Posudek na bakalářskou práci Tomáše Havelky, "Analýza epidemiologického modelu s Allee efektem".

Práce se zabývá epidemiologickým modelem popisujícím změny v početnosti zdravé a infikované populace. Klasický model byl upraven tak, že předpokládá snížení růstové rychlosti populace infikovaných jedinců. Cílem práce bylo srovnání kvalitativních vlastností klasického modelu a upraveného modelu s přidaným tzv. Allee efektem.

Práce se skládá ze sedmi kapitol. Po úvodní kapitole se ve druhé kapitole podává přehled týkající se obyčejných diferenciálních rovnic. Vlastní model a jeho analýza je pak obsahem zbývajících kapitol.

Matematické modelování v epidemiologii má dlouhou tradici. Známý je např. matematický model malárie Sira Ronalda Rosse, lékaře, který za objev přenosu malárie obdržel Nobelovu cenu v roce 1902. Další modely pak byly vytvořeny W. O. Kermackem a A. G. McKendrickem a jsou označovány jako tzv. SIR modely, poněvadž popisují časové změny v početnosti "Susceptible", "Infected" a "Recovered" jedinců. Model v této práci je variací na tento typ modelů. Předpokládá, že rychlost rozmnožování infikovaných jedinců je nižší než v případě zdravých jedinců. To je modelováno tak, že specifická růstová rychlost infikovaných jedinců se zvyšuje s velikostí populace. Takovýto pozitivní vztah mezi růstovou rychlostí v závislosti na velikosti populace se nazývá na počest W. C. Alleeho, který experimentálně tuto závislost prokázal, „Allee effect".

V práci jsou studovány dva modely pro různé typy rychlosti přenosu nemoci mezi infikovanými a zdravými jedinci. Analýza modelů je založena na nalezení pevných bodů a studia jejich lokální stability pomocí metody linearizace, případně pomocí kvalitativní teorie dvoudimenzionálních soustav rovnic.

V práci je řada drobnějších nepřesností, některé úvahy postrádají vysvětlení, případně neplatí.

Zde uvádím podrobnější poznámky, resp. otázky na autora:

1. V metodologické kapitole 2 na str. 4 píšete, že "samozřejmě musíme takovou úlohu [soustavu dif. rovnic] vyřešit" a následuje definice řešení. Definice sama o sobě nic "neřeší", takže není jasné, co zde míníte. Čekal bych zmínku o existenci řešení.

2. str. 5: Zde uvádíte "o asymptotické stabilitě ekvilibria můžeme rozhodnout dvěma způsoby". Z logiky tedy plyne, že následující postupy odpovídají dvěma různým způsobům?

3. Str. 9, vzorec (4.3). Není vysvětleno, jak se reprodukční číslo odvodí. Popis následující za vzorcem (4.3) příliš čtenáři nepomůže, vzhledem k tomu, že jde o popis modelu pomocí diferenciálních rovnic a jeden infekční jedinec má tedy hustotu 1/N. Požaduji vysvětlit při obhajobě.

4. U rovnice (4.1) není specifikováno na jaké množině se uvažuje. Na stránce 10 se pak mluví o "zájmové oblasti". Lepší by bylo použít terminologie "definiční obor rovnice", přičemž ten by se specifikoval u rovnice (4.1).

5. Str. 11. Text je zde matoucí. Není pravda, že by derivace funkce i(N) byla v N=0 klesající, jak se tvrdí v první větě následující po odvození derivace. Toto tvrzení je ovšem hned popřeno v následující větě.

6. Poslední věta na str. 11 není dostatečně zdůvodněna. Požaduji vysvětlit při obhajobě.

7. Tvrzení na str. 17 dole, že "pro stabilitu ekvilibria musí být reálné části vlastních čísel záporné" je nepravdivé. Model (4.4) je nelineární diferenciální rovnice a v takovém případě metoda linearizace rovnice dává pouze postačující podmínku pro lokálně asymptotickou stabilitu equilibria. Tvrzení neplatí dokonce ani pro lineární systém, protože pokud jsou např. vlastní čísla jednonásobná a reálné části jsou nulové, tak je equilibrium stabilní (nikoliv asymptoticky stabilní).

8. Tvrzení na str. 18 dole je nedostatečně odůvodněné. Tvrzení plyne z Poincare-Bendixsovy věty, ale nejsou ověřeny předpoklady věty a věta není ani citována.

9. Na str. 20 v textu není uvedeno, pro jaký model platí tabulka 6.1. To je uvedeno až v legendě u tabulky.

Závěr: Cíl práce byl splněn. Práce trpí řadou nepřesností, některá tvrzení nejsou dostatečně zdůvodněná, event. nepravdivá.

České Budějovice, 5.5.2016

V. Křivan

Prof. RNDr. Vlastimil Křivan, CSc.