

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky



Geometrie komplexních čísel

Bakalářská práce

Autor: Eva Lálová

Vedoucí práce: Mgr. Lenka Zalabová, Ph.D.

České Budějovice, 2016

Bibliografické údaje

Lálová E., 2016: Geometrie komplexních čísel [Geometry of complex numbers. Bc. Thesis, in Czech.] - 52 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

Tato práce se zabývá teorií o komplexních číslech a obsahuje tři hlavní části. První část je věnována výkladu komplexních čísel tak, jak je známe ze středních škol. Shrnujeme zde poznatky ze středních škol a využití komplexních čísel ukazujeme na několika příkladech. Ve druhé části se zabýváme komplexními čísly z hlediska vektorových prostorů a algebraické struktury a porovnáváme středoškolský a vysokoškolský výklad komplexních čísel. Ve třetí části aplikujeme znalosti z předchozích kapitol na několika příkladech včetně příkladů z matematických olympiád.

This thesis deals with a theory of complex numbers and contains three main parts. The first part is dedicated to the disquisition of complex numbers as we know it from secondary schools. In this part we summarize the basic knowledge of the secondary schools and the use of complex numbers is illustrated by a few arithmetical problems. In the second part we deal with complex numbers in terms of vector spaces and algebraic structures and compare secondary school and university disquisition of complex numbers. In the third part we apply the knowledge from the previous chapters on several problems including problems from mathematical olympiads.

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucí bakalářské práce a s použitím odborné literatury a pramenů, které jsou uvedeny v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne.....

Eva Lálová

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí mé práce Mgr. Lence Zalabové, Ph.D. za vedení, rady, ochotu, a velikou podporu, kterou mi při zpracovávání poskytla. Dále bych chtěla poděkovat pedagogům z Gymnázia Jírovcova v Českých Budějovicích za pozvání přednášet současným studentům gymnázia a za pozvání přednášet na Zadově na matematickém soustředění řešitelů matematických olympiád.

Obsah

1	Zavedení komplexních čísel	1
1.1	Algebraický tvar komplexního čísla	1
1.2	Absolutní hodnota komplexního čísla	2
1.3	Goniometrický tvar komplexního čísla	3
1.4	Komplexní číslo sdružené a opačné	3
1.5	Operace s komplexními čísly	4
1.5.1	Součet	4
1.5.2	Rozdíl	6
1.5.3	Součin	6
1.5.4	Podíl	7
1.6	Mocniny a odmocniny	7
1.7	Příklady	10
1.8	Transformace v Gaussově rovině	12
1.8.1	Posunutí	12
1.8.2	Stejnolehlost	12
1.8.3	Rotace	14
1.8.4	Spirální podobnost	15
2	Algebraická teorie komplexních čísel	17
2.1	Algebraická struktura	18
2.2	Gaussova rovina	21
2.3	Maticová realizace transformací	21
3	Příklady	24
	Několik poznámek z historie komplexních čísel	50
	Literatura	52

1 Zavedení komplexních čísel

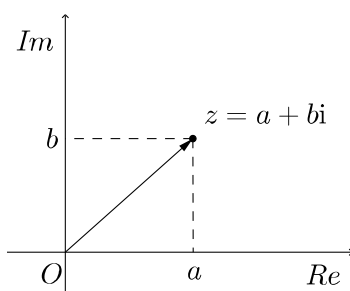
V této kapitole je souhrn základních poznatků o komplexních číslech tak, jak se prezentují na středních školách [1], [5]. Komplexní čísla jsou rozšířením oboru reálných čísel. Rozšíření bylo potřeba například proto, aby bylo možné řešit kvadratické rovnice se záporným diskriminantem. V této práci se však nebudeme zabývat komplexními čísly jakožto řešením rovnic, ale jejich geometrickými vlastnostmi.

1.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Komplexní číslo z je číslo ve tvaru $z = a + bi$, kde i je **imaginární jednotka**, pro kterou platí

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

Komplexní čísla zobrazujeme v rovině následujícím způsobem: každému komplexnímu číslu přiřazujeme souřadnici a reálné osy a souřadnici b imaginární osy, jak je znázorněno na (Obr. 1).



Obr. 1: Algebraický tvar komplexního čísla

Rovinu, ve které zobrazujeme komplexní čísla, nazýváme **Gaussova rovina**. Zápis čísla $z = a + bi$ nazýváme **algebraický tvar** komplexního čísla. Číslo a nazýváme **reálnou složkou** komplexního čísla a značíme $\operatorname{Re} z$. Číslo b nazýváme **imaginární složkou** komplexního čísla a značíme $\operatorname{Im} z$. Množinu komplexních čísel značíme \mathbb{C} .

Jak je vidět z algebraického tvaru, jsou reálná čísla speciálním případem komplexních čísel. Komplexní číslo je zároveň reálné číslo, je-li imaginární složka b rovna nule. Tedy \mathbb{R} je podmnožinou \mathbb{C} . Protože každému komplexnímu číslu náleží právě jedna uspořádaná dvojice

(a, b) , tak se zřejmě dvě komplexní čísla rovnají pokud se rovnají jejich příslušné složky, tj.

$$a + bi = c + di \iff a = c \wedge b = d. \quad (2)$$

1.2 Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + bi$ je vzdálenost mezi komplexním číslem z a počátkem O v Gaussově rovině, tj. velikost **průvodiče** komplexního čísla

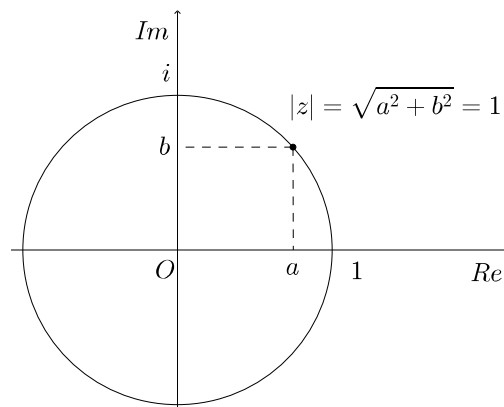
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

Přímým výpočtem lze ověřit

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0, \\ |z| &= 0 \iff z = 0. \end{aligned}$$

Na rozdíl od reálných čísel není možné komplexní čísla uspořádat podle velikosti.

Významnými komplexními čísly jsou **komplexní jednotky**, jejichž geometrický význam bude popsán v podkapitole (1.8.3) o transformacích v Gaussově rovině. Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, tj. $|z| = 1$. Komplexní jednotky tvoří jednotkovou kružnici v Gaussově rovině se středem v počátku a leží na ní např. reálná čísla $1, -1$ a imaginární jednotka i .



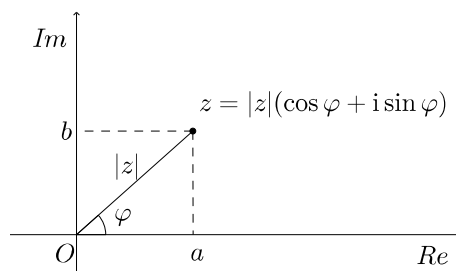
Obr. 2: Komplexní jednotka

1.3 Goniometrický tvar komplexního čísla

Další způsob zapisování komplexních čísel je **goniometrický tvar** komplexního čísla, tj.

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4)$$

kde φ je kladně orientovaný úhel z intervalu $[0, 2\pi)$, který svírá kladná část reálné osy s průvodičem komplexního čísla a nazýváme ho **argument** komplexního čísla. To je znázorněno na (Obr. 3). Tento tvar je ekvivalentní s algebraickým tvarem komplexního čísla. Nyní je číslo popsáno pouze v jiných souřadnicích. Algebraický tvar je popis v kartézských souřadnicích, zatímco goniometrický tvar je popis v polárních souřadnicích.



Obr. 3: Goniometrický tvar komplexního čísla

Z trojúhelníku Oaz na (Obr. 3) zřejmě platí

$$a = |z| \cos \varphi,$$

$$b = |z| \sin \varphi.$$

Po dosazení do $z = a + bi$ získáme

$$z = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Naopak, argument komplexního čísla určíme pomocí vztahů

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \quad \text{a} \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \quad \text{pro } z \neq 0. \quad (5)$$

1.4 Komplexní číslo sdružené a opačné

Komplexní číslo sdružené \bar{z} k číslu $z = a + bi$ má tvar

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi. \quad (6)$$

Číslo z a \bar{z} jsou osově souměrná podle reálné osy. Příným výpočtem lze ověřit

$$\begin{aligned}\overline{\bar{z}} &= z, \\ \bar{z} &= z \iff z \in \mathbb{R}, \\ |z| &= |\bar{z}|.\end{aligned}$$

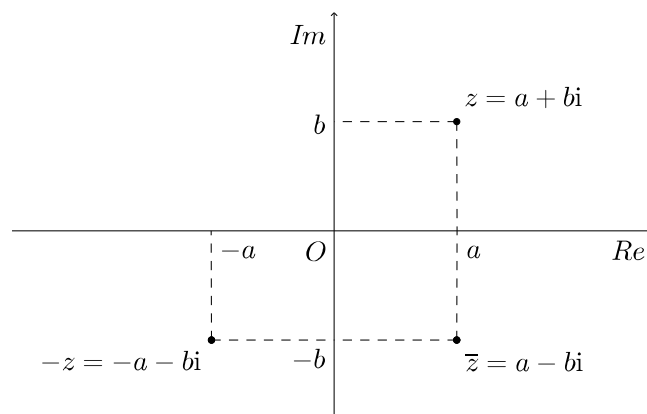
Komplexní číslo opačné $-z$ k číslu $z = a + bi$ má tvar

$$-z = -a - bi. \quad (7)$$

Číslo z a $-z$ jsou středově souměrná podle počátku Gaussovy roviny. Příným výpočtem lze ověřit

$$|z| = |-z|.$$

Obě čísla jsou znázorněna na (Obr. 4).



Obr. 4: Komplexní číslo sdružené a opačné

1.5 Operace s komplexními čísly

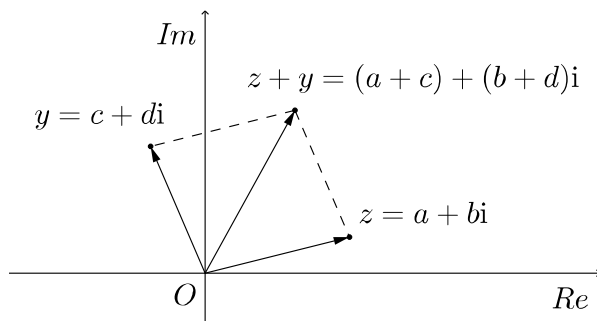
Na komplexních číslech jsou definované operace, které si v této kapitole postupně popíšeme.

1.5.1 Součet

Součet dvou komplexních čísel $z = a + bi$, $y = c + di$ je definován jako

$$z + y = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (8)$$

Součet komplexních čísel lze v Gaussově rovině znázornit jako součet vektorů. Každé komplexní číslo lze ztotožnit s vektorem, který vede z počátku do bodu, jehož souřadnice jsou právě složky daného komplexního čísla, viz (Obr. 5).



Obr. 5: Součet komplexních čísel

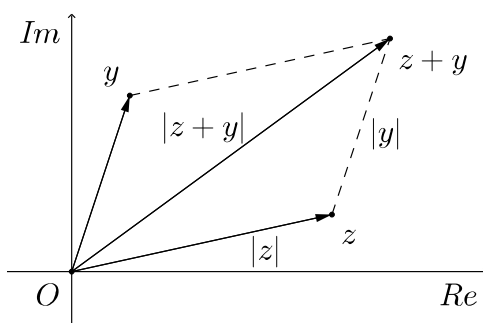
Dále platí

$$\overline{z + y} = \bar{z} + \bar{y},$$

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z,$$

$$|z| + |y| \geq |z + y|,$$

přičemž poslední nerovnost se nazývá **trojúhelníková nerovnost** a platí jako rovnost právě když jsou komplexní čísla 0 , z , y kolineární, viz (Obr. 6).



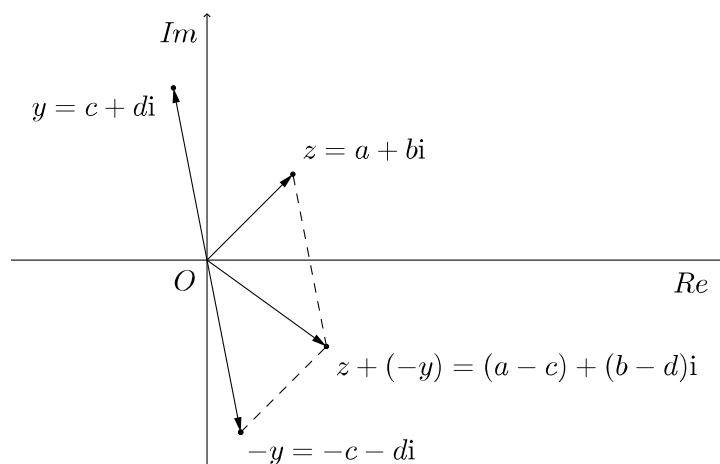
Obr. 6: Trojúhelníková nerovnost

1.5.2 Rozdíl

Rozdíl dvou komplexních čísel z, y je definován jako

$$z - y = z + (-y) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i. \quad (9)$$

Rozdíl komplexních čísel je tedy přičtení opačného komplexního čísla a lze takto znázornit v Gaussově rovině (Obr. 7). Dále platí



Obr. 7: Rozdíl komplexních čísel

$$z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im } z.$$

1.5.3 Součin

Součin dvou komplexních čísel z, y je definován jako

$$z \cdot y = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (10)$$

Komplexní čísla tedy násobíme jako dvojčleny a využíváme rovnost $i^2 = -1$, což je výhoda algebraického zápisu. Přímým výpočtem lze ověřit

$$\begin{aligned} |z \cdot y| &= |z||y|, \\ \overline{z \cdot y} &= \bar{z} \cdot \bar{y}, \\ z \cdot \bar{z} &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Násobit komplexní čísla lze i v goniometrickém tvaru a platí

$$z \cdot y = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot |y|(\cos \psi + i \sin \psi) = |z||y|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Tento vztah lze odvodit například pomocí součtových vzorců goniometrických funkcí následujícím způsobem

$$\begin{aligned} z \cdot y &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot |y|(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= |z||y|(\cos \varphi \cos \psi + \cos \varphi i \sin \psi + i \sin \varphi \cos \psi + i \sin \varphi i \sin \psi) \\ &= |z||y|\left(\frac{1}{2}(\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)) + i\frac{1}{2}(\sin(\psi - \varphi) + \sin(\psi + \varphi))\right) \\ &\quad + i\frac{1}{2}(\sin(\varphi - \psi) + \sin(\varphi + \psi)) + i^2\frac{1}{2}(\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)) \\ &= |z||y|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

1.5.4 Podíl

Podíl dvou komplexních čísel z, y lze vyjádřit jako

$$\frac{z}{y} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \quad (11)$$

tj. zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Stejně jako u součinu lze vyjádřit podíl dvou komplexních čísel efektivněji v goniometrickém tvaru

$$\frac{z}{y} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{|y|(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{|z|}{|y|}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)). \quad (12)$$

Tento vztah lze analogicky k součinu odvodit ze součtových vzorců goniometrických funkcí.

1.6 Mocniny a odmocniny

Nyní již víme, jak se násobí komplexní čísla. Komplexní čísla lze také umocňovat a odmocňovat. Pro mocniny v algebraickém tvaru $(a + bi)^n$ by byly výpočty zdlouhavé, zvláště pro mocniny vyšších řádů. S výhodou využijeme násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Následující věta vyplývá z násobení n stejných komplexních čísel.

Moivreova věta: Pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \quad (13)$$

Potom pro n -tou mocninu komplexního čísla z platí

$$z^n = \left(|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right)^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad (14)$$

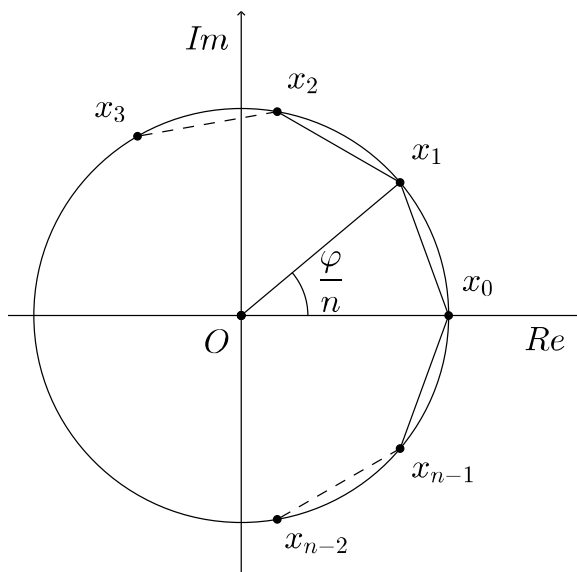
Je-li $n \in \mathbb{N}$, můžeme definovat n -tou odmocninu z komplexního čísla z . Ta sestává z n komplexních čísel tvaru

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (15)$$

čili pro n -tou odmocninu získáme n hodnot.

Geometrickým znázorněním n -té odmocniny komplexního čísla je pravidelný n -úhelník v Gaussově rovině, jehož střed leží v počátku soustavy souřadnic a vrcholy na kružnici o polooměru $\sqrt[n]{|z|}$. Každý vrchol n -úhelníka leží v bodě x_k , pro který platí

$$x_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



Obr. 8: n -tá odmocnina komplexního čísla

¹Binomická rovnice n -tého řádu $x^n = z$ má n řešení, která získáme dosazením do vztahu pro odmocninu. Jelikož první řešení značíme indexem 0, má poslední řešení index $n-1$. Řešení x_n je pak stejné jako řešení x_0 , řešení x_{n+1} je stejné jako řešení x_1 atd. Řešení se tedy cyklicky opakují a to s periodou 2π , což zřejmě vyplývá z funkcí \sin a \cos a námi definovaného intervalu argumentů $[0, 2\pi)$.

Navíc pro součet všech bodů x_k , které jsou kořeny binomické rovnice $x^n - z = 0$, platí

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0. \quad (16)$$

To lze dokázat pomocí Moivreovy věty. Jednotlivé kořeny vyjádříme jako mocniny kořene x_1

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{0}{n} + i \sin \frac{0}{n} \right) = \sqrt[n]{|z|}, \\ x_1 &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \\ x_2 &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) = \frac{x_1^2}{\sqrt[n]{|z|}}, \\ x_3 &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{3 \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{3 \cdot 2\pi}{n} \right) = \frac{x_1^3}{\sqrt[n]{|z|^2}}, \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{(n-2) \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-2) \cdot 2\pi}{n} \right) = \frac{x_1^{n-2}}{\sqrt[n]{|z|^{n-3}}}, \\ x_{n-1} &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n} \right) = \frac{x_1^{n-1}}{\sqrt[n]{|z|^{n-2}}}, \\ x_n &= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{n \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{n \cdot 2\pi}{n} \right) = \frac{x_1^n}{\sqrt[n]{|z|^{n-1}}} = \frac{|z|}{|z|^{\frac{n-1}{n}}} = \sqrt[n]{|z|} = x_0. \end{aligned}$$

Nyní vypočítáme součet geometrické řady

$$\sqrt[n]{|z|} + x_1 + \frac{x_1^2}{\sqrt[n]{|z|}} + \frac{x_1^3}{\sqrt[n]{|z|^2}} + \dots + \frac{x_1^{n-2}}{\sqrt[n]{|z|^{n-3}}} + \frac{x_1^{n-1}}{\sqrt[n]{|z|^{n-2}}}.$$

Pro kvocient řady zřejmě platí $q = \frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}}$. Dále lze ukázat $x_1^n = |z|$. Pro součet řady potom dostáváme

$$s = x_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \frac{\left(\frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}} \right)^n - 1}{\frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}} - 1} = \frac{\frac{x_1^n}{|z|} - 1}{\frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}} - 1} = \frac{1 - 1}{\frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}} - 1} = 0,$$

kde $|z| \neq 0$ a $\frac{x_1}{\sqrt[n]{|z|}} \neq 1$, což je splněno pro každé $n > 1$.

1.7 Příklady

V této kapitole ukážeme příklady, na kterých demonstrujeme vlastnosti komplexních čísel.

Příklad 1. Jestliže $z = 1 - 2i$, $y = 3 + 7i$, určete $|z|$, \bar{z} , $z + y$, $z - y$, $z \cdot y$, $\frac{z}{y}$.

Podle vztahů (8) až (11) platí

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\bar{z} = 1 + 2i$$

$$z + y = (1 - 2i) + (3 + 7i) = 4 + 5i$$

$$z - y = (1 - 2i) - (3 + 7i) = -2 - 9i$$

$$z \cdot y = (1 - 2i) \cdot (3 + 7i) = 3 + 7i - 6i - 14i^2 = 17 + i$$

$$\frac{z}{y} = \frac{1 - 2i}{3 + 7i} = \frac{1 - 2i}{3 + 7i} \cdot \frac{3 - 7i}{3 - 7i} = \frac{3 - 7i - 6i + 14i^2}{9 - 49i^2} = -\frac{11}{58} - \frac{13}{58}i.$$

Příklad 2. Převed'te číslo $z = \frac{1}{1+i} + \frac{2}{1+i}$ na goniometrický tvar, určete z^6 a převed'te zpět na algebraický tvar.

Pro převod do goniometrického tvaru potřebujeme znát číslo v algebraickém tvaru. Nejprve tedy číslo převedeme na jednoduchý algebraický tvar

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{2}{1+i} = \frac{3}{1+i} = \frac{3 \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{3-3i}{1-i^2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Určíme absolutní hodnotu $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ a poté využijeme vztahy (5)

$$\cos \varphi = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi.$$

Nyní můžeme zapsat komplexní číslo v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right).$$

Pro výpočet mocniny použijeme vztah (14)

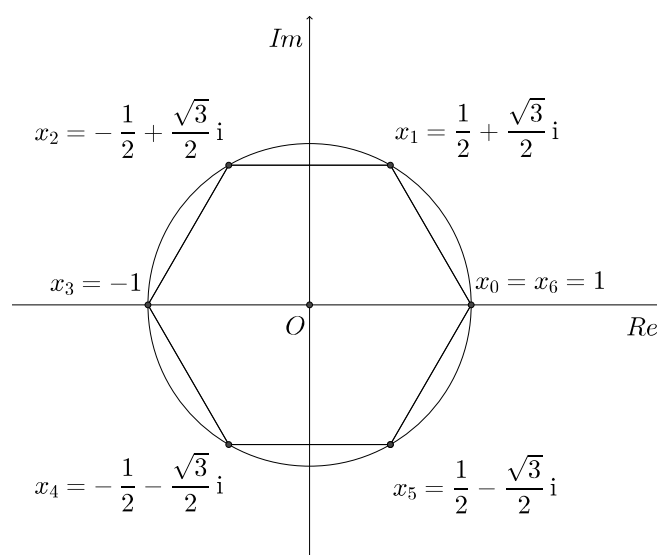
$$\begin{aligned} z^6 &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) \right) = \frac{729}{8} \left(\cos \frac{21}{2}\pi + i \sin \frac{21}{2}\pi \right) \\ &= \frac{729}{8} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{729}{8}i. \end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočítejte $\sqrt[6]{x}$, kde $x = 1$.

Pro číslo 1 je argument roven $\varphi = 0$, což lze snadno ověřit pomocí vztahů (5). Potom podle vztahu (15) platí

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{1} &= \sqrt[6]{|1|} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5 \\ x_0 &= \cos \frac{0}{6} + i \sin \frac{0}{6} = 1 \\ x_1 &= \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2 &= \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 &= \cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} = -1 \\ x_4 &= \cos \frac{8\pi}{6} + i \sin \frac{8\pi}{6} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_5 &= \cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme také vizualizovat tak, že vyneseme všechna řešení rovnice $x^6 = 1$ do Gaussovy roviny. Platí $x_0 = 1$ a $x_3 = -1$. Po nalezení řešení x_1 a znalosti symetrie pravidelného šestiúhelníku jsou zbývající řešení snadno nahlédnutelná. Osová souměrnost podle imaginární osy dá řešení x_2 a osová souměrnost podle reálné osy dá zbylá řešení x_4 a x_5 , viz (Obr. 9).



Obr. 9: Zobrazení řešení rovnice $x = \sqrt[6]{1}$ v Gaussově rovině

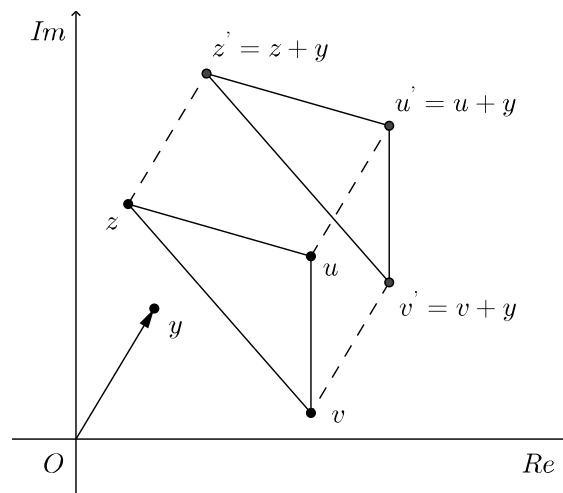
1.8 Transformace v Gaussově rovině

V této části se budeme zabývat elementárními transformacemi v Gaussově rovině, které odpovídají operacím s komplexními čísly [2]. Konkrétně se jedná o posunutí, stejnohlost, rotaci a spirální podobnost.

1.8.1 Posunutí

Posunutí neboli **translace** je geometrické zobrazení, při kterém všechny body roviny posuneme stejným směrem o stejnou vzdálenost.

Posunutí lze v rovině realizovat přičtením vybraného vektoru ke všem bodům roviny. V Gaussově rovině se jedná o přičtení vybraného komplexního čísla k ostatním komplexním číslům. Pro libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ a pevně zvolené komplexní číslo $y = c + di$ dostáváme předpis $f(z) = z + y$. Nejlépe to demonstrujeme na trojúhelníku (Obr. 10).



Obr. 10: Posunutí

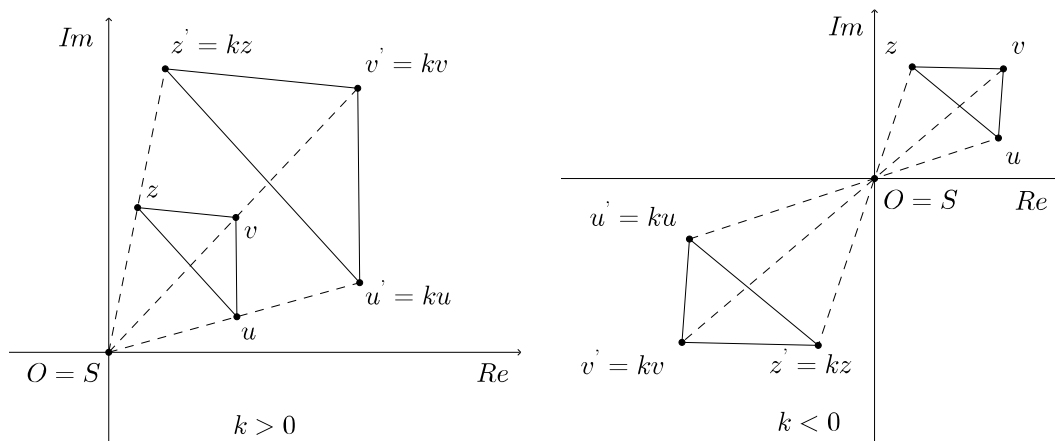
1.8.2 Stejnohlost

Stejnohlost je geometrické zobrazení, při kterém každému bodu X roviny přiřadíme pomocí **středu stejnohlosti** S a **koeficientu stejnohlosti** $k \neq 0$ bod X' následujícím způsobem:

$$k \cdot |SX| = |SX'|.$$

Koeficient k tedy mění délku úsečky SX a pokud $k < 0$, pak i její orientaci.

Stejnolehlost se středem v počátku Gaussovy roviny O lze realizovat vynásobením komplexních čísel reálným číslem k . Zobrazení má potom tvar $f(z) = kz$. Bod $z' = f(z)$ bude pro $k > 0$ ležet ve stejném kvadrantu jako bod z a pro $k < 0$ bude ležet v protilehlém kvadrantu bodu z , jak je znázorněno na (Obr. 11). Opět nejlépe demonstrujeme na trojúhelníku.



Obr. 11: Stejnolehlost

Je-li $k = -1$, jedná se o **středovou souměrnost**.

Stejnolehlost f se středem stejnohlosti, který neleží v počátku Gaussovy roviny, vyjádříme jako složení elementárních transformací následujícím způsobem: mějme libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ a střed stejnohlosti $S = c + di$.

1. Prvním krokem je posunutí g takové, aby střed stejnohlosti S ležel v počátku Gaussovy roviny O

$$g(z) = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

2. Dále provedeme stejnohlost h podle středu stejnohlosti O , která má stejný koeficient k jako stejnohlost f

$$h(g(z)) = k \cdot ((a - c) + (b - d)i) = k(a - c) + k(b - d)i.$$

3. Posledním krokem je zpětné posunutí g^{-1} počátku O do bodu S a dostáváme $f(z) = g^{-1}(h(g(z)))$

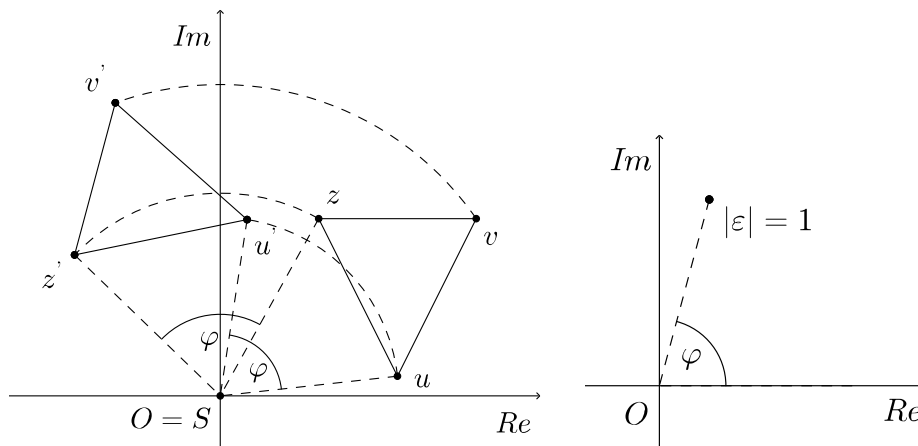
$$f(z) = k(a - c) + k(b - d)i + c + di = (c - kc + ka) + i(d - kd + kb).$$

1.8.3 Rotace

Rotace v rovině je geometrické zobrazení, které otočí všechny body roviny o stejný úhel φ kolem **středu otáčení** S .

Rotaci neboli otočení kolem počátku O o úhel φ realizujeme vynásobením komplexního čísla $z = a + bi$ komplexní jednotkou $\varepsilon = \cos \varphi + i \sin \varphi$ s nenulovým argumentem φ . Předpis takového zobrazení je $f(z) = \varepsilon \cdot z$, viz (Obr. 12). Potom platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (a + bi) = (a \cos \varphi - b \sin \varphi) + (a \sin \varphi + b \cos \varphi)i. \quad (17)$$



Obr. 12: Rotace

Rotaci f kolem libovolného středu otáčení $S = c + di$ realizujeme posunutím středu do počátku, otočením, a následným posunutím zpět. Mějme libovolné komplexní číslo $z = a + bi$ a střed otáčení $S = c + di$.

1. Provedeme posunutí g takové, aby střed otáčení S ležel v počátku Gaussovy roviny O

$$g(z) = a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

2. Dále provedeme rotaci h podle středu otáčení O se stejným argumentem φ jako má rotace f

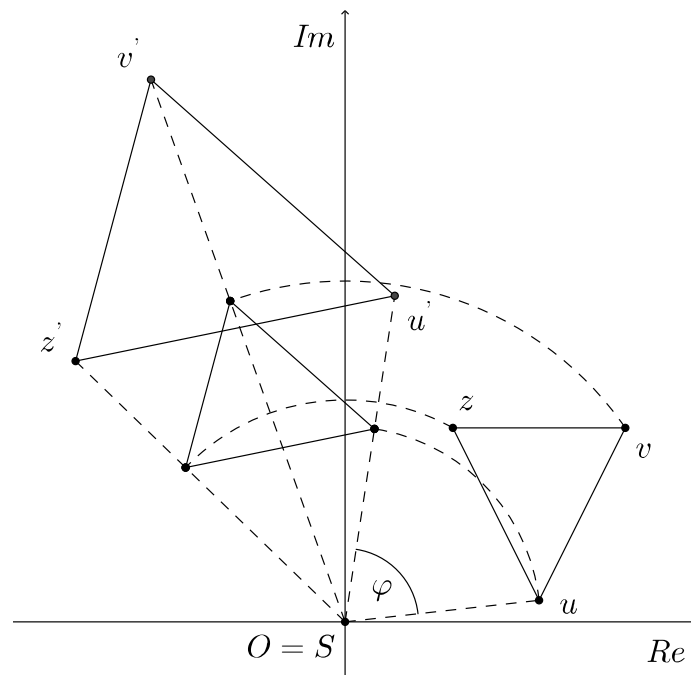
$$\begin{aligned} h(g(z)) &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot ((a - c) + (b - d)i) \\ &= ((a - c) \cos \varphi - (b - d) \sin \varphi) + i((a - c) \sin \varphi + (b - d) \cos \varphi). \end{aligned}$$

3. Nakonec provedeme zpětné posunutí g^{-1} počátku O do bodu S

$$f(z) = g^{-1}(h(g(z))) = ((a - c) \cos \varphi - (b - d) \sin \varphi + c) + i((a - c) \sin \varphi + (b - d) \cos \varphi + d). \quad (18)$$

1.8.4 Spirální podobnost

Spirální podobnost (se středem v počátku Gaussovy roviny) je zobrazení, které je složením rotace a stejnolehlosti, kde středy rotace i stejnolehlosti leží v počátku Gaussovy roviny. Pomocí komplexních čísel realizujeme toto zobrazení vynásobením komplexního čísla z obecným pevně zvoleným komplexním číslem $y = |y|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Nejprve tedy provedeme otočení komplexního čísla z o úhel φ . Poté provedeme stejnolehlost s koeficientem $|y|$. Tato dvě geometrická zobrazení můžeme provést i v opačném pořadí, neboť složení těchto dvou operací nezávisí na pořadí. Toto zobrazení má předpis $f(z) = yz$.



Obr. 13: Spirální podobnost

Spirální podobnost se středem v bodě $S = c + di$ (střed spirální podobnosti tedy není středem Gaussovy roviny) realizujeme složením posunutí středu do počátku, spirální podobností kolem počátku a posunutím zpět.

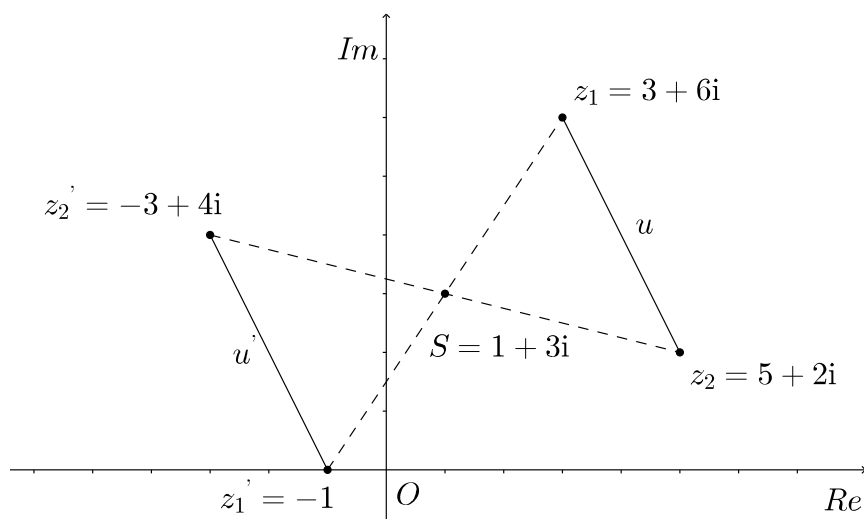
Příklad 4. Mějme úsečku u danou komplexními čísly $z = 3 + 6i$ a $y = 5 + 2i$. Najděte úsečku u' , která je středově souměrná s úsečkou u podle bodu $S = 1 + 3i$.

Protože se jedná o středovou souměrnost, tak koeficient stejnolehlosti je $k = -1$. Využijeme vztah (17) a dosadíme bod S a body z a y , které určují úsečku u

$$z' = (1 - (-1)) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + i(3 - (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 6) = -1$$

$$y' = (1 - (-1)) \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + i(3 - (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2) = -3 + 4i.$$

Úsečka u' daná body z' a y' je středově souměrná s úsečkou u podle středu stejnolehlosti S .



Obr. 14: Středová souměrnost

2 Algebraická teorie komplexních čísel

Nyní představíme komplexní čísla tak, jak se prezentují na vysokých školách. Na středních školách se učíme počítat s komplexními čísly, aniž bychom se hlouběji zabývali vlastnostmi operací. V této kapitole se podíváme hlouběji na strukturu komplexních čísel, abychom viděli, co vlastně komplexní čísla představují a proč s nimi všechny dříve zmíněné operace můžeme bez obav provádět.

Definujeme množinu komplexních čísel jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) reálných čísel, tj.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Pro prvky množiny \mathbb{C} definujeme operace součet a součin následovně

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2),\end{aligned}$$

přičemž dostáváme opět uspořádané dvojice reálných čísel. Každá dvojice $(a, 0)$ odpovídá **reálnému číslu** a každá dvojice $(0, b)$ odpovídá **ryze imaginárnímu číslu**.

Máme-li takto nadefinovaný součin, pak platí

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Označíme-li $(0, 1) = i$, pak $i^2 = (-1, 0)$. Protože dvojici $(-1, 0)$ odpovídá reálné číslo -1 , můžeme zjednodušeně psát $i^2 = -1$. Porovnejme tedy komplexní čísla jakožto dvojice reálných čísel s algebraickým tvarem komplexních čísel. Můžeme psát

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi, \tag{19}$$

což je algebraický tvar komplexního čísla, viz kapitola (1.1).

Operace na komplexních číslech odpovídají právě operacím s algebraickým tvarem komplexních čísel.

2.1 Algebraická struktura

Ukažme, jaké vlastnosti má takto definovaná množina komplexních čísel [3].

(a) Uspořádaná dvojice $(\mathbb{C}, +)$ je **grupoid**, tj. pro každé dva prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ platí

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{C}.$$

Aby byl takový grupoid **asociativní**, musí pro každé tři prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{C}$ platit

$$((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)).$$

Upravíme nejprve levou a potom pravou stranu rovnice. Pro přehlednost budeme levou stranu rovnice značit L a pravou stranu P .

$$\begin{aligned} L &= ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3), \\ P &= (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) = (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

Výrazy se rovnají, protože sčítání reálných čísel je asociativní. Takovou strukturu nazýváme **pologrupa**. Pologrupa je také **komutativní**, tj. pro každé dva prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ platí

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1),$$

protože sčítání reálných čísel je komutativní. Pro sčítání existuje prvek $o = (o_1, o_2) \in \mathbb{C}$, který splňuje

$$(a, b) + (o_1, o_2) = (a + o_1, b + o_2) = (a, b)$$

pro libovolný prvek $(a, b) \in \mathbb{C}$. Takový prvek se nazývá **jednotkový prvek** a je tvaru $o = (0, 0)$. Ke každému prvku $(a_1, b_1) \in \mathbb{C}$ existuje prvek $(a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ takový, že platí

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = o.$$

Tento prvek je tvaru $(a_2, b_2) = (-a_1, -b_1)$ a nazýváme ho **inverzním prvkem** k prvku (a_1, b_1) .

Zejména středoškolské definování rozdílu je vlastně přičtení inverzního prvku (ve středoškolské terminologii se jedná o komplexní číslo opačné), a proto ve vysokoškolském pojetí nemá smysl rozdíl explicitně definovat. Dostáváme strukturu, která se nazývá **komutativní grupa**.

(b) Uspořádaná dvojice (\mathbb{C}, \cdot) je také grupoid, protože pro každé dva prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ platí

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \in \mathbb{C}.$$

Operace násobení je asociativní, protože pro každé tři prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{C}$ platí

$$((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)).$$

$$\begin{aligned} L &= ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \cdot (a_3, b_3) \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2)a_3) \\ &= ((a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2) - (a_1b_2b_3 + a_2b_1b_3), (a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3) + (a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1)) \\ &= (a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1), \\ P &= (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3), a_1(a_2a_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)) \\ &= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3) - (a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2), (a_1a_2a_3 + a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2, a_1a_2a_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_1b_2b_3). \end{aligned}$$

Násobení je také komutativní, protože pro každé dva prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ platí

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$$

$$L = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$P = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + b_2a_1).$$

Jednotkovým prvkem pro násobení je prvek $e = (e_1, e_2)$, který splňuje

$$(a, b) \cdot (e_1, e_2) = (ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) = (a, b)$$

pro každý prvek $(a, b) \in \mathbb{C}$. Tento prvek má tvar $e = (1, 0)$. Inverzním prvkem pro násobení k prvku $(a_1, b_1) \in \mathbb{C}$ je prvek $(a_2, b_2) \in \mathbb{C}$, který splňuje

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) = e.$$

Inverzní prvek existuje ke každému prvku množiny \mathbb{C} s výjimkou prvku $(0, 0)$ a má tvar

$$(a_2, b_2) = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{-b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right), a_1^2 + b_1^2 \neq 0.$$

Taková struktura tvoří **komutativní pologrupu s jednotkovým prvkem**. Kdybychom měli dvojici $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, byla by to komutativní grupa.

(c) Protože $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa, (\mathbb{C}, \cdot) je komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem a pro libovolné prvky $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in \mathbb{C}$ jsou operace $+$ a \cdot **distributivní**, tj.

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3), \\ ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) \cdot (a_1, b_1) &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3),\end{aligned}$$

je množina $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **komutativní okruh**. Ověříme první vztah, druhý se ověří analogicky

$$\begin{aligned}L &= (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= (a_1 \cdot (a_2 + a_3) - b_1 \cdot (b_2 + b_3), a_1 \cdot (b_2 + b_3) + b_1 \cdot (a_2 + a_3)) \\ &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3), \\ P &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ &+ (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) \\ &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3).\end{aligned}$$

Protože komutativní okruh $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je netriviální a každý nenulový prvek z (\mathbb{C}, \cdot) má inverzní prvek, je tento komutativní okruh **těleso**.

Tyto vlastnosti nejsou zcela samozřejmé. Například kvaterniony jsou čísla tvaru $h = a + bi + cj + dk$, kde i, j, k jsou imaginární jednotky splňující $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ [4]. Operace násobení odpovídá násobení čtyřčlenů a není komutativní, což je vidět v následující multiplikační tabulce.

\cdot	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Dále například oktoniony (někdy nazývané Cayleyova čísla), což jsou čísla se sedmi imaginárními jednotkami, ztrácejí při operaci násobení kromě komutativity také asociativitu.

Tento přístup definování je tzv. **axiomatický přístup**. Vlastnosti jako asociativita, komutativita a distributivita jsou tzv. **axiomy** a pomocí nich můžeme odvodit všechny vlastnosti operací na dané množině.

2.2 Gaussova rovina

Každé uspořádané dvojici $(a, b) \in \mathbb{C}$ můžeme přiřadit vektor v rovině. Dále pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a uspořádanou dvojici $(a, b) \in \mathbb{C}$ platí $(\alpha, 0) \cdot (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$, neboli $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, \alpha b)$.

Mějme komutativní grupu $(\mathbb{C}, +)$ a vezměme $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

- 1) $\alpha(\beta(a_1, b_1)) = \alpha\beta(a_1, b_1)$
- 2) $1 \cdot (a_1, b_1) = (a_1, b_1)$
- 3) $\alpha((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = \alpha(a_1, b_1) + \alpha(a_2, b_2)$
- 4) $(\alpha + \beta)(a_1, b_1) = \alpha(a_1, b_1) + \beta(a_1, b_1)$.

Gaussova rovina potom tvoří **reálný vektorový prostor** \mathbb{R}^2 , protože splňuje základní axiomy vektorového prostoru. Každé komplexní číslo lze zapsat jako **lineární kombinaci** vektorů $(1, 0)$ a $(0, 1)$

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1), \text{ viz vztah (19).}$$

Důležité je, že na tomto prostoru lze nejen vynásobit komplexní čísla reálným číslem, ale navíc lze násobit komplexní čísla mezi sebou.

2.3 Maticová realizace transformací

Podívejme se znova na operace s komplexními čísly a jejich geometrický význam. Na komplexní čísla budeme pohlížet jako na vektory, jak jsme ukázali v kapitole (2.2), přičemž operace s komplexními čísly a transformace, které těmto operacím odpovídají, lze realizovat pomocí matic².

²Vektor v textu píšeme klasickým způsobem do řádku. Při počítání s maticemi ho však zapisujeme jako sloupcový vektor, abychom mohli používat přirozený zápis transformací. Násobíme tedy sloupcový vektor čtvercovou maticí zleva.

(a) V kapitole (1.8.1) jsme se zabývali posunutím. Posunutí v \mathbb{R}^2 je vlastně přičtení vybraného vektoru ke všem bodům roviny. V Gausově rovině lze tedy realizovat následujícím způsobem: pro libovolné komplexní číslo $z = (a, b)$ a pevně zvolené komplexní číslo $y = (c, d)$ platí

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}.$$

(b) Stejnolehlost s koeficientem $k \neq 0$ lze realizovat vynásobením libovolného vektoru $z = (a, b)$ maticí

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Potom platí

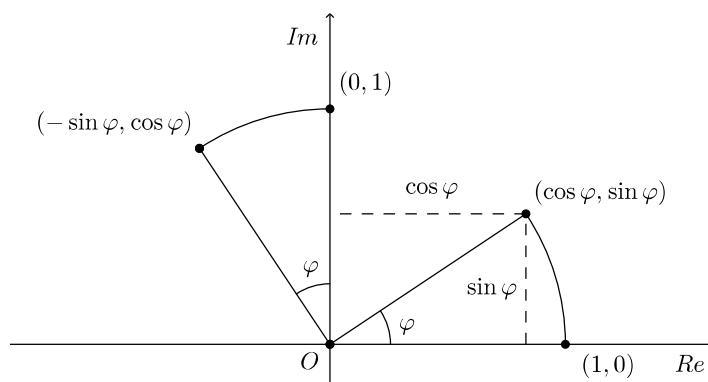
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}.$$

Středová souměrnost je speciální typ stejnolehlosti, kde $k = -1$. Potom pro libovolný vektor $z = (a, b)$ platí

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix},$$

což je právě komplexní číslo opačné $-z$.

(c) Další transformací je rotace. Připomeňme, že rotace kolem počátku v rovině \mathbb{R}^2 je taková transformace, při které se všechny vektory tohoto vektorového prostoru otočí o stejný úhel φ . Rotací vektorů $(1, 0)$, $(0, 1)$ o úhel φ dostaneme vektory $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ viz (Obr. 15).



Obr. 15: Rotace v rovině

To znamená, že libovolný vektor

$$z = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

se zobrazí na vektor

$$a(\cos \varphi, \sin \varphi) + b(-\sin \varphi, \cos \varphi) = (a \cos \varphi - b \sin \varphi, a \sin \varphi + b \cos \varphi).$$

Máme tedy zobrazení r_φ takové, že platí

$$\begin{aligned} r_\varphi((a, b)) &= r_\varphi(a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)) = a(\cos \varphi, \sin \varphi) + b(-\sin \varphi, \cos \varphi) \\ &= (a \cos \varphi - b \sin \varphi, a \sin \varphi + b \cos \varphi), \end{aligned}$$

což odpovídá vztahu (17). Transformaci rotace pak můžeme reprezentovat maticí

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Rotace vektoru se dá tedy vyjádřit jako součin matice r_φ a libovolného sloupcového vektoru

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi - b \sin \varphi \\ a \sin \varphi + b \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (20)$$

(d) Spirální podobnost je složení rotace a stejnolehlosti, tj.

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \varphi & -k \sin \varphi \\ k \sin \varphi & -k \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Pro libovolný vektor $z = (a, b)$ realizujeme spirální podobnost následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k \cos \varphi & -k \sin \varphi \\ k \sin \varphi & k \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \cos \varphi - kb \sin \varphi \\ ka \sin \varphi + kb \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

(e) Zmíníme se ještě o transformaci, která libovolný vektor překlopí podle reálné osy. Je to **osová souměrnost** podle reálné osy. Tato transformace je vyjádřena vynásobením libovolného vektoru maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pro komplexní číslo $z = (a, b)$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix},$$

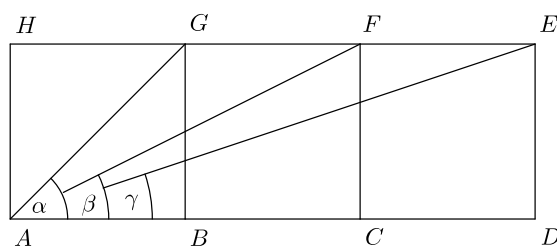
což je právě komplexně sdružené číslo \bar{z} .

3 Příklady

V této kapitole spočítáme zajímavé příklady na komplexní čísla. Některé příklady se dají řešit i jinou metodou, avšak zdoluhavou, zvláště, pokud počítáme obecně. Cílem jsou především úlohy z matematických olympiád, protože řešitelé často nezískají při běžné školní výuce potřebné dovednosti na takové úrovni.

Také zde ukážeme, že stejnoolehlost, rotaci a zvláště pak spirální podobnost lze efektivně využít v praktických příkladech, protože právě tato zobrazení odpovídají operacím s komplexními čísly.

Příklad 1. *Tři shodné čtverce jsou umístěny v rovině vedle sebe tak, jak ukazuje (Obr. 16). Určete součet velikostí úhlů α , β a γ [1].*



Obr. 16:

Tento příklad lze vyřešit více způsoby. Jako motivaci k používání komplexních čísel ukážeme tři různá řešení daného problému.

(a) Nejprve vypočítáme příklad pomocí goniometrických funkcí. Z obrázku je zřejmé, že $\alpha = \frac{\pi}{4}$, hledáme tedy ještě úhly β a γ . Ty lze nalézt pomocí funkce tangens. Z vlastností trojúhelníku lze vyčíst

$$\tan \beta = \frac{1}{2}, \quad \tan \gamma = \frac{1}{3}.$$

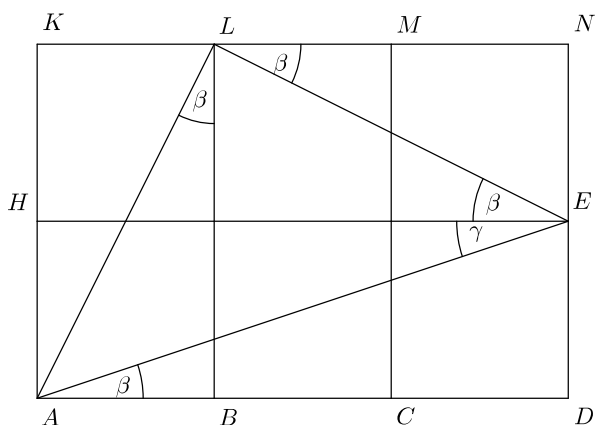
Potom podle goniometrických součtových vzorců platí

$$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \implies \beta + \gamma = \frac{1}{4}\pi.$$

Potom platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi.$$

(b) Překreslíme obrazec na (Obr. 16) tak, abychom získali trojúhelník a zachovali přitom velikosti všech stran a úhlů. Pak můžeme využít veškeré známé vztahy platné pro trojúhelník, viz (Obr. 17).



Obr. 17:

Trojúhelník AEL je rovnoramenný, protože platí $|AL| = |EL|$ a úhel ALE je pravý, protože otočením trojúhelníku o úhel β splyne s pravým úhlem BLN . Z toho plyne

$$\beta + \gamma = \frac{1}{4}\pi$$

a tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi.$$

(c) Umístíme (Obr. 16) do Gaussovy roviny tak, že bod A leží v počátku Gaussovy roviny. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že strany jednotlivých čtverců mají velikost 1. Potom platí

$$G = 1 + i, \quad F = 2 + i, \quad E = 3 + i$$

a podle geometrických vlastností součinu plyne, že výsledný úhel dostaneme vynásobením komplexních čísel $E \cdot F \cdot G$, neboli

$$(1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i) = 10i.$$

Argument čísla $10i$ je roven $\frac{1}{2}\pi$.

Příklad 2. *Odvod'te vzorce pro $\cos 3x$ a $\sin 3x$ využívající pouze mocnin $\cos x$ a $\sin x$. Při odvození použijte Moivreovu větu [8].*

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x).\end{aligned}$$

Nyní porovnáme reálné a imaginární části

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

Příklad 3. Dokažte, že pro přímky AB a CD platí [7]

- (a) $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{A-B}{\overline{A-B}} = \frac{C-D}{\overline{C-D}},$
 (b) $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{A-B}{\overline{A-B}} = -\frac{C-D}{\overline{C-D}},$
 (c) body A, B, C jsou kolineární $\Leftrightarrow \frac{A-B}{\overline{A-B}} = \frac{A-C}{\overline{A-C}},$
 (d) odvod'te komplexní rovnici přímky $AB.$

(a) Označme $A - B = z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), C - D = y = |y|(\cos \psi + i \sin \psi).$ Potom $\overline{A - B} = \overline{A - B} = \bar{z}$ a platí

$$\frac{A - B}{\overline{A - B}} = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{|z|(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2}{1}.$$

Analogicky odvodíme vztah $(\cos \psi + i \sin \psi)^2$ z rovnice $C - D = y.$ Po dosazení do původní rovnice dostaneme

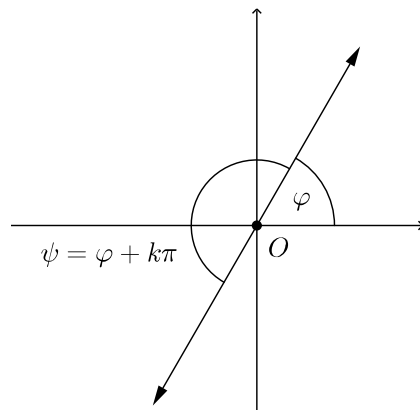
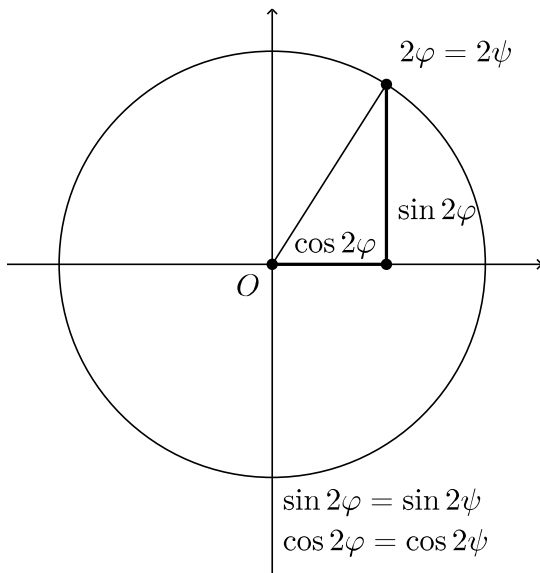
$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 &= (\cos \psi + i \sin \psi)^2 \\ \cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi &= \cos^2 \psi + 2i \cos \psi \sin \psi - \sin^2 \psi \\ \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi &= \cos 2\psi + i \sin 2\psi \\ \cos 2\varphi = \cos 2\psi \quad \wedge \quad \sin 2\varphi = \sin 2\psi \\ &\Leftrightarrow \psi = \varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Jinými slovy, dvě přímky jsou rovnoběžné právě když obě komplexní čísla x, y mají stejný argument v intervalu $[0; \pi),$ viz (Obr. 18).

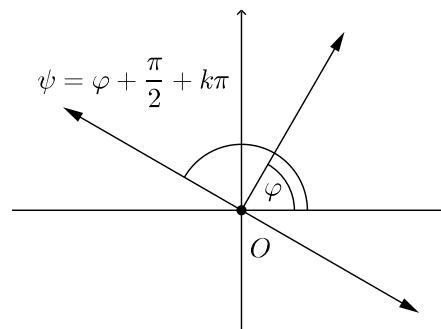
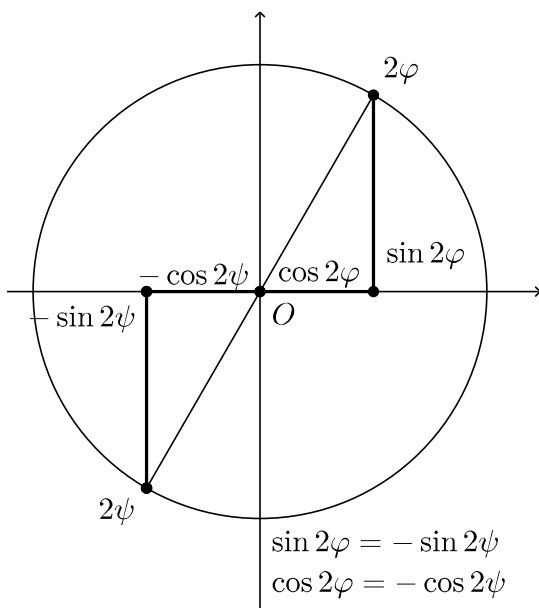
(b) Použijeme stejnou úvahu jako v předchozím případě. Můžeme tedy rovnou psát

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^2 &= -(\cos \psi + i \cdot \sin \psi)^2 \\ \cos 2\varphi = -\cos 2\psi \quad \wedge \quad \sin 2\varphi = -\sin 2\psi \\ &\Leftrightarrow \psi = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nebo-li platí, že dvě přímky jsou navzájem kolmé, právě když se argumenty obou komplexních čísel x, y liší o $\frac{\pi}{2}$ v intervalu $[0; \pi),$ viz (Obr. 19).



Obr. 18:



Obr. 19:

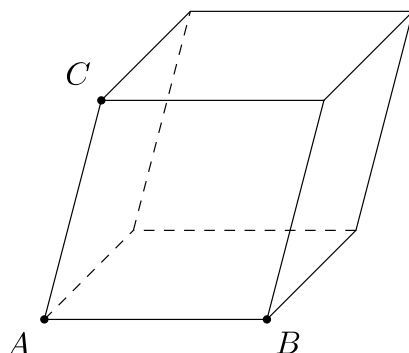
(c) Upravíme vztah ze zadání

$$\begin{aligned}
 (A - B)(\bar{A} - \bar{C}) &= (A - C)(\bar{A} - \bar{B}) \\
 A\bar{A} - A\bar{C} - B\bar{A} + B\bar{C} &= A\bar{A} - A\bar{B} - C\bar{A} + C\bar{B} \\
 (\bar{A} - \bar{B})C + (B - A)\bar{C} + A\bar{B} - B\bar{A} &= 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Stejný výraz dostaneme, když vypočítáme smíšený součin tří vektorů tvaru

$$\begin{aligned}
 ((A, B, C) \times (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})) \cdot (1, 1, 1) &= (B\bar{C} - C\bar{B}, C\bar{A} - A\bar{C}, A\bar{B} - B\bar{A}) \cdot (1, 1, 1) \\
 &= B\bar{C} - C\bar{B} + C\bar{A} - A\bar{C} + A\bar{B} - B\bar{A} = (\bar{A} - \bar{B})C + (B - A)\bar{C} + A\bar{B} - B\bar{A}.
 \end{aligned}$$

Smíšený součin tří vektorů představuje objem pravidelného hranolu, který mezi nimi vznikne, viz (Obr. 20). Má-li být součin roven nule, pak je objem hranolu nulový a to je jen tehdy, pokud jsou body A, B, C kolineární, tj. leží v jedné přímce a žádné těleso mezi nimi nevznikne.



Obr. 20:

(d) Abychom získali komplexní rovnici přímky danou body AB , nahradíme bod C z rovnice (21) neznámým bodem x

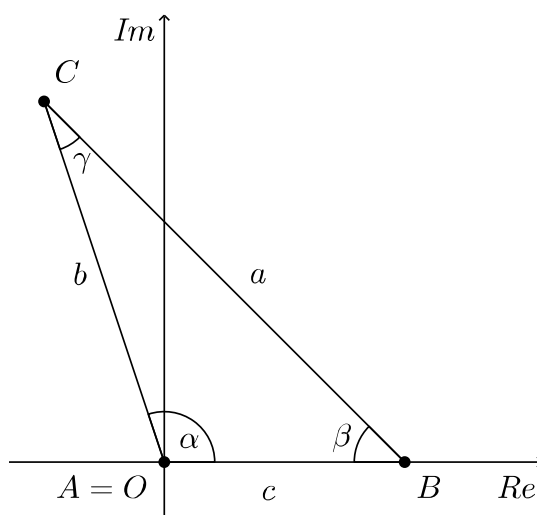
$$(\bar{A} - \bar{B})x + (B - A)\bar{x} + A\bar{B} - B\bar{A} = 0.$$

Příklad 4. Dokažte sinovou a kosinovou větu pomocí komplexních čísel [1].

Nejprve dokážeme kosinovou větu, tedy vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníku ABC a α je úhel protilehlý straně a . Zvolíme polohu libovolného trojúhelníku ABC v Gaussově rovině tak, jak je znázorněno na (Obr. 21).



Obr. 21:

Pro body A, B, C potom platí

$$A = 0, \quad B = c(\cos 0 + i \sin 0) = c, \quad C = b(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Pro odvození kosinové věty využijeme vztah (3) a pro velikost úsečky budeme používat značení a (tedy bez absolutních hodnot, což je standardní značení velikosti úsečky)

$$\begin{aligned} a &= |BC| = |C - B| = |b(\cos \alpha + i \sin \alpha) - c| = |b \cos \alpha - c + ib \sin \alpha| \\ &= \sqrt{(b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Pro komplexní číslo a potom platí

$$a^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 = b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

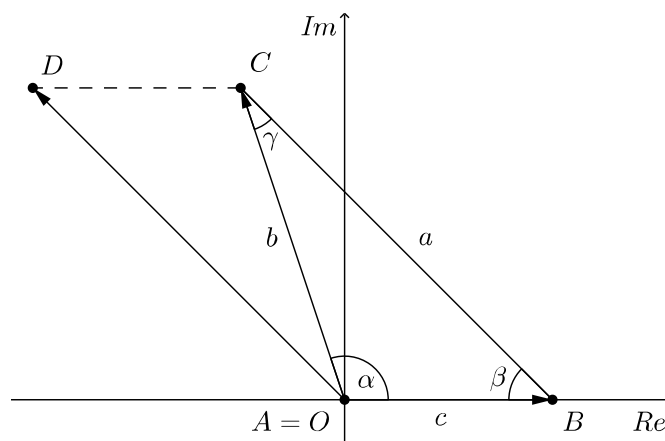
Tím je odvozena kosinová věta.

Nyní odvodíme větu sinovou, tj.

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

kde a, b jsou strany trojúhelníku ABC a α, β jsou úhly protilehlé stranám a, b . Doplňme trojúhelník na rovnoběžník bodem $D = a(\cos(\pi - \beta) + i \sin(\pi - \beta))$, viz (Obr. 22), pro který podle vlastností goniometrických funkcí platí

$$D = a(\cos(\pi - \beta) + i \sin(\pi - \beta)) = a(-\cos \beta + i \sin \beta).$$



Obr. 22:

Dále platí

$$B + D = C \Rightarrow c + a(-\cos \beta + i \sin \beta) = b(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

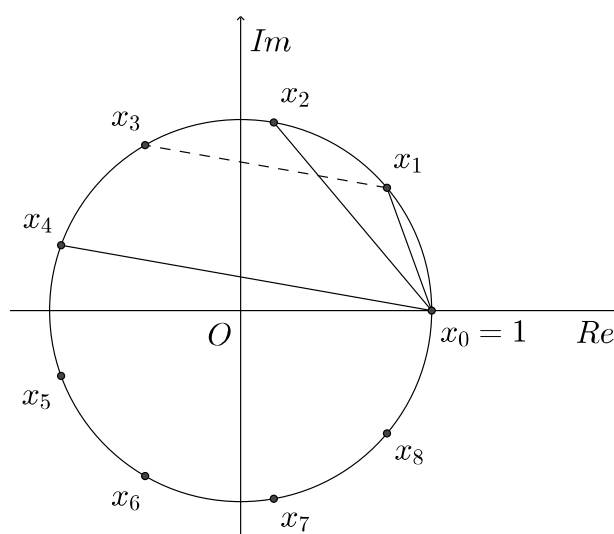
a porovnáním imaginárních částí dostaneme

$$a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Příklad 5. Dokažte, že velikost strany pravidelného devítiúhelníku je rovna rozdílu velikostí jeho nejdelší a nejkratší úhlopříčky [1].

Označíme vrcholy devítiúhelníku x_0 až x_8 a pro jednoduchost výpočtu budeme předpokládat, že je vepsán do jednotkové kružnice, protože velikost poloměru kružnice díky podobnosti nijak neovlivní postup řešení. Z kapitoly (1.6) víme, že řešením binomické rovnice $x^9 - 1 = 0$ je právě pravidelný devítiúhelník, jehož vrcholy jsou komplexní čísla x_0 až x_8 , splňující

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}, k = 0, 1, \dots, 8.$$



Obr. 23:

Velikost strany devítiúhelníku je rovna velikosti úsečky $|x_0x_1| = |x_1 - x_0|$ a naším úkolem je dokázat platnost rovnice

$$|x_0x_1| = |x_0x_4| - |x_0x_2|. \quad (22)$$

Jednotlivé body lze přepsat na tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}, \\ x_2 &= \cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9} = x_1^2, \\ x_3 &= \cos \frac{6\pi}{9} + i \sin \frac{6\pi}{9} = x_1^3, \\ x_4 &= \cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} = x_1^4, \end{aligned}$$

Pro pravou stranu rovnice (22) platí

$$|x_0x_4| - |x_0x_2| = |x_4 - x_0| - |x_2 - x_0| = |x_1^4 - x_0| - |x_1^2 - x_0|.$$

Za x_0 můžeme dosadit 1 a za úsečku x_0x_2 můžeme dosadit úsečku x_1x_3 , protože porovnáváme jejich velikosti, které jsou u pravidelného n -úhelníku shodné. Potom

$$\begin{aligned} |x_1^4 - 1| - |x_1^3 - x_1| &= |(x_1^4 - 1) - (x_1^3 - x_1)| = |x_1^4 - x_1^3 + x_1 - 1| \\ &= |x_1^3(x_1 - 1) + (x_1 - 1)| = |(x_1 - 1)(x_1^3 + 1)| \\ &= |x_1 - 1| \cdot |x_1^3 + 1|, \end{aligned}$$

přičemž kroky s absolutními hodnotami jsou korektní, jelikož vektory $\overrightarrow{x_0x_4}$ a $\overrightarrow{x_1x_3}$ jsou rovnoběžné a souhlasně orientované a trojúhelníková nerovnost platí jako rovnost. Lze ověřit

$$x^9 - 1 = (x^3 - 1) \cdot (x^6 + x^3 + 1).$$

Protože řešíme binomickou rovnici $x^9 - 1 = 0$ a víme, že x_1 je jejím kořenem, ale zároveň $x_1^3 \neq 1$, pak

$$x_1^6 + x_1^3 + 1 = 0 \iff x_1^3 + 1 = -x_1^6.$$

Z toho plyne

$$|x_1 - 1| \cdot |x_1^3 + 1| = |x_1 - 1| \cdot |-x_1^6| = |x_1 - 1| \cdot |x_1^6| = |x_1 - 1|,$$

neboť x_1^6 je komplexní jednotka a její absolutní hodnota je rovna jedné.

Pro levou stranu rovnice (22) platí $|x_0x_1| = |x_1 - x_0| = |x_1 - 1|$, čímž je rovnost dokázána.

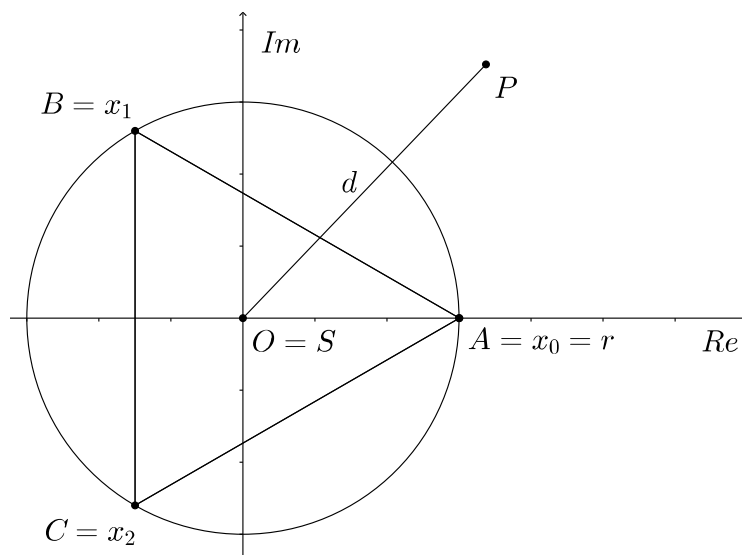
Příklad 6. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC . Dokažte, že pro každý bod P této roviny platí

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3 \cdot (r^2 + d^2),$$

kde d je vzdálenost bodu P od středu kružnice opsané trojúhelníku ABC a r je její poloměr [1].

Rovnostranný trojúhelník ABC umístíme do Gaussovy roviny tak, že střed S kružnice opsané trojúhelníku je v počátku Gaussovy roviny a body A, B, C jsou po řadě obrazy komplexních čísel x_0, x_1, x_2 , která jsou kořeny binomické rovnice $x^3 - r^3 = 0$. Tedy

$$x_k = r \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$



Obr. 24:

Pro libovolné komplexní číslo P potom platí

$$|PA|^2 = |P - A|^2 = |P - r|^2,$$

$$|PB|^2 = |P - B|^2,$$

$$|PC|^2 = |P - C|^2,$$

$$|PO|^2 = |P|^2.$$

Pro součet druhých mocnin vzdáleností bodu P od vrcholů dostáváme

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 &= |P - r|^2 + |P - B|^2 + |P - C|^2 \\ &= (P - r) \cdot \overline{(P - r)} + (P - B) \cdot \overline{(P - B)} + (P - C) \cdot \overline{(P - C)} \\ &= (P - r) \cdot (\overline{P} - \overline{r}) + (P - B) \cdot (\overline{P} - \overline{B}) + (P - C) \cdot (\overline{P} - \overline{C}). \end{aligned}$$

Protože platí $r = \overline{r}$, $B = \overline{C}$, $C = \overline{B}$, dostaneme

$$\begin{aligned} &|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 \\ &= (P - r) \cdot (\overline{P} - r) + (P - B) \cdot (\overline{P} - C) + (P - C) \cdot (\overline{P} - B) \\ &= (P\overline{P} + r^2 - Pr - \overline{P}r) + (P\overline{P} + BC - PC - \overline{P}B) + (P\overline{P} + BC + PB - \overline{P}C) \end{aligned}$$

a protože platí $P\overline{P} = d^2$, $BC = r^2$, tak po úpravě dostáváme

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3 \cdot (r^2 + d^2) - P(r + B + C) - \overline{P}(r + B + C).$$

Ze vztahu (16) víme, že pro kořeny binomické rovnice $x^3 - r^3 = 0$ platí $r + B + C = 0$ a tedy rovnost platí.

Příklad 7. V rovině je dán pravidelný n -úhelník $A_0A_1\dots A_{n-1}$. Dokažte, že pro každý bod P této roviny platí

$$|PA_0|^2 + |PA_1|^2 + \dots + |PA_{n-1}|^2 = n \cdot (r^2 + d^2),$$

kde d je vzdálenost bodu P od středu kružnice opsané n -úhelníku a r je její poloměr [1].

Budeme postupovat stejně jako v příkladě (6). Pravidelný n -úhelník umístíme do Gaussovy roviny tak, aby body A_k byly obrazy komplexních čísel

$$x_k = r \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

což jsou kořeny binomické rovnice $x^n - r^n = 0$. Uvědomíme si, že $x_0 = A_0 = r, x_1 = A_1, \dots, x_{n-1} = A_{n-1}$. Potom platí

$$\begin{aligned} |PA_0|^2 + |PA_1|^2 + \dots + |PA_{n-1}|^2 &= (P - r) \cdot (\bar{P} - r) + (P - A_1) \cdot (\bar{P} - A_{n-1}) \\ &\quad + \dots + (P - A_{n-1}) \cdot (\bar{P} - A_1) \end{aligned}$$

a protože $P\bar{P} = d^2, A_1A_{n-1} = A_2A_{n-2} = \dots = A_{n-1}A_1 = r^2$, dostáváme

$$\begin{aligned} |PA_0|^2 + |PA_1|^2 + \dots + |PA_{n-1}|^2 &= n \cdot (r^2 + d^2) - P \cdot (r + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) \\ &\quad - \bar{P} \cdot (r + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}). \end{aligned}$$

Jelikož pro kořeny binomické rovnice $x^n - r^n = 0$ platí

$$r + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} = 0,$$

dostáváme

$$|PA_0|^2 + |PA_1|^2 + \dots + |PA_{n-1}|^2 = n \cdot (r^2 + d^2).$$

Příklad 8. Dokažte, že pro trojúhelník ABC , který je vepsán do jednotkové kružnice se středem v počátku, platí $H = A + B + C$, kde H je ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku a body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku [7].

Pro důkaz potřebujeme znát alespoň dvě výšky trojúhelníku ABC . Pro přímkou AB jsme v příkladu (3d) odvodili vztah $(\bar{A} - \bar{B})x + (B - A)\bar{x} + A\bar{B} - B\bar{A} = 0$. Pokud body A a B leží na jednotkové kružnici se středem v počátku Gaussovy roviny, můžeme použít $\bar{A} = \frac{1}{A}$ a $\bar{B} = \frac{1}{B}$ a rovnici upravit na tvar

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)x + (B - A)\bar{x} + \frac{A}{B} - \frac{B}{A} &= 0 \\ \frac{B - A}{AB}x + (B - A)\bar{x} + \frac{A^2 - B^2}{AB} &= 0 \\ x + AB\bar{x} - A - B &= 0 \\ \bar{x} &= \frac{A + B - x}{AB}. \end{aligned}$$

Tento vztah platí i pro patu kolmice P_c na přímkou AB , tedy $\bar{P}_c = \frac{A + B - P_c}{AB}$.

Pro dvě kolmé přímky platí vztah pro kolmost z příkladu (3b). Pomocí tohoto vztahu odvodíme další vztah pro bod P_c

$$\begin{aligned} \frac{A - B}{\bar{A} - \bar{B}} &= -\frac{C - P_c}{\bar{C} - \bar{P}_c} \\ (A - B)(\bar{C} - \bar{P}_c) &= -(C - P_c)(\bar{A} - \bar{B}) \\ A\bar{C} - B\bar{C} - A\bar{P}_c + B\bar{P}_c &= -C\bar{A} + P_c\bar{A} + C\bar{B} - P_c\bar{B} \\ \frac{A}{C} - \frac{B}{C} - A\bar{P}_c + B\bar{P}_c &= -\frac{C}{A} + \frac{P_c}{A} + \frac{C}{B} - \frac{P_c}{B} \\ (B - A)\bar{P}_c - (B - A)\frac{P_c}{AB} &= (B - A)\frac{1}{C} - (B - A)\frac{C}{AB} \\ \bar{P}_c - \frac{P_c}{AB} &= \frac{1}{C} - \frac{C}{AB} \\ \bar{P}_c &= \frac{CP_c + AB - C^2}{ABC}. \end{aligned}$$

Porovnáním obou vztahů pro \bar{P}_c získáme vztah $P_c = \frac{1}{2}(A + B + C - ABC\bar{C})$, který závisí pouze na bodech A, B , a C .

Abychom našli ortocentrum trojúhelníku ABC , potřebujeme průsečík dvou výšek tohoto trojúhelníku. Budeme počítat ortocentrum pomocí výšek v_a a v_c , tedy využijeme paty kolmic P_a a P_c . Pro tyto body platí

$$P_a = \frac{1}{2}(B + C + A - BC\bar{A}), \quad P_c = \frac{1}{2}(A + B + C - ABC\bar{C}).$$

Nyní hledáme průsečík přímek AP_a a CP_c

$$(\bar{A} - \bar{P}_a)x + (P_a - A)\bar{x} + A\bar{P}_a - P_a\bar{A} = 0$$

$$(\bar{C} - \bar{P}_c)x + (P_c - C)\bar{x} + C\bar{P}_c - P_c\bar{C} = 0.$$

Z těchto dvou rovnic vyjádříme neznámou x

$$x = \frac{P_a \cdot (P_c\bar{C} - \bar{P}_cC) + A \cdot (-P_c\bar{C} + \bar{P}_cC + \bar{P}_a \cdot (P_c - C)) + P_a\bar{A} \cdot (C - P_c)}{P_a \cdot (\bar{C} - \bar{P}_c) + A \cdot (\bar{P}_c - \bar{C}) + \bar{A} \cdot (C - P_c) + \bar{P}_a \cdot (P_c - C)}.$$

Dále dosadíme $P_a = \frac{1}{2}(B + C + A - BC\bar{A})$, $P_c = \frac{1}{2}(A + B + C - ABC\bar{C})$, $\bar{A} = \frac{1}{A}$, $\bar{B} = \frac{1}{B}$ a $\bar{C} = \frac{1}{C}$. Po několika úpravách dostáváme tvar

$$x = A + B + C.$$

Bod x , který v rovnicích vystupuje, je bod, ve kterém se dvě původní přímky protnou. Tyto dvě přímky jsou výšky trojúhelníku ABC , které se protínají pouze v jediném bodě a to v ortocentru trojúhelníka. Platí tedy $H = A + B + C$.

Příklad 9. *Necht' $ABCD$ je kružnici vepsaný čtyřúhelník a necht' H_A, H_B, H_C, H_D jsou ortocentra trojúhelníků BCD, CDA, DAB a ABC . Dokažte, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $H_AH_BH_CH_D$ jsou shodné [7].*

Vepíšme čtyřúhelník do jednotkové kružnice se středem v počátku Gaussovy roviny. Jednotkovou kružnici volíme proto, abychom usnadnili výpočet, ale díky podobnosti budou vztahy platit i pro kružnici, která není jednotková. Čtyřúhelník rozdělíme na 4 trojúhelníky dle zadání. Ortocentrum trojúhelníku ABC dokážeme vypočítat pomocí vzorce $H = A + B + C$ z příkladu (8). Pro ortocentra v našem případě potom platí

$$\begin{aligned} H_A &= B + C + D, \\ H_B &= A + C + D, \\ H_C &= A + B + D, \\ H_D &= A + B + C. \end{aligned}$$

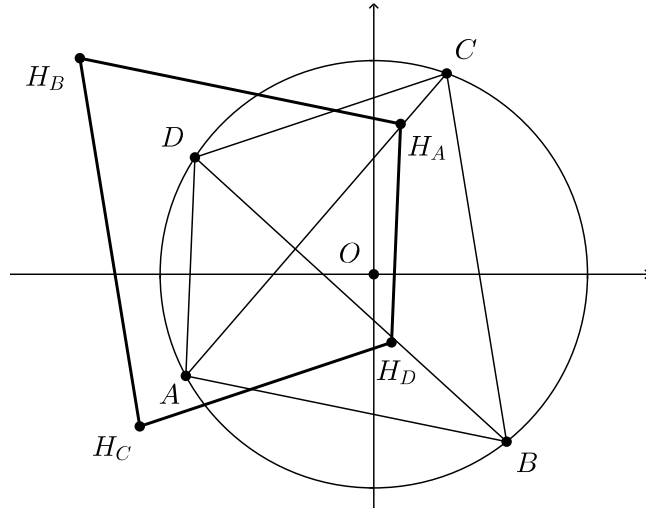
Abychom dokázali, že jsou čtyřúhelníky shodné, porovnáme velikosti příslušných stran a úhlopříčku

$$|H_A - H_B| = |B + C + D - (A + C + D)| = |B + C + D - A - C - D| = |B - A|,$$

což platí a analogicky odvodíme

$$\begin{aligned} |H_B - H_C| &= |C - B|, \\ |H_C - H_D| &= |D - C|, \\ |H_D - H_A| &= |A - D|, \\ |H_A - H_C| &= |C - A|. \end{aligned}$$

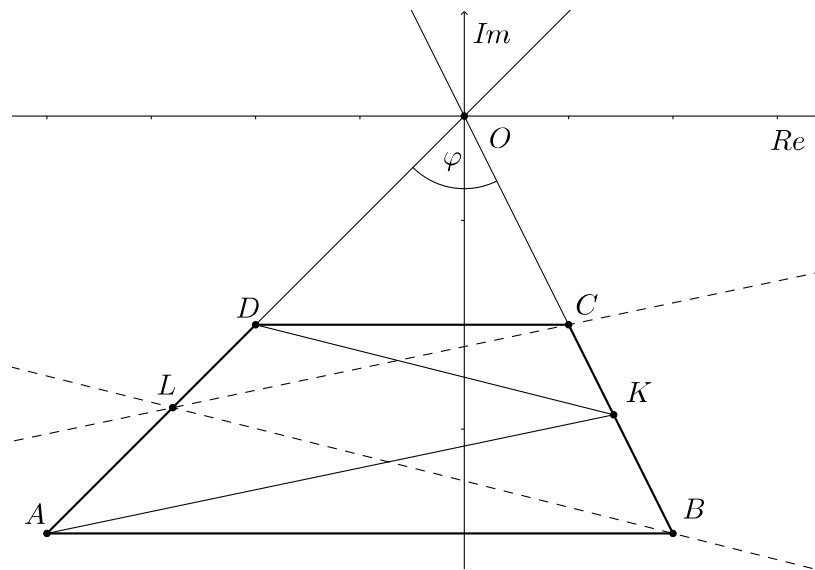
Všechny příslušné strany a úhlopříčka se shodují, tedy čtyřúhelníky $ABCD$ a $H_AH_BH_CH_D$ jsou shodné.



Obr. 25:

Příklad 10. Mějme lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a libovolný bod K , ležící na straně BC . Z bodu C sestrojíme rovnoběžku s přímkou KA a z bodu B sestrojíme rovnoběžku s přímkou KD . Dokažte, že se tyto rovnoběžky protínají na přímce AD [8].

Nejprve sestrojíme názornou konstrukci dle zadání. Pro přehlednost umístíme lichoběžník tak, aby jeho základna AB byla rovnoběžná s reálnou osou. Najdeme průsečík přímek AD a BC , který musí existovat, protože jsou to různoběžky. Vzniklý bod označíme O a ztotožníme s počátkem Gaussovy roviny. Kladně orientovaný úhel AOB označíme φ . Průsečík přímky AD s rovnoběžkou AK procházející bodem C označíme L , viz (Obr. 26).



Obr. 26:

Nyní pomocí spirální podobnosti zobrazíme bod A na přímku BC . Uvažujme vhodné komplexní číslo z takové, že zobrazí bod A na bod K podle předpisu

$$K = z \cdot A.$$

Takové komplexní číslo má tvar $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, přičemž argument čísla z je φ a jeho velikost způsobí změnu velikosti ramene OA . Jelikož v celé úloze budeme využívat podobnosti trojúhelníků, nemusíme znát konkrétní velikost čísla z .

Protože LC a AK jsou rovnoběžné, pak trojúhelníky AKO a LCO jsou podobné. Bod L se pak při zobrazení z zobrazí na bod C podle předpisu

$$C = z \cdot L.$$

Nyní uvažujme vhodné komplexní číslo y takové, že zobrazí bod K na bod D podle předpisu spirální podobnosti

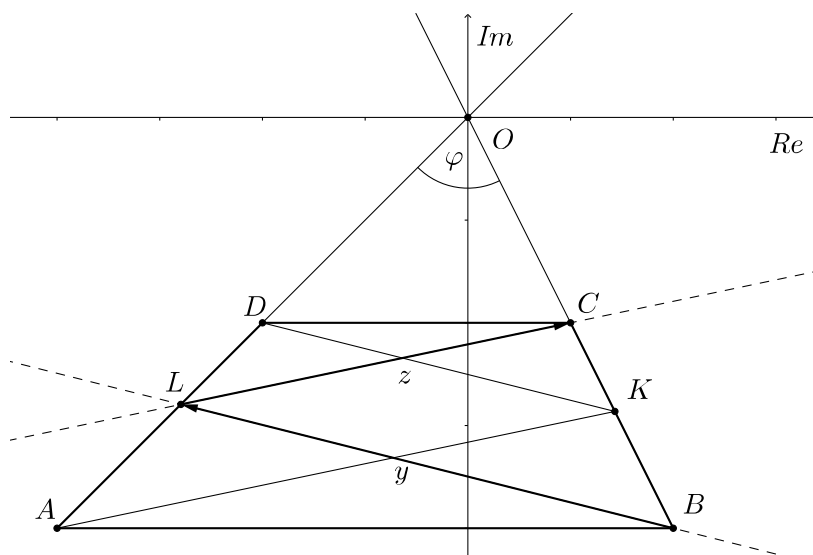
$$D = y \cdot K.$$

Pro komplexní číslo y platí $y = |y|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$, přičemž argument čísla y je $-\varphi$ a opět nepotřebujeme znát jeho velikost. Pro argument čísla $y \cdot z$ platí $-\varphi + \varphi = 0$, tedy získáme reálné číslo. Zde si musíme uvědomit, že vynásobení komplexního čísla reálným číslem je stejnohlelost. Potom platí $D = y \cdot z \cdot A$.

Protože trojúhelníky ABO a DCO jsou také podobné, můžeme bod C zapsat pomocí bodu B vztahem

$$C = y \cdot z \cdot B,$$

což ukazuje obrázek (Obr. 27).

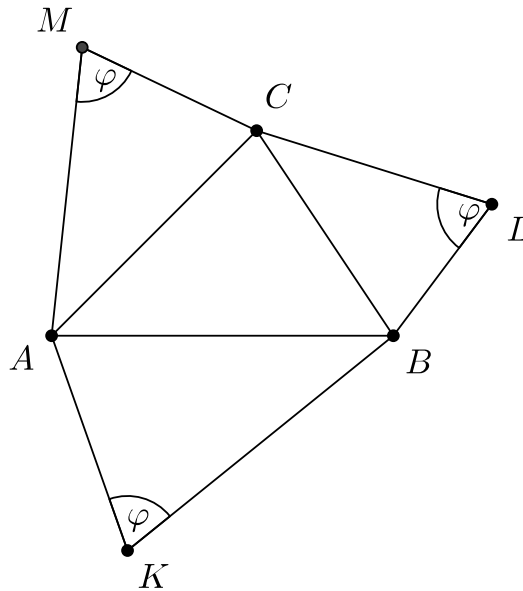


Obr. 27:

Ze zadání tedy víme, že trojúhelníky ABO a DCO jsou podobné. Dále jsme vypočítali, že trojúhelníky AKO a LCO jsou také podobné. Pokud dokážeme, že jsou podobné také trojúhelníky OKD a OBL , pak dokážeme, že bod L leží na přímce AD . Potřebujeme tedy dokázat vztah $L = y \cdot B$. Platí

$$C = z \cdot L \wedge C = z \cdot y \cdot B \Rightarrow z \cdot L = z \cdot y \cdot B \Rightarrow L = y \cdot B.$$

Příklad 11. Nad stranami trojúhelníku ABC jsou z vnější strany sestrojeny podobné trojúhelníky ABK , BCL a CAM se základnami AB , BC a AC . Dokažte, že těžiště trojúhelníků ABC a KLM splývají [10].



Obr. 28:

Dle zadání sestrojíme trojúhelníky ABC a KLM a konstrukci umístíme do Gaussovy roviny. Pro těžiště trojúhelníku ABC platí

$$T_1 = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Protože trojúhelníky ABK , BCL a CAM jsou podobné, mají jejich úhly při vrcholech K , L , M stejnou velikost φ . Vezmeme komplexní číslo $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ takové, že po vynásobení vektoru \overrightarrow{KB} získáme vektor \overrightarrow{KA} . Můžeme tedy psát

$$(A - K) = z \cdot (B - K)$$

a potom

$$K = \frac{A - zB}{1 - z},$$

kde $z \neq 1$, protože máme nenulový úhel φ .

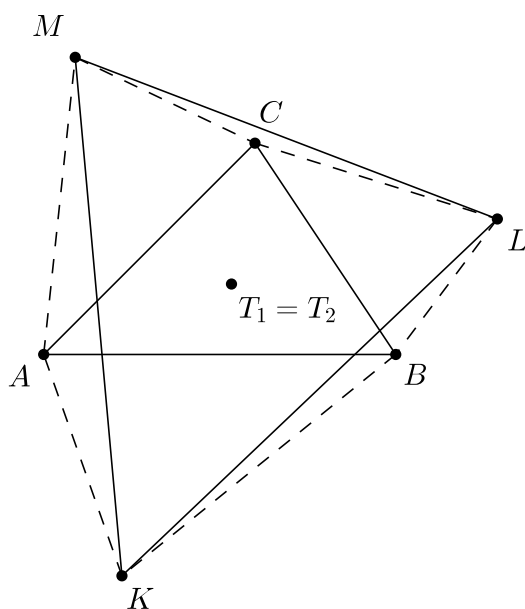
Analogicky získáme vztahy pro body L a M , protože trojúhelníky jsou podobné

$$L = \frac{B - zC}{1 - z}, \quad M = \frac{C - zA}{1 - z}.$$

Pro těžiště trojúhelníku KLM platí

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{3}(K + L + M) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{A - zB}{1 - z} + \frac{B - zC}{1 - z} + \frac{C - zA}{1 - z} \right) \\ &= \frac{1}{3(1 - z)} \cdot (A + B + C - z(A + B + C)) \\ &= \frac{1}{3(1 - z)} \cdot (A + B + C) \cdot (1 - z) = \frac{1}{3}(A + B + C). \end{aligned}$$

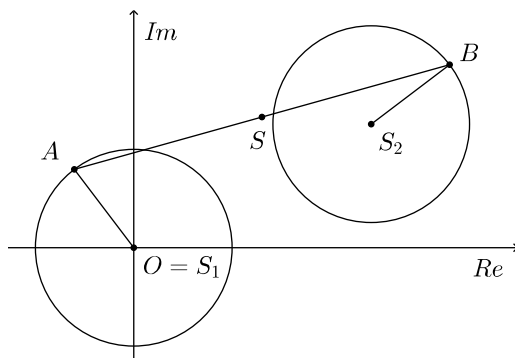
Platí $T_1 = T_2$, tj. těžiště trojúhelníků ABC a KLM splývají.



Obr. 29:

Příklad 12. Na stěně visí dvoje stejně velké hodiny, z nichž jedny jdou o čtvrt hodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček [9]?

Krajní body ručiček si označíme A a B . Pro bod S , ležící ve středu úsečky AB , použijeme vztah $S = \frac{A + B}{2}$.



Obr. 30:

Umístíme jedny hodiny tak, aby jejich střed S_1 ležel v počátku Gaussovy roviny O , přičemž pro bod A v goniometrickém tvaru komplexního čísla platí

$$A = |r|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Druhé hodiny se středem v bodě $S_2 = c + di$ posuneme tak, aby střed S_2 splýval s počátkem O . Tím se posune i bod B , čímž dostaneme bod B' . Vztah mezi body A a B' je potom dán rotací $B' = z \cdot A$, kde

$$z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

což vyjadřuje jejich posunutí o čtvrt hodiny. Pro bod B' potom platí

$$B' = |r| \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

a po posunutí středu zpět do $S_2 = c + di$ platí

$$B = |r| \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + (c + di) \right).$$

Nyní pro každé φ z intervalu $[0, 2\pi)$ vypočítáme střed S , který leží přesně mezi body A a

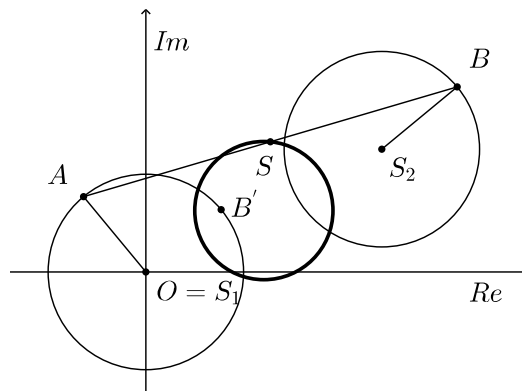
B , což znamená

$$\begin{aligned} S &= \frac{|r|}{2} \left(\cos \varphi + i \sin \varphi + \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + c + di \right) \\ &= \frac{|r|}{2} \left(\sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sqrt{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right) + \frac{|r|}{2} (c + di) \\ &= \frac{|r|}{2} c + |r| \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) + i \left(\frac{|r|}{2} d + |r| \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Potom dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S) &= \frac{|r|}{2} c + |r| \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \operatorname{Im}(S) &= \frac{|r|}{2} d + |r| \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

což je tzv. parametrické vyjádření kružnice se středem v bodě $\left[\frac{|r|}{2} c, \frac{|r|}{2} d \right]$ a poloměru $|r| \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Bod S tedy pro množinu všech $\varphi \in [0, 2\pi)$ opisuje kružnici.



Obr. 31:

Hodiny i bod S se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí, ale hodiny se otáčejí obvodovou rychlostí $\frac{2\pi r}{t}$, kdežto bod S se otáčí obvodovou rychlostí $\frac{\sqrt{2}\pi r}{t}$. Bod S se tedy pohybuje pomaleji než body A a B .

Příklad 13. Dokažte, že pro průsečík různoběžných přímk AB a CD , daných body, které leží na jednotkové kružnici a jsou navzájem různé, platí $\bar{x} = \frac{(A+B) - (C+D)}{AB - CD}$ [7].

Nejprve ukážeme, jak vypadá rovnice sečny. V příkladu (3d) jsme si ukázali vztah pro komplexní rovnici přímky

$$(\bar{A} - \bar{B})x + (B - A)\bar{x} + A\bar{B} - \bar{A}B = 0.$$

Dále víme, že pro body ležící na jednotkové kružnici platí $\bar{A} = \frac{1}{A}$ a $\bar{B} = \frac{1}{B}$. Můžeme tedy přepsat rovnici na tvar

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)x + (B - A)\bar{x} + \frac{A}{B} - \frac{B}{A} = 0.$$

Rovnici můžeme dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} \frac{B-A}{AB}x + (B-A)\bar{x} + \frac{(A-B)(A+B)}{AB} &= 0 \\ x + AB\bar{x} - (A+B) &= 0. \end{aligned}$$

Tato rovnice popisuje sečnu jednotkové kružnice danou body A, B . Protože potřebujeme znát průsečík přímk AB a CD , dosadíme body C, D a dostáváme rovnici další sečny

$$x + CD\bar{x} - (C+D) = 0.$$

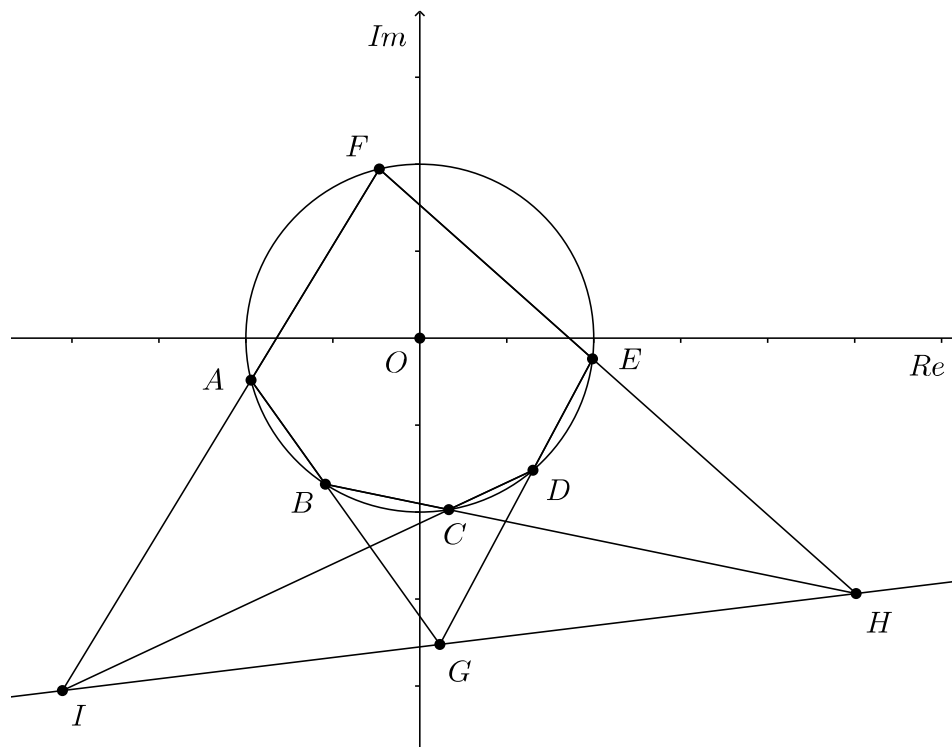
Nyní obě rovnice odečteme

$$(AB - CD)\bar{x} = (A+B) - (C+D)$$

a úpravou dostáváme hledaný výraz

$$\bar{x} = \frac{(A+B) - (C+D)}{(AB - CD)}.$$

Příklad 14. (Pascalova věta) Necht' je šestiúhelník $ABCDEF$, kde žádné dvě protilehlé strany nejsou rovnoběžné, vepsaný do jednotkové kružnice. Dokažte, že body G, H, I jsou kolineární, kde G je průsečík přímek AB a DE , H je průsečík přímek BC a EF a I je průsečík přímek CD a FA [7].



Obr. 32:

Využijeme vztah z příkladu (13). Vyjádříme body G, H a I :

$$\bar{G} = \frac{(A+B) - (D+E)}{AB - DE}, \quad \bar{H} = \frac{(B+C) - (E+F)}{BC - EF}, \quad \bar{I} = \frac{(C+D) - (F+A)}{CD - FA}.$$

Pro kolinearitu využijeme vztah z příkladu (3c), tedy že platí $\frac{H-G}{I-G} = \frac{\bar{H}-\bar{G}}{\bar{I}-\bar{G}}$. Pro jednoduchost nejdříve vyjádříme čitatele a jmenovatele zlomku pravé strany

$$\begin{aligned}
\overline{H} - \overline{G} &= \frac{(B + C - E - F)(AB - DE) - (A + B - D - E)(BC - EF)}{(AB - DE)(BC - EF)} \\
&= \frac{AB^2 - BED + ABC - CDE - ABE + DE^2 - ABF + DEF - ABC}{(AB - DE)(BC - EF)} \\
&+ \frac{AEF - B^2C + BEF + BCD - DEF + BCE - E^2F}{(AB - DE)(BC - EF)} \\
&= \frac{(B - E)(AB + CD + EF - BC - DE - FA)}{(AB - DE)(BC - EF)} \\
\overline{I} - \overline{G} &= \frac{(C + D - F - A)(AB - DE) - (A + B - D - E)(CD - FA)}{(AB - DE)(CD - FA)} \\
&= \frac{(D - A)(AB + CD + EF - BC - DE - FA)}{(AB - DE)(CD - FA)} \\
\frac{\overline{H} - \overline{G}}{\overline{I} - \overline{G}} &= \frac{(B - E)(CD - FA)}{(D - A)(BC - EF)}
\end{aligned}$$

Nyní pro levou stranu platí

$$\begin{aligned}
\frac{H - G}{I - G} &= \frac{\overline{\left(\frac{H - G}{I - G}\right)}}{\overline{\left(\frac{H - G}{I - G}\right)}} = \frac{\overline{\left(\frac{\overline{H} - \overline{G}}{\overline{I} - \overline{G}}\right)}}{\overline{\left(\frac{\overline{H} - \overline{G}}{\overline{I} - \overline{G}}\right)}} = \frac{\overline{\left(\frac{(B - E)(CD - FA)}{(D - A)(BC - EF)}\right)}}{\overline{\left(\frac{(B - E)(CD - FA)}{(D - A)(BC - EF)}\right)}} \\
&= \frac{\overline{(B - E)} \cdot \overline{(CD - FA)}}{\overline{(D - A)} \cdot \overline{(BC - EF)}} = \frac{\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{E}\right) \cdot \left(\frac{1}{CD} - \frac{1}{FA}\right)}{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{EF}\right)} = \frac{(B - E)(CD - FA)}{(D - A)(BC - EF)}.
\end{aligned}$$

Protože se obě strany rovnice rovnají, jsou body G, H, I kolineární.

Několik poznámek z historie komplexních čísel

Na závěr uvedeme některá jména, která se zasloužila o vývoj komplexních čísel [1], [6]. První zmínka o komplexních číslech se datuje až k 1. století našeho letopočtu, kdy *Heron z Alexandrie* narazil na odmocninu ze záporného čísla při výpočtu objemu komolého jehlanu. Ve 3. století objevil *Diofantos z Alexandrie*, který je považovaný za otce aritmetiky, v té době neřešitelnou kvadratickou rovnici na oboru reálných čísel. Měli bychom se také zmínit o arabském matematikovi jménem *Abdalláh Muhammad ibn Músa Al-Khwarizmi*. Ten shrnul všechny typy řešení kvadratických rovnic (ačkoli za správná považoval jen kladná řešení) a díky němu se zachovala řecká matematika, ze které vycházel.

Na přelomu 12. a 13. století žil *Leonard Pisánský* zvaný *Fibonacci*, který řešil mimo jiné kubické rovnice, jejichž kořeny nelze vyjádřit racionálními čísly. Tímto se zabýval také fran-tiškánský mnich *Luca Pacioli*, který shrnul poznatky na úrovni tehdejší matematiky o kubických rovnicích. Řešení rovnic

$$x^3 + px = q$$

$$x^3 = px + q$$

$$x^3 + q = px$$

kde p a q jsou kladná čísla, našel v 15. století matematik *Scipio del Ferro* a údajně ho svěřil svému žákovi jménem *Antonio Mario Fiore*. Toho však předběhl matematik jménem *Niccolo Fontana* zvaný *Tartaglia*, kterému se přisuzují zásluhy v souvislosti s řešením kubických rovnic. *Gerolamo Cardano* získal od *Tartaglia* řešení kubických rovnic a publikoval ho ve svém díle. Tzv. Cardanovy vzorce se dnes ale pro výpočet kořenů kubických rovnic nepoužívají. V některých případech totiž vyjadřují reálné kořeny kubických rovnic pomocí imaginárních čísel a tuto "závadu" nelze odstranit. Pro představu, řešením kubické rovnice $x^3 - 7x - 6 = 0$ jsou čísla $-1, -2, 3$. Podle Cardanových vzorců však vychází jedním z řešení této rovnice číslo $\sqrt[3]{3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}}$.

O něco dále se dostal v 16. století boloňský matematik *Rafael Bombelli*. Pracoval již s takovým tvarem čísel, jako je algebraický tvar komplexních čísel, avšak považoval stále odmocninu ze záporného čísla pouze za formální zápis. V 17. století se komplexními kořeny rovnic zabýval matematik *Albert Girard*, který je sice nazýval "solution impossibles", tedy nemožná řešení, ale uznával je a díky tomu zformuloval základní větu algebry. Ještě v 17.

století *René Descartes* aplikoval algebraické rovnice v analytické geometrii a považujeme ho za zakladatele analytické geometrie. Pracoval také odvážně s komplexními čísly a od té doby se začala komplexní čísla objevovat častěji v různých matematických oborech. Jsou zde i další jména, která se zabývala komplexními čísly, např. *Isaac Newton*, *Gottfried Wilhelm Leibniz* nebo *Johann Bernoulli*.

Velký význam komplexních čísel přišel s řešením n -té odmocniny od francouzského matematika *Abrahama de Moivre*a na přelomu 17. a 18. století. V této době už *John Wallis* představil schéma zobrazení komplexních čísel v rovině, to ale nesklidilo velký ohlas. Dnešní podoba Moivreovy věty je přičítána *Rogerovi Cotesovi*.

Leonhard Paul Euler, od kterého zřejmě pochází označení imaginární jednotka pro $\sqrt{-1}$, přispěl v 18. století do řady odvětví matematiky, včetně teorie komplexních čísel.

Velice významnou roli má v záležitosti komplexních čísel *Johann Carl Friedrich Gauss*, který na přelomu 18. a 19. století dospěl ke geometrickému znázornění komplexních čísel jako bodů roviny. *Gauss* také dokázal platnost operací s komplexními čísly na základě jejich geometrické interpretace.

Naproti tomu algebraickou definici komplexních čísel jakožto dvojic reálných čísel vyjádřil irský matematik *Sir William Rowan Hamilton* v roce 1833. *Hamilton* proslul především objevem čtyřrozměrné reálné algebry kvaternionů.

Literatura

- [1] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia, Komplexní čísla*. Praha, Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6
- [2] RÁB, Miloš. *Komplexní čísla v elementární matematice*. Brno, Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1997. ISBN 80-210-1475-X
- [3] BLAŽEK, Jaroslav, KOMAN Milan, VOJTÁŠKOVÁ Blanka. *Algebra a teoretická aritmetika 2*. Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1985.
- [4] STILLWELL, John. *Naive Lie Theory, Undergraduate Texts in Mathematics*. New York, Springer, 2008. ISBN 978-0-387-78214-0
- [5] Výukový materiál ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Katedra matematiky. [cit. 9.4.2014]. <http://math.feld.cvut.cz/0educ/predpokl/msu7>
- [6] BÁRTA, Čestmír, KOLÁŘ, Martin. *Přehled historie komplexních čísel*. Hradec Králové, 2013.
- [7] RADOVANOVIC, Marko, *Complex Numbers in Geometry*. [cit. 9.4.2014]. <https://uqu.edu.sa/files2/tiny-mce/plugins/filemanager/files/4041834/cnum-mr.pdf>
- [8] Kříšťan, Josef. *Využití vektorů a komplexních čísel v geometrii*. Operační program Praha - Adaptabilita r.č. CZ.2.17/3.1.00/31165
- [9] Pavlík, Tomáš, Spirální podobnost.[cit. 24.10.2015] <https://mks.mff.cuni.cz/library/SpiralniPodobnostTP/SpiralniPodobnostTP.pdf>
- [10] Časopis pro výuku na základních a středních školách. *Matematika - Fyzika - Informatika*. Ročník 14, únor 2005, ISSN-1210-1761

Obrázky jsou vytvořeny pomocí programu GeoGebra 5.0.