

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky



**Analýza epidemiologického modelu s
Allee efektem díky problémům s
nalezením partnera u infekčních jedinců**

Bakalářská práce

Tomáš Havelka

Vedoucí práce: doc. Ing. Luděk Berec, Dr.

České Budějovice, 2016

Bibliografické údaje

Havelka T., 2016: Analýza epidemiologického modelu s Allee efektem díky problémům s nalezením partnera u infekčních jedinců. [Analysis of the epidemiological model with Allee effect caused by the challenging finding a partner for infectious individuals. Bc. Thesis, in Czech.] - 33 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

Hlavním tématem bakalářské práce je analýza epidemiologického modelu s Allee efektem díky problémům s nalezením partnera u infekčních jedinců. V úvodní kapitole vysvětluji význam modelování v epidemiologii a co je to Allee efekt. Následuje kapitola, kde definuji různé pojmy užívané ve zbytku práce. V kapitole 3 uvádím již známý model, který pak rozšiřuji o Allee efekt a vysvětluji zde použité značení parametrů a proměnných. Následuje kapitola 4, ve které analyzuji zmíněný model s Allee efektem pro dva různé případy, hustotně závislý přenos nemoci a frekvenčně závislý přenos nemoci. V kapitole 5 se věnuji stabilitě a existenci ekvilibrií nalezených v kapitole 4. Následuje kapitola 6, v níž jsou shrnuty výsledky z kapitoly 5, které následně porovnávám s výsledky modelu bez Allee efektu.

Annotation

The main topic of the thesis is an analysis of the epidemiological model with Allee effect caused by the challenging finding a partner for infectious individuals. In the introductory chapter, I explain the importance of modeling in epidemiology and what the Allee effect is. The following chapter explains terms used in the whole thesis. In the Chapter 3, I first mention already known model, which then extend for Allee effect. I will here also explain the use of themarking parameters and variables. In the chapter 4, I analyze already mentioned model with Allee effect for two different cases; density-dependent disease transmission and frequency-dependent transmission of the disease. The Chapter 5 is devoted to the stability and existence of equilibria, which is found in the Chapter 4. The last Chapter 6 is summarizing the results of Chapter 5, and compare them with the results of the model without the Allee effect.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury. Prohlašuji také, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdání textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 22. dubna 2016

.....

Tomáš Havelka

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce doc. Ing. Luďku Berecovi, Dr. za pravidelné konzultace při vypracování práce, za cenné rady, které mi vždy ochotně poskytl a za jeho trpělivost. Dále děkuji své rodině a přátelům za podporu při psaní této práce.

Obsah

1 Úvod	1
2 Metodika	3
3 Model	6
4 Analýza	8
4.1 Hustotně závislý přenos	8
4.2 Frekvenčně závislý přenos	12
5 Stabilita ekvibríí	17
5.1 Hustotně závislý přenos	17
5.2 Frekvenčně závislý přenos	19
6 Shrnutí výsledků	20
6.1 Výsledky	20
6.2 Průběhy řešení	22
6.2.1 Hustotně závislý přenos	22
6.2.2 Frekvenčně závislý přenos	24
6.3 Důsledky změny parametru θ	26
7 Závěr	27

Kapitola 1

Úvod

Infekční onemocnění se vyskytují téměř u každé živé bytosti a tudíž je logické, že se je člověk snaží studovat a pokud možno jim předejít nebo odhadnout průběh a dobu trvání těchto nemocí. Toto téma mě velmi zaujalo, protože problematika infekčních onemocnění je celosvětově velmi diskutované téma a chtěl bych tímto ještě jednou poděkovat docentu Berecovi za to, že mě s touto problematikou seznámil. Průběh a typ těchto nemocí není vždy stejný a závisí na mnoha faktorech. Já se v mé bakalářské práci věnuji nemocem typu SI (susceptible-infected), což jsou nemoci, ze kterých se již nakažený jedinec nemůže vyléčit, kde bylo mým cílem analyzovat průběh některých takových nemocí. V mém případě je v ní ještě zahrnut Allee efekt díky problémům s nalezením partnera u infekčních jedinců (viz dále). Takovéto i jiné nemoci se často studují pomocí matematického modelování.

Matematické modelování je jednou z důležitých disciplín matematiky. V praxi bývá cílem pochopit pozorované jevy, napodobit chování zkoumaného systému, simulovat je na vlastním modelu a následně ovlivnit jeho chování požadovaným způsobem. Model je vždy pouze přiblížením skutečnosti, reálný systém může být velmi složitý a model mu nemusí odpovídat. Z těchto důvodů se většinou provádí ověřovací experimenty, kterými doplňujeme a dále zpřesňujeme parametry modelu nebo i model samotný. V epidemiologii je modelování velmi důležité, protože experimenty jsou zde velmi složité, nákladné a často i nemožné. Často je s takovými experimenty spojeno mnoho etických otázek. Empirická data jsou často nekompletní či nepřesná, proto modelování doplňuje empirickou práci a pomáhá porozumět klíčovým mechanismům, které určují šíření nemocí, a také posoudit účinnost různých navrhovaných strategií pro kontrolu nemocí. Modelování se stalo součástí rozhodování v rámci epidemiologické politiky v

řadě vyspělých zemí (Velká Británie, USA, Kanada). Predikce modelů HIV/AIDS, nemoci šířených krav, kulhavky a slintavky, spalniček či SARS ovlivnily v těchto zemích politiku veřejného zdraví. Matematické modely již byly navrženy a aplikovány na ohromné množství infekčních nemocí, včetně malárie, syfilidy, lymfské boreliózy, vztekliny či všech dětských nemocí [6].

Dále jsem zmiňoval Allee efekt, tak by bylo vhodné o něm také něco říci. Allee efekt je jev, při němž populace s malými počty jedinců jsou ovlivněny pozitivním vztahem mezi rychlostí růstu populace přepočtenou na jednoho jedince a její hustotou. Při nízkých velikostech nebo hustotách populace vede Allee efekt ke snížené reprodukci nebo přežívání a tudíž zvyšuje pravděpodobnost vyhynutí. V našem případě se Allee efekt projevuje tím, že infekční jedinec může být vystaven snížené atraktivitě nebo pohyblivosti v důsledku onemocnění a tudíž mít při nízkých populačních velikostech či hustotách problémy s nalezením partnera k páření [5].

Po této úvodní kapitole následuje část, kde definuji různé pojmy užívané ve zbytku práce. V kapitole 3 uvádím již známý model, který pak rozšířím o Allee efekt a vysvětluji zde použité značení parametrů a proměnných. Následuje kapitola 4, ve které analyzuji zmíněný model s Allee efektem pro dva různé případy, hustotně závislý přenos nemoci a frekvenčně závislý přenos nemoci. V kapitole 5 se věnuji stabilitě a existenci ekvilibrií nalezených v kapitole 4. Následuje kapitola 6, v níž jsou shrnuty výsledky z kapitoly 5, které následně porovnávám s výsledky modelu bez Allee efektu.

Kapitola 2

Metodika

V této kapitole uvádíme matematické definice a věty, které používáme v této bakalářské práci. Matematický model, který definujeme v následující kapitole, má tvar soustavy dvou autonomních obyčejných diferenciálních rovnic. Začneme tedy tím, že si definujeme obyčejnou autonomní diferenciální rovnici a poté soustavu takovýchto rovnic.

Definice 2.0.1 (Autonomní obyčejná diferenciální rovnice, (3)) *Necht' $E = (a, b)$ a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Rovnice*

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

se nazývá autonomní obyčejná diferenciální rovnice I. řádu rozřešená vzhledem k derivaci. Dále o ní budeme mluvit stručně jen jako o diferenciální rovnici.

Definice 2.0.2 (Soustava autonomních obyčejných diferenciálních rovnic, (3)) *Mějme funkci $f = (f_1, f_2)$ dvou proměnných, $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$. Soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

nazýváme soustavou dvou autonomních obyčejných diferenciálních rovnic I. řádu rozřešenou vzhledem k derivaci, dále jen soustavou diferenciálních rovnic. Soustavu (2.2) lze zapsat ve vektorovém tvaru jako

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.3}$$

kde $x = (x_1, x_2)$ a $f = (f_1, f_2)$ jsou vektorové funkce.

V práci dále budeme zavádět počáteční podmínky, takže potřebujeme definovat počáteční (Cauchyovu) úlohu.

Definice 2.0.3 (Cauchyova úloha, (3)) Necht' je dáno číslo $t_0 \in \mathbb{R}$ a vektor $x_0 \in \mathbb{R}^2$. K soustavě (2.3) připojíme počáteční podmínku, aby hledaná vektorová funkce x nabývala v bodě t_0 hodnoty x_0 :

$$x(t_0) = x_0.$$

Soustava s touto počáteční podmínkou se nazývá Cauchyova nebo též počáteční úloha.

A samozřejmě musíme takovouto úlohu vyřešit, a proto definujeme řešení.

Definice 2.0.4 (Řešení, (3)) Necht' funkce f je spojitá na otevřené množině $E \subset \mathbb{R}^2$. Potom funkci $x(t)$ nazveme řešením soustavy diferenciálních rovnic (2.3) na intervalu I , je-li $x(t)$ diferencovatelná na I a pokud pro všechna $t \in I$ platí $x(t) \in E$ a

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Pro dané $x_0 \in E$ je $x(t)$ řešením počáteční úlohy

$$x' = f(x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

na intervalu I , jestliže $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ a $x(t)$ je řešením soustavy diferenciálních rovnic (2.3) na I .

Dále si definujeme pojem ekvilibrium.

Definice 2.0.5 (Ekvilibrium, (3)) Bod $x^* \in E$, který splňuje rovnici

$$f(x^*) = 0,$$

nazýváme ekvilibriem diferenciální rovnice (2.1), popřípadě soustavy diferenciálních rovnic (2.3). Ekvilibrium se někdy také označuje jako pevný bod, rovnovážný bod nebo stacionární bod.

U nalezeného ekvilibria dále musíme určit jeho stabilitu.

Definice 2.0.6 (Stabilita ekvilibria, (3)) Necht' $x^* \in \mathbb{R}^2$ je ekvilibrium soustavy diferenciálních rovnic (2.3), tj. $f(x^*) = 0$. Toto ekvilibrium se nazývá lokálně stabilní, pokud pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna řešení $x(t)$ systému (2.3) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ splňující $|x_0 - x^*| < \delta$ platí $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $t > t_0$. Platí-li navíc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*,$$

pak říkáme, že ekvilibrium x^* je lokálně asymptoticky stabilní. Dále říkáme, že ekvilibrium x^* je nestabilní, pokud není stabilní.

V našem případě budeme k určení stability ekvibrí používat Jacobiho matici, stopu Jacobiho matice $Tr(J)$ a determinant Jacobiho matice $det(J)$. Nadefinujeme si tedy Jacobiho matici.

Definice 2.0.7 Necht' je dána soustava diferenciálních rovnic (2.3) a $f(x^*) = 0$, tj. x^* je ekvilibrium této soustavy. Pak matici

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x=x^*}$$

nazýváme Jacobiho matice systému (2.3) a její determinant nazýváme Jacobián systému (2.3).

O asymptotické stabilitě nalezeného ekvilibria můžeme rozhodnout dvěma způsoby.

1. Ekvilibrium je asymptoticky stabilní pokud reálné části všech vlastních čísel Jacobiho matice jsou záporné.
2. Ekvilibrium je asymptoticky stabilní pokud stopa Jacobiho matice $Tr(J) < 0$ a zároveň determinant Jacobiho matice $det(J) > 0$.

Věta 2.0.8 (Dulacovo kritérium, (3)) Necht' je dána soustava diferenciálních rovnic (2.3). Je-li f spojitá a má spojité první parciální derivace, přičemž $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, a existuje-li funkce q spojitá se spojitými prvními parciálními derivacemi tak, že výraz

$$\frac{\partial(q(x_1, x_2)f_1(x_1, x_2))}{\partial x_1} + \frac{\partial(q(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2))}{\partial x_2}$$

je v jednoduše souvislé oblasti $B \subseteq E$ stále větší nebo roven nule nebo stále menší nebo roven nule, přičemž není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny B , pak v B neexistuje uzavřená trajektorie soustavy diferenciálních rovnic (2.3).

Kapitola 3

Model

V této části budeme uvažovat populaci napadenou infekční nemocí, ze které se už postižení jedinci nemohou vyléčit. Takovou situaci nám popisuje například následující SI (susceptible - infected) model:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bN - \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1N)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1N)I - \alpha I.\end{aligned}\tag{3.1}$$

V modelu (3.1) jsme použili následující značení:

- S ... hustota náchylných jedinců v populaci
- I ... hustota infekčních jedinců v populaci
- N ... celková hustota populace ($N = S + I$)
- bN ... hustotně nezávislá natalita
- $\beta(N)\frac{SI}{N}$... rychlost přenosu nemoci
- $(d + d_1N)S$... hustotně závislá mortalita náchylných jedinců
- $(d + d_1N)I$... hustotně závislá mortalita infekčních jedinců
- αI ... mortalita vlivem nemoci

Seznam jednotlivých parametrů a jejich vysvětlení je v následující tabulce:

Parametr	Význam
b	Natalita na jedince
$\beta(N)$	Rychlost setkávání se jedinců
d	Mortalita na jedince
d_1	Intenzita vnitrodruhové konkurence
α	Mortalita díky nemoci na jedince

Model (3.1) předpokládá stejnou rychlost rozmnožování náchylných a infekčních jedinců, což nemusí být vždy pravda. Infekční jedinci mohou být svou nemocí limitováni. Zde budeme uvažovat znevýhodnění infekčních jedinců nižší efektivitou nalezení partnera, způsobenou například jejich sníženou pohyblivostí nebo atraktivitou. A limituje je to do té míry, že při malých hustotách populace budou mít infekční jedinci větší problémy s nalezením partnera než při větších hustotách a budou tedy vystaveni Allee efektu. Proto upravíme model (3.1) takto:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bS + b\frac{N}{N+\theta}I - \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1N)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1N)I - \alpha I.\end{aligned}\tag{3.2}$$

V modelu (3.2) je člen $N/(N+\theta)$ modelem Allee efektu díky problémům s nalezením partnera při nízkých populačních hustotách [4].

Kapitola 4

Analýza

Model (3.1) bez Allee efektu je již vyřešený [1, 2] a budeme tedy při řešení modelu (3.2) s Allee efektem postupovat obdobně. Budeme uvažovat dva typy funkce $\beta(N)$. Jeden bude popisovat hustotně závislý přenos nemoci a bude mít tvar $\beta(N) = \beta N$. Druhý bude popisovat frekvenčně závislý přenos nemoci a bude mít tvar $\beta(N) = \beta$.

4.1 Hustotně závislý přenos

Za předpokladu hustotně závislého přenosu bude mít model (3.2) tvar

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bS + b\frac{N}{N+\theta}I - \beta SI - (d + d_1N)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (d + d_1N)I - \alpha I.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Sečtením rovnic $\frac{dS}{dt}$ a $\frac{dI}{dt}$ získáme rovnici pro celkovou hustotu populace

$$\frac{dN}{dt} = bS + b\frac{N}{N+\theta}I - (d + d_1N)N - \alpha I.\tag{4.2}$$

Bez přítomnosti nemoci přejde model (4.2) na model logistického růstu

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

přičemž $r = b - d$ je vnitřní růstová rychlost populace (dále uvažujeme $b > d$), a $K = \frac{b-d}{d_1}$ je nosná kapacita prostředí.

Základní reprodukční číslo nemoci dané modelem (3.2) je rovno

$$R_0 = \frac{\beta S}{d + d_1 N + \alpha} \Big|_{S=N=K} = \frac{\beta K}{d + d_1((b-d)/d_1) + \alpha} = \frac{\beta K}{b + \alpha}. \quad (4.3)$$

Toto číslo určuje, kolik jedinců nakazí jeden infekční jedinec vložený do jinak plně zdravé populace za dobu trvání své nemoci.

Nyní přetransformujeme proměnné S a I na proměnné $N = S + I$ (celková hustota populace) a $i = I/N$ (prevalence nemoci). S proměnnou i tedy pracujeme na intervalu $[0,1]$. Zatímco rovnici $\frac{dN}{dt}$ získáme sečtením S a I , rovnice pro $\frac{di}{dt}$ nám vlastně vyjadřuje derivaci prevalence nemoci i podle času t a máme zde tedy derivaci podílu $\left(\frac{I}{N}\right)'$:

$$\frac{di}{dt} = \left(\frac{I}{N}\right)' = \frac{I'N - IN'}{N^2} = i[(1-i)(\beta N - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i],$$

kde za I' jsme dosadili pravou stranu rovnice pro I (4.1) a za N' pravou stranu pro N (4.2).

Máme tedy výsledný systém rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= i[(1-i)(\beta N - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i], \\ \frac{dN}{dt} &= N[b(1-i) + b\frac{N}{N+\theta}i - (d + d_1 N) - \alpha i]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Model (4.4) může mít až čtyři ekvilibria: extinkční ekvilibrium $(0, 0)$, ekvilibrium bez nemoci $(0, K = (b-d)/d_1)$, ekvilibrium díky vymření způsobeném nemocí $(1, 0)$ a endemické ekvilibrium (i_e, N_e) . Zatímco ekvilibria $(0, 0)$, $(0, K)$ a $(1, 0)$ vždy existují, pro určení existence endemického ekvilibria použijeme grafickou analýzu.

Endemické ekvilibrium

Endemické ekvilibrium nám určuje nenulový průnik izoklin modelu (4.4):

$$\begin{aligned} i[(1-i)(\beta N - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i] &= 0, \\ N[b(1-i) + b\frac{N}{N+\theta}i - (d + d_1 N) - \alpha i] &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

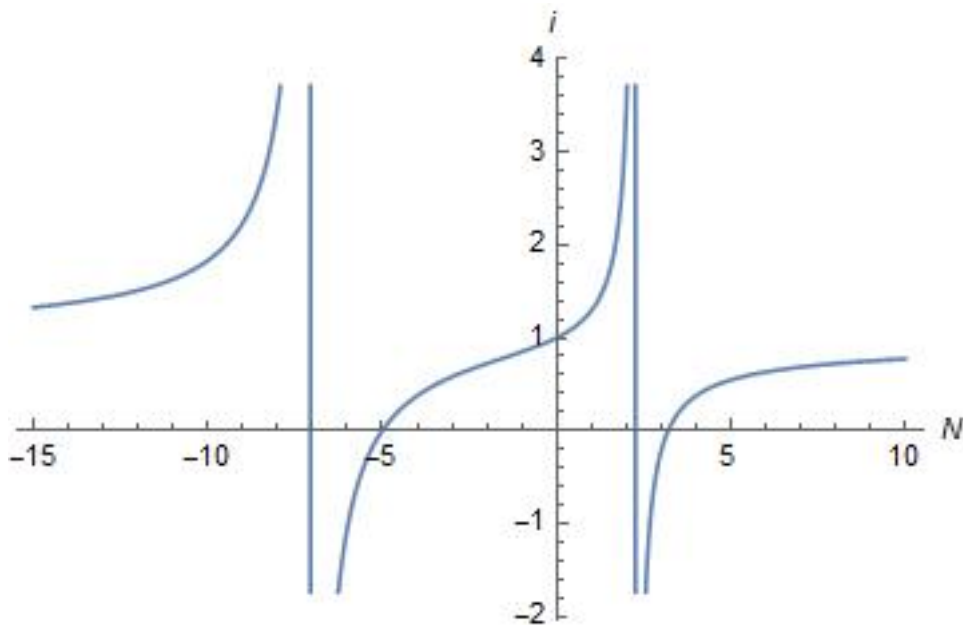
Pro určení jejich průběhu použijeme klasickou analýzu průběhu funkce. Nyní si vyjádříme z první rovnice proměnou i jako funkci proměnné N :

$$i = \frac{(N + \theta)(\alpha - \beta N + b)}{(N + \theta)(\alpha - \beta N + b) - bN}. \quad (4.6)$$

Pro derivaci funkce $i(N)$ podle N platí:

$$i' = \frac{b[-N(\alpha - \beta N + b) + (N + \theta)(\alpha + b)]}{[(N + \theta)(\alpha - \beta N + b) - bN]^2}.$$

Jmenovatel zlomku je vždy kladný, a tak nás zajímá pouze znaménko jeho čitatele. Po úpravě vidíme, že tento výraz se rovná $\beta N^2 + \theta(\alpha + b) > 0$. Z toho je patrné, že derivace $i'(N)$ je kladná a funkce $i(N)$ tudíž rostoucí. Pro $i(N = 0) = 1$. Jmenovatel má dva nulové body, tak bude mít funkce dvě vertikální asymptoty, jednu nalevo od nuly, jednu napravo od nuly. Funkce $i(N)$ se tedy skládá ze tří větví, z nich dvě levé nezasahují do naší zájmové oblasti $i \times N = [0, 1] \times [0, K]$. Pro pravou větev platí, že protíná osu N v bodě $N = \frac{\alpha + b}{\beta}$ a pro rostoucí N se blíží k $i = 1$. Část této větve tedy bude ležet v naší zájmové oblasti právě tehdy, když $R_0 > 1$. Průběh této izokliny je na obrázku (4.1).



Obrázek 4.1: Izoklina (4.6) pro parametry $b = 30, d = 15, d_1 = 2, \alpha = 2, \beta = 10, \theta = 5$, pro které je $K = 7,5$.

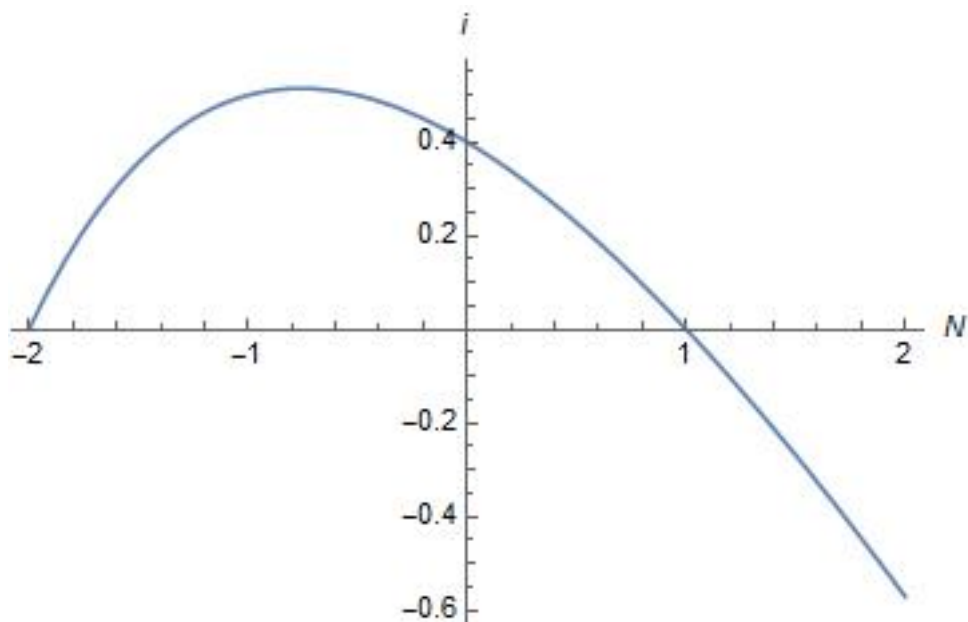
Nyní vyšetříme druhou izoklinu. Tu si vyjádříme z druhé rovnice (4.5) jako:

$$i = \frac{(N + \theta)(b - d - d_1 N)}{\alpha N + \theta b + \alpha \theta}. \quad (4.7)$$

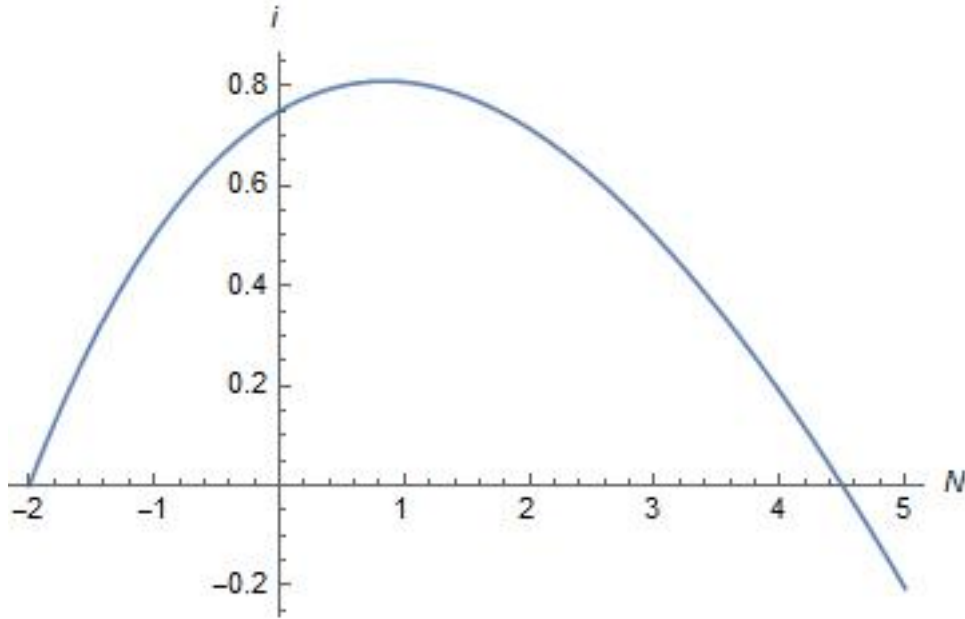
Pro její derivaci platí:

$$i' = \frac{-d_1 \alpha N^2 - 2d_1 \theta (b + \alpha) N + [b\theta(b - d) - d_1 \theta^2 (b + \alpha)]}{[\alpha N + \theta b + \alpha \theta]^2}.$$

Zde vidíme, že výraz v čitateli je záporně orientovaná kvadratická funkce, která je v bodě $i'(N = 0)$ klesající. O znaménku derivace tedy rozhoduje znaménko absolutního členu $b\theta(b - d) - d_1 \theta^2 (b + \alpha)$. Po úpravách tohoto členu vidíme, že izoklina má za podmínky $\frac{b - d}{b + \alpha} < \frac{d_1 \theta}{b}$ derivaci zápornou a tudíž je izoklina z bodu $i(N = 0) = \frac{b - d}{b + \alpha} \in (0, 1)$ klesající (Obrázek 4.2). Za podmínky $\frac{b - d}{b + \alpha} > \frac{d_1 \theta}{b}$ má však derivaci kladnou a izoklina je z bodu $i(N = 0) = \frac{b - d}{b + \alpha} \in (0, 1)$ rostoucí, ale protože v obou těchto případech nám izoklina protne osu N v nosné kapacitě K , bude izoklina po chvíli opět klesat (Obrázek 4.3). Z analýzy obou izoklin tedy dostáváme závěr, že existuje jedno endemické ekvilibrium právě tehdy, když $R_0 > 1$ a žádné endemické ekvilibrium právě tehdy, když $R_0 < 1$.



Obrázek 4.2: Izoklina (4.7) pro parametry $b = 3, d = 1, d_1 = 2, \alpha = 2, \theta = 2$, pro které je $K = 1$.



Obrázek 4.3: Izoklina (4.7) pro parametry $b = 10, d = 1, d_1 = 2, \alpha = 2, \theta = 2$, pro které je $K = 4, 5$.

4.2 Frekvenčně závislý přenos

Za předpokladu frekvenčně závislého přenosu bude mít model (3.2) tvar

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bS + b\frac{N}{N+\theta}I - \beta\frac{SI}{N} - (d + d_1N)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta\frac{SI}{N} - (d + d_1N)I - \alpha I.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Nosná kapacita prostředí $K = \frac{b-d}{d_1}$ se pro tento model nemění, ale základní reprodukční číslo ano. Nyní má hodnotu:

$$R_0 = \frac{\beta S/N}{d + d_1N + \alpha} \Big|_{S=N=K} = \frac{\beta}{d + d_1((b-d)/d_1) + \alpha} = \frac{\beta}{b + \alpha}.\tag{4.9}$$

Sečtením obou rovnic modelu (4.8) opět máme rovnici pro vývoj celkové hustoty populace

$$\frac{dN}{dt} = bS + b\frac{N}{N+\theta}I - (d + d_1N)N - \alpha I.$$

Rovnici pro $\frac{di}{dt}$ opět získáme z derivace podílu $\left(\frac{I}{N}\right)'$.

$$\frac{di}{dt} = \left(\frac{I}{N}\right)' = \frac{I'N - IN'}{N^2} = i[(1-i)(\beta - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i].$$

Máme tedy výsledný systém rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= i[(1-i)(\beta - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i], \\ \frac{dN}{dt} &= N[b(1-i) + b\frac{N}{N+\theta}i - (d + d_1N) - \alpha i].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Model (4.10) může mít opět až čtyři ekvilibia: extinkční ekvilíbrio (0, 0), ekvilíbrio bez nemoci (0, K), ekvilíbrio díky vymřeni způsobeném nemocí (1, 0) a endemické ekvilíbrio (i_e, N_e).

Endemické ekvilíbrio

Při zjišťování existence endemického ekvilbria budeme postupovat stejným způsobem jako v případě hustotně závislého přenosu nemoci. Izokliny modelu (4.10) jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned}i[(1-i)(\beta - \alpha - b) - b\frac{N}{N+\theta}i] &= 0, \\ N[b(1-i) + b\frac{N}{N+\theta}i - (d + d_1N) - \alpha i] &= 0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

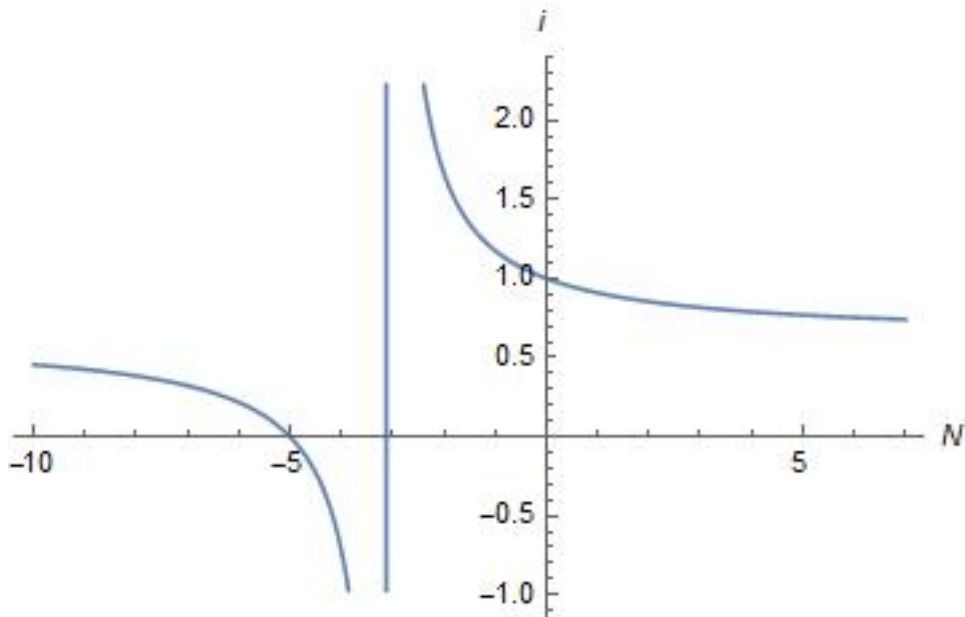
Vyjádříme si proměnou i z první rovnice jako funkci proměné N :

$$i = \frac{(N + \theta)(\alpha - \beta + b)}{(N + \theta)(\alpha - \beta + b) - bN} = \frac{1}{1 - \frac{bN}{(N + \theta)(\alpha - \beta + b)}}.\tag{4.12}$$

Z posledního výrazu plyne, že $i \in (0, 1)$ právě tehdy, když $\alpha - \beta + b < 0$. Poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $R_0 > 1$. Pro její derivaci funkce (4.12) platí:

$$i' = \frac{-b\theta(\beta - \alpha - b)}{[(N + \theta)(\alpha - \beta + b) - bN]^2}.$$

Člen $-b\theta/[(N + \theta)(\alpha - \beta + b) - bN]^2$ je vždy záporný, tak nás zajímá znaménko výrazu $\beta - \alpha - b$. Platí $i(N = 0) = 1$. Za podmínky $R_0 > 1$ neboli $\beta > \alpha + b$ je izoklina $i(N)$ klesající funkcí N . Průběh izokliny (4.12) je na Obrázku (4.4).



Obrázek 4.4: Izoklina (4.12) pro parametry $b = 3, d = 1, d_1 = 2, \alpha = 2, \beta = 10, \theta = 5$, pro které je $K = 1$.

Druhá izoklina modelu je stejná jako v případě hustotně závislého přenosu nemoci a její průběh už známe. Jedná se o izoklinu (4.7). Za předpokladu $R_0 > 1$ může mít tedy model (4.10) buď žádné, jedno nebo dvě endemická ekvilibría v závislosti na existenci řešení kvadratické rovnice vzniklé z rovnosti pravých stran izoklin (4.7) a (4.12). Tato rovnice má tvar

$$AN^2 + BN + C = 0 \quad (4.13)$$

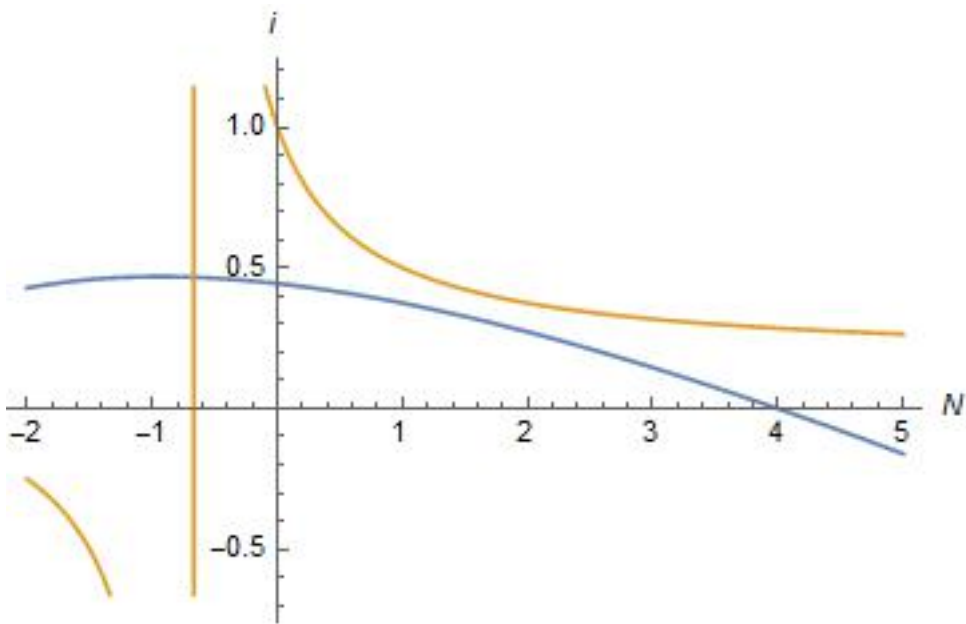
kde

$$A = d_1(\alpha - \beta)$$

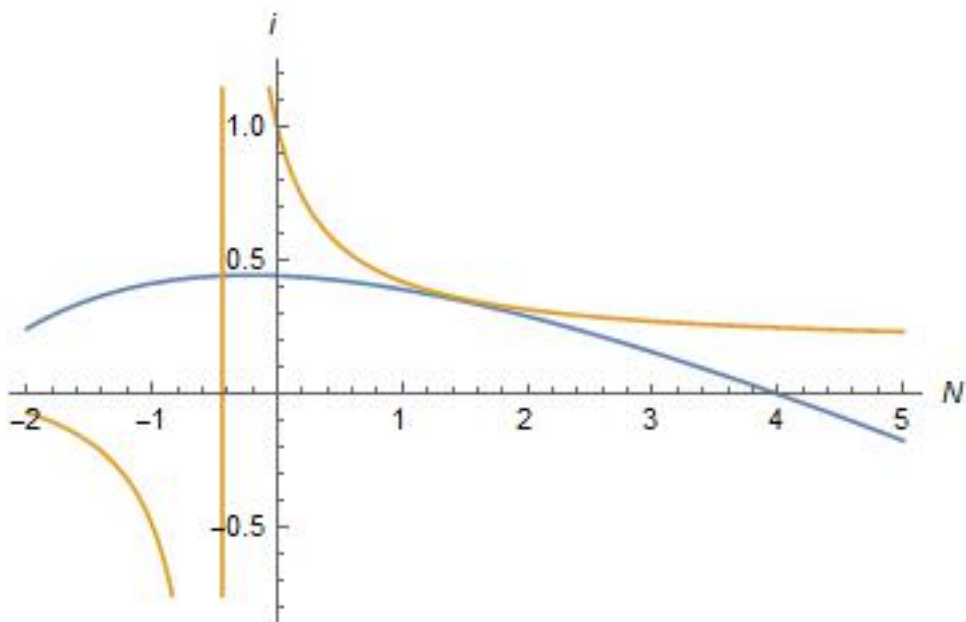
$$B = \alpha(\alpha - \beta + b)(\alpha + d_1\theta) - (\alpha - \beta)(b - d)$$

$$C = (\alpha - \beta + b)[\theta(b + \alpha) - (b - d)]$$

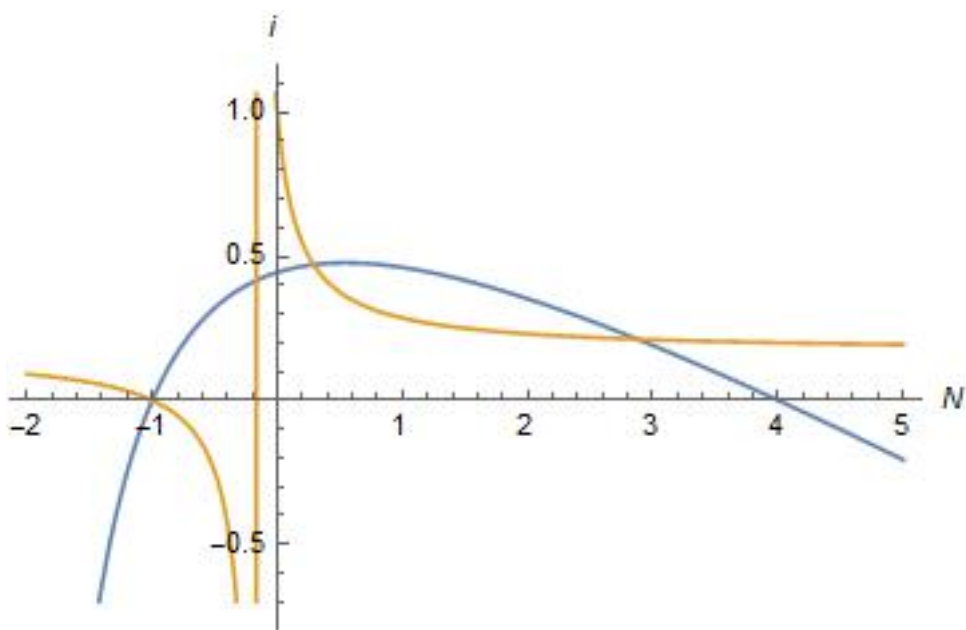
Jednotlivé případy jsou naznačeny v následujících Obrázcích 4.5, 4.6 a 4.7.



Obrázek 4.5: Průběh izoklin (4.7)-modrá a (4.12)-žlutá pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 4$, pro které je $K = 4$ a neexistuje žádné endemické ekvilibrium.



Obrázek 4.6: Průběh izoklin (4.7)-modrá a (4.12)-žlutá pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 2,65$, pro které je $K = 4$ a existuje jedno endemické ekvilibrium.



Obrázek 4.7: Průběh izoklin (4.7)-modrá a (4.12)-žlutá pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 1$, pro které je $K = 4$ a existují dvě endemická ekvilibria.

Kapitola 5

Stabilita ekvilibríí

V této kapitole se budeme věnovat stabilitě ekvilibríí, která jsme našli pro modely z kapitoly 4, tedy pro modely (4.4) a (4.10). Pro určení stability ekvilibríí budeme analyzovat příslušné Jacobiho matice.

5.1 Hustotně závislý přenos

Jacobiho matice má v tomto případě tvar:

$$J = \begin{bmatrix} (1 - 2i)(\beta N - \alpha - b) - 2b\frac{N}{N + \theta}i & (i - i^2)\beta - bi^2\frac{\theta}{(N + \theta)^2} \\ -bN + b\frac{N^2}{N + \theta} - \alpha N & b(1 - i) + bi\frac{N(N + 2\theta)}{(N + \theta)^2} - d - 2d_1N - \alpha i \end{bmatrix}.$$

Pro stabilitu příslušného ekvilibría požadujeme, aby stopa $Tr J$ byla záporná a determinant $det J$ kladný. Nyní budeme počítat Jacobián pro jednotlivá ekvilibría.

Ekvilibríum $e_1 = (0, 0)$:

$$J_{e_1} = \begin{vmatrix} -\alpha - b & 0 \\ 0 & b - d \end{vmatrix}.$$

Jestliže se na antidiagonále vyskytuje nula, pak víme, že na diagonále jsou vlastní čísla Jacobiho matice a pro stabilitu ekvilibría musí být reálné části těchto čísel záporné. Z Jacobiánu je vidět, že $b - d < 0$ právě tehdy, když $b < d$. My ale předpokládáme, že $b > d$ (v opačném případě by populace vyhynula i bez nemoci), tudíž je ekvilibríum $e_1 = (0, 0)$ nestabilní.

Ekvilibrrium $e_2 = (0, K)$:

$$J_{e_2} = \begin{vmatrix} \beta K - \alpha - b & 0 \\ -bK + b\frac{K^2}{K + \theta} - \alpha K & -(b - d) \end{vmatrix}.$$

Výraz $-(b - d)$ je vždy záporný, dále $\beta K - \alpha - b < 0$ právě tehdy, když $R_0 < 1$. Ekvilibrrium $e_2 = (0, K)$ je tedy pro $R_0 < 1$ stabilní a pro $R_0 > 1$ nestabilní.

Ekvilibrrium $e_3 = (1, 0)$:

$$J_{e_3} = \begin{vmatrix} \alpha + b & -b\frac{1}{\theta} \\ 0 & -d - \alpha \end{vmatrix}.$$

Protože $\alpha + b > 0$, ekvilibrrium $e_3 = (1, 0)$ je nestabilní.

Endemické ekvilibrrium (i_e, N_e) :

Vzhledem ke značné obtížnosti získání podmínek pro určení stability ze stopy a determinantu Jacobiho matice odpovídající endemickému ekvilibriu jsme použili Dulacovo kritérium (**Věta 2.0.8**). Volíme funkci q :

$$q = \frac{1}{SI}$$

Výraz, jehož znaménko znaménko potřebujeme určit, má nyní tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(q \frac{dS}{dt} \right)}{\partial S} + \frac{\partial \left(q \frac{dI}{dt} \right)}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(b \frac{S + I}{S + I + \theta S} \frac{1}{S} \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\beta(S + I)}{S + I} \right) - \frac{d_1}{I} + \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta(S + I)}{S + I} \right) - \frac{d_1}{S} = \\ &= \frac{-S^2 - 2SI - I^2 - \theta I}{(S^2 + SI + \theta S)^2} - \frac{d_1}{I} - \frac{d_1}{S} < 0. \end{aligned}$$

pro všechna $(S, I) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Neexistuje tedy periodická orbita. Protože $R_0 > 1$ jsou ostatní existující ekvilibria nestabilní, a je proto endemické ekvilibrrium globálně stabilní, pokud existuje ($R_0 > 1$).

5.2 Frekvenčně závislý přenos

Jacobiho matice má v tomto případě tvar:

$$J = \begin{bmatrix} (1 - 2i)(\beta - \alpha - b) - 2ib\frac{N}{N + \theta} & -bi^2\frac{\theta}{(N + \theta)^2} \\ -bN + b\frac{N^2}{N + \theta} - \alpha N & b(1 - i) + bi\frac{N(N + 2\theta)}{(N + \theta)^2} - d - 2d_1N - \alpha i \end{bmatrix}.$$

Nyní opět budeme počítat jednotlivé Jacobiány pro jednotlivá ekvilibria.

Ekvilibrium $e_1 = (0, 0)$:

$$J_{e_1} = \begin{vmatrix} \beta - \alpha - b & 0 \\ 0 & b - d \end{vmatrix}.$$

Je patrné, že $b - d < 0$ právě tehdy, když $b < d$ a tudíž ekvilibrium $e_1 = (0, 0)$ je nestabilní.

Ekvilibrium $e_2 = (0, K)$:

$$J_{e_2} = \begin{vmatrix} \beta - \alpha - b & 0 \\ -bK + b\frac{K^2}{K + \theta} - \alpha K & -(b - d) \end{vmatrix}.$$

Výraz $-(b - d)$ je vždy záporný, dále $\beta - \alpha - b < 0$ právě tehdy, když $R_0 < 1$. Ekvilibrium $e_2 = (0, K)$ je tedy pro $R_0 < 1$ stabilní a pro $R_0 > 1$ nestabilní.

Ekvilibrium $e_3 = (1, 0)$:

$$J_{e_3} = \begin{vmatrix} -\beta + \alpha + b & -b\frac{1}{\theta} \\ 0 & -d - \alpha \end{vmatrix}.$$

Výraz $-d - \alpha$ je vždy záporný, dále $-\beta + \alpha + b < 0$ právě tehdy, když $R_0 > 1$. Ekvilibrium $e_3 = (1, 0)$ je tedy pro $R_0 > 1$ stabilní a pro $R_0 < 1$ nestabilní.

Endemické ekvilibrium (i_e, N_e) :

Stabilitu endemických ekvibrií nebylo možné určit analyticky, a tak jsme provedli početné numerické simulace. Tyto simulace naznačují, že endemické ekvilibrium s nižší hodnotou N_e je velmi pravděpodobně vždy nestabilní a endemické ekvilibrium s vyšší hodnotou N_e je velmi pravděpodobně vždy stabilní.

Kapitola 6

Shrnutí výsledků

6.1 Výsledky

Následující tabulky shrnují výsledky řešení existence a stability jednotlivých ekvilibríí získané v kapitolách 4 a 5.

V Tabulce 6.1 vidíme, že zde máme čtyři ekvilibría, z nichž tři existují vždy. Jedná se o extinkční ekvilibríum $(0, 0)$, ekvilibríum bez nemoci $(0, K)$ a ekvilibríum díky vymření způsobeném nemocí $(1, 0)$. Zatímco extinkční ekvilibríum $(0, 0)$ a ekvilibríum díky vymření způsobeném nemocí $(1, 0)$ jsou vždy nestabilní, ekvilibríum bez nemoci $(0, K)$ je stabilní pokud $R_0 < 1$ a nestabilní pokud $R_0 > 1$. Čtvrté, endemické ekvilibríum (i_e, N_e) existuje pokud $R_0 > 1$ a zároveň je i vždy globálně stabilní.

Jedním z úkolů bakalářské práce bylo nastudovat známé řešení modelu (3.1) bez Allee efektu, jehož výsledky pro případ hustotně závislého přenosu nemoci shrnuje Tabulka 6.2.

Na první pohled je patrné, že výsledky se od sebe ničím neliší. Opět jsou zde čtyři ekvilibría a

Ekvilibríum	Existence	Stabilní	Nestabilní
$(0, 0)$	Vždy	–	Vždy
$(0, K)$	Vždy	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
$(1, 0)$	Vždy	–	Vždy
(i_e, N_e)	$R_0 > 1$	Vždy	–

Tabulka 6.1: Výsledky modelu s hustotně závislým přenosem nemoci s Allee efektem (4.4).

Ekvilibrrium	Existence	Stabilní	Nestabilní
$(0, 0)$	Vždy	–	Vždy
$(0, K)$	Vždy	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
$(1, 0)$	Vždy	–	Vždy
(i_e, N_e)	$R_0 > 1$	Vždy	–

Tabulka 6.2: Výsledky modelu s hustotně závislým přenosem nemoci bez Allee efektu.

Ekvilibrrium	Existence	Stabilní	Nestabilní
$(0, 0)$	Vždy	–	Vždy
$(0, K)$	Vždy	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
$(1, 0)$	Vždy	$R_0 > 1$	$R_0 < 1$
(i_e^1, N_e^1)	Viz poznámka	–	Vždy
(i_e^2, N_e^2)	Viz poznámka	Vždy	–

Tabulka 6.3: Výsledky modelu s frekvenčně závislým přenosem nemoci s Allee efektem (4.10).

Poznámka: Endemické ekvilibrrium existuje právě tehdy, když $R_0 > 1$ a rovnice (4.13) má dvě reálná řešení N_e^1, N_e^2 , předpokládáme $N_e^1 < N_e^2$.

jejich existence a stabilita je dána stejnými podmínkami.

Tabulka 6.3 nám říká, že v případě frekvenčně závislého přenosu nemoci nacházíme pět ekvilibríí, z nichž tři existují vždy: extinkční ekvilibrrium $(0, 0)$, ekvilibrrium bez nemoci $(0, K)$ a ekvilibrrium díky vymření způsobeném nemocí $(1, 0)$. Extinkční ekvilibrrium je vždy nestabilní, ekvilibrrium bez nemoci je za podmínky $R_0 < 1$ stabilní a za podmínky $R_0 > 1$ nestabilní, jako v případě hustotně závislého přenosu nemoci. Ekvilibrrium díky vymření způsobeném nemocí $(1, 0)$ je za podmínky $R_0 > 1$ stabilní a za podmínky $R_0 < 1$ nestabilní. V případě frekvenčně závislého přenosu jsme našli dvě endemická ekvilibrria, jejichž podmínky existence jsou vysvětleny v poznámce u Tabulky 6.3, endemické ekvilibrrium (i_e^1, N_e^1) je velmi pravděpodobně nestabilní a endemické ekvilibrrium (i_e^2, N_e^2) je velmi pravděpodobně stabilní. Nyní ještě porovnáme výsledky frekvenčně závislého přenosu nemoci s Allee efektem a bez něj. Výsledky frekvenčně závislého přenosu bez Alle efektu jsou shrnuty v Tabulce 6.4.

Při porovnání výsledků frekvenčně závislého přenosu nemoci a Allee efektem a bez něj vidíme, že extinkční ekvilibrrium $(0, 0)$ a ekvilibrrium bez nemoci $(0, K)$ se neliší (mají stejné podmínky existence a stability). Změna však nastává u ekvilibrria díky vymření způsobeném

Ekvilibrum	Existence	Stabilní	Nestabilní
$(0, 0)$	Vždy	–	Vždy
$(0, K)$	Vždy	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$
$(i_e, 0)$	$R_0 > 1$	$i_e > \frac{b-d}{\alpha}$	$i_e < \frac{b-d}{\alpha}$
(i_e, N_e)	$R_0 > 1$ & $i_e < \frac{b-d}{\alpha}$	Vždy	–

Tabulka 6.4: Výsledky modelu s frekvenčně závislým přenosem nemoci bez Allee efektu.

nemocí $(i_e, 0)$. Toto ekvilibrum v případě frekvenčně závislého přenosu nemoci bez Allee efektu existuje právě tehdy, když $R_0 > 1$ a je stabilní, když $i_e > \frac{b-d}{\alpha}$, nestabilní když $i_e < \frac{b-d}{\alpha}$, zatímco v případě s Allee efektem existuje vždy a je stabilní pokud $R_0 > 1$, nestabilní když $R_0 < 1$. Dále pak v případě bez Allee efektu nacházíme jedno endemické ekvilibrum, které existuje právě tehdy, když $R_0 > 1$ a zároveň $i_e < \frac{b-d}{\alpha}$ a je asymptoticky stabilní, pokud existuje. Ovšem v případě s Allee efektem nacházíme dvě endemická ekvilibria, z nichž (i_e^1, N_e^1) je velmi pravděpodobně nestabilní a (i_e^2, N_e^2) velmi pravděpodobně stabilní.

6.2 Průběhy řešení

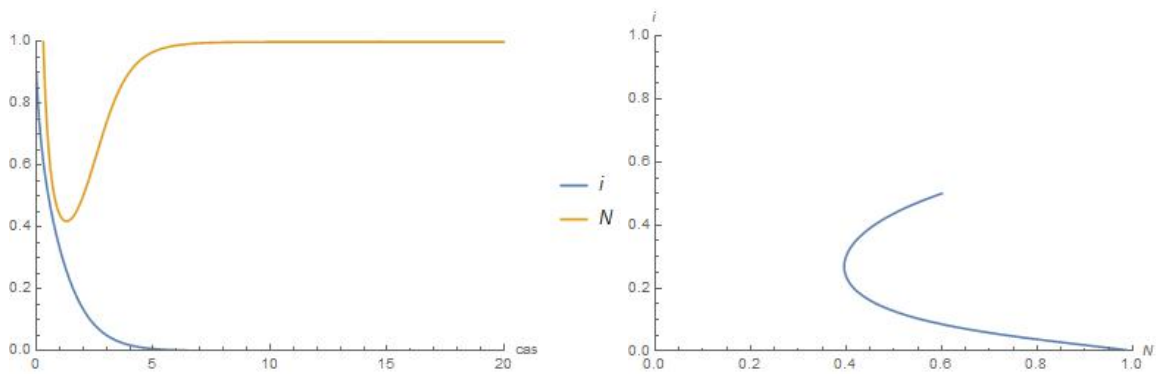
V této části jsou naznačeny průběhy řešení pro nejzajímavější případy. Ve všech případech volíme parametry kladné a navíc $b > d$.

6.2.1 Hustotně závislý přenos

Ekvilibrum $(0, K)$

V případě ekvilibria bez nemoci volíme $R_0 = 0.8$, abychom ukázali jeho stabilitu, která nastává pouze pokud $R_0 < 1$.

Vlevo na Obrázku 6.1 je znázorněn průběh proměnných i a N v čase, ze kterého je vidět, že infekční jedinci i vyhynou a celková hustota populace N dosáhne své nosné kapacity $K = 1$. Vpravo na obrázku 6.1 je znázorněna trajektorie modelu ve stavovém prostoru, ze kterého vidíme, že řešení jde do ekvilibria $(0, K)$.

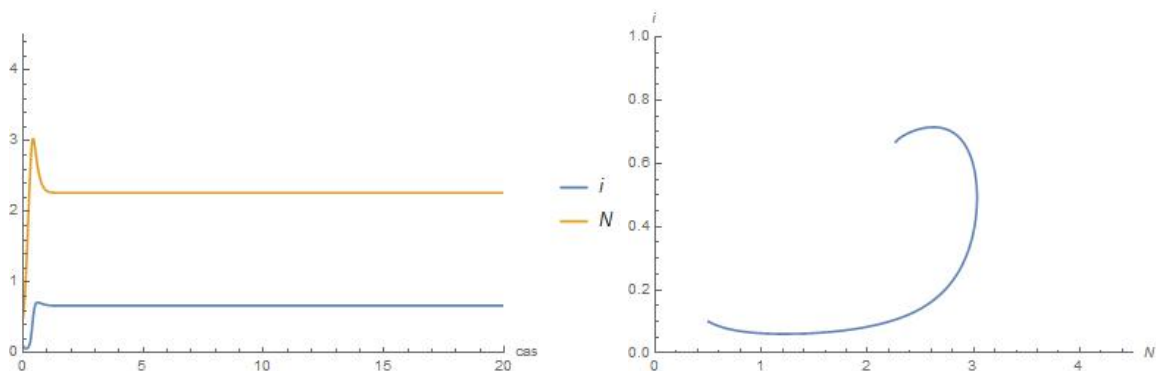


Obrázek 6.1: Vlevo je naznačena závislost stavových proměnných na čase, vpravo je trajektorie modelu ve stavovém prostoru, pro parametry $b = 3, d = 1, d_1 = 2, \alpha = 2, \beta = 4, \theta = 2$, pro které je $K = 1$, a pro počáteční podmínky $i(0) = 0.5, N(0) = 0.6$.

Endemické ekvilibrum (i_e, N_e)

Při simulování pro endemické ekvilibrum jsme volili parametry tak, aby bylo endemické ekvilibrum stabilní (tzn. $R_0 > 1$), takže $R_0 = 3.75$.

Z levé části Obrázku 6.2, na které je znázorněna závislost proměnných i a N na čase, vidíme, že infekční jedinci i mohou koexistovat s ostatními. V pravé části, na které je znázorněna trajektorie modelu ve stavovém prostoru, vidíme, že řešení jde do ekvilibria (i_e, N_e) .



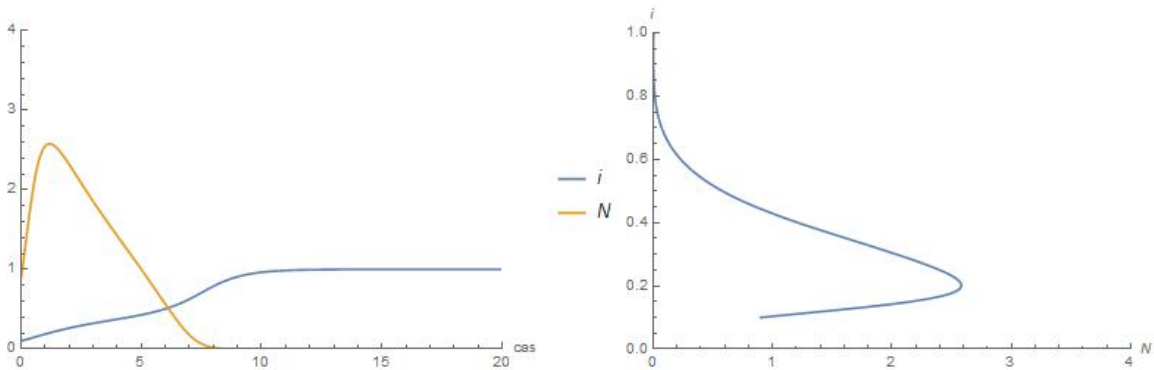
Obrázek 6.2: Vlevo je naznačena závislost stavových proměnných na čase, vpravo je trajektorie modelu ve stavovém prostoru, pro parametry $b = 10, d = 1, d_1 = 2, \alpha = 2, \beta = 10, \theta = 2$, pro které je $K = 4.5$, a pro počáteční podmínky $i(0) = 0.1, N(0) = 0.5$.

6.2.2 Frekvenčně závislý přenos

Ekvilibrrium (1, 0)

Jak víme z Tabulky 6.2, ekvilibrrium díky vymření způsobeném nemocí je stabilní pokud $R_0 > 1$, volíme tedy parametry tak, že $R_0 = 10/9$.

Na Obrázku 6.3 v levé části, kde jsou znázorněny průběhy stavových proměnných i a N , vidíme, že populace N vymírá a řešení jde do ekvilibrria (1, 0), což nám ukazuje pravá část obrázku 6.3, na které je trajektorie modelu ve stavovém prostoru.



Obrázek 6.3: Vlevo je naznačena závislost stavových proměnných na čase, vpravo je trajektorie modelu ve stavovém prostoru, pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 4$, pro které je $K = 4$, a pro počáteční podmínky $i(0) = 0.1, N(0) = 0.9$.

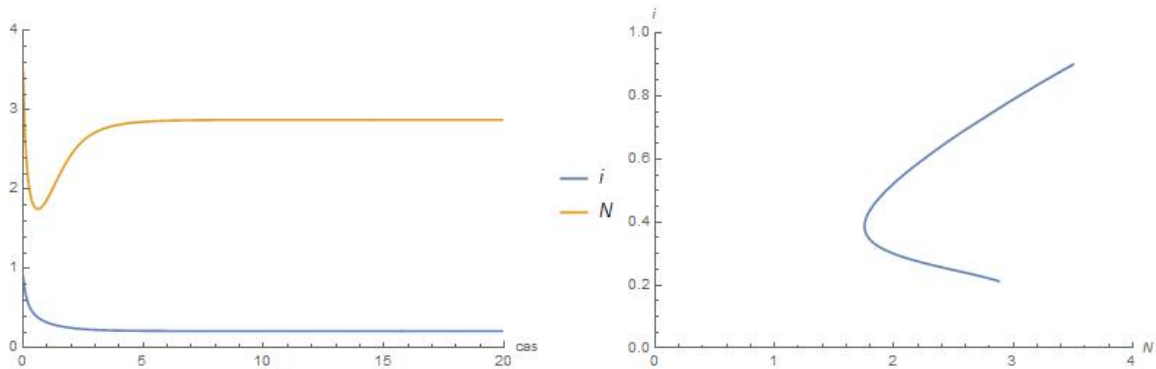
Na Obrázcích 6.4 a 6.5 jsou naznačeny průběhy stavových proměnných a trajektorie řešení ve stavovém prostoru, pro případy dosažení buď' endemického ekvilibrria (i_e^2, N_e^2) (Obrázek 6.4) nebo ekvilibrria díky vymření způsobeném nemocí (1, 0) (Obrázek 6.5), v závislosti na počátečních podmínkách. Volíme parametry tak, že $R_0 = 10/9$.

Dosažení endemického ekvilibrria (i_e^2, N_e^2)

Pro dosažení endemického ekvilibrria (i_e^2, N_e^2) volíme počáteční podmínky blíže k tomuto ekvilibriu, tedy $i(0) = 0.9, N(0) = 3, 5$. Vlevo na Obrázku 6.4, kde je naznačen průběh stavových proměnných i a N , vidíme, že infekční jedinci mohou koexistovat se zbytkem populace a řešení opravdu jde k endemickému ekvilibriu (i_e^2, N_e^2), což vidíme na Obrázku 6.4 vpravo, kde je naznačena trajektorie modelu ve stavovém prostoru.

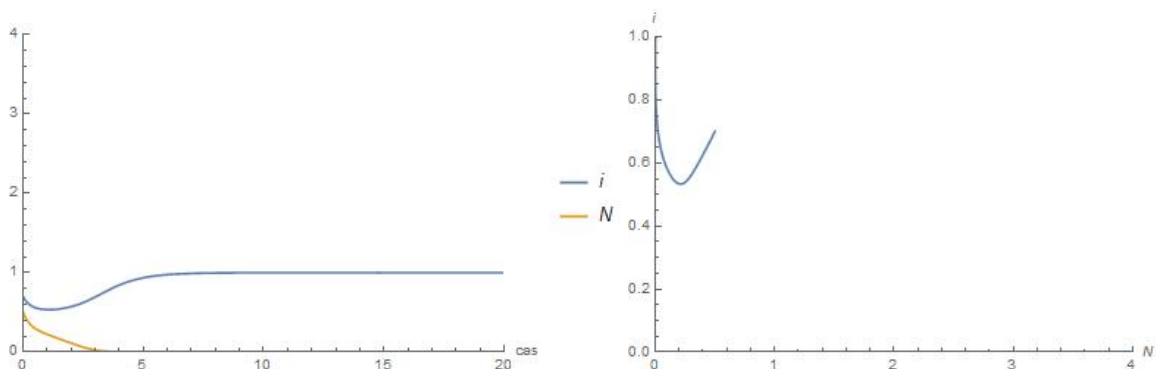
Dosažení ekvilibrria (1, 0)

Pro dosažení ekvilibrria díky vymření způsobeném nemocí (1, 0) tentokrát volíme počáteční podmínky, blíže k tomuto ekvilibriu, tedy $i(0) = 0.7, N(0) = 0.5$. Vlevo na obrázku 6.5, na



Obrázek 6.4: Vlevo je naznačena závislost stavových proměnných na čase, vpravo je trajektorie modelu ve stavovém prostoru, pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 4$, pro které je $K = 4$, a pro počáteční podmínky $i(0) = 0.9, N(0) = 3, 5$.

kterém je znázorněn průběh stavových proměnných, vidíme, že populace N vymírá a průběh řešení tedy opravdu jde do ekvilibria $(1, 0)$, což je vidět v pravé části Obrázku 6.5, kde je trajektorie modelu ve stavovém prostoru.



Obrázek 6.5: Vlevo je naznačena závislost stavových proměnných na čase, vpravo je trajektorie modelu ve stavovém prostoru, pro parametry $b = 5, d = 1, d_1 = 1, \alpha = 4, \beta = 10, \theta = 4$, pro které je $K = 4$, a pro počáteční podmínky $i(0) = 0.7, N(0) = 0.5$.

6.3 Důsledky změny parametru θ

Dalším z úkolů bakalářské práce bylo diskutovat výsledky pro různé hodnoty parametru θ , tedy pro různé síly Allee efektu. Analýza našeho modelu ukazuje, že při hustotně závislém přenosu nemoci nemá hodnota parametru θ kvalitativní vliv na výsledky. Zatímco při frekvenčně závislém přenosu nemoci ovlivňuje hodnota parametru θ počet endemických ekvilibrií. Ze simulací vyplývá, že pro větší hodnoty θ nenacházíme žádné endemické ekvilibrium (Obrázek 4.5, kde jsme volili $\theta = 4$), ale pro nižší hodnoty θ nacházíme dvě endemická ekvilibria (Obrázek 4.7, kde jsme volili $\theta = 1$). Pro $R_0 > 1$ a dostatečně silný Allee efekt je tedy jediným stabilním ekvilibriem systému vyhynutí populace díky nemoci.

Kapitola 7

Závěr

V práci jsme se zabývali epidemiologickým modelem s Allee efektem díky problémům s nalezením partnera u infekčních jedinců. Uvažovali jsme dva typy přenosu nemoci. Řešení hustotně závislého přenosu nemoci s Allee efektem je shodné jako v případě s již známým modelem bez Allee efektu [1, 2] a infekční jedinci tedy mohou s ostatními koexistovat. V případě frekvenčně závislého přenosu nemoci se ovšem výsledky obou modelů lišily. Zatímco v případě bez Allee efektu mohli infekční jedinci opět koexistovat s ostatními, v případě s Allee efektem tomu tak být nemuselo. Koexistence nebo vymření záleželo na vhodně zvolených počátečních podmínkách. Při analýze těchto modelů jsme použili standardní teorii diferenciálních rovnic. Při vytváření grafů a numerickém simulování jsme použili počítačový program Wolfram Mathematica.

V této bakalářské práci jsme se věnovali pouze jednomu konkrétnímu typu nemoci a jen pro dva případy přenosu. V epidemiologii je ovšem mnohem více těchto typů nemocí a jejich přenosů, proto je jejich analýza tak důležitá. Doufám, že touto prací jsem alespoň malou měrou pomohl k dalšímu pochopení této problematiky.

Literatura

- [1] BEREC, L. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals Proceedings of the 6th Summer School on Computational Biology*. Vyd. 1. Editoři HŘEBÍČEK, Jiří, Jiří HOIČÍK (2010) Brno: Akademické nakladatelství CERM, Brno
- [2] PUGLIESE, A. *Populatoins models for diseases with no recovery*. Journal od Mathematical biology (1990) 28:65-82.
- [3] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1998, 631 s. ISBN 03-872-7906-4.
- [4] DENNIS, B. *Allee effects in stochastic populations*. Oikos (2002) 96:389-401
- [5] BEREC, L., COURCHAMP F., GASCOIGNE J. *Allee efects in ecology and conservation*. 1st ed. (2008) New York: Oxford University Press Inc., New York. ISBN 978-0-19-857030-1
- [6] ANDERSON, R., MAY, R. *Infectious dieseases of humans, Dynamic and control*. 1st ed. (1991) New York: Oxford University Press Inc., New York.