguje.*

Důkaz: Pokud řada (3.2) konverguje pouze v $x = c$, platí 1. případ. Pokud řada (3.2) konverguje i v jiném bodě než je bod c, znamená to, že podle definice 3.2.1 konverguje na některém intervalu $(c-R, c+R)$, kde $R > 0$. Sjednocení všech intervalů $(c-R, c+R)$, na kterých řada (3.2) konveruje je opět otevřený interval a také na něm tato řada konverguje. Takovéto sjednocení intervalů je buď celá reálná osa $\mathbb{R}$, tj. 2. případ, nebo opět interval tvaru $(c-R, c+R)$, který je maximálním otevřeným a omezeným intervalem, na němž řada (3.2) konverguje, což je poslední případ 3. případ.

Nyní si ukážeme mocninné řady se středem v počátku, které ilustrují tři případy konvergence z věty 3.2.1.

Různé možnosti konvergence mocninných řad:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} k!x^k$ je mocninná řada, jejíž poloměr konvergence je 0, z čehož je zřejmé, že konverguje pouze ve svém počátku.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$ je mocninná řada s poloměrem konvergence ∞, proto konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3} x^k$ je mocninná řada s poloměrem konvergence 3 a oborem konvergence $(-3, 3)$.

Věta 3.2.2 (Abelova)**.** (viz [5], s. 156) *Konverguje-li mocninná řada*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{3.3}$$

v bodě $R \neq 0$, pak konverguje absolutně pro každé $x \in (-R, R)$.

Důkaz: Z předpokladu konvergence řady (3.3) v bodě R vyplývá konvergence k-tého členu k nule, tj. platí $\lim_{k\to\infty}(a_k R^k) = 0$. $|a_k R^k| < K$, a to pro všechny přirozená čísla k. Zřejmě lze psát řadu (3.3) ve tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k \frac{x^k}{R^k}$. K řadě absolutních hodnot, tj. k řadě

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k R^k \frac{x^k}{R^k} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k R^k| \cdot \left| \frac{x}{R} \right|^k$$

Existuje evidentně majorantní řada

$$K \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x}{R} \right|^k,$$

což je geometrická řada s kvocientem $|\frac{x}{R}|$. Je-li $|x| < |R|$, je $|\frac{x}{R}| < 1$ a geometrická řada $\sum_{k=0}^{\infty} K |\frac{x}{R}|^k$ konverguje. Tudíž pro $x \in (-|R|, |R|)$ konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$. Takže řada (3.3) konverguje v intervalu $(-|R|, |R|)$ absolutně.

Důsledek 3.2.1. *Nechť řada* (3.3) *diverguje v bodě $R \neq 0$, pak tato řada diverguje pro každé x takové, že $|x| > |R|$.*

Věta 3.2.3 (O stejnoměrné konvergenci)**.** (viz [3], s. 140). *Nechť $R > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, pak tato řada konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu $\langle -P, P \rangle$ intervalu $(-R, R)$, kde $0 < P < R$.*

Důkaz: Nechť $x \in \langle -P, P \rangle$, kde $0 < P < R$. Pak platí

$$|a_k x^k| = |a_k||x^k| \leq |a_k| P^n,$$

přičemž číselná řada $|a_k| P^n$ konverguje podle věty 3.2.3 a z Weierstrassova kritéria (viz Věta 2.2.2) vyplývá, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konverguje stejnoměrně na $\langle -P, P \rangle$.

Věta 3.2.4. (viz [5], s. 157) *Je-li $R > 0$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, pak platí*

1. *pro $x \in (-R, R)$ řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konverguje absolutně,*

2. *je-li* $|x| > R$*, pak řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *diverguje,*

3. *o konvergenci řad* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ *a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-R)^k$ *rozhodneme zvlášť.*

Důkaz: 1. a 2. případ z věty 3.2.4 vyplývá z Definice poloměru konvergence 3.2.1, z Abelovy věty 3.2.2 a z jejího důsledku 3.2.1. 3. případ ozřejmím v příkladu 3.2.2.

Věta 3.2.5. (viz [5], s. 157; [7], s. 22) *Ke každé mocninné řadě* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$ *existuje poloměr konvergence* R*, který je vyjádřen Cauchy-Hadamardovým vzorcem:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{3.4}$$

1. *Je-li* $0 < \frac{1}{R} < \infty$*, pak* R *je takové, jak vyplývá ze vzorce* (3.4)*,*

2. *je-li* $\frac{1}{R} = 0$*, pak pokládáme* $R = \infty$*,*

3. *je-li* $\frac{1}{R} = \infty$*, pak pokládáme* $R = 0$*.*

Důkaz: Viz např. [5] na straně 157.

Příklad 3.2.1. Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2k} \tag{3.5}$$

Tato řada není v obecném tvaru, platí zde, že $a_k = 2^n$ pro $k = 2n$ a $a_k = 0$ pro $k \neq 2n$, $k = 1, 2...$, proto

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2k} = 2x^2 + 0 + 2^2x^4 + 0 + 2^4x^6 + 0 + \ldots .$$

Posloupnost $a_k = \{2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, ...\}$ má dvě podposloupnosti: $\{2, 4, 8, 16, ...\}$, kde $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}$, pro $k = 2n$ a $\{0, 0, 0, 0, ...\}$, kde $\sqrt[k]{|a_k|} = 0$, pro $k \neq 2n$. Limita posloupnosti a_k neexistuje, neboť každá z jejích podposloupností má jinou limitu. Poloměr konvergence získáme použitím Cauchy-Hadamardova vzorce (3.4):

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Z předchozího výpočtu je zřejmé, že poloměr konvergence řady (3.5) je tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{k^2}} x^{k^2} \tag{3.6}$$

Jako v předchozím příkladu tato řada není v obecném tvaru, tedy $a_k = \frac{n^2}{3^{n^2}}$, kde $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[n^2]{\frac{n^2}{3^{n^2}}} = \frac{1}{3}$, pro $k = n^2$ a $a_k = 0$, kde $\sqrt[k]{|a_k|} = 0$, pro $k \neq n^2$, $k = 1, 2...$, proto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^{k^2}} x^{k^2} = \frac{1}{3}x + 0 + 0 + \frac{4^2}{3^{4^2}} x^{4^2} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{9^2}{3^{9^2}} x^{9^2} + \ldots .$$

Opět získáme posloupnost a_k, která má dvě podposloupnosti s různými limitami a tedy pro výpočet poloměru konvergence použijeme Cauchy-Hadamardův vzorec (3.4):

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} = 3.$$

Tímto výpočtem jsme získali poloměr konvergence řady (3.6), který je 3.

Poznámka 3.2.1. Jestliže existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \tag{3.7}$$

pak poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ je roven právě této limitě.

Příklad 3.2.2. Určete poloměr a obor konvergence následujících řad:

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k!(x-7)^k = (x-7) + 2(x-7)^2 + 3!(x-7)^3 + \ldots . \tag{3.8}$$

Střed řady je v bodě 7 a koeficienty jsou $k!$. Pro poloměr konvergence platí vzorec (3.7):

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k+1} \right| = 0.$$

Z předchozího výpočtu vyplývá, že poloměr konvergence řady (3.8) je 0. Tato řada proto konverguje pouze ve svém středu, tj. v bodě 7.

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{5^k k} = \frac{x-3}{5} + \frac{(x-3)^2}{50} + \frac{(x-3)^3}{375} + \ldots . \tag{3.9}$$

Střed řady je v bodě 3 a koeficienty jsou $\frac{1}{5^k k}$. Poloměr konvergence je 5, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a^k|}$$

existuje a platí

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{5^k k} = 5 \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 5.$$

Daná řada proto konverguje uvnitř intervalu $(-2, 8)$. O konvergenci v krajních bodech rozhodneme dosazením. Po dosazení -2 získáváme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, což je konvergentní Leibnitzova řada a po dosazení 8 získáváme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, což je divergentní harmonická řada. Obor konvergence řady (3.9) je proto $\langle -2, 8)$.

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+4)^k}{(k+1)^2} = \frac{(x+4)}{4} + \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(x+4)^3}{16} + \dots \,. \tag{3.10}$$

Střed řady je v bodě -4 a koeficienty jsou $\frac{1}{(k+1)^2}$. Pro poloměr konvergence opět použijeme vzorec (3.7). Poloměr konvergence je tedy 1, neboť existuje limita

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1.$$

Z předchozího výpočtu vyplývá, že tato řada konverguje uvnitř intervalu $(-5, -3)$. O konvergenci v krajních bodech opět rozhodneme dosazením, v bodě -5 získáváme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$, což je konvergentní řada a v bodě -3 získáváme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$, což je také konvergentní řada. Obor konvergence řady (3.10) je proto $\langle -5,\ -3\rangle$.

3.3 Derivování a integrování součtu mocninné řady

Mocninné řady mají tu výhodu, že při derivování a integrování člen po členu u nich nemusíme ověřovat předpoklady z vět 2.3.3 a 2.3.4, protože tyto předpoklady automaticky splňují.

Věta 3.3.1. (viz [2], s. 407) *Nechť*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \tag{3.11}$$

je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \neq 0$ a nechť funkce $s(x)$ je součtem řady (3.11) *na intervalu konvergence $I = (c-R, c+R)$.*
Pak funkce $s(x)$ má na intervalu I derivaci $s'(x)$ a pro každé $x \in I$ platí

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-c)^{k-1}, \tag{3.12}$$

$s'(x)$ nazýváme příslušnou řadou derivací.

Dále pro každé $x \in I$ platí

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1} = \int\limits_c^x f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.13}$$

Obě řady (3.12), (3.13) *mají totožný poloměr konvergence R jako původní řada* (3.11).

Důkaz: Viz např. [2] na straně 407.

Důsledek 3.3.1. (viz [2], s. 407) *Funkce $f(x)$ má na intervalu konvergence I derivace všech řádů. Derivaci n-tého řádů $f^{(n)}(x)$ získáme, když derivujeme řadu* (3.11) *n-krát člen po členu, tzn.*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\,a_k(x-c)^{k-n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 3.3.1. Stanovte součet geometrické řady:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} + \dots \tag{3.14}$$

Kvocient geometrické řady je x. Střed konvergence je v bodě 0 a poloměr konvergence je 1. O konvergenci rozhodneme dosazením krajních bodů $|x| < 1$, tím dostaneme dvě divergentní řady. Obor konvergence řady je proto $(-1, 1)$. Součet prvních n členů (tj. n-tý částečný součet) geometrické řady je

$$s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Dále určíme součet nekonečné geometrické řady jako limitu částečného součtu geometrické řady

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Součet nekonečné geometrické řady (3.14) je tedy $\frac{1}{1-x}$.

Příklad 3.3.2. Určete poloměr konvergence a součet následujích mocninných řad:

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Nejprve zjistíme poloměr konvergence řady pomocí vzorce (3.7):

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{1} = \infty.$$

Pokud je poloměr konvergence ∞, pak řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ k určité funkci $f(x)$, která má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů. Nyní budeme řadu derivovat podle věty 3.3.1:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$f'(x) = f(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a také zřejmě platí $f(0) = 1$. Rovnice $f'(x) = f(x)$ je vlastně diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $f(0) = 1$, které vyhovuje pouze jediná funkce, a to e^x. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ...$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \tag{3.15}$$

Poloměr konvergence této řady zjistíme pomocí vzorce (3.7)

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

který je tedy 1. Součet řady určíme za použití rovnosti $(x^k)' = kx^{k-1}$ a z věty 3.3.1 o derivování člen po členu

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x\sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = x\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' \\ &= x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Zjistili jsme proto, že součet mocninné řady (3.15) je $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ pro všechna $x \in (-1, 1)$.

3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-3}}{4k-3} \tag{3.16}$$

Poloměr konvergence určíme pomocí Cauchy-Hadamardova vzorce (viz vzorec (3.4)) obdobně jako v příkladu 3.2.1, čímž dostaneme, že poloměr konvergence je 1. Derivací řady člen po členu podle věty 3.3.1 dostaneme

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-3}}{4k-3}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} x^{4k-4} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^4)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^4)^k = \frac{1}{1-x^4}$$

$\forall x \in (-1, 1)$. A dále „zpětnou" integrací podle věty 3.3.1 vypočteme součet řady

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k-3}}{4k-3} &= \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Součet mocninné řady (3.16) je $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1}$ pro všechna $x \in (-1, 1)$.

3.4 Algebraické operace s mocninnými řadami

Algebraickými operacemi s mocninnými řadami myslíme sčítání (resp. odčítání), násobení, dělení mocninných řad a násobení řady číslem, které jsou v podstatě totožné jako tytéž operace s polynomy.

Věta 3.4.1. (viz [5], s. 170, [2], s. 405) (Sčítání a násobení mocninných řad). *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ jsou dvě mocninné řady se středem v c a nechť první z řad konverguje na intervalu I_a a druhá na intervalu I_b. Pak platí:*

1.

$$\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot a_k(x-c)^k \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I_a,$$

2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)(x-c)^k \quad \forall x \in I_a \cap I_b,$$

3.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-c)^k,$$

pro každý vnitřní bod intervalu $I = I_a \cap I_b$, a kde $c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$ je tzv. Cauchyův součin.

Důkaz: Viz např. [5] na straně 170.

Věta 3.4.2. (viz [5], s. 173) (O podílu mocninných řad). *Nechť* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *a* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *jsou dvě mocninné řady s koeficienty* a_k *a* b_k*, které pro* $k \in \mathbb{N}_0$ *konvergují na intervalu* I *k součtovým funkcím* $a(x), b(x)$ *a nechť* $a_0 \neq 0$*. Pak existuje jednoznačně určená mocninná řada s koeficienty* c_k *a takové číslo* $\alpha > 0$*, že*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k} = \frac{b(x)}{a(x)} \quad \forall x \in (-\alpha, \alpha).$$

Důkaz: Viz např. [5] na straně 173.

Poznámka 3.4.1. Podíl mocninných řad $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}$ lze upravit do součinového tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

a řešit pomocí tzv. Cauchyova součinu (viz věta 3.4.1).

Příklad 3.4.1. Vypočítejte následující příklady:

1. Určete podíl funkcí $\frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$.

   Nejprve si odvodíme řadu pro $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ tak, že funkci zderivujeme, čímž získáme

   $$\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)' = -(\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

   pokračujeme „zpětnou“ integrací

   $$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^k \,\mathrm{d}t\right) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

   Dále budeme hledat řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, která je výsledkem podílu funkcí ze zadání příkladu. Do výrazu

   $$\frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

   dosadíme získanou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ a převedeme jej na součin

   $$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Užitím Cayuchyova součinu (viz věta 3.4.1) získáme

$$x = c_0x + \left(\frac{1}{2}c_0 + c_1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + c_2\right)x^3 + \left(\frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3\right)x^4 + \dots .$$

Z předchozího výpočtu a použitím indukce zjistíme koeficienty c_k

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ \frac{1}{2}c_0 + c_1 = 0 \quad &\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{2}c_1 + c_2 = 0 \quad &\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{12}, \\ \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_3 = 0 \quad &\Rightarrow c_3 = -\frac{1}{24}, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Řešení příkladu má tedy tvar

$$\frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \dots \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Určete rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$.

Rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$ určíme jako podíl řad funkcí $\sin x$ a $\cos x$ (viz vzorce (3.23) a (3.24) v následující podkapitole 3.5 Taylorovy řady)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Předchozí rovnici opět upravíme do součinového tvaru, aby se nám s řadami lépe pracovalo

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

a stejně jako v předchozím příkladu na levou stranu výpočtu uplatníme Cauchyův součin (viz věta 3.4.1)

$$c_0 + \left(-\frac{1}{2!}c_0 + c_1\right)x + \left(\frac{1}{4!}c_0 - \frac{1}{2!}c_1 + c_2\right)x^2 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Tak získáme koeficienty c_k

$$\begin{aligned} c_0 &= 0, & c_1 &= 1, \\ -\frac{1}{2!}c_0 + c_2 &= 0, & -\frac{1}{2!}c_1 + c_3 &= -\frac{1}{3!}, \\ \frac{1}{4!}c_0 - \frac{1}{2!}c_2 + c_4 &= 0, & \frac{1}{4!}c_1 - \frac{1}{2!}c_3 + c_5 &= \frac{1}{5!}, \\ -\frac{1}{6!}c_0 + \frac{1}{4!}c_2 - \frac{1}{2!}c_4 + c_6 &= 0, & -\frac{1}{6!}c_1 + \frac{1}{4!}c_3 - \frac{1}{2!}c_5 + c_7 &= -\frac{1}{7!} \\ &\dots\dots & &\dots\dots \end{aligned}$$

Indukcí určíme hodnoty jednotlivých konstant

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 0,$$
$$c_5 = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{272}{7!} = \frac{17}{315}, \quad .....$$

Konstanty v rozvoji řady pro $\operatorname{tg} x$ nemají žádný vzor, jsou nazývány jako tzv. Bernoulliho konstanty. Metodou těchto neurčitých koeficientů se nám podařilo spočítat několik prvních členů požadovaného rozvoje

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + ... \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

3. Určete podíl funkcí $\frac{e^x}{x^2+1}$.

   Rozvoj e^x je nám známý (viz vzorec (3.22) v následující podkapitole 3.5 Taylorovy řady) a $\frac{1}{x^2+1}$ je součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$, proto $\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$. Obě řady vynásobíme použitím Cauchyova součinu (viz věta 3.4.1) jako v předchozích příkladech, proto platí

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{x^2+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \\ &= 1 + x + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(-1 + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + ... \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + ... \,. \end{aligned}$$

   Podíl $\frac{e^x}{x^2+1}$ je tedy roven $1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + ... \; \forall x \in \mathbb{R}$.

3.5 Taylorova řada

Taylorova řada je speciálním případem mocninné řady. Jedná se o řadu, která vyjadřuje funkci mající v nějakém bodě c derivace všech řádů. Bod c je pak středem Taylorovy řady. Pro $c = 0$, se řada někdy označuje jako Maclaurinova řada.

Věta 3.5.1. (viz [5], s. 174) *Nechť $R > 0$ je poloměr konvergence mocniné řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

se součtem $s(x)$. Pak funkce $s(x)$ má v intervalu $I = (c - R,\ c + R)$ derivace všech řádů a pro $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$a_k = \frac{s^{(k)}(c)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Důkaz: Mocninnou řadu lze uvnitř intervalu konvergence I derivovat člen po členu bez omezení a platí

$$s^{(k)}(x) = k!\ a_k + (k+1)!\ a_{k+1}(x - c) + \dots .$$

Substitucí $x = c$ snadno vyplyne dokazované tvrzení.

Důsledek 3.5.1. *Danou funkci $f(x)$ je možné na nějakém okolí c vyjádřit mocninnou řadou, jen pokud má funkce v bodě c derivace všech řádů.*

Definice 3.5.1 (Taylorova řada)**.** (viz [5], s. 174) Nechť $f(x)$ je funkce, která má v bodě c derivace všech řádů. Mocninou řadu tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots, \tag{3.18}$$

pak nazýváme Taylorovou řadou funkce $f(x)$ se středem v bodě c.

Důsledek 3.5.2. *Existuje nejvýše jedna mocninná řada se středem v bodě c konvergující na okolí bodu c k dané funkci.*

Poznámka 3.5.1. (viz [2], s. 411) Nechť $f(x)$ je funkce, která má v bodě c derivace všech řádů. Pak pro všechna $x \in (c - R, c + R)$ a pro všechny $k \in \mathbb{N}$ můžeme psát Taylorův vzorec

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \dots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + R_{k+1}(x) = T_k(x) + R_{k+1}(x) \tag{3.19}$$

a Taylorův polynom stupně nejvýše k v bodě c

$$T_k(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k. \tag{3.20}$$

$R_{k+1}(x)$ nazýváme zbytkem v Taylorově vzorci (3.19) a můžeme jej napsat v tzv. Lagrangeově tvaru

$$R_{k+1}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - c)^{k+1}, \tag{3.21}$$

kde ξ je bod ležící mezi body c a x. Je zřejmé, že $T_k(x)$ je částečný součet Taylorovy řady (3.18). Konvergenci Taylorovy řady (3.18) k funkci $f(x)$, zajistí splnění nutné a postačující podmínky: $\lim_{k\to\infty} T_k(x) = f(x)$, neboli $\lim_{k\to\infty} R_{k+1}(x) = 0$. Proto platí následující věta:

Věta 3.5.2 (O vyjádření funkce mocninnou řadou)**.** (viz [5], s. 178) *Nechť $f(x)$ je funkce mající v bodě c derivace všech řádů, pak pro $x \in I,\ I = (c - R, c + R)$, je*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

tehdy a jen tehdy, jestliže $\lim_{k\to\infty} R_{k+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, kde $R_{k+1}(x)$ je zbytek v Taylorově vzorci.

Důkaz: Viz např. [5] na straně 178.

Věta 3.5.3. (viz [5], s. 178) *Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu I derivace všech řádů a existují čísla C a M taková, že pro všechna $x \in I$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí $|f^k(x)| \leq CM^k$. Pak Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na intervalu I k funkci $f(x)$ a platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Podle vzorce zbytku v Lagrangeově tvaru je pro $x \in I$

$$R_{k+1}(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - c)^{k+1},$$

pro nějaké $\xi \in I$. Z předpokladu věty 3.5.3 tudíž plyne

$$R_{k+1}(x) = \frac{CM^{k+1}|x - c|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Pro $x \in I$ položíme $\alpha = M|x - c|$ a uvážíme, že pro každé číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} = 0.$$

Příklady Taylorových řad některých elementárních funkcí:

1. Exponenciální funkce:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

2. Funkce sinus:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

3. Funkce kosinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

4. Geometrická řada:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall x \in (-1, 1). \tag{3.25}$$

5. Binomická řada:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1), \tag{3.26}$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ a číslo $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!}$ je binomický koeficient.

6. Logaritmické funkce:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in (-1, 1], \tag{3.27}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in [-1, 1). \tag{3.28}$$

Příklad 3.5.1. Rozviňte do Taylorovy řady následující funkce v bodě c a určete jejich obor konvergence:

1.

$$f(x) = e^{-\sqrt{x^3}}, \quad c = 0$$

K výpočtu použijeme znalost Taylorovy řady pro funkci e^t (viz vzorec (3.22)), tj. $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{t^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$. Substitucí $t = -\sqrt{x^3}$, získáme požadovaný rozvoj funkce $e^{-\sqrt{x^3}}$

$$f(x) = e^{-\sqrt{x^3}} = 1 + \frac{-\sqrt{x^3}}{1!} + \frac{(-\sqrt{x^3})^2}{2!} + ... + \frac{(-\sqrt{x^3})^k}{k!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\frac{3}{2}k}}{k!},$$

který konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

2.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad c = 0$$

Funkci $f(x)$ zderivujeme $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a tak získáme součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$, tj.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

pro $|x| < 1$. Součet geometrické řady „zpětně“ zintegrujeme podle věty 3.3.1 a pro $x \in (-1, 1)$ dostaneme

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x (-1)^k t^{2k} \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Dále vyšetříme konvergenci řady v krajních bodech intervalu $x \in (-1, 1)$. Tak získáme dvě konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1}$. Funkce $\operatorname{arctg} x$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje pro všechna $x \in [-1, 1]$ a lze ji vyjádřit řadou $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

3.

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x^4)^2}, \quad c = 0$$

Abychom určili rozvoj této funkce, použijeme binomický rozvoj (viz vzorec (3.26)) a substituci $t = -x^4$. Takto dostaneme funkci $(1 + t)^{-2}$ jejíž binomický rozvoj je

$$\begin{aligned}
(1 + t)^{-2} &= 1 + \binom{-2}{1} t + \binom{-2}{2} t^2 + ... + \binom{-2}{k} t^k + ... \\
&= 1 + \frac{-2}{1!} t + \frac{(-2)(-3)}{2!} t^2 + ... + \frac{(-2)(-3) \ ... \ (-2 - k + 1)}{k!} t^k + ... \\
&= 1 - 2t + 3t^2 - ... + \frac{(-2)(-3) \ ... \ (-2 - k + 1)}{k!} t^k + ...
\end{aligned}$$

na intervalu $(-1, 1)$. Do rovnice dosadíme $t = -x^4$ a získáme požadovanou Taylorovu řadu

$$(1 - x^4)^{-2} = 1 + 2x^4 + 3x^8 + ... + \frac{(-2)(-3) \ ... \ (-2 - k + 1)}{k!} (-x)^{4k} + ...,$$

jejíž obor konvergence je tedy interval $(-1, 1)$.

4.

$$f(x) = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \ c = 0$$

Tuto řadu si můžeme přepsat jako $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$. Rozvoje funkcí $\ln(1 + x)$ a $\ln(1 - x)$ známe ze vzorců (3.27) a (3.28). Proto platí

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... \right) \\
&= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + ... = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k - 1}.
\end{aligned}$$

Hledaná řada je $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ a konverguje v intervalu $(-1, 1)$.

4. Aplikace nekonečných funkčních řad

Jak už bylo několikrát uvedeno, nekonečné funkční řady a především jejich speciální případ – mocninné řady, mají široké uplatnění v mnoha vědních odvětvích. V následujících podkapitolách si aplikace mocninných řad ukážeme na konkrétních řešených a komentovaných příkladech.

4.1 Přibližný výpočet funkčních hodnot

V podkapitole 3.5 o Taylorových řadách, jsme si ukázali, že mocninné řady jsou užitečným prostředkem při vyjadřování funkcí, můžeme je proto dobře použít pro přibližné určení funkčních hodnot. Požadované funkční hodnoty budeme určovat pomocí prvních n nenulových členů rozvoje řady dané funkce.

Příklad 4.1.1. Určete přibližnou hodnotu výrazů pomocí prvních n nenulových členů rozvoje a spočítejte chybu ve výpočtu:

1. $\sqrt{e}$ pro $n = 5$

   Řešíme pomocí Taylorovy řady funkce pro e^x (viz vzorec (3.22) v podkapitole 3.5 Taylorovy řady), kde $x = \frac{1}{2}$, pro $n = 5$ pak dostaneme

   $$\sqrt{e} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \doteq 1,6484.$$

   Chyba ve výpočtu se rovná zbytku řady, který vypočítáme pomocí tzv. Lagrangeova tvaru zbytku (viz vzorec (3.21), podkapitola 3.5), kde $k = 4$ a $x = \frac{1}{2}$ a $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Tedy získáme nerovností

   $$|R_5(x)| = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 < \frac{e^\xi}{3840} < 10^{-4}.$$

   Hodnota výrazu $\sqrt{e}$ pro prvních pět nenulových členů je přibližně $1,6484$ s chybou menší než $5 \cdot 10^{-4}$.

2. $(1,1)^{1,2}$ pro $n = 4$

   Řešíme pomocí Taylorovy binomické řady $(1 + x)^a$ (viz vzorec (3.26), podkapitola 3.5) kde $x = 0,1$ a $a = 1,2$. Pro $n = 4$ pak dostaneme

   $$(1,1)^{1,2} \doteq 1 + 1,2 \cdot 0,1 + \frac{1,2 \cdot 0,2}{2} \cdot 0,1^2 + \frac{1,2 \cdot 0,2 \cdot (-0,8)}{3!} \cdot 0,1^3 \doteq 1,121168.$$

Chybu ve výpočtu spočítáme opět pomocí tzv. Lagrangeova tvaru zbytku (viz vzorec (3.21), podkapitola 3.5), kde $k = 3$, $x = 0,1$ a $0 < \xi < 0,1$. A tedy

$$|R_4(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot 0,1^4 \right| < \frac{1,44 \cdot 10^{-6}}{(1+\xi)^{2,8}} < 2 \cdot 10^{-6}$$

Hodnota výrazu $(1,1)^{1,2}$ pro první čtyři nenulové členy je přibližně $1,121168$ s chybou menší než $2 \cdot 10^{-6}$.

Pomocí mocninných řad lze zjišťovat i funkční hodnoty logaritmů. Použijeme pro to rozvoje funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$ (odvozen ve 4. příkladu 3.5.1, podkapitola 3.5), který má tvar

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1. \tag{4.1}$$

Věta 4.1.1. (viz [3], s. 96) *Mějme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pro kterou platí*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pak pro zbytek této řady, označovaný R_{k+1}, platí

$$|R_{k+1}| \leq |a_k| \cdot \frac{q}{1-q}. \tag{4.2}$$

Důkaz: Z předpokladu věty 4.1.1 vyplývá konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ podle podílového kritéria. Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $|a_{k+1}| \leq |a_k| \cdot q$, je také $|a_{k+2}| \leq |a_{k+1}| \cdot q \leq |a_k| \cdot q^2$ a $|a_{k+3}| \leq |a_{k+2}| \cdot q \leq |a_k| \cdot q^3$. Z toho vyplývá, že obecně indukcí platí $|a_{k+n}| \leq |a_k| \cdot q^n$. Víme také, že pro absolutně konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ platí $|s| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Z předchozích poznatků tedy lze vyvodit

$$|R_{k+1}| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{k+n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| \cdot q^n = |a_k| \cdot q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = |a_k| \cdot \frac{q}{1-q}.$$

Příklad 4.1.2. Kolik členů rozvoje funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$ je třeba vzít, abychom určili číslo $\ln 2$ s chybou menší než 10^{-5}?

V prvním kroku výpočtu zjistíme hodnotu neznámé x pro $\ln 2 = \ln \frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Hodnotu x dosadíme do vzorce (4.1) a tak získáme

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + ...\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{-2k-1}}{2k+1}.$$

Pro odhad chyby v číselné řadě na pravé straně předchozího výpočtu použijeme větu 4.1.1

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{9} \cdot \frac{2k+1}{2k+3} < q < 1,$$

což je splněno pro všechna $k \geq 1$, za q tedy můžeme zvolit $\frac{1}{9}$.

$$|R_{k+1}| \leq |a_k| \cdot \frac{q}{1-q} = |a_k| \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3^{-2k-1}}{4(2k+1)} < 10^{-5}$$

Nerovnost platí pro $k \geq 4$, neboť

$$|R_5| < \frac{3^{-9}}{36} < 1,41 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

Proto v tomto případě stačí vzít k výpočtu $\ln 2$ prvních pět nenulových členů, tj.

$$\ln 2 \doteq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9\right) \doteq 0,69315.$$

4.2 Výpočet limit

Při výpočtu limit se kromě elementárních způsobů výpočtu (úprava limitní funkce) a l´Hospitalova pravidla někdy dá výhodně použít mocninných řad a značně si tak usnadnit výpočet.

Příklad 4.2.1. Vypočítejte následující limity

1.

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} \tag{4.3}$$

K vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj (viz vzorec (3.26), podkapitola 3.5) pro funkce $\sqrt{1+x}$ a $\sqrt[3]{1-x}$, které mají tvar

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}},$$
$$(1-x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81}(1+\zeta)^{-\frac{8}{3}},$$

kde $0 < \xi < x$ a $0 < \zeta < x$. Dosazením prvních členů rozvojů těchto řad do vzorce (4.3) obdržíme

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}\right) - \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81}(1+\zeta)^{-\frac{8}{3}}\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{5x}{6} - \frac{x^2}{72} + \frac{x^3}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}} + \frac{5x^3}{81}(1+\zeta)^{-\frac{8}{3}}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{5}{6} + \frac{x}{72} + x^2\left(\frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{81}(1+\zeta)^{-\frac{8}{3}}\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{72}\right) + \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{16}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{81}(1+\zeta)^{-\frac{8}{3}}\right) = \frac{5}{6} + 0 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

V posledním řádku výpočtu sčítáme limitu konstanty $\frac{5}{6}$ s limitou součinu dvou funkcí, z nichž jedna je x^2 a druhá je omezená, tj. pro $x \to 0$ je limita součinu těchto funkcí rovna nule. Hodnota výsledné limity (4.3) je proto $L = \frac{5}{6}$.

2.
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5} \tag{4.4}$$

Použijeme Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$ (který jsme odvodili v 2. příkladu 3.4.1 v podkapitole 3.4) a rozvoj funkce $\sin x$ (viz vzorec (3.23) v podkapitole 3.5). Oba rozvoje i s odpovídajícími zbytky řady dosadíme do vzorce (4.4) a tím získáme

$$\begin{aligned} L = &\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left[2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{16x^6(2\cos^4\xi - 30\cos^2\xi + 45)\sin\xi}{6!\cos^7\xi}\right.\right. \\ &\left.\left. - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6\sin\zeta}{6!}\right) - x^3\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{4} + 2\lim_{x\to 0} x\left(\frac{16(2\cos^4\xi - 30\cos^2\xi + 45)\sin\xi + \sin\zeta\cos^7\xi}{6!\cos^7\xi}\right) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

kde $0 < \xi < x$ a $0 < \zeta < x$. Limita (4.4) má tedy hodnotu $L = \frac{1}{4}$, neboť se stejně jako u předchozího příkladu jedná o součet limity konstanty a limity součinu funkce x a omezené funkce.

4.3 Přibližný výpočet integrálů

Další aplikací mocninných řad je integrování některých funkcí, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Tyto řady nazýváme transcendentní funkce a můžeme je vyjádřit pomocí mocninných řad.

Věta 4.3.1. (viz [3], s. 96) *Mějme alternující číslenou řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, kde $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Pak pro zbytek řady $|R_{k+1}|$ platí*

$$|R_{k+1}| < a_{k+1}.$$

Důkaz: Viz např. [3] na straně 96.

Příklad 4.3.1. Pomocí prvních tří nenulových členů rozvoje $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ přibližně vypočtěte hodnotu tohoto integrálu a odhadněte chybu ve výpočtu.

Nejdříve určíme Taylorův rozvoj funkce e^{-x^2} (obdobně jako v 1. příkladu 3.5.1 v podkapitole 3.5 Taylorovy řady)

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rozvoj zintegrujeme, řadu na pravé straně člen po členu. Získáme

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!},$$

kde $x \in \mathbb{R}$. Určitý integrál lze pak vyjádřit řadou

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1k!} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!},$$

což je alternující řada s klesajícími členy, proto zde pro odhad chyby ve výpočtu můžeme uplatnit větu 4.3.1, tj.

$$|R_3(x)| < a_3 = \frac{1}{7 \cdot 3!} < 2,4 \cdot 10^{-2}.$$

Přibližná hodnota integrálu vyjádřená pomocí prvních tří nenulových členů $\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \doteq 0,77$ je určena s chybou menší než $2,4 \cdot 10^{-2}$.

Příklad 4.3.2. Pomocí prvních čtyř nenulových členů rozvoje

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, \mathrm{d}x \tag{4.5}$$

přibližně vyjádřete hodnotu integrálu a odhadněte chybu ve výpočtu.

Integrovaná funkce $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je na intervalu $(0, \frac{1}{2})$ spojitá a ohraničená na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, protože $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Proto je určovaný integrál vlastní Riemannův integrál. Řadu pro funkci $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ odvodíme z řady pro $\operatorname{arctg} x$, kterou jsme zjistili v 2. příkladu 3.5.1, podkapitola 3.5, tj.

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1} \quad \forall\, |x| < 1.$$

Tuto řadu dosadíme do integrálu (4.5) a získáme

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, \mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k+1} \, \mathrm{d}x \right) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &\doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{49} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \doteq 0,4872. \end{aligned}$$

Zde se opět jedná o alternující řadu, pro zjištění chyby aproximace použijeme větu 4.3.1

$$|R_4(x)| < a_4 = \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \doteq 2,411 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Hledaná hodnota integrálu spočítaná pomocí prvních čtyř nenulových členů je 0,4872 a je určena s chybou menší než 10^{-4}.

4.4 Řešení diferenciálních rovnic

Poslední aplikací mocninných řad, kterou si zde ukážeme, je využití mocninných řad při řešení obyčejných diferenciálních rovnic – především lineárních diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu, ale i některých vybraných nelineárních rovnic.

Metoda řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad spočívá v tom, že řešení definované v okolí bodu c hledáme ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$. Ne všechny funkce však lze vyjádřit pomocí mocninné řady. Funkce, které lze vyjádřit mocninnou řadou, se nazývají analytické. (Více o vyjádření funkce mocninnou řadou viz podkapitola 3.5)

Definice 4.4.1 (Analytická funkce)**.** (viz [8], s. 459) Funkci $f(x)$ nazveme analytickou v bodě c, jestliže ji v každém otevřeném okolí bodu c můžeme vyjádřit jako součet nějaké konvergentní mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$.

Poznámka 4.4.1. Mezi analytické funkce patří např. polynomy $p_0 + p_2x + ... + p_kx^k$, které jsou analytické v každém bodě c a tedy je vždy můžeme přepsat do tvaru $a_0 + a_1(x-c) + ... + a_k(x-c)^k$. Racionální funkce $\frac{P}{Q}$, kde P a Q jsou polynomy, je analytická všude kromě bodu c, ve kterém $Q(c) = 0$. Další funkce analytické v každém bodě jsou e^x, $\sin x$ a $\cos x$. Pro $x > 0$ je analytická i funkce $\ln x$.

Vidíme tedy, že funkce f analytická v bodě c, je diferencovatelná v okolí bodu c. Navíc protože funkce f' má vyjádření mocninnou řadou v okolí bodu c, je také v c analytická. Totéž platí pro f'', f''' atd., tj. derivace existují a jsou analytické. Pokud funkce nemá derivace všech řádů v bodě c, pak nemůže být analytická. [8]

Pokud funkce f je analytická v bodě c, pak podle definice 4.4.1 to je součet nějakých mocninných řad, které konvergují v okolí bodu c. Podle předchozího odstavce tedy platí, že derivace funkce f mají reprezentace mocninnou řadou. Jakákoliv mocninná řada – bezohledu na to, kolikrát je derivována – která konverguje v okolí nějakého bodu c k funkci f, musí být mocninná řada této funkce. [8]

Metodu řešení diferenciálních rovnic za pomocí mocninných řad můžeme použít na lineární rovnice k-tého řádu (a stejně tak i na některé nelineární rovnice). Nejdůležitější aplikací, při níž se této metody využívá, jsou ale lineární homogenní rovnice druhého řádu, které jsou ve tvaru

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0, \tag{4.6}$$

kde koeficienty A, B, C jsou analytické funkce s proměnnou x. Ve skutečnosti jsou ve většině aplikací těmito koeficienty jednoduché polynomy.[8] Takovými diferenciálními rovnicemi ve zde budeme zabývat nejvíce.

Ne vždy se použitím této metody dostaneme k řešení ve tvaru mocninné řady. Abychom zjistili, kde uspějeme s řešením ve tvaru mocninné řady, vydělíme rovnici (4.6) koeficientem A a tak získáme

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0, \tag{4.7}$$

kde hlavní koeficient rovnice je 1 a $P = \frac{B}{A}$ a $Q = \frac{C}{A}$. P a Q jsou obecně analytickými funkcemi ve všech bodech, kde A má nenulovou hodnotu.[8]

Uvažujme ku příkladu tuto rovnici:

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{4.8}$$

Koeficienty rovnice (4.8) jsou polynomy spojité na celém $\mathbb{R}$. Pokud ale tuto rovnici přepíšeme do tvaru (4.7), obdržíme

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

kde funkce $P = \frac{1}{x}$ není v bodě $x = 0$ analytická.[4]

Nejdříve si ale ukážeme řešení diferenciálních rovnic za pomoci Taylorových řad, a posléze za pomoci obecných mocninných řad, u kterých se také budeme zabývat zjišťováním jejich oboru konvergence.

4.4.1 Řešení diferenciálních rovnic pomocí Taylorovy řady

V první metodě pro řešení diferenciálních rovnic budeme používat Taylorovu řadu. Tato metoda je někdy nazývána jako „metoda postupného derivování".

Na diferenciální rovnici zde budeme nahlížet jako na předpis pro konstrukci Taylorovy řady. Taylorova řada zde tedy aproximuje řešení diferenciální rovnice y v určitém bodě c. Řešení y musí být v bodě c analytické, aby ho bylo možné vyjádřit ve formě Taylorovy řady –

tzn. že výsledná funkce musí mít v bocě c derivace všech řádů. Touto metodou lze nalézt řešení lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic, což si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 4.4.1. Najděte řešení těchto diferenciálních rovnic s danými počátečními podmínkami pomocí Taylorovy řady v bodě c.

1.

$$y' = 2y + x^3,\ y(0) = 1.$$

Taylorovu řadu budeme konstruovat ve tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k. \tag{4.9}$$

Nejprve potřebujeme zjistit hodnoty $y^{(k)}(0)$, pro $k = 1, 2...$. Hodnota $y(0) = 1$ je dána počáteční podmínkou v zadání, zbylé hodnoty dopočítáme

$$\begin{aligned}
y' &= 2y + x^3 && \Rightarrow y'(0) = 2\\
y'' &= 2y' + 3x^2 && \Rightarrow y''(0) = 4\\
y''' &= 2y'' + 6x && \Rightarrow y'''(0) = 8\\
y^{(4)} &= 2y''' + 6 && \Rightarrow y^{(4)}(0) = 22\\
&.....
\end{aligned}$$

Hodnoty dosadíme do vzorce (4.9), čímž získáme

$$y = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{12}x^4 + ... \,.$$

2.

$$y'' - xy' - 2y = 0,\ y'(1) = 1,\ y(1) = 2$$

Hodnoty $y'(1)$ a $y(1)$ známe z počáteční podmínky, proto dopočítáme pouze hodnoty $y^{(k)}(1)$, pro $k = 2, 3...$.

$$\begin{aligned}
y'' &= xy' + 2y && \Rightarrow y''(1) = 5\\
y''' &= y' + xy'' + 2y' = 3y' + xy'' && \Rightarrow y'''(1) = 8\\
y^{(4)} &= 3y'' + y'' + xy''' = 4y'' + xy''' && \Rightarrow y^{(4)}(1) = 28\\
y^{(5)} &= 4y''' + y''' + xy^{(4)} = 5y''' + xy^{(4)} && \Rightarrow y^{(5)}(1) = 68\\
&.....
\end{aligned}$$

Získané hodnoty opět dosadíme do vzorce (4.9), výsledkem je tedy řada

$$y = 2 + (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{6}(x-1)^4 + \frac{17}{30}(x-1)^5 + \ \dots\ .$$

3.

$$y' = \frac{1}{x+y+1},\ y(0) = 0 \tag{4.10}$$

Dosazením počáteční podmínky do rovnice (4.10) zjistíme, že $y'(0) = 1$. Dále určíme hodnoty $y^{(k)}(0)$, pro $k = 2, 3 \dots$.

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{1+y'}{(x+y+1)^2} && \Rightarrow y''(0) = -2 \\ y''' &= \frac{2(1+y')^2}{(x+y+1)^3} - \frac{y''}{(x+y+1)^2} && \Rightarrow y'''(0) = 10 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorce Taylorovy řady (4.9), tedy

$$y = x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \dots\ .$$

4.4.2 Řešení lineárních diferenciálních rovnic s analytickými koeficienty pomocí obecných mocninných řad

O analytické funkci jsme již mluvili v úvodu podkapitoly 4.4 Řešení diferenciálních rovnic a víme tedy, že řešení diferenciální rovnice lze vyjádřit mocninnou řadou jen pokud se jedná o analytickou funci. Nyní si definujeme regulární a singulární body, které jsou klíčové pro určování konvergence mocninné řady, jež je řešením diferenciální rovnice.

Definice 4.4.2 (Regulární a singulární bod)**.** (viz [8], s. 463) Bod $x = c$ nazveme regulárním bodem rovnice

$$Ay'' + By' + Cy = 0 \ \text{ a } \ y'' + Py' + Qy = 0,$$

jestliže obě funkce $P = \frac{B}{A}$ a $Q = \frac{C}{A}$ jsou v bodě c analytické. Pokud bod c není regulární bod, nazveme jej singulárním bodem dané rovnice.

Poznámka 4.4.2. Regulární bod diferenciální rovnice prvního řádu $y' + Qy = 0$ je bod, ve kterém je funkce Q analytická.

Příklady regulárních a singulárních bodů:

1. Bod $c = 0$ je regulární bod diferenciální rovnice

$$(2x^5 + 7x^3 - 1)y'' + (4x^2 + 3)y' + 5x^4 y = 0,$$

protože koeficienty A, B a C jsou polynomy, které jsou analytické na celém $\mathbb{R}$, a platí $A(0) \neq 0$.

2. Bod $c = 0$ není regulární bod (tj. je singulární bod) diferenciální rovnice

$$y'' + \sqrt{x}y' + 2x^3 y = 0,$$

funkce $P = \sqrt{x}$ totiž není v bodě 0 analytická, protože není diferencovatelná. Zatímco funkce $Q = 2x^3$ je opět polynom, který je analytický na celém $\mathbb{R}$.

3. Určete všechny singulární body rovnice

$$xy'' + x(1-x)^{-1}y' + (\sin x)y = 0. \tag{4.11}$$

Rovnici vydělíme koeficientem $A = x$, čímž získáme

$$P = \frac{1}{(1-x)}, \qquad Q = \frac{\sin x}{x},$$

Singulární body funkcí P a Q jsou ty body, ve kterých tyto funkce nejsou analytické. Obě funkce P i Q jsou raciální funkce, které jsou analytické na celém $\mathbb{R}$ kromě bodů, ve kterých je jmenovatel roven nule. Pro P je to bod 1. Jmenovatel funkce Q je nulový pouze v bodě 0. Ale protože bod 0 lze odstranit tím, že funkci rozvineme v mocninnou řadu

$$Q = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ...}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - ...,$$

je proto funkce Q analytická na celém $\mathbb{R}$ a jediným singulárním bodem diferenciální rovnice (4.11) je zde bod 1.

Následující důležitá věta nám ukazuje jednoduchý způsob určení minimální hodnoty poloměru konvergence mocninné řady. K tomuto určení potřebujeme pouze najít singulární body dané diferenciální rovnice a poté určit vzdálenost mezi regulárním bodem rovnice a nejbližším singulárním bodem.

Věta 4.4.1 (Existence analytického řešení)**.** (viz [8], s. 446) Nechť

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{4.12}$$

je lineární diferenciální rovnice druhého řádu a nechť bod $c = 0$ je jejím regulárním bodem. Pak rovnice (4.12) má dvě lineárně nezávislá analytická řešení ve formě mocninné řady. Navíc poloměr konvergence jakéhokoli řešení ve tvaru mocninné řady je alespoň tak velký, jako je vzdálenost od bodu c k nejbližšímu singulárnímu bodu rovnice (4.12).

Důkaz: Viz např. [8] na straně 473.

Postup řešení lineárních diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad si nejprve ukážeme na jednoduché rovnici prvního řádu.

Příklad 4.4.2. Nalezněte řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' - 2xy = 0 \tag{4.13}$$

ve tvaru mocninné řady v okolí bodu 0.

Mocninné řady

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

dosadíme do diferenciální rovnice (4.13) a vhodným posunem v indexu upravíme na tvar

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = 0.$$

Obě řady sečteme

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) a_{k+1} - 2a_{k-1} \right] x^k = 0 \tag{4.14}$$

a všechny koeficienty řady (4.14) položíme rovny nule, čímž obdržíme

$$a_1 = 0 \ \text{ a } \ (k+1)a_{k+1} - 2a_{k-1} = 0, \ \ k = 1, 2\ldots .$$

Získáme rekurentní vztah

$$a_{k+1} = \frac{2}{k+1} a_{k-1},\ k = 2, 3\ldots,$$

ze kterého pro $k = 2, 3...$ spočítáme koeficienty a_k, využijeme přitom znalost $a_1 = 0$:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0, & a_3 &= \frac{2}{3}a_1 = 0, \\ a_4 &= \frac{1}{2}a_2, & a_5 &= \frac{2}{5}a_3 = 0, \\ a_6 = \frac{2}{6}a_4 &= \frac{1}{3!}a_0, & a_7 &= \frac{2}{7}a_5 = 0, \\ a_8 = \frac{2}{8}a_6 &= \frac{1}{4!}a_0, & a_9 &= \frac{2}{9}a_7 = 0, \\ &..... & &..... \end{aligned}$$

V koeficientech je vidět pravidelnost a indukcí lze dokázat, že platí

$$a_{2k} = \frac{1}{k!}a_0, \;\; k = 1, 2..., \;\;\; a_{2k+1} = 0, \;\; k = 0, 1... \, ,$$

je proto možné výslednou mocninnou řadu zapsat v obecném tvaru

$$y = a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2}a_0x^4 + ... = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^{2k} \, . \tag{4.15}$$

Člen a_0 zůstal nedefinovaný a funguje zde jako libovolná konstanta, a proto nám řada (4.15) dává obecné řešení diferenciální rovnice (4.13). Určíme ještě obor konvergence řady (4.15) pomocí limitního podílového kritéria a vzorce pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x^{2k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^{2k}}{k!}} = x \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 \;\; \Rightarrow R = \infty,$$

a tedy vidíme, že poloměr konvergence řady (4.15) je ∞. Když si pozorně prohlédneme několik prvních členů řady (4.15) můžeme si všimnout, že odpovídají rozvoji exponenciální funkce, tj. že řada má součet

$$y = a_0e^{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nyní přistoupíme k řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, u kterých již můžeme využít zjišťování konvergence za použití věty 4.4.1 o existenci analytického řešení a zjišťování singulárních bodů.

Příklad 4.4.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3xy' - y = 0. \tag{4.16}$$

ve tvaru mocninné řady v okolí regulárního bodu 0.

Nejdříve určíme singulární body. Rovnice (4.16) nemá žádné singulární body, neboť obě funkce $P = 3x$ i $Q = -1$ jsou polynomy analytické na celém oboru reálných čísel.
Vypočítáme derivace y' a y'' mocninné řady $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \; y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Tyto derivace řady dosadíme do rovnice (4.16), vhodnými posuny v indexech a substitucemi upravíme řady tak, abychom je následně mohli sečíst, dostaneme tedy

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + 3\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Řady nyní sečteme

$$2a_2 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (3k-1)a_k\right] x^k = 0$$

a získané koeficienty položíme rovny nule

$$2a_2 - a_0 = 0 \;\text{ a }\; (k+2)(k+1)a_{k+2} + (3k-1)a_k = 0, \;\; k = 1, 2... \,.$$

Vidíme, že $a_2 = \frac{1}{2}a_0$ a

$$a_{k+2} = \frac{a_k(1-3k)}{(k+2)(k+1)}, \; k = 1, 2... \,. \tag{4.17}$$

pomocí rekuretního vztahu (4.17) určíme z koeficientů a_k koeficienty a_{k+2} pro $k = 2, 3...$ tak, že

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{2}{3\cdot 2}a_1 = -\frac{2}{3!}a_1, & a_4 &= -\frac{5}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{5}{4!}a_0,\\
a_5 &= -\frac{8}{5\cdot 4}a_3 = \frac{2\cdot 8}{5!}a_1, & a_6 &= -\frac{11}{6\cdot 5}a_4 = \frac{5\cdot 11}{6!}a_0,\\
a_7 &= -\frac{14}{7\cdot 6}a_5 = -\frac{2\cdot 8\cdot 14}{7!}a_1, & a_8 &= -\frac{17}{8\cdot 7}a_6 = -\frac{5\cdot 11\cdot 17}{8!}a_0,\\
&..... & &.....
\end{aligned}$$

V koeficientech je vidět pravidelnost (což lze dokázat indukcí) a tedy

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}\prod\limits_{n=2}^{k}(6n-7)}{(2k)!}a_0, \; k = 2, 3...,$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k}\prod\limits_{n=1}^{k}(6n-4)}{(2k+1)!}a_1, \;\; k = 1, 2... \,.$$

Získali jsme obecné řešení diferenciální rovnice(4.16) ve tvaru mocninné řady

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \prod_{n=2}^{k} (6n-7)}{(2k)!} x^{2k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k} \prod_{n=1}^{k} (6n-4)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right), \tag{4.18}$$

kde a_0 a a_1 jsou libovolné konstanty. Poloměr konvergence výsledné řady (4.18) můžeme určit pomocí věty 4.4.1 o existenci analytického řešení, neboť její předpoklady jsou zde splněny. Vzdálenost mezi regulárním bodem 0 a singulárním bodem je zde nekonečná, neboť rovnice (4.16) nemá žádné singulární body. Výsledná mocninná řada (4.18) tedy konverguje pro všechna x z oboru reálných čísel.

Příklad 4.4.4. Najděte obecné a partikulární řešení diferenciální rovnice

$$(x^2-4)y'' + 3xy' + y = 0, \; y(0) = 4, \; y'(0) = 1 \tag{4.19}$$

ve tvaru mocninné řady v okolí regulárního bodu 0.

Nejprve opět určíme všechny singulární body. V tomto případě jsou konstanty rovnice (4.19)

$$P = \frac{3x}{x^2-4}, \qquad Q = \frac{1}{x^2-4},$$

z čehož vidíme, že obě funkce P i Q jsou analytické na celém oboru reálných čísel kromě dvou singulárních bodů $x = \pm 2$.

Dále vypočítáme derivace y' a y'' mocninné řady $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \; y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

které dosadíme do rovnice (4.19) a opět upravíme tak, abychom u všech měli stejnou mocninu x^k a aby sumy začínaly stejným indexem

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + 3\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Nyní můžeme řady sečíst a upravit

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k^2+2k+1)a_k - 4(k+2)(k+1)a_{k+2}]x^k = 0$$

Koeficient této řady položíme roven nule

$$(k+1)^2 a_k - 4(k+2)(k+1)a_{k+2} = 0,$$

z předchozí rovnice získáme rekurentní vztah

$$a_{k+2} = \frac{k+1}{4(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1... . \tag{4.20}$$

Z rekuretního vztahu určíme z koeficientů a_k koeficienty a_{k+2} pro $k = 2, 3...$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{4 \cdot 2} a_0, & a_3 &= \frac{2}{4 \cdot 3} a_1, \\
a_4 &= \frac{3}{4 \cdot 4} a_2 = \frac{3}{4^2 \cdot 2 \cdot 4} a_0, & a_5 &= \frac{4}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{2 \cdot 4}{4^2 \cdot 3 \cdot 5} a_1, \\
a_6 &= \frac{5}{4 \cdot 6} a_4 = \frac{3 \cdot 5}{4^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} a_0, & a_7 &= \frac{6}{4 \cdot 7} a_5 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} a_1, \\
& \quad ..... & & \quad .....
\end{aligned}$$

V koeficientech je vidět pravidelnost (což lze opět ověřit indukcí) a protože platí

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ ... \ \cdot 2k = 2^k k!,$$

obdržíme

$$a_{2k} = \frac{\prod_{n=1}^{k} (2n-1)}{8^k k!} a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{k!}{2^k \prod_{n=1}^{k} (2n+1)} a_1, \quad k = 1, 2... .$$

Získali jsme tedy obecné řešení rovnice (4.19), které je ve tvaru

$$y = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{n=1}^{k} (2n-1)}{8^k k!} x^{2k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k \prod_{n=1}^{k} (2n+1)} x^{2k+1} \right). \tag{4.21}$$

Z počátečních podmínek určíme koeficienty a_0 a a_1, tedy $y(0) = a_0 = 4$ a $y'(0) = a_1 = 1$. Dosazením těchto koeficientů a úpravou řady získáme partikulární řešení ve tvaru mocninné řady pro dané počáteční podmínky

$$y = 4 + x + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{n=1}^{k} (2n-1)}{8^k k!} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k \prod_{n=1}^{k} (2n+1)} x^{2k+1}. \tag{4.22}$$

Poloměr konvergence výsledné řady (4.22) opět určíme pomocí věty 4.4.1 o existenci analytického řešení, jejíž předpoklady diferenciální rovnice (4.19) splňuje. Vzdálenost mezi regulárním bodem $c = 0$ a singulárními body ± 2 je 2, tj. poloměr konvergence řady (4.22) je nejméně 2.

4.4.3 Logistická diferenciální rovnice

Logistická diferenciální rovnice je nelineární diferenciální rovnice prvního řádu ve tvaru

$$y' = ry(1-y), \tag{4.23}$$

která byla prvně publikována v roce 1845 belgickým matematikem **Pierrem F. Verhulstem** (1804 – 1849). Řešení logistické rovnice (4.23) je tzv. logistická funkce

$$y = \frac{e^{rx}}{c + e^{rx}} = \frac{1}{c + e^{-rx}},\ c \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Logistická rovnice má široké uplatnění v přírodních vědách – biologických modelelech nervové sítě, biomatematice, statistice, chemii, ale také třeba v ekonomii a sociologii. Její nejtypičtější aplikací je však model populačního růstu používaný v ekologii a demografii. [9],[10]

Příklad 4.4.5. Hledejte řešení logistické rovnice (4.23), kde $r = 1$ a $y(0) = \frac{1}{2}$, ve tvaru Taylorovy řady.

Řešení logistické rovnice (4.24) je analytická funkce, což znamená, že tuto funkci můžeme vyjádřit pomocí Taylorovy řady (více viz podkapitola 4.4.1). Nejprve za pomoci zadané počáteční podmínky určíme hodnoty $y^{(k)}(0)$, pro $k = 1, 2...$.

$$\begin{aligned}
y' &= y - y^2 && \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{4} \\
y'' &= y' - 2yy' && \Rightarrow y''(0) = 0 \\
y''' &= y'' - 2yy'' - 2(y')^2 && \Rightarrow y'''(0) = -\frac{1}{8} \\
y^{(4)} &= y''' - 2yy''' - 6y''y' && \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0 \\
y^{(5)} &= y^{(4)} - 2yy^{(4)} - 6(y'')^2 - 8y'''y' && \Rightarrow y^{(5)}(0) = \frac{1}{4} \\
&.....
\end{aligned}$$

Získané hodnoty dosadíme do obecného vzorce Taylorovy řady (4.9), čímž získáme

$$y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{480} + \dots\ . \tag{4.25}$$

Můžeme ověřit, že získaná řada (4.25) vyjadřuje tzv. standardní logistickou funkci

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

která je také známá jako sigmoida. Řešení logistické rovnice (4.23) pomocí rozvoje Taylorovy řady pro libovolný počet členů s odpovídající přesností výpočtu lze tedy dobře použít jako alternativní způsob získání výsledku.

4.4.4 Binetův vzorec

V posledním příkladu si ukážeme řešení nelineární diferenciální rovnice druhého řádu pomocí mocninných řad. Rovnice

$$y'' + y = \alpha y^2,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.26}$$

se speciální konstantou α je Binetův vzorec, který je pojmenovaný podle francouského matematika, fyzika a astronoma **Jacquesa P. M. Bineta** (1786 – 1856) a který se využívá v teorii relativity, konkrétně v teorii ohybu světla při průchodu kolem Země. [11]

Příklad 4.4.6. Hledejte obecné řešení diferenciální rovnice (4.26) ve tvaru mocninné řady. Nejprve vyjádříme pomocí mocninných řad $y,\ y^2$ a y''

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \\
y^2 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}a_j\right)x^k, \\
y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k,
\end{aligned}$$

které dosadíme do rovnice (4.26) a upravíme do následujícího tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k - \alpha\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}a_j\right)x^k = 0. \tag{4.27}$$

Položíme-li koeficient mocninné řady (4.27) roven nule

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k - \alpha\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}a_j = 0,\ k = 0, 1, 2...$$

získáme následující rekurentní vztah

$$a_{k+2} = \frac{\alpha\left(\sum\limits_{j=0}^{k} a_{k-j}a_j\right) - a_k}{(k+2)(k+1)},\ k = 0, 1, 2... . \tag{4.28}$$

Řadu, jež je obecným řešením rovnice (4.26), lze napsat pomocí rekurence (4.28), tedy

$$y = a_0 + a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(\sum\limits_{j=0}^{k} a_{k-j}a_j\right) - a_k}{(k+2)(k+1)}x^{k+2}\ .$$

5. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo shrnout obecnou teorii nekonečných funkčních řad, přičemž nejvíce pozornosti mělo být poskytnuto mocninných řadám, a dále uvést některé důležité matematické aplikace funkčních řad.

V první kapitole bakalářské práce uvádím stručnou historii nekonečných řad od antiky až po moderní matematiku. V druhé kapitole se zabývám obecnými nekonečnými funkčními řadami a vytvářím tak teoretický základ pro následující kapitolu, která je věnována mocninným řadám – jejich konvergenci, derivování a integrování součtu mocninných řad, operacím s mocninnými řadami a vyjadřováním funkcí pomocí Taylorovy řady. Teoretické části práce jsem vždy ilustrovala názornými řešenými a komentovanými příklady. Na třetí kapitolu navazuje poslední kapitola práce, ve které se zabývám některými důležitými aplikacemi mocninných řad. Na řešených příkladech demonstruji využití mocninných řad při výpočtu funkčních hodnot, limit, integrálů a řešení lineárních i některých nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu pomocí Taylorovy řady a obecných mocninných řad. Abych ukázala, že nekonečné funkční řady lze využít nejen na poli matematiky, uvedla jsem řešení logistické rovnice populačního růstu a zjednodušeného tvaru Binetova vzorce, jenž má své využití ve fyzice, použitím mocninných řad.

Ve své práci ukazuji, že některé příklady lze řešit také alternativními způsoby právě pomocí mocninných řad, což nám může podstatně usnadnit výpočet, jako např. výpočet uvedených limit, které by se jinak řešily obtížně, nebo výpočet některých diferenciálních rovnic, jejichž řešení lze chytře aproximovat právě rozvojem mocninné řady. Mocninné řady tedy mají nejen v matematice důležité uplatnění.

Přínos bakalářské práce je pro mne veliký, zdokonalila jsem se v práci s odbornou literaturou a také se naučila vypracovávat vlastní matematický text. Dozvěděla jsem se zajímavé skutečnosti z historie matematiky, ale především si prohloubila znalosti o nekonečných funkčních řadách a jejich důležitých aplikacích, zejména metody řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad, které jsem předtím neznala, a které shledávám jako velmi užitečné. Nesmím opomenout osvojení si práce v široce využitelném programu LaTeX.

Literatura

[1] Boyer C. B., Merzbach U. C.: *A History of Mathematics* Hoboken, New Jersey (2011). Dostupné z: //www.scribd.com/doc/64586857/Carl-B-Boyer-Uta-C-Merzbach-A-History-of-Mathematics.

[2] Brabec, J., Martán, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* SNTL Praha (1985).

[3] Došlá Z., Plch R., Sojka P.: *Nekonečné řady s programem Maple* Masarykova univerzita Brno (2002).

[4] Edwards C. H., Penney D. E.: *Elementary Differential Equations* The University of Georgia (2008).

[5] Holenda J.: *Řady* SNTL Praha (1990).

[6] Kopáček J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Matfyzpress Praha (2006).

[7] Kopáček J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky III.* Matfyzpress Praha (2007).

[8] Nagle R. K., Saff E. B., Snider A. D.: *Fundamentals of Differential Equations* University of South Florida (2000).

[9] www.en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function (citováno dne 24. 2. 2016)

[10] www.en.wikipedia.org/wiki/Pierre_François_Verhulst (citováno dne 24. 2. 2016)

[11] www.en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet (citováno dne 2. 3. 2016)