Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Nerovnosti a jejich aplikace

Diplomová práce

Bc. Jaroslava Tesařová

Vedoucí práce: RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.

České Budějovice, 2017

Bibliografické údaje

Tesařová J., 2017: Nerovnosti a jejich aplikace. [Inequalities and their applications. Mgr. Thesis, in Czech.] - 79 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá matematickými nerovnostmi, jejich využitím v matematice a aplikací do termodynamiky. Hlavní důraz je kladen na důkazy nerovností a řešení příkladů. Dále jsou vysvětleny matematické pojmy jako např. norma či metrika, potřebné k pochopení uvedených postupů, a také některé ze základních pojmů termodynamiky. K porozumění této práce je potřebná znalost analýzy a termodynamiky.

Annotation

This Thesis deals with mathematical inequalities, their use in mathematics and applications to thermodynamics. The main emphasis is placed on proofs of inequalities and solving examples. The following thing explains the mathematical concept such as norm or metric, needed to understand these procedures, and also some of basic concepts of thermodynamics. To understand this Thesis the knowledge of analysis and thermodynamics is required.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury. Prohlašuji také, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdání textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 19. dubna 2017

....

Bc. Jaroslava Tesařová

Poděkování

Děkuji vedoucí mé diplomové práce RNDr. Ing. Janě Kalové, Ph.D. za odbornou pomoc a cenné rady, které mi vždy ochotně poskytla a za její trpělivost při tvorbě této práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Matematické nerovnosti se velmi často vyskytují v matematické analýze. Právě díky nerovnostem získáváme zajímavá a užitečná řešení různých matematických problémů. Pomáhají nám odhadovat výrazy či dávají alternativní řešení úloh.

V uceleném textu se seznámíme s nejznámějšími a nejpoužívanějšími nerovnostmi a jejich aplikacemi. Pro objasnění jsou uvedeny matematické důkazy a řešené příklady. Pro lepší představu je do textu vloženo i několik obrázků zpracovaných v programu GeoGebra.

Kapitola 2 je věnována průměrům a nerovnostem mezi nimi. Porovnáme nejznámější průměry nejen pomocí algebraických důkazů, ale také geometricky. Pozornost je věnována především nerovnosti AG a jejímu použití v příkladech. V následující kapitole uvedeme známé matematické nerovnosti jako je nerovnost trojúhelníková, Cauchyova, Hölderova, Minkowského a další. Ke všem nerovnostem jsou uvedeny jejich důkazy. Kapitola 4 se věnuje aplikaci matematických nerovností do termodynamiky. Představíme například aplikaci AG nerovnosti v termodynamice či Landsbergovo vysvětlení zobecněného průměru.

Literatura, ze které byla čerpána inspirace pro tvorbu dané části práce, je uvedena v úvodu kapitol. Citace jsou označovány v textu. Ukončení důkazů je označováno symbolem $\Box$ v pravé části stránky.

Cílem diplomové práce je seznámit se s matematickými nerovnostmi, jejich důkazy, užitím některých z uvedených nerovností v příkladech a následným přesahem tématu do fyziky. Vybrány byly ty nerovnosti, se kterými je možné se setkat při studiu matematiky na vysoké škole nejčastěji. Cílem práce není popsat všechny známé nerovnosti, ale zpracovat ty, které mohou pomoci nadaným středoškolákům při řešení úloh matematické olympiády a také ty nerovnosti, které využijí vysokoškolští studenti matematiky na své cestě za vzděláním. Následná aplikace nerovností do fyziky je vhodným mezioborovým propojením dvou předmětů, kterým se věnuji v magisterském studiu.

Kapitola 2

Nerovnosti mezi průměry

V této kapitole se seznámíme s druhy průměrů a odvodíme vztahy, které platí mezi nejznámějšími z nich. Také uvedeme řešení příkladů týkající se průměrů a nerovností mezi nimi, především nerovnosti AG.

2.1 Průměr

Hlavní literaturou pro tuto kapitolu je [1], [2], [7], [8].

2.1.1 Aritmetický průměr

Nejznámějším a nejpoužívanějším průměrem je aritmetický průměr (dále A_n, kde n je počet členů, ze kterých počítáme aritmetický průměr). Řešené příklady uvedeme v kapitole 2.1.6. Připomeňme si nyní vztah pro výpočet A_n

$$A_n = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.1}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla. Pokud vztah zjednodušíme pouze pro dvě hodnoty x_1 a x_2, dostaneme

$$A_2 = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Jednoduše řečeno: aritmetický průměr je součet všech zadaných hodnot vydělený jejich počtem.

2.1.2 Geometrický průměr

Geometrický průměr (dále G_n) n reálných čísel $x_i \geq 0$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, je definován jako

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} .$$

G_n je tedy n-tou odmocninou ze součinu n nezáporných čísel. Jedno z nejčastějších užití geometrického průměru je při výpočtu průměrného tempa růstu, více v kapitole 2.1.6. Pokud bychom vztah pro G_n chtěli zjednodušit pouze pro dvě hodnoty x_1 a x_2, dostaneme

$$G_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_2}. \tag{2.2}$$

Vztah (2.2) má i geometrickou interpretaci a sice souvisí s Eukleidovou větou o výšce, která říká, že obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z úseků přepony

$$v^2 = c_a \cdot c_b. \tag{2.3}$$

Pokud vztah (2.3) odmocníme, získáme vyjádření $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, ve kterém velikost výšky v pravoúhlého trojúhelníku odpovídá geometrickému průměru velikostí úseků přepony c_a (úsek přilehlý straně a), c_b (úsek přilehlý straně b).

2.1.3 Harmonický průměr

Třetím průměrem, se kterým se seznámíme, je průměr harmonický (H_n). Tento průměr je definován jako převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot znaku. Pro n hodnot užíváme vztah

$$H_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla, $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Samozřejmě bychom mohli uvažovat i záporná čísla, ale museli bychom zaručit, že součet jejich převrácených hodnot je nenulový.

Pro dvě hodnoty x_1 a x_2 je harmonický průměr definován vztahem

$$H_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\right)} = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

H_n se používá například při výpočtu průměrné rychlosti na úsecích stejné délky, více v kapitole 2.1.6. Harmonický průměr velice úzce souvisí s harmonickou řadou. Každý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{n}$, jež tvoří sčítance harmonické řady, je kromě prvního členu harmonickým průměrem sousedních členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Harmonickou řadou rozumíme řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

2.1.4 Kvadratický průměr

Kvadratický průměr (K_n, někdy také nazýván odmocninový průměr, alternativní značení Q_n) je dalším a většinou posledním průměrem, se kterým se můžeme setkat při studiu na střední škole. Časté využití má ve fyzice při výpočtu střední kvadratické rychlosti molekul, viz kapitola 2.1.6. Tento průměr je vždy nezáporný a spočteme ho jako druhou odmocninu aritmetického průměru druhých mocnin daných hodnot

$$K_n = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}. \tag{2.4}$$

Vztah (2.4) je definován pro $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Pro hodnoty x_1 a x_2 platí

$$K_2 = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}. \tag{2.5}$$

2.1.5 Ostatní průměry

Existují ještě další průměry, které však nemají (mimo úloh matematické olympiády) ve středoškolské matematice uplatnění. Uveďme vzorce [8] platné pro kladné reálné hodnoty.
Jedná se o:

Kubický průměr

$$C_n = \sqrt[3]{\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{n}}$$

Harmonicko-kvadratický průměr

$$HQ_n = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}}}$$

Kontraharmonický průměr

$$KH = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$$

Logaritmický průměr

$$L = \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

Poslední dva vzorce platí pouze pro dvě hodnoty x_1, x_2, tzn. nelze je zobecnit pro n hodnot.

Vzorce pro průměry $A_n, G_n, H_n, K_n, C_n, HQ_n$ lze zapsat jednou společnou formulí [8]

$$\overline{a}_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}}. \tag{2.6}$$

Pro různá k získáváme různé průměry. Výčet je pro přehlednost uveden v následující tabulce.

konstanta k	-2	-1	0	1	2	3
průměr	HQ_n	H_n	G_n	A_n	K_n	C_n

2.1.6 Příklady - výpočet průměrů

V této kapitole uvedeme několik příkladů pro výpočet aritmetického, geometrického, harmonického a kvadratického průměru. Jedná se o nejběžnější případy, ve kterých se se zmiňovanými průměry můžeme setkat.

Aritmetický průměr

Příklad 2.1.1 (Zadání i řešení vlastní)

Určete průměrnou měsíční mzdu pracovníka, známe-li hodnotu jeho posledních šesti výplat v Kč: $15\,620, 14\,623, 16\,874, 15\,645, 16\,230, 15\,181$.

Řešení:

Průměrnou měsíční mzdu spočteme pomocí aritmetického průměru daného vzorcem (2.1), tzn. zadané hodnoty sečteme a vydělíme jejich počtem

$$A_6 = \frac{15\,620 + 14\,623 + 16\,874 + 15\,645 + 16\,230 + 15\,181}{6} = 15\,695,5 \text{ Kč}.$$

Podobným způsobem spočítáme průměrnou výšku sportovců v týmu, spotřebu elektřiny v domácnosti udávanou za stejná časová období, průměrnou známku žáka z matematiky (všechny známky musí mít stejnou váhu) a další. Pro větší počet opakujících se hodnot, je výhodnější použití váženého aritmetického průměru, který v této kapitole však uvádět nebudeme. Vážený průměr používáme k těm výpočtům, kdy například známky z předmětu nemají stejnou váhu, či počítáme průměrnou spotřebu elektřiny z hodnot udaných za různá časová období.

Příklad 2.1.2 (Zdroj zadání [8], řešení vlastní)

Vypočtěte průměrnou rychlost automobilu na celé své dráze, jestliže první hodinu jel rychlostí $v_1 = 80$ km $\cdot$ h^{-1} a druhou hodinu rychlostí $v_2 = 120$ km $\cdot$ h^{-1}.

Řešení:

Jelikož počítáme průměrnou rychlost automobilu za stejné časové úseky, lze k výpočtu použít aritmetický průměr

$$A_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{80 + 120}{2} = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \tag{2.7}$$

Výpočet ověříme pomocí základních vztahů mechaniky. Označme s celkovou ujetou dráhu a s_1, s_2 dráhy ujeté automobilem na prvním a druhém úseku. Prvnímu úseku také přiřadíme čas t_1 a druhému čas t_2, za který automobil úsek ujel. Symbolem t značíme celkový čas. Průměrnou rychlost v_p spočteme pomocí vztahu

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}.$$

Dráhu na prvním úseku spočteme $s_1 = v_1 t_1$, analogicky na druhém úseku $s_2 = v_2 t_2$. Protože oba úseky ujel automobil za hodinu, pak $t_1 = t_2$ nahradíme jednotným symbolem t'. Zároveň platí, že $2t' = t$,

$$v_p = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{t' \cdot (v_1 + v_2)}{2t'} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Poslední vyjádření v_p odpovídá aritmetickému průměru daných hodnot v_1, v_2, viz vztah (2.7).

Geometrický průměr

Příklad 2.1.3 (Zdroj zadání i řešení [8])

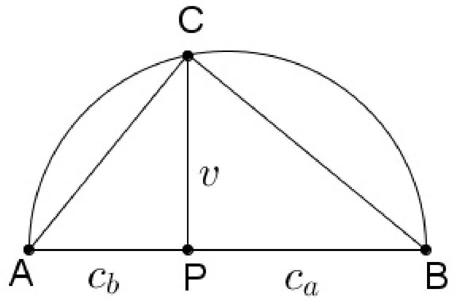
Sestrojte úsečku délky $\sqrt{6}$ j (jednotek).

Řešení:

K sestrojení úsečky využijeme Eukleidovu větu o výšce v pravoúhlého trojúhelníku danou vztahem $v^2 = c_a \cdot c_b$, kde c_a, c_b jsou velikosti úseků přepony přilehlé stranám a, b. Pro výšku v tedy platí vztah $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$, odpovídající geometrickému průměru c_a, c_b. Pokud úsečka o délce $\sqrt{6}$ bude výškou pravoúhlého trojúhelníku, pak máme dokonce několik možností, jak můžeme výšku sestrojit.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{1 \cdot 6} = \sqrt{1,5 \cdot 4} = \dots$$

Úseky přepony mohou mít velikost $c_a = 2$ j, $c_b = 3$ j nebo $c_a = 1$ j, $c_b = 6$ j či $c_a = 1,5$ j, $c_b = 4$ j a další. Protože se jedná o velikost úseček, c_a, c_b jsou kladná reálná čísla.



Obrázek 2.1: Obrázek k příkladu 2.1.3, pro $c_a = 3$ j, $c_b = 2$ j, $v = \sqrt{6}$ j

Příklad 2.1.4 (Zadání i řešení vlastní)

Určete průměrné tempo růstu HDP, když víte, že hrubý domácí produkt (HDP) rostl během posledních 4 let následujícím způsobem: 4%, 2%, -2%, 1%.

Řešení:

Uvažujme základ, ze kterého počítáme růst $100\% = 1$. Nárůst v prvním období o 4% znamená, že nová hodnota tvoří 104% hodnoty roku minulého tzn. $1,04$. Stejně tak druhá hodnota, tvoří

102% z předchozí hodnoty, tj. $1,04 \cdot 1,02$. V dalším období zaznamenáváme pokles oproti předchozímu roku o 2%, tj. 98% z $1,04 \cdot 1,02$, což odpovídá součinu čísel $1,04 \cdot 1,02 \cdot 0,98$. V posledním roce počítáme 101% z hodnoty za předešlé období a dostáváme se tedy k číslu $1,04 \cdot 1,02 \cdot 0,98 \cdot 1,01$.

Geometrický průměr určíme jako čtvrtou odmocninu ze součinu $1,04 \cdot 1,02 \cdot 0,98 \cdot 1,01$

$$G_4 = \sqrt[4]{1,04 \cdot 1,02 \cdot 0,98 \cdot 1,01} \doteq 1,01226 = 101,226\%.$$

Průměrné roční tempo růstu HDP je $1,226\%$. Celkový nárůst za čtyři roky byl ze 100% na $1,04 \cdot 1,02 \cdot 0,98 \cdot 1,01 \doteq 1,04998 = 104,998\%$, tzn. o $4,998\%$. Případné použití aritmetického průměru v tomto příkladu je nesprávné, jelikož zadané růsty se počítají pro hodnoty s různými základy.

Harmonický průměr

Příklad 2.1.5 (Zdroj zadání [8], řešení vlastní)

Určete průměrnou rychlost automobilu v_p, který jede z místa A do místa B stálou rychlostí $v_1 = 80$ km $\cdot$ h^{-1} a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí $v_2 = 120$ km $\cdot$ h^{-1}.

Řešení:

Jelikož zmíněné úseky automobil ujede za různý čas t_1 a t_2, nelze použít aritmetický průměr, ale využijeme vztah pro průměr harmonický

$$H_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{120}\right)} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 120}{80 + 120} = 96 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Přesvědčme se nyní o správnosti výpočtů odvozením vztahu z mechaniky. Uvažujme časy na prvním a druhém úseku t_1, t_2, celkový čas $t = t_1 + t_2$, dráhy s_1, s_2 prvního a druhého úseku a celkovou dráhu $s = s_1 + s_2$. Protože úsek z místa A do místa B je stejně velký jako z B do A, pak platí, že $s_1 = s_2 = s'$. Pro průměrnou rychlost platí vztah $v_p = \dfrac{s}{t}$.

Dosazením a ekvivalentními úpravami získáme vztah pro harmonický průměr

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s'}{\frac{s'}{v_1} + \frac{s'}{v_2}} = \frac{2s'}{\frac{s'\left(v_1 + v_2\right)}{v_1 \cdot v_2}} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}.$$

Příklad 2.1.6 (Zadání i řešení vlastní)

K odvozu materiálu jsou k dispozici 3 nákladní automobily. První by všechen materiál sám odvezl za 4 hodiny, druhý za 3 hodiny a třetí automobil za 6 hodin. Za jak dlouho bude materiál odvezen „průměrným" automobilem?

Řešení:

První automobil odveze za 1 hodinu $\frac{1}{4}$ materiálu, druhý $\frac{1}{3}$ a třetí $\frac{1}{6}$ z celkového množství materiálu. „Průměrný" automobil by za součet dob uvedených v zadání příkladu odvezl materiál třikrát

$$H_3 = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right)} = \frac{3}{\frac{4+3+2}{12}} = \frac{36}{9} = 4.$$

„Průměrný" automobil odveze materiál za 4 hodiny.

Kvadratický průměr

Příklad 2.1.7 (Zdroj řešení i zadání [8])

Určete délku strany p dvou průměrných čtverců, které zaberou stejnou plochu jako čtverce o délkách stran $a = 10$ cm a $b = 70$ cm.

Řešení:

Má platit rovnost

$$2p^2 = a^2 + b^2.$$

Vyjádříme p a dosadíme zadané hodnoty

$$p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2 + 70^2}{2}} = 50 \text{ cm}.$$

Stejnou plochu jako zadané čtverce zaberou průměrné čtverce o straně 50 cm. Tato hodnota je větší, než kdybychom příklad počítali pomocí aritmetického průměru.

Příklad 2.1.8 (Zdroj zadání i řešení [8])

Odvoďte vzorec pro střední kvadratickou rychlost molekul plynu.

Řešení:

Označme n počet molekul plynu v uvažovaném souboru, m hmotnost jedné molekuly plynu, v_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ skutečné rychlosti jednotlivých molekul, v průměrnou rychlost všech těchto molekul. Pro skutečné kinetické energie molekul a průměrnou kinetickou energii molekul souboru platí

$$n \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}mv_i^2.$$

Vyjádříme průměrnou rychlost v

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}}. \tag{2.8}$$

Vyjádřili jsme vztah pro kvadratický průměr rychlostí molekul.

2.2 AG nerovnost

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, kterou nazýváme AG nerovnost, je nejznámější, nejpoužívanější a také nejdůležitější nerovností mezi průměry. Nerovnosti obecně slouží jako velmi účinný nástroj pro odhadování výrazů na jedné straně nerovnosti vhodnějšími výrazy na straně druhé. V této kapitole AG nerovnost představíme, provedeme její důkaz a uvedeme odhady, které z ní plynou. Hlavní literaturou pro tuto kapitolu je [1].

Je známo více jak 50 důkazů AG nerovnosti, které se liší jak náročností, tak i metodou (další z důkazů AG nerovnosti lze najít například v [1]). Pro AG nerovnost platí vztah

$$\begin{aligned} G_n &\leq A_n, \qquad (2.9) \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \end{aligned}$$

V případě, že budeme uvažovat pouze dvě hodnoty, se AG nerovnost zjednoduší na vztah

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Všechna výše uvedená tvrzení nyní shrneme do jedné matematické věty.

Věta 2.2.1 *Geometrický průměr n kladných reálných čísel není nikdy větší než jejich průměr aritmetický, tzn.* $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. *Rovnost průměrů nastává, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. [3]*

Dále uvedeme důkaz věty 2.2.1. Nejznámější a pravděpodobně také nejstarší důkaz provedl francouzský matematik A. Cauchy. Při důkazu využíváme metody matematické indukce.

Důkaz 2.2.2 (**AG nerovnost, důkaz věty 2.2.1**,[3])

1. Důkaz pro $n = 1$ je zřejmý.

2. Pro $n = 2$ vyjdeme z elementární nerovnosti

$$0 \leq (a - b)^2\,, \tag{2.10}$$

která platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b (druhá mocnina nenabývá záporných hodnot). Z nerovnosti (2.10) plyne, že

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2, \\ 2ab &\leq a^2 + b^2, \\ ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pokud ve vztahu (2.11) zvolíme $a = \sqrt{x_1}, b = \sqrt{x_2}$, kde $x_1 > 0, x_2 > 0$, pak bude platit

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{2.12}$$

Získali jsme AG nerovnost pro $n = 2$.

3. Dále bychom nerovnost měli dokázat pro $n = 3$ za předpokladu, že nerovnost platí pro $n = 2$. Výhodnější se ovšem ukazuje důkaz nerovnosti pro $n = 2^2 = 4$. Budeme předpokládat, že AG nerovnost platí pro následující dvojice kladných reálných čísel $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}$ a $\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}\right\}$ neboli platí, že

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \tag{2.13}$$

$$x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2, \tag{2.14}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2} \leq \left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right)^2. \tag{2.15}$$

Vynásobíme první dvě nerovnosti (2.13) a (2.14) a porovnáme se třetí nerovností (2.15)

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^4.$$

Za předpokladu, že nerovnost platí pro $n = 2^2$, lze dokázat obdobně její platnost pro $n = 2^3$ atd.

Nyní obecně. Vyjdeme z předpokladu, že platí nerovnost pro $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$. Uvažujme $n = 2^{k+1}$, tedy čísla $x_1, \ldots, x_{2^k}, x_{2^k+1}, \ldots, x_{2^{k+1}}$. Předpokládáme

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^k} &\le \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}, \\
x_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}} &\le \left(\frac{x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{x_1 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k} \le \left(\frac{\frac{x_1 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)^2,
$$

$$
x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2^{k+1}} \le \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k} \le \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}.
$$

Dokázali jsme tvrzení pro $n = 2^{k+1}$. Abychom dokázali nerovnost pro všechna přirozená čísla n, musíme dokázat, že z platnosti pro $n > 2$ plyne platnost i pro $n - 1$. Ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje dostatečně velké $k_0 \in \mathbb{N} : n_0 \le 2^{k_0}$. Z platnosti pro 2^{k_0} plyne postupně platnost pro každé menší přirozené číslo a tedy i pro n_0. Uvažujme, že požadované platí pro reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} > 0$, jejichž aritmetický průměr označíme A. Nyní použijeme podle předpokladu AG nerovnost pro n-tici čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, A\}$,

$$
x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot A \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + A}{n}\right)^n.
$$

Platí, že $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = (n-1)A$, po dosazení získáme

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot A &\le A^n, \\
x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} &\le A^{n-1}. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Nerovnost (2.16) jsme chtěli dokázat. Rovnost v AG nerovnosti nastane právě v případě, když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$,

$$
\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.
$$

$\square$

Pomocí věty 2.2.1 lze řešit různé matematické problémy, mezi než také patří hledání extrémů. Z téže věty plynou dvě tvrzení, která se někdy označují jako duální.

- Součin n kladných reálných čísel, která mají daný součet, je největší v případě, když všechna čísla jsou si rovna.

- Součet n kladných reálných čísel, která mají daný součin, je nejmenší v případě, když všechna čísla jsou si rovna.

S nerovností AG se setkáme také při dolním odhadu součtu či horním odhadu součinu kladných reálných čísel. Dolní odhad součtu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Pokud odhad zjednodušíme pouze pro x_1, x_2 dostáváme $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$.
Pro horní odhad součinu existují obdobné vztahy

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

Opět po zredukování na čísla x_1, x_2

$$x_1 \cdot x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2.$$

2.3 Důkazy dalších nerovností

Důkaz 2.3.1 (**Nerovnost mezi geometrickým a harmonickým průměrem**, důkaz vlastní)
Dokažme, že platí vztah $H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Geometrický průměr kladných čísel $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, je dán vztahem

$$\begin{aligned} G_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) &= \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \frac{1}{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \end{aligned}$$

Aritmetický průměr kladných čísel $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ je dán vztahem

$$A_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Stejně jako platí AG nerovnost pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

tak platí i nerovnost

$$G_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \leq A_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Protože

$$G_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

a také

$$A_n\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

platí

$$\frac{1}{G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \leq \frac{1}{H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Dokázali jsme, že $H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\square$

Důkaz 2.3.2 (**Nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem**, důkaz vlastní)

Dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Nerovnost dokážeme pro dvě reálná čísla x_1, x_2. Budeme předpokládat, že kvadratický průměr je větší nebo roven průměru aritmetickému.

Kvadratický průměr x_1, x_2 je dán vztahem

$$K_2 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Předpokládejme, že

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} &\geq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4}, \\
2x_1^2 + 2x_2^2 &\geq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \\
x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &\geq 0, \\
(x_1 - x_2)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Protože všechny úpravy byly ekvivalentní platí nerovnost pro všechna reálná čísla x_1, x_2.

$\square$

Porovnejme nyní velikost průměru aritmetického, geometrického, kvadratického a harmonického, [8]

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n.$$

2.4 Grafické znázornění nerovností mezi průměry

Nerovnosti mezi průměry lze také několika způsoby znázornit graficky. Název nerovnosti získáme pomocí názvů průměrů, mezi kterými nerovnost existuje, např. AG (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem), KA (nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem), AH (nerovnost mezi aritmetickým a harmonickým průměrem), GH (nerovnost mezi geometrickým a harmonickým průměrem) a podobně. Jednotlivé průměry lze seřadit podle velikosti a to podle dále uvedené nerovnosti. Průměry dvou reálných čísel $a, b > 0$ se budou rovnat v případě, když $a = b$.

Geometrická interpretace: čísla a, b odpovídají úsekům přepony pravoúhlého trojúhelníku (pro přehlednost v následujících výpočtech budeme úseky c_a, c_b značit pouze a, b). Jestliže úseky přepony mají stejnou velikost, splynou úsečky, jež určují průměry, v jedinou

$$K_2 \geq A_2 \geq G_2 \geq H_2.$$

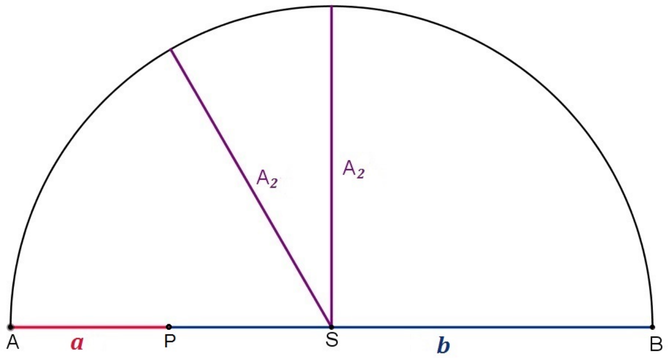
Indexy s hodnotou 2 používáme záměrně, průměry počítáme pouze pro dvě hodnoty čili pro $n = 2$. Porovnání jednotlivých průměrů si ukážeme dvěma různými způsoby. Prvním způsobem bude porovnávání velikostí průměrů na kružnici. Tato metoda je nejznámější metodou grafického porovnávání průměrů. Druhým způsobem je srovnání velikostí průměrů pomocí obecného lichoběžníku.

1. metoda - pomocí kružnice

- *Aritmetický průměr A_2:* zvolíme kružnici s průměrem $d = a + b$. Poloměr kružnice je pak aritmetickým průměrem čísel a, b,

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Geometrickou interpretací aritmetického průměru rozumíme poloměr Thaletovy kružnice daný vztahem $\frac{a+b}{2}$, viz obrázek 2.2.

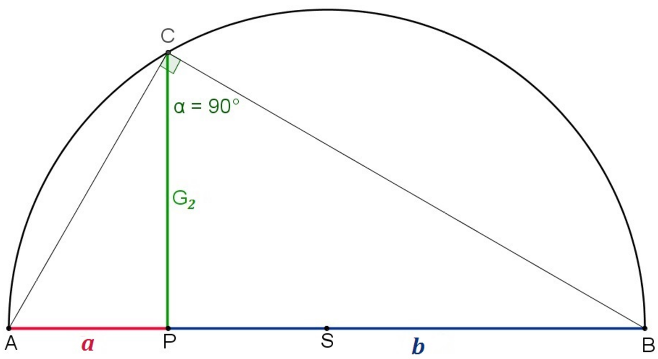


Obrázek 2.2: Aritmetický průměr

- *Geometrický průměr G_2:* v bodě P, který je bodem dotyku úseček a a b ležících na jedné přímce, sestrojíme úsečku PC kolmou k a, b. Délka úsečky $|PC|$ odpovídá velikosti geometrického průměru. Z Eukleidovy věty o výšce plyne

$$|PC| = \sqrt{ab}.$$

Se zněním Eukleidovy věty o výšce jsme se seznámili v kapitole 2.1.2.



Obrázek 2.3: Geometrický průměr

- *Harmonický průměr H_2:* vycházíme z podobnosti trojúhelníků $\triangle PSC \sim \triangle XYC$ v obrázku 2.4. Body P, S leží na úsečce AB a bod C na Thaletově kružnici s poloměrem $\frac{a+b}{2}$ a středem S. Velikost úsečky $|PC|$ odpovídá velikosti geometrického průměru

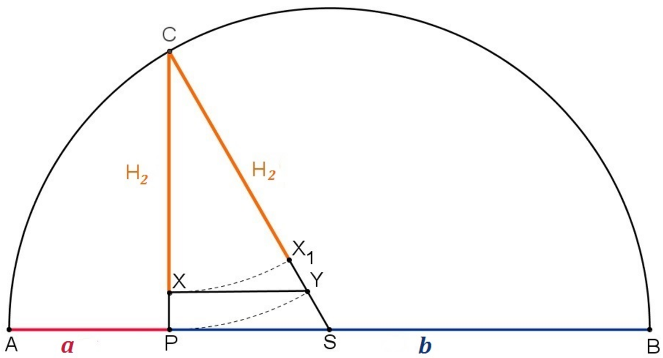
G_2 dvou kladných reálných čísel a, b a velikost úsečky $|SC|$ průměru aritmetickému A_2 čísel a, b. Jestliže velikost $|PC|$ naneseme na úsečku SC pomocí oblouku kružnice se středem v bodě C získáme bod Y ($|YC|$ = geometrický průměr a, b). Bodem Y vedeme úsečku rovnoběžnou s úsečkou SP, jejíž koncový bod je průnikem úseček PC se zmiňovanou rovnoběžnou úsečkou. Bod označíme X. Trojúhelníky $\triangle PSC, \triangle XYC$ jsou podobné podle věty uu a platí

$$\frac{|PC|}{|SC|} = \frac{|XC|}{|YC|}.$$

Vyjádříme $|XC|$

$$|XC| = \frac{|PC|}{|SC|}|YC| = \frac{G_2}{A_2}G_2 = \frac{G_2^2}{A_2} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Velikost úsečky $|XC|$ odpovídá velikosti harmonického průměru a, b. V obrázku 2.4 můžeme porovnávat harmonický průměr s průměrem geometrickým (velikost úsečky $|PC|$). Velikost harmonického průměru daného velikostí úsečky $|XC|$ nanesené na úsečku $|SC|$, odpovídá velikosti úsečky $|X_1C|$. Nyní můžeme velikost harmonického průměru $|X_1C|$ porovnat nejen s průměrem geometrickým $|YC|$, ale i s průměrem aritmetickým $|SC|$.



Obrázek 2.4: Harmonický průměr

- *Kvadratický průměr K_2:* odvodíme z Pythagorovy věty z trojúhelníku na obrázku 2.5 o odvěsnách $ES = A_2$ (E je bod na Thaletově kružnici, ES je kolmá na b) a SP, kde

$$|ES| = A_2 = \frac{a+b}{2},$$

$$|SP| = \sqrt{A_2^2 - G_2^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}$$

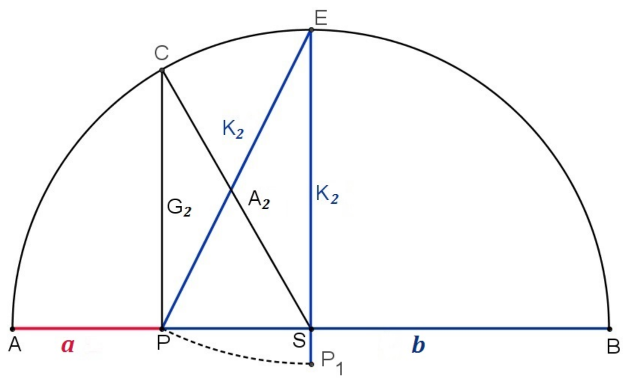
a tedy

$$K_2 = \sqrt{|SP|^2 + |ES|^2}.$$

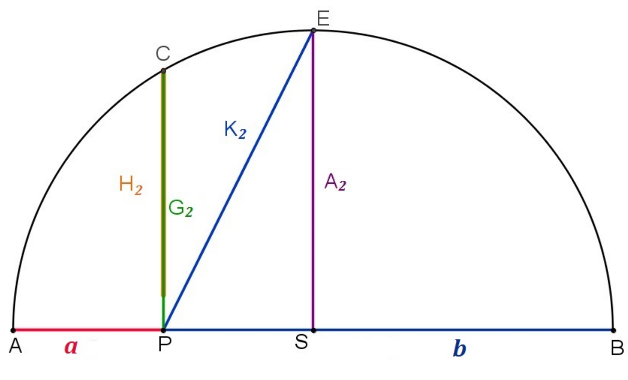
Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} K_2 &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \end{aligned}$$

Z obrázku 2.5 plyne, že kvadratický průměr $|EP_1|$ je větší než aritmetický průměr, který je určený velikostí úsečky $|ES|$. Grafické srovnání čtyř právě uvedených průměrů provedeme v obrázku 2.6.



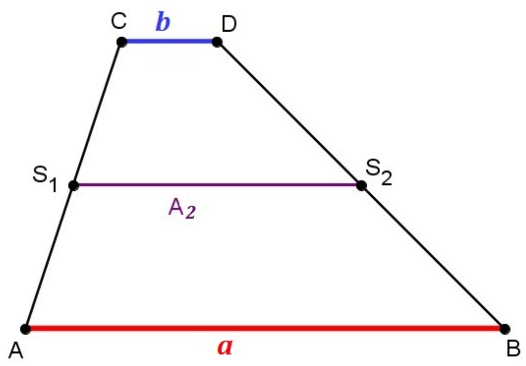
Obrázek 2.5: Kvadratický průměr



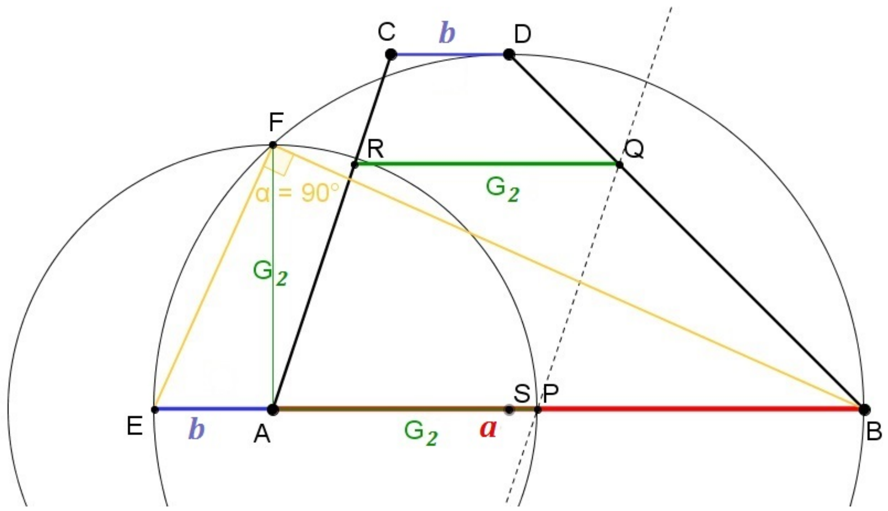
Obrázek 2.6: Srovnání průměrů [3]

2. metoda - pomocí lichoběžníku

- *Aritmetický průměr* čísel a, b, která odpovídají velikosti základen lichoběžníku a pro než platí, že $a = |AB|$, $b = |CD|$, je roven délce úsečky, jež spojuje středy ramen lichoběžníku. Znázornění aritmetického průměru můžeme vidět na obrázku 2.7.



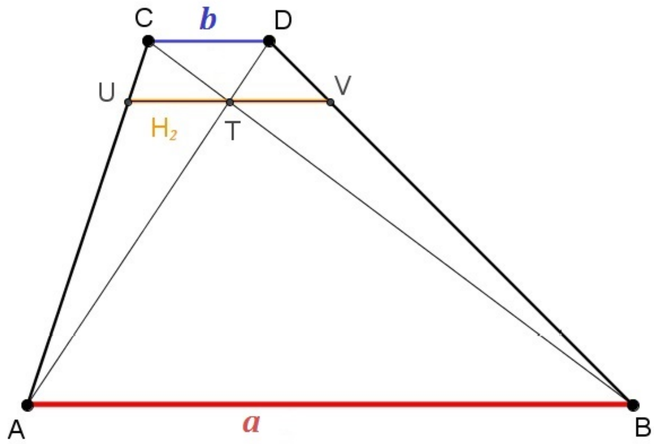
Obrázek 2.7: Aritmetický průměr



Obrázek 2.8: Konstrukce geometrického průměru

- *Geometrický průměr:* (obrázek 2.8) Pro znázornění geometrického průměru v lichoběžníku využijeme vlastností Eukleidových vět. Nejdříve naneseme velikost úsečky b na prodloužení dolní základny v bodě A. V A vztyčíme kolmici k základně a zároveň sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem $a + b$. Průnik kolmice s Thaletovou kružnicí označíme F. Velikost úsečky $|AF|$ je rovna velikosti geometrického průměru. Tuto délku naneseme na základnu a a získáme úsečku AP ($|AP| = |AF|$). Pomocí rovnoběžky s ramenem AC jdoucí bodem P získáme úsečku RQ (Q je průsečík právě zmíněné rovnoběžky s ramenem BD), která je rovnoběžná se základnami lichoběžníku a zároveň je geometrickým průměrem hodnot a, b.

- *Harmonický průměr* je dán velikostí úsečky, která je rovnoběžná se základnami a zároveň prochází průsečíkem úhlopříček (viz. obrázek 2.9).



Obrázek 2.9: Harmonický průměr

Nyní dokážeme, že velikost harmonického průměru znázorněného na obrázku 2.9 je rovna $\dfrac{2ab}{a+b}$, kde a, b jsou velikosti základen lichoběžníku, $a = |AB|$, $b = |CD|$.

Důkaz 2.4.1 Důkaz je založen na podobnosti trojúhelníků $\triangle ATU \sim \triangle ADC$ v lichoběžníku $ABDC$, dále $\triangle BTV \sim \triangle BCD$ a $\triangle ABT \sim \triangle DCT$. Bod T je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABDC$, bod U leží na ramenu AC, bod V na ramenu BS a platí, že úsečka spojující body U, V prochází bodem T, je rovnoběžná se základnami lichoběžníku $ABDC$ Všechny uvedené dvojice trojúhelníků jsou podobné podle věty uu. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ATU \sim \triangle ADC$ plyne

$$\frac{b}{|UT|} = \frac{|AD|}{|AT|}.$$

Protože $|AD| = |AT| + |TD|$, platí

$$\frac{b}{|UT|} = \frac{|AT| + |TD|}{|AT|} = 1 + \frac{|TD|}{|AT|}. \tag{2.17}$$

Z podobnosti trojúhelníků (podle věty uu) $\triangle ABT \sim \triangle DCT$ je

$$\frac{a}{b} = \frac{|BT|}{|CT|} = \frac{|AT|}{|DT|}.$$

Vyjádříme $\dfrac{|TD|}{|AT|} = \dfrac{b}{a}$ a dosadíme do vztahu (2.17),

$$\begin{aligned} \frac{b}{|UT|} = 1 + \frac{|TD|}{|AT|} &= 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}, \\ |UT| &= \frac{ba}{a+b}. \end{aligned}$$

Tím jsme určili velikost úsečky $|UT|$. Zbývá určit velikost úsečky $|TV|$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle BTV \sim \triangle BCD$ lze vyjádřit

$$\begin{aligned} \frac{b}{|TV|} &= \frac{|BC|}{|BT|}, \\ |BC| &= |BT| + |TC|, \\ \frac{b}{|TV|} &= \frac{|BT| + |TC|}{|BT|} = 1 + \frac{|TC|}{|BT|}. \end{aligned}$$

Z podobnosti $\triangle ABT \sim \triangle DCT$ lze jako v předchozím případě určit $\dfrac{|TC|}{|BT|} = \dfrac{b}{a}$. Odtud

$$\begin{aligned} \frac{b}{|TV|} = 1 + \frac{|TC|}{|BT|} &= 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}, \\ |TV| &= \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

Celková délka úsečky $|UV|$ je dána součtem délek úseček $|UT|$ a $|TV|$.

$$|UT| + |TV| = \frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}.$$

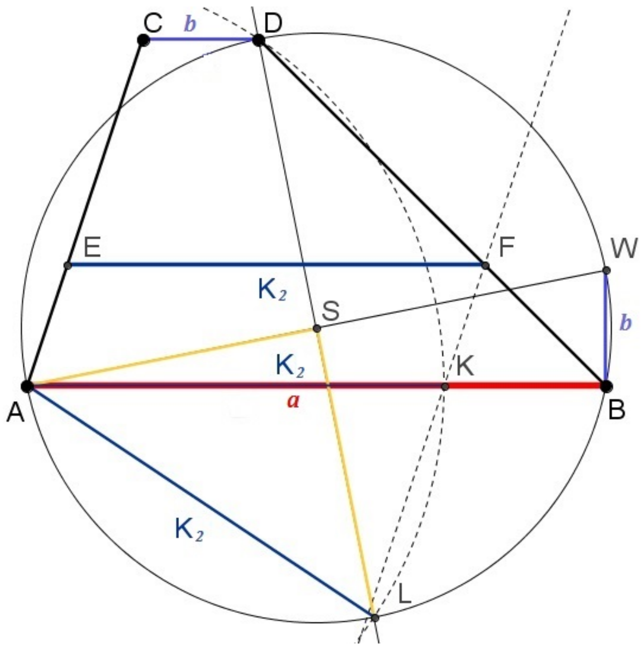
Dokázali jsme, že velikost harmonického průměru je rovna $\dfrac{2ab}{a+b}$.

$\square$

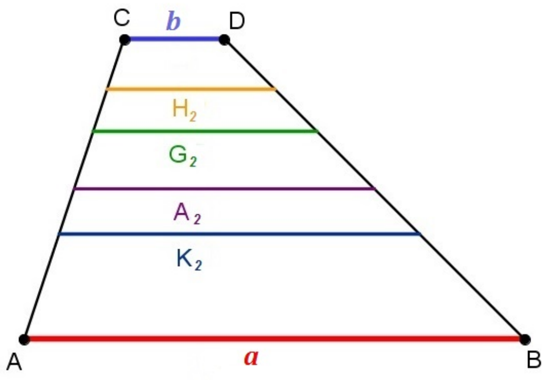
- *Kvadratický průměr:* v lichoběžníku $ABDC$ naneseme velikost základny b na kolmici k základně a vztyčenou v bodě B, viz obrázek 2.10. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABW$ můžeme vypočítat velikost strany AW, která je rovna $\sqrt{a^2 + b^2}$. Najdeme střed úsečky AW a označíme jej S.

  Platí, že $|AS| = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = |SL|$, (kde SL je kolmá na AW) $\triangle ASL$ je pravoúhlý s přeponou o velikosti kvadratického průměru. Platí totiž $|AL| = \sqrt{|SL|^2 + |AS|^2}$, tedy

$$|AL| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$



Obrázek 2.10: Konstrukce kvadratického průměru



Obrázek 2.11: Grafické porovnání průměrů

Na obrázku 2.11 vidíme srovnání aritmetického, geometrického, harmonického a kvadratického průměru úseček o velikosti a, b v obecném lichoběžníku.

2.5 AG nerovnost v příkladech

AG nerovnost má poměrně široké využití. Lze se s ní setkat již na střední škole, nejčastěji při řešení olympiádních úloh. Používáme ji k důkazům nerovností, hledání extrémů, ale je možné ji například aplikovat i na úlohy s přesahem do geometrie a goniometrie. Na konec této kapitoly je zařazeno několik příkladů s fyzikální tématikou a příkladů týkajících se i jiných nerovností než AG. Nyní uvedeme několik řešených příkladů s AG nerovností.

Příklad 2.5.1 (Zdroj zadání [9], řešení vlastní)
Pro $x, y, z > 0$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Řešení:
V nerovnosti se budeme snažit najít AG nerovnost pro 3 proměnné x^3, y^3, z^3, o níž víme, že platí,

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} &\geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3}, \\ x^3 + y^3 + z^3 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3}. \end{aligned}$$

Další úpravou dostaneme dokazovanou nerovnost

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Příklad 2.5.2 (Zdroj zadání [9], řešení vlastní)
Pro $x, y, z > 0$ dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2 y.$$

Řešení:
Nerovnost nebudeme dokazovat pro dvě čísla $2x^3, y^3$, ale pro tři čísla x^3, x^3, y^3, kde

$$x^3 + x^3 + y^3 \geq 3x^2 y.$$

Jestliže pro čísla x^3, x^3, y^3 napíšeme vztah pro AG nerovnost, získáme

$$\frac{x^3 + x^3 + y^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3}.$$

Dále upravíme

$$2x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6 y^3},$$

získali jsme dokazovanou nerovnost

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Příklad 2.5.3 (Zdroj zadání [10], řešení vlastní)

Pro libovolná reálná a, b, c dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Řešení:

Z AG nerovnosti plyne, že

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab, \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc, \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac. \end{aligned}$$

Sečteme všechny právě uvedené nerovnosti a získáme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca, \qquad (2.18) \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

Po vydělení dvěma dostaneme dokazovanou nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Příklad 2.5.4 (Zdroj zadání a řešení [10])

Nechť jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná reálná čísla taková, že $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Dokažte, že platí

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Řešení:

Podle AG nerovnosti platí

$$\begin{aligned} 1 + a_1 &\geq 2\sqrt{a_1}, \\ 1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_2}, \\ &\vdots \\ 1 + a_n &\geq 2\sqrt{a_n}. \end{aligned}$$

Vynásobením výše uvedených nerovností dostaneme

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Jelikož platí, že $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, dokázali jsme zadanou nerovnost. Rovnost nastává pro $a_i = 1,$ kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 2.5.5 (Zdroj zadání [1], řešení vlastní)

Dokažte, že pro libovolnou trojici čísel $a, b, c > 0$ platí

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Řešení:

Platí následující AG nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}, \\ \frac{b+c}{2} &\geq \sqrt{bc}, \\ \frac{c+a}{2} &\geq \sqrt{ca}, \end{aligned}$$

a tedy po úpravě

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab}, \\ b+c &\geq 2\sqrt{bc}, \\ c+a &\geq 2\sqrt{ca}. \end{aligned}$$

Poslední tři uvedené nerovnosti vynásobíme a vztah upravíme

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{abbcca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Důkaz je hotov.

Příklad 2.5.6 (Zdroj zadání a řešení [10])

Nechť jsou čísla $a, b, c > 0$. Dokažte, že

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Řešení:

Podle AG nerovnosti odvodíme, že

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{bc} + b + c &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a, \\ \frac{b^3}{ca} + c + a &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b, \\ \frac{c^3}{ab} + a + b &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c. \end{aligned}$$

Sečtením těchto tří nerovností dostaneme $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a+b+c) \geq 3(a+b+c)$. Po odečtení dostaneme původní nerovnost

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Příklad 2.5.7 (Zdroj zadání a řešení [5])

Dokažte, že pro všechna kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Řešení:

Důkaz plyne bezprostředně z AG nerovnosti aplikované na kladná čísla $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_1}} = 1.$$

Po vynásobení číslem n dostáváme dokazovanou nerovnost.

Příklad 2.5.8 (Zdroj zadání i řešení [7])

Nechť $A, B > 0$. Ukažte, že logaritmus geometrického průměru těchto čísel je aritmetickým průměrem jejich logaritmů.

Řešení:

Označme postupně $g = \sqrt{AB}, a = \log A, b = \log B$. Podle pravidel o logaritmování mocniny a součinu dostaneme

$$\log(g) = \log\sqrt{AB} = \log{(AB)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\log{(AB)} = \frac{1}{2}(\log A + \log B) = \frac{a+b}{2},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2.5.9 (Zdroj zadání [1] a řešení vlastní)

Budiž α ostrý úhel. Dokažte, že platí

$$\text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha \geq 2.$$

Řešení:

Protože α je ostrý úhel, jeho velikost náleží intervalu $(0°, 90°)$. V tomto intervalu jsou funkce tg α i cotg α kladné. Můžeme vycházet z AG nerovnosti pro dvě kladná čísla tg α a cotg α

$$\frac{\text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha}{2} \geq \sqrt{\text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha}.$$

Z goniometrického vzorce plyne, že $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{2} &\geq 1, \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha &\geq 2. \end{aligned}$$

Nerovnost je dokázána.

Příklad 2.5.10 (Zdroj zadání [3], řešení vlastní)

Mezi všemi trojúhelníky s daným obvodem O nalezněte ten, který má největší obsah.

Řešení:

Označíme délky stran trojúhelníku a, b, c a obvod trojúhelníku $O = a + b + c$. Vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku, který dává do souvislosti obvod O a obsah S nazýváme Heronovým vzorcem $S = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, kde $s = \dfrac{O}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$. Obvod je konstantní (viz zadání). Využijeme AG nerovnost pro tři členy $s-a, s-b, s-c$,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} &\leq \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}, \\ \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} &= \frac{3s-(a+b+c)}{3} = \frac{3s-2s}{3} = \frac{s}{3}, \\ \sqrt[3]{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} &\leq \frac{s}{3}, \\ (s-a)\,(s-b)\,(s-c) &\leq \frac{s^3}{27}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Obsah bude největší, když bude největší číslo $(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$. Uvedený součin $(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$ jsme v nerovnosti (2.19) odhadli shora. Rovnost nastane, když platí, že $(s-a) = (s-b) = (s-c)$, tedy pro $a = b = c = \dfrac{O}{3}$. Maximálního obsahu dosáhneme, pokud bude trojúhelník rovnostranný.

Příklad 2.5.11 (Zdroj zadání [1] a řešení vlastní)

Mezi všemi obdélníky o stejném obvodu nalezněte ten, který má největší obsah.

Řešení:

Nechť a, b jsou délky stran obdélníku. Obvod obdélníku daný vztahem $O = 2\,(a+b)$ je konstantní, pro jeho obsah platí $S = ab$. Z AG nerovnosti pro délky stran obdélníku plyne

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}, \\ \frac{O}{4} &\geq \sqrt{ab}, \\ \frac{O^2}{16} &\geq ab. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Obvod obdélníku je konstantní. Maximálního obsahu obdélníku dosáhneme, když součin ab bude maximální. To bude právě tehdy, pokud v nerovnosti (2.20) nastane rovnost. (Již dříve jsme uvedli, že součin n kladných reálných čísel, která mají daný součet, je největší v případě, kdy všechna čísla jsou si rovna.) Platí tedy, že $a = b = \dfrac{O}{4}$. Obdélník, jehož strany mají stejnou velikost, je čtverec.[1]

Příklad 2.5.12 (Zdroj zadání i řešení [3])
Součet dvou kladných reálných čísel x, y je roven d. Pro přirozená čísla p, q určete poměr $\dfrac{x}{y}$ tak, aby součin $S = x^p y^q$ byl co největší.

Řešení:
Lze psát $\dfrac{S}{p^p q^q} = \left(\dfrac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\dfrac{y}{q}\right)^q$, což je součin p činitelů $\dfrac{x}{p}$ a q činitelů $\dfrac{y}{q}$. Součet všech těchto činitelů je konstantní

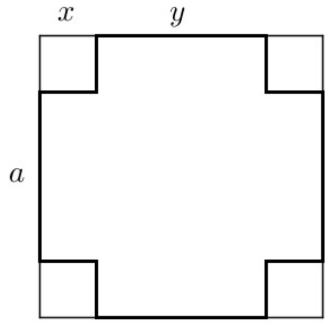
$$p\frac{x}{p} + q\frac{y}{q} = x + y = d.$$

Výraz $\dfrac{S}{p^p q^q}$ má největší hodnotu, právě když $\dfrac{x}{p} = \dfrac{y}{q}$. (Součin n kladných reálných čísel, která mají daný součet, je největší, když všechna čísla jsou si rovna.) Protože p, q jsou konstanty, je v tomto případě největší i součin S. Přitom poměr $\dfrac{x}{y} = \dfrac{p}{q}$.

[1]Didonina úloha: „Právě uvedený matematický problém řešili už naši dávní předkové. Město Kartágo založila podle legendy Dido, dcera krále Bela, když s několika krajany prchala před svým proradným bratrem Pygmalionem. Dido hledala území pro nové sídlo. Místní obyvatelé souhlasili, aby Dido zabrala pouze tu půdu, kterou pokryje volskou kůží. Při doslovném vyplnění podmínky by ovšem nové město bylo značně přelidněno. Dido použila lest. Volskou kůži rozřezala na tenké řemeny, které pak rozložila tak, aby vymezila oblast podstatně větší než tu, kterou mohla pokrýt jednou volskou kůží. Matematický problém, se kterým se zde Dido setkala, spočívá v následujícím: určit uzavřenou křivku daného obvodu (perimetru) tak, aby obsah vymezené plochy byl co největší. Taková úloha se nazývá izoperimetrická úloha. Matematická intuice napovídá, že řešením bude kružnice. V případě, že např. z estetického hlediska by město muselo mít obdélníkový tvar, výsledkem by byl čtverec."[7] Duální úlohou k Didonině úloze je úloha se zadáním: Je dán obsah obdélníkového půdorysu města. Postavte hradby, které jsou co nejkratší a tedy nejlépe hájitelné. (Řešením je také čtverec.)

Příklad 2.5.13 (Zdroj zadání i řešení [3])

Ze čtverce z papíru o délce strany a jsou ve všech rozích vystřihnuty shodné čtverce (obrázek 2.12). Ze zbytku je pak ohnutím obdélníkových stěn sestavena otevřená krabice (bez víka). Určete její rozměry tak, aby měla co největší objem.



Obrázek 2.12: Obrázek k příkladu 2.5.13

Řešení:

Krabice má tvar čtyřbokého hranolu s podstavou délky y a výškou x, pro které platí $2x+y = a$. Objem hranolu $V = xy^2 = \frac{2xy^2}{2}$ je největší (viz příklad 2.5.12), v případě, že $\frac{2x}{y} = \frac{1}{2}$, což nastane pro $y = 4x$. Rozměry krabice tedy budou $x = \frac{1}{6}a, y = \frac{2}{3}a$, maximální objem je dán vztahem

$$V = \frac{1}{6}a\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2}{27}a^3.$$

Příklad 2.5.14 (Zdroj zadání i řešení [3])

Určete absolutní extrémy funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

Řešení:

Funkce f je definována v množině $\mathbb{R}$, kde nabývá pouze nezáporných hodnot. Zřejmě platí $f(0) = \min f(x) = 0$. Zbývá určit ještě maximum funkce f.

Platí $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$. Protože $x^2\frac{1}{x^2} = 1$ je konstantní, bude podle AG nerovnosti pro čísla $x^2, \frac{1}{x^2}$ platit

$$1 \leq \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{2}.$$

Pro každé reálné číslo $x \neq 0$ je tedy $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$ a následně $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \leq \dfrac{1}{2}$. Rovnost platí pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$, to znamená pro $x = \pm 1$. Proto $f(\pm 1) = \max f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Příklad 2.5.15 (Zdroj zadání [7], řešení vlastní)

Dokažte, že pro kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Řešení:

Nerovnost upravíme ekvivalentně na vztah

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n} \geq \frac{n}{\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)}.$$

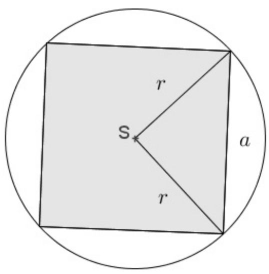
Jelikož upravená nerovnost je nerovností mezi aritmetickým a harmonickým průměrem, o které víme, že platí, platí i nerovnost původní.

Fyzikální úlohy, ve kterých se využívá nerovností mezi průměry

Příklad 2.5.16 (Zdroj zadání i části řešení [7])

Z kulatiny o průřezu P je vytesán trámek obdélníkového profilu. Jakého největšího průřezu může nabýt?

Řešení:



Obrázek 2.13: Trámek, čtverec

Hrany trámku označme a, b. Platí

$$ab = \sqrt{a^2 b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Maximální hodnoty ab dosáhneme, pokud $a = b$. Jedná se tedy o čtverec.

Velikost hrany $a = b$ a průřez S trámku odvodíme následovně

$$
\begin{aligned}
\text{(průřez kulatiny)} \qquad & P &=& \ \pi r^2, \\
\text{(poloměr kulatiny)} \qquad & r &=& \ \sqrt{\frac{P}{\pi}}, \\
\text{(obsah průřezu čtvercového profilu)} \qquad & S &=& \ a^2, \\
& a^2 &=& \ r^2 + r^2 = 2r^2, \\
\text{(hrana profilu max. průřezu)} \qquad & a &=& \ r\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Průřez obdélníkového profilu je $S = \left(r\sqrt{2}\right)^2 = 2r^2 = \dfrac{2P}{\pi}$.

Příklad 2.5.17 (Zdroj zadání i části řešení [7])

Zobrazujeme-li předmět lupou s ohniskovou vzdáleností f, platí pro velikost a předmětu a vzdálenost b jeho obrazu od optického středu lupy vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Pro které hodnoty a, b je $a \cdot b$ nejmenší?

Řešení:

K důkazu použijeme GH nerovnost

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{f}, \\
\frac{a+b}{ab} &= \frac{1}{f}, \\
\frac{ab}{a+b} &= f.
\end{aligned}
$$

Vztah $f = \dfrac{ab}{a+b}$ určuje ohniskovou vzdálenost lupy. Z GH nerovnosti pro a, b plyne

$$\sqrt{ab} \geq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Dosadíme ohniskovou vzdálenost f

$$
\begin{aligned}
\sqrt{ab} &\geq 2f, \\
ab &\geq (2f)^2.
\end{aligned}
$$

Rovnost mezi geometrickým a harmonickým průměrem nastává, pokud jednotlivé prvky, jejichž průměr určujeme, jsou si rovny. V našem případě, tedy $a = b$. (Součin ab je odhadnut zdola.) Dosáhneme tak nejnižší hodnoty součinu ab v poslední uvedené nerovnosti.

Kapitola 3

Nerovnosti

Na začátku této kapitoly uvedeme rozdíl mezi nerovností a nerovnicí.

- **Nerovnost:** dokazujeme, že nerovnost platí pro libovolné x ze zadané množiny čísel.
- **Nerovnice:** hledáme množinu všech čísel x ze zadané množiny, která jsou řešením nerovnice.

S nerovnostmi se potkáme především při studiu matematiky na vysoké škole. Pro postup vyřešení důkazů nerovností neexistuje žádná univerzální metoda. Samozřejmě se ale i u těchto důkazů vyskytují postupy, z nichž je mnoho do značné míry „trikových", které můžeme uplatnit opakovaně. V olympiádních úlohách můžeme narazit mimo AG nerovnosti např. na Cauchyovu či trojúhelníkovou nerovnost. Dále si proto představíme některé ze zajímavých nerovností, které mají v matematice důležité postavení.

3.1 Zavedení pojmů

Dříve než se s nerovnostmi seznámíme, definujeme několik pojmů, které budeme potřebovat k pochopení dalších vět a důkazů. Hlavní literaturou pro kapitolu zavedení pojmů je [13].

3.1.1 Vektorový prostor

Definice 3.1.1 Vektorový (lineární) prostor je množina $V \neq \emptyset$ prvků nazývaných vektory splňující následující axiomy:

1. Ke každé dvojici $x, y \in V$ je jednoznačně přiřazen vektor $x + y \in V$ nazývaný součtem x a y takový, že platí:

   (a) $x + y = y + x$,

   (b) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

   (c) ve V existuje jediný vektor o takový, že $x + o = x$ pro každé $x \in V$,

   (d) ke každému $x \in V$ existuje jediný vektor $-x \in V$ takový, že $x + (-x) = o$.

2. Ke každé dvojici $\alpha \in \mathbb{R}, x \in V$ je jednoznačně přiřazen vektor $\alpha x \in V$, který se nazývá součinem skaláru α a vektoru x takový, že platí:

   (a) $\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x$,

   (b) $1x = x$, pro každé $x \in V$.

3. Platí:

   (a) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$,

   (b) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.

3.1.2 Skalární součin

Definice 3.1.2 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a nechť ke každé dvojici vektorů $x, y \in V$ je přiřazeno reálné číslo $(x|y)$ takové, že pro libovolná $x, y, z \in V$ platí:

1. $(x|y) = (y|x)$,

2. $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$,

3. $(\alpha x|y) = \alpha (x|y)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$,

4. $(x|x) \geq 0$ pro všechna $x \in V$,

5. $(x|x) = 0$ právě když $x = o$.

Podle uvedených vlastností můžeme říci, že skalární součin je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou, kterou budeme značit $(x|y)$. Prostor se skalárním součinem nazýváme unitární.

Pro vektory $x, y \in V$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definujeme skalární součin vztahem

$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

3.1.3 Metrický prostor

Definice 3.1.3 Nechť $X \neq \emptyset$. Zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ se nazývá metrika (vzdálenost) na X, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ platí:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Množina X spolu s metrikou d se nazývá metrickým prostorem a značí se (X, d).

Metrikou na Eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_n$ rozumíme zobrazení $d : \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \to [0, \infty)$ definované předpisem

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}, \tag{3.1}$$

kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}_n$.

3.1.4 Normovaný lineární prostor

Definice 3.1.4 Nechť X je lineární prostor. Funkce $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ se nazývá norma (velikost) na X, jestliže má následující vlastnosti:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in X$.

Lineární prostor, na kterém je definovaná norma, se nazývá normovaný lineární prostor. Existuje mnoho norem, které bychom mohli definovat. Pro účely této práce nám však postačí norma na prostoru $\mathbb{E}_n$ daná vztahem

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1.$$

Speciálním případem pro $p = 2$ je tzv. Eukleidovská norma vektoru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, pro kterou platí

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{3.2}$$

Později zavedeme ještě normu na prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí. Vzhledem k tomu, že už nyní známe vlastnosti skalárního součinu, můžeme vztah (3.2) nahradit vztahem $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pro nerovnosti jako je nerovnost Hölderova či Minkowského, musíme definovat pojmy prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí L_p a normu na tomto prostoru. Veškeré informace k Lebesgueovým prostorům, byly čerpány z [13].

Definice 3.1.5 (Vnější míra) Vnější míru libovolné podmnožiny $\Omega \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$m^*(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : I_k \in \mathcal{I}, \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\},$$

kde vztahem $|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ rozumíme n-dimensionální objem intervalu $I \in \mathbb{R}^n$. Systém všech takových intervalů značíme $\mathcal{I}$.

Vnější míru $m^*(\Omega)$ pro měřitelné množiny nazýváme Lebesgueovou mírou a značíme $m(\Omega)$.

Definice 3.1.6 (Měřitelná množina) Podmnožina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá Lebesgueovsky měřitelná, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje množina P_ε, která je sjednocením nejvýše spočetné množiny intervalů a taková, že $\Omega \subset P_\varepsilon$ a $m^*(P_\varepsilon \backslash \Omega) < \varepsilon$.

Definice 3.1.7 (Měřitelná funkce) Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\left(\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\right)$ se nazývá měřitelná, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ je množina $\Omega_{f,t} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$ měřitelná.

Definice 3.1.8 (Měřitelná funkce na množině) Funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá měřitelná funkce na množině Ω, jestliže Ω je měřitelná a rozšíření funkce $\tilde{f}(x)$ je měřitelná funkce

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x), & x &\in \Omega, \\ \tilde{f}(x) &= -\infty, & x &\in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Definice 3.1.9 (Lebesgueovsky integrovatelná funkce) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Říkáme, že funkce je Lebesgueovsky integrovatelná, jestliže alespoň jeden z integrálů $\int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)\mathrm{d}m$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)\mathrm{d}m$ funkce f vzhledem k Lebesgueově míře[1] m je konečný. Platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)\mathrm{d}m,$$

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \max\{f(x), 0\} \geq 0, \\ f_-(x) &= \max\{-f(x), 0\} \geq 0. \end{aligned}$$

Definice 3.1.10 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Množinu všech Lebesgueovsky integrovatelných funkcí u na Ω takových, že

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \qquad\qquad 1 \leq p < \infty$$

značíme $L_p(\Omega)$.

Nyní, když jsme uvedli základní informace o L_p, přejdeme ke vzorci normy na těchto prostorech.

Pro $1 \leq p < \infty$ je norma dána vztahem

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3.2 Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost je jednou z těch, se kterými jsme se mohli setkat už při studiu planimetrie na střední škole. Konkrétně, pokud jsme zjišťovali, zda zadané úsečky o známých délkách mohou tvořit trojúhelník. Mimo planimetrie má však tato nerovnost i další využití.

Trojúhelníková nerovnost vyjadřuje, že součet délek libovolných dvou stran trojúhelníku není nikdy menší než strana třetí. Pokud by tento součet byl menší, nejednalo by se o trojúhelník. Vztah, který v této nerovnosti platí, nyní odvodíme.

[1] V integrálu je $\mathrm{d}m$ často zaměňováno za $\mathrm{d}x$.

Nechť jsou zadané v rovině (v prostoru $\mathbb{E}_2$) tři body X, Y, Z o souřadnicích $X = [x_1, x_2]$, $Y = [y_1, y_2]$, $Z = [z_1, z_2]$. Vzdálenost těchto bodů je dána vztahy:

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d(Y, Z) &= \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}, \\ d(X, Z) &= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

Pro trojúhelníkovou nerovnost tedy platí

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}. \quad (3.3)$$

Rovnost nastává v případě, že zadané tři body leží v jedné přímce. S trojúhelníkovou nerovností jsme se již setkali při zavedení metrického prostoru

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

a dále při zavedení normovaného lineárního prostoru

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

V tělese $\mathbb{R}$ platí také trojúhelníková nerovnost daná vztahem pro absolutní hodnoty prvků tělesa

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Uvedeme důkaz trojúhelníkové nerovnosti a dále několik řešených příkladů.

Důkaz 3.2.1 (Trojúhelníková nerovnost, vlastní)

Dokažme vztah $|x + y| \leq |x| + |y|$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Jistě platí, že

$$\begin{aligned} x \leq |x| \quad &\wedge \quad y \leq |y|, \\ -x \leq |x| \quad &\wedge \quad -y \leq |y|. \end{aligned}$$

Jestliže sečteme nerovnosti v řádcích, dostáváme

$$\begin{aligned} x + y &\leq |x| + |y|, \\ -x - y &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Protože pro $x + y \geq 0$ platí, že $|x + y| = x + y$ a pro $x + y \leq 0$ je $|x + y| = -x - y$ (jiná možnost nastat nemůže), lze $|x + y|$ dosadit do obou nerovností. Získali jsme dokazovanou nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

Příklad 3.2.2 (Zdroj zadání [15], řešení vlastní)

Nechť a, b, c jsou délky stran obecného trojúhelníku. Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2\,(ab + bc + ca)\,.$$

Řešení:

Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$a < b + c, \qquad b < c + a, \qquad c < b + a.$$

Samozřejmě musí také platit vztahy

$$a - b < c, \qquad b - c < a, \qquad c - a < b. \tag{3.4}$$

Umocníme jednotlivé nerovnosti (3.4) a následně všechny sečteme

$$\begin{aligned}
a^2 - 2ab + b^2 &< c^2,\\
b^2 - 2bc + c^2 &< a^2,\\
c^2 - 2ca + a^2 &< b^2,\\
2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 - b^2 - c^2 &< 2\,(ab + bc + ca)\,.
\end{aligned}$$

Po úpravě levé strany dostaneme nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 < 2\,(ab + bc + ca)$.

Příklad 3.2.3 (Zdroj zadání [15], řešení vlastní)

Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí

$$\frac{(a^2 + b^2)\,c^2 - (a^2 - b^2)^2}{abc^2} \leq 2.$$

Řešení:

Nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar $(a^2 + b^2)\,c^2 - (a^2 - b^2)^2 \leq 2abc^2$.

Následuje řada níže uvedených ekvivalentních úprav

$$\begin{aligned} a^2c^2 + b^2c^2 - 2abc^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2 &\leq 0, \\ \left(a^2 + b^2 - 2ab\right)c^2 - \left(a^2 - b^2\right)^2 &\leq 0, \\ (a-b)^2\, c^2 - (a-b)^2\,(a+b)^2 &\leq 0, \\ (a-b)^2 \cdot \left[c^2 - (a+b)^2\right] &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Součin v nerovnosti (3.5) bude menší než 0, pokud právě jedna ze závorek $(a-b)^2$ nebo $[c^2 - (a+b)^2]$ bude menší než 0. Platí, že druhá mocnina není nikdy záporná. Zbývá nám tedy vyřešit, kdy bude $\left[c^2 - (a+b)^2\right] < 0$. Protože v trojúhelníku platí trojúhelníková nerovnost, tak

$$a + b > c, \qquad \text{zároveň i} \qquad \left(a^2 + b^2\right)^2 > c^2$$

a tedy vždy platí, že

$$c^2 - (a+b)^2 < 0.$$

Zbývá ještě vyřešit, kdy ve vztahu (3.5) nastane rovnost

$$(a-b)^2 = 0 \quad \vee \quad c^2 - (a+b)^2 = 0.$$

Rovnost $(a-b)^2 = 0$ platí v případě, že $a = b$. Pokud by $c^2 - (a+b)^2 = 0$, body trojúhelníku by ležely v přímce (nejednalo by se o trojúhelník). Rovnost tedy platí pouze pro rovnoramenné trojúhelníky.

3.3 Cauchyova nerovnost

Cauchyova nerovnost je jednou z nejdůležitějších nerovností matematiky. Časté využití má zejména v lineární algebře a matematické analýze. Nerovnost se také někdy nazývá Cauchyova-Schwarzova, Cauchyova-Buňakovského nebo Cauchyova-Schwarzova-Buňakovského podle matematiků, kteří ji zobecnili. Dále budeme používat pouze stručný název Cauchyova nerovnost. Hlavním zdrojem informací pro tuto kapitolu je [11], [12].

Věta 3.3.1 (Cauchyova nerovnost, [11]**)** *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pro každé dvě n-tice $u_i, v_i, \in \mathbb{R}$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)^2 \leq \left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $u_i = 0$, nebo $v_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, nebo existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $v_i = tu_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ekvivalentní nerovností je taková nerovnost, kterou získáme odmocněním obou stran právě uvedené Cauchyovy nerovnosti

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n| \leq \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)}.$$

Případně můžeme používat zkrácený zápis

$$\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_iv_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Samozřejmě nesmíme opomenout na vyjádření Cauchyovy nerovnosti pomocí skalárního součinu

$$|(u|v)| \leq |u| \cdot |v|,$$

kde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pokud předchozí nerovnost upravíme, můžeme se přesvědčit, že se opravdu jedná o Cauchyovu nerovnost (pro $n = 2$: $|u_1v_1 + u_2v_2| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$).

Důkaz 3.3.2 (Cauchyova nerovnost, [12]**)** Uvažujme kvadratickou rovnici s neznámou t

$$\underbrace{(u_1t - v_1)^2 + (u_2t - v_2)^2 + \ldots + (u_nt - v_n)^2}_{\text{nezáporné, rovnice má nejvýše 1 kořen}} = 0. \tag{3.6}$$

Rovnici převedeme do tvaru $At^2 + Bt + C$, kde

$$\begin{aligned} A &= u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2, \\ B &= -2(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n), \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2. \end{aligned}$$

Protože rovnice má nejvýše 1 kořen, je diskriminant kvadratické rovnice $D \leq 0$

$$B^2 - 4AC \leq 0 \qquad\qquad AC \geq \left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

Pokud do poslední uvedené nerovnice dosadíme za A, B, C získáme

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)^2 \leq \left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right). \tag{3.7}$$

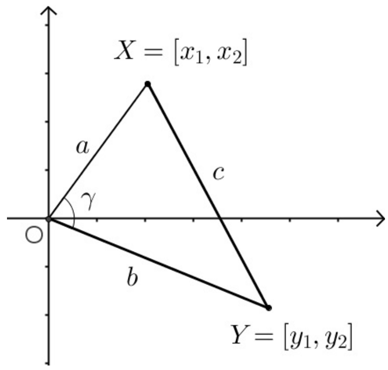
Nerovnost (3.7) je Cauchyova nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat. Rovnost nastává pro $D = 0$, a to je v případě, že se závorky v rovnici (3.6) rovnají nule. Musí platit

$$\begin{aligned} v_1 &= tu_1, \\ v_2 &= tu_2, \\ &\vdots \\ v_n &= tu_n. \end{aligned}$$

Tento důkaz je do značné míry „trikový”.

□

Cauchyova nerovnost má také geometrický význam. Nechť je $n = 2$ a vektory $x, y \neq 0$.



Obrázek 3.1: Geometrický význam Cauchyovy nerovnosti

Pro úsečky a, b, c z obrázku 3.1 platí

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ b &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ c &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Podle kosinové věty je $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, čili

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1y_1 - y_1^2 - x_2^2 + 2x_2y_2 - y_2^2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}. \end{aligned}$$

Cauchyova nerovnost pro $n = 2$: $|x_1y_1 + x_2y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Pro nenulové vektory x, y platí, že $|\cos\gamma| \leq 1$, kde γ je úhel sevřený vektory x, y [1].

Důkaz 3.3.3 *[7]* Dokažte Cauchyovu nerovnost

$$\left(u_1v_1 + u_2v_2\right)^2 \le \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2\right) \tag{3.8}$$

pomocí nerovnosti AG.

Dokazovanou nerovnost (3.8) ekvivalentně upravíme na

$$\begin{aligned}
\left(u_1v_1\right)^2 + \left(u_2v_2\right)^2 + 2u_1v_1u_2v_2 &\le u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2, \\
u_1v_1u_2v_2 &\le \frac{\left(u_1v_2\right)^2 + \left(u_2v_1\right)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Je-li levá strana kladná, pak poslední uvedená nerovnost je nerovností AG $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$ pro

$$x = \left(u_1v_2\right)^2, \qquad y = \left(u_2v_1\right)^2.$$

Pokud je záporná či nulová je nerovnost triviální. Protože všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, je nerovnost (3.8) dokázána.

$\square$

Vztah mezi trojúhelníkovou a Cauchyovou nerovností

Ve vztahu pro trojúhelníkovou nerovnost (3.3) přejdeme od souřadnic bodů X, Y, Z k souřadnicím vektorů $u = YX, v = ZY, w = ZX$. Přičemž platí $u_i = x_i - y_i, v_i = y_i - z_i, w_i = x_i - z_i$ [7],

$$\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \le \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Po umocnění obou stran nerovnosti a dosazení $w_i = u_i + v_i$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\left(u_1 + v_1\right)^2 + \left(u_2 + v_2\right)^2 &\le u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \\
u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 &\le u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \\
u_1v_1 + u_2v_2 &\le \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Vzhledem k libovolnosti bodů musí nerovnost platit i pro vektor $(-u_1, -u_2)$,

$$-u_1v_1 - u_2v_2 \le \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{3.10}$$

V případě, že obě nerovnosti (3.9) i (3.10) umocníme, získáme k nim ekvivalentní nerovnost

$$\left(u_1v_1 + u_2v_2\right)^2 \le \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2\right),$$

kterou nazýváme Cauchyovou nerovností v $\mathbb{R}^2$. Podobným způsobem lze z trojúhelníkové nerovnosti vyvodit vyjádření Cauchyovy nerovnosti v $\mathbb{R}^3$.

Nyní uvedeme několik řešených příkladů na Cauchyovu nerovnost.

Příklad 3.3.4 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)

Pomocí Cauchyovy nerovnosti dokažte následující nerovnost pro kladná reálná čísla a_i, b_i, kde $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 .$$

Řešení:

Pokud do vztahu

$$\left(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2\right) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2 \tag{3.11}$$

dosadíme

$$u_i = \sqrt{a_ib_i}, \qquad v_i = \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

získáme

$$\left(\sqrt{a_1b_1}^2 + \sqrt{a_2b_2}^2 + \dots + \sqrt{a_nb_n}^2\right)\left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}^2 + \sqrt{\frac{b_2}{a_2}}^2 + \dots + \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}^2\right)$$
$$\geq \left(\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + \sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} + \dots + \sqrt{a_nb_n}\cdot\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)^2 .$$

Zbývá nám pouze poslední úprava k tomu, abychom dokázali zadanou nerovnost,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 .$$

Příklad 3.3.5 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)

Pomocí Cauchyovy nerovnosti dokažte pro přípustná $x, y, z > 0$ nerovnost

$$14\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq (x + 2y + 3z)^2 .$$

Řešení:

Nerovnost budeme dokazovat pro $n = 3$. Jestliže vhodně zvolíme v Cauchyově nerovnosti $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z$, příklad je vyřešen.

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq (x + 2y + 3z)^2 .$$

Příklad 3.3.6 (Zdroj zadání [11], řešení vlastní)

Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z > 0$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}.$$

Řešení:

Uvažme nyní Cauchyovu nerovnost pro $n = 3$. Jestliže v nerovnosti

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \leq \left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)$$

položíme $u_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{y}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{z}{\sqrt{6}}, v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, získáme novou nerovnost, která je ekvivalentní se zadanou nerovností

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{z}{\sqrt{6}}\right) \leq \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)}_{=1}. \tag{3.12}$$

Použití Cauchyovy nerovnosti, zdroj [11]

- Pokud pro daná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ položíme za u_i číslo $\sqrt{a_i}$ a za v_i číslo $\sqrt{\frac{1}{a_i}}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, pak Cauchyova nerovnost

$$\left(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2\right) \geq (u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n)^2 \tag{3.13}$$

přejde do tvaru

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, \tag{3.14}$$

kde rovnost platí jen v případě, když $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Příklad 3.3.7 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)

Pomocí Cauchyovy nerovnosti dokažte pro reálná $x, y, z > 0$ nerovnost

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}.$$

Řešení:

Zvolíme $u_i = \sqrt{a_i}, v_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}, i = 1, 2, 3$, kde

$$\begin{aligned} a_1 &= 1+x, \\ a_2 &= 1+y, \\ a_3 &= 1+z. \end{aligned}$$

Po dosazení do Cauchyovy nerovnosti dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned}(3+x+y+z)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\right) &\geq \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y}}+\frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1+z}}\right)^2,\\ (3+x+y+z)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\right) &\geq 9.\end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $3+x+y+z$ získáme zadanou nerovnost.

- Položíme-li v (3.13) $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 1$, dojdeme k závěru, že pro libovolná reálná čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ platí nerovnost

$$\left(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2\right)\cdot n \geq (u_1+u_2+\ldots+u_n)^2, \tag{3.15}$$

přičemž rovnost nastane, právě když $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.

Příklad 3.3.8 (Zdroj zadání a části řešení [11])

Nechť pro daná čísla $a, b \in (0; 1)$ platí $a + b = 1$. Dokažte nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Řešení:

Nerovnost budeme dokazovat pomocí nerovnosti (3.15), kde $u_1 = a+\frac{1}{a}, u_2 = b+\frac{1}{b}$. Použijeme rovnost $a + b = 1$ a dále nerovnost

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}$$

a získáme tak

$$\begin{aligned}2\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right] &\geq \left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2,\\ \left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right] &\geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pokud by platilo $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$, zadaná nerovnost by byla dokázána,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 &\geq 25,\\ 1+\frac{1}{ab} &\geq 5,\\ \frac{1}{ab} &\geq 4,\\ ab &\leq \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dále užijeme nám již známou AG nerovnost. Protože AG nerovnost platí, je zadaná nerovnost dokázána,

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}, \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{1}{2}, \\ ab &\leq \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Rovnost nastává pro $a = b = \dfrac{1}{2}$.

- V případě, že budeme odhadovat součet $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ reálných čísel u_i, lze součet upravit do tvaru

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sqrt{a_1} \cdot \frac{u_1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \cdot \frac{u_2}{\sqrt{a_2}} + \ldots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{a_n}}$$

s vhodnými kladnými čísly a_i, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a poté uplatníme Cauychovu nerovnost (3.13)

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2 \leq \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{u_n^2}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n). \tag{3.17}$$

Rovnost nastane, když $\dfrac{u_i}{\sqrt{a_i}} = t\sqrt{a_i}$ neboli $u_i = ta_i, t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n.$

Příklad 3.3.9 (Zdroj zadání i řešení [11])

Dokažte, že pro libovolná čísla $a, b, c > 0$ platí nerovnost

$$abc\,(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Řešení:

Použijeme vztah (3.17) pro $n = 3$, kde $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, a_1 = c, a_2 = a, a_3 = b$,

$$\begin{aligned}(u_1 + u_2 + u_3)^2 &\leq \left(\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3}\right)(a_1 + a_2 + a_3), \\ (a + b + c)^2 &\leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c + a + b).\end{aligned}$$

Vydělíme-li tuto nerovnost výrazem $(a + b + c)$ a následně vynásobíme abc, získáme dokazovanou nerovnost

$$\begin{aligned}(a + b + c) &\leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right), \\ abc\,(a + b + c) &\leq a^3b + b^3c + c^3a.\end{aligned}$$

3.4 Jensenova nerovnost

Jensenova nerovnost je velice důležitou nerovností matematické analýzy. V této kapitole si nerovnost nejen představíme, ale také si ukážeme, že z ní lze vyvodit většinu ze známých nerovností. Hlavní literaturou je [14].

Pojem Jensenovy nerovnosti velice úzce souvisí s pojmem konvexní funkce. Konvexní funkce je taková funkce, jejíž graf leží nad její libovolnou tečnou. Příkladem konvexní funkce je například funkce daná předpisem $f : y = x^2$. Opakem je funkce konkávní, jejíž graf leží celý pod tečnou v libovolném bodě jejího grafu. Uvedeme opět aspoň jeden příklad konkávní funkce $f : y = -x^2$.

O konvexnosti či konkávnosti funkce lze rozhodnout pomocí druhé derivace funkce $f''(x)$, pokud existuje. Jestliže $f'' \geq 0$, pak je funkce konvexní (ryze konvexní pro $f'' > 0$). Pro $f'' \leq 0$ dostáváme funkci konkávní (ryze konkávní $f'' < 0$). Pokud je funkce f konvexní na intervalu I, pak funkce $-f$ je na tomto intervalu konkávní a naopak, pokud je f na intervalu I konkávní, pak funkce $-f$ je zde konvexní.

Věta 3.4.1 (Jensenova nerovnost, [14]**)** *Nechť f je konvexní funkce (reálné proměnné) na intervalu I. Pak pro libovolnou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí nerovnost*

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \lambda_2 f\left(x_2\right) + \ldots + \lambda_n f\left(x_n\right).$$

Konvexní kombinací čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme každé reálné číslo $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, kde koeficienty λ_i splňují tyto podmínky

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{a} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Konvexnost funkce je hlavním předpokladem při využití Jensenovy nerovnosti. Pro konkávní funkce platí analogická věta, pouze nerovnost je opačná.

Důkaz 3.4.2 (Odvození AG nerovnosti z Jensenovy nerovnosti, [14]**)** Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{3.18}$$

pomocí Jensenovy nerovnosti.

Pokud je x_i nulové pro některé $i = 1, 2, \ldots, n$, je nerovnost (3.18) zřejmá, neboť její pravá strana je rovna nule. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Funkce $f(x) = \ln x$ je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť platí $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Z Jensenovy nerovnosti volbou $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ získáme

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\ln x_1 + \frac{1}{n}\ln x_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln x_n, \\
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) &\geq \ln\left(x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{1}{n}}\right), \\
\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},
\end{aligned}$$

což je nerovnost (3.18).

□

Možná bychom si teď mohli položit otázku, proč jsme použili zrovna funkci logaritmu. Odpověď je taková, že logaritmus poměrně elegantním způsobem převádí součet na součin a naopak. Tento převod se právě u nerovnosti AG vyskytuje. Pokud bychom použili logaritmus o základu menším než jedna, je nutné otočit znaménko nerovnosti při odstraňování logaritmů v posledním kroku důkazu. Dále uvedeme několik příkladů vyřešených pomocí Jensenovy nerovnosti.

Příklad 3.4.3 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)
Vnitřní úhly trojúhelníku jsou α, β, γ. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Řešení:
Funkce $\sin x$ je na intervalu $(0, \pi)$ konkávní. Budeme tedy vycházet ze vztahu

$$\lambda_1 \sin x_1 + \lambda_2 \sin x_2 + \lambda_3 \sin x_3 \leq \sin\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3\right),$$

kde volíme $\lambda_i = \dfrac{1}{3}, i = 1, 2, 3$. Pro Jensenovu nerovnost pak platí, že

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} &\leq \sin\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= \sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Jistě platí, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, jelikož se jedná o součet vnitřních úhlů v trojúhelníku. Po vynásobení nerovnosti třemi dostáváme zadanou nerovnost $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Příklad 3.4.4 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)

Vnitřní úhly trojúhelníku jsou α, β, γ. Dokažte, že platí nerovnost

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Řešení:

Funkce tangens je na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ konvexní. Dosazujeme do vztahu

$$\lambda_1 \operatorname{tg} x_1 + \lambda_2 \operatorname{tg} x_2 + \lambda_3 \operatorname{tg} x_3 \geq \operatorname{tg}\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3\right).$$

Použijeme Jensenovu nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &\geq \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{6}\right) = \\ &= \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Získali jsme nerovnost $\frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pokud vynásobíme celou nerovnost třemi, je důkaz hotov.

Příklad 3.4.5 (Zdroj zadání [12], řešení vlastní)

Vnitřní úhly trojúhelníku jsou α, β, γ. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Řešení:

Na rozdíl od předchozích příkladů, kde byl na levé straně součet členů, je nyní na levé straně součin členů. Použijeme AG nerovnost, která převede součin čísel na součet

$$\sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \leq \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}.$$

Pokud bude platit

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

bude důkaz hotov. Využijeme Jensenovy nerovnosti

$$\frac{1}{3} \cdot \sin\alpha + \frac{1}{3} \cdot \sin\beta + \frac{1}{3} \cdot \sin\gamma \leq \sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dokázali jsme zadanou nerovnost.

Příklad 3.4.6 (Zdroj zadání a řešení [14])

Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1; 1\rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je na intervalu $\langle -1; 1\rangle$ konkávní (grafem je polokružnice). Z Jensenovy nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-a^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} &\leq \sqrt{1-\frac{(a+b)^2}{4}}, \\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq 2\sqrt{\frac{4-(a+b)^2}{4}}, \\
\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq \sqrt{4-(a+b)^2}.
\end{aligned}$$

3.5 Youngova nerovnost

Youngova nerovnost pro potřeby této práce bude sloužit především jako prostředek pro důkaz Hölderovy nerovnosti. Samozřejmě to nemění nic na její důležitosti a možnostech uplatnění v matematické analýze.

Věta 3.5.1 (Youngova nerovnost [14]**)** *Pro libovolnou dvojici čísel $x \geq 0, y \geq 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 1, q > 1$ pro než je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{3.19}$$

Čísla p, q nazýváme sdruženými průměry. Pokud upravíme AG nerovnost, dostaneme speciální případ Youngovy nerovnosti. Pro $n = 2$ z AG nerovnosti plyne

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \tag{3.20}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y. \tag{3.21}$$

Zobecníme AG nerovnost uvedenou ve vztahu (3.21). Buď $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak pro každé $x \geq 0, y \geq 0$ platí nerovnost

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y. \tag{3.22}$$

Vztah (3.22) je pouze jiným vyjádřením Youngovy nerovnosti. V případě, že ve vztahu (3.22) je $p = q = 2$ dostáváme AG nerovnost (3.21). Pro $x = a^p$, $y = b^q$ a čísla $a, b \geq 0$ platí

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Důkaz 3.5.2 (Youngova nerovnost, důkaz pomocí Jensenovy nerovnosti, [14]**)**
Pro funkci $f(u) = \ln u$ (na $\mathbb{R}^+$ konkávní, protože $f''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ pro $\forall u > 0$) platí:

$$\ln(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geq \lambda_1 \ln u_1 + \lambda_2 \ln u_2.$$

Dosadíme-li $\lambda_1 = \frac{1}{p}, \lambda_2 = \frac{1}{q}, u_1 = x^p, u_2 = y^q$, pak hledanou nerovnost získáme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q, \\
\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \ln x + \ln y, \\
\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) &\geq \ln(xy), \\
\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} &\geq xy.
\end{aligned}$$

□

Dále uvedeme ještě jeden z důkazů Youngovy nerovnosti.

Důkaz 3.5.3 (Youngova nerovnost, důkaz vlastní**)** Youngovu nerovnost budeme dokazovat ve verzi (3.22)

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y, \qquad \text{kde } \forall x, y \geq 0, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pokud $x = 0$ nebo $y = 0$ je nerovnost zřejmá. Pro $x, y > 0$ označíme $\frac{1}{p} = \alpha$ a tedy

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \alpha,$$

kde $\alpha \in (0; 1)$. Dokazovanou Youngovu nerovnost postupně ekvivalentně vyjádříme

$$\begin{aligned}
x^\alpha \cdot y^{1-\alpha} &\leq \alpha x + (1-\alpha) y, \\
x^\alpha y^{1-\alpha} &\leq \left(\alpha\frac{x}{y} + 1 - \alpha\right) y, \\
\frac{x^\alpha}{y^\alpha} y &\leq \left(\alpha\frac{x}{y} + 1 - \alpha\right) y, \\
\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &\leq \alpha\frac{x}{y} + 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

V poslední uvedené nerovnosti provedeme substituci $z = \dfrac{x}{y}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} z^{\alpha} &\leq \alpha z + 1 - \alpha, \\ f(z) := z^{\alpha} - \alpha z + \alpha - 1 &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Poslední nerovnost dokážeme pro všechna $z > 0$ pomocí diferenciálního počtu a faktu, že levá strana nerovnosti nabývá nulové maximální hodnoty. Extrém se nachází v bodě, v němž je první derivace rovna nule. Vypočteme první derivaci

$$f'(z) = (z^{\alpha} - \alpha z + \alpha - 1)' = \alpha z^{\alpha-1} - \alpha.$$

První derivaci položíme rovno 0 a vyjádříme z

$$\begin{aligned} \alpha z^{\alpha-1} - \alpha &= 0, \\ \alpha \left(z^{\alpha-1} - 1\right) &= 0, \\ z^{\alpha-1} &= 1, \\ \ln z^{\alpha-1} - \ln 1 &= 0, \\ (\alpha - 1) \ln z &= 0, \\ \ln z &= \ln 1, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Možný extrém jsme nalezli pro $z = 1$. Zbývá určit, zdali se jedná o maximum či minimum. K tomu použijeme opět diferenciální počet, konkrétně druhou derivaci

$$f''(z) = (z^{\alpha} - \alpha z + \alpha - 1)'' = \left(\alpha z^{\alpha-1} - \alpha\right)' = \alpha (\alpha - 1) z^{\alpha-2}.$$

Určíme hodnotu druhé derivace pro $z = 1$

$$f''(1) = \alpha (\alpha - 1) < 0.$$

Protože druhá derivace je menší než nula, je funkce f konkávní a extrém v $z = 1$ je jejím maximem. Jelikož $f(1) = 0$, platí (3.23) a Youngova nerovnost je tímto dokázána.

$\square$

3.6 Bernoulliova nerovnost

V této kapitole se seznámíme s další nerovností, tentokrát Bernoulliovou či také Bernoulliho. Používáme ji většinou k důkazům složitějších matematických vět. Literatura k této kapitole [14].

Věta 3.6.1 (**Bernoulliova nerovnost**, [14]) *Pro každé reálné číslo $x > -1$ a libovolné kladné reálné číslo $p \neq 1$ platí*

$$(1+x)^p \geq 1+px \qquad (\text{pro } p > 1), \tag{3.24}$$

$$(1+x)^p \leq 1+px \qquad (\text{pro } 0 < p < 1). \tag{3.25}$$

Důkaz 3.6.2 (Bernoulliova nerovnost, [14]**)** Nejprve předpokládáme, že $p > 1$ a dokážeme nerovnost (3.24). Pokud v této nerovnosti platí, že $1+px \leq 0$, bude nerovnost splněna triviálně. Pokud pravá strana bude kladná, pak po logaritmování získáme nerovnost

$$p \ln(1+x) \geq \ln(1+px). \tag{3.26}$$

Nerovnost (3.26) plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, která je konkávní na $\mathbb{R}^+$. S ohledem na $p > 1$ jsou obě čísla $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ a $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{p}$ kladná a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\ln(1+px) &= \frac{1}{p}\ln(1+px) + \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln 1 \\ &\leq \ln\left(\frac{1}{p}(1+px) + \left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot 1\right) = \ln(1+x), \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\geq \frac{1}{p}\ln(1+px), \\ p\ln(1+x) &\geq \ln(1+px). \end{aligned}$$

Důkaz pro nerovnost (3.25) je obdobný. Jensenova nerovnost pro konvexní funkci bude mít koeficienty $\lambda_1 = p, \lambda_2 = 1-p$,

$$p\ln(1+x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln 1 \leq \ln(p(1+x) + (1-p)\cdot 1) = \ln(1+px).$$

Tedy

$$\begin{aligned} p\ln(1+x) &\leq \ln(1+px), \\ (1+x)^p &\leq 1+px. \end{aligned}$$

□

3.7 Hölderova nerovnost

Hölderova nerovnost má velký význam při zkoumání L_p prostorů. Zároveň nesmíme opomenout, že díky této nerovnosti můžeme dokázat Minkowského nerovnost, viz kapitola 3.8. K pochopení následujících vět je důležitá znalost L_p prostorů, alespoň v takovém měřítku, které je uvedeno v této práci v kapitole 3.1.4.

Nyní uvedeme Hölderovu nerovnost uvažovanou na Eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_n$.

Věta 3.7.1 (Hölderova nerovnost, [13]**)** *Nechť x_i, y_i, pro $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou reálná čísla a nechť $p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pak nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.27}$$

nazýváme Hölderovou nerovností.

Rovnost nastává v případě, že $x_i = ty_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a pro $t \in \mathbb{R}$. Pro $0 < p < 1$ platí ve větě 3.7.1 obrácená nerovnost ve vztahu (3.27). Následně provedeme důkaz věty 3.7.1 (pro obrácenou nerovnost je analogický).

Důkaz 3.7.2 (Hölderova nerovnost, důkaz vlastní**)** K důkazu využijeme vlastností Youngovy nerovnosti. Připomeňme, že pro normu na $\mathbb{E}_n$ platí $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Do nerovnosti

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$$

dosadíme za x, y [13]

$$x = \frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p}, \qquad y = \frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q},$$

kde $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, $\|u\|_p, \|v\|_q > 0$. Právě získaná nerovnost má tvar

$$\left(\frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q}.$$

Pomocí ekvivalentních úprav můžeme dále nerovnost upravit

$$\frac{|u_i|}{\|u\|_p} \cdot \frac{|v_i|}{\|v\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|u_i|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|v_i|^q}{\|v\|_q^q}.$$

Sečteme nerovnosti pro $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \cdot \sum_{i=1}^{n} |u_i||v_i| \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|u\|_p^p} \cdot \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|v\|_q^q} \cdot \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q. \tag{3.28}$$

Díky rovnosti

$$\|u\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \tag{3.29}$$

lze vztah (3.28) dále upravovat (sumy a normy v pravé části nerovnosti se zkrátí)

$$\frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \cdot \sum_{i=1}^{n} |u_i||v_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vynásobením a úpravou normy dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |u_i||v_i| &\leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q, \\ \sum_{i=1}^{n} |u_i||v_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov.

□

Poznámka 3.7.3 *Někdy se můžeme setkat s vyjádřením Hölderovy nerovnosti ve tvaru*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.30}$$

platné za stejných podmínek jako nerovnost (3.27).

Pro $p = q = 2$ přechází Hölderova nerovnost v Cauchyovu, tzn. Hölderova nerovnost je zobecněním Cauchyovy nerovnosti.

Důkaz nerovnosti $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$ pro zadaná reálná čísla provedeme pouze úvahou. Pravá strana nerovnosti je větší než levá díky tomu, že sčítáme absolutní hodnoty součinů čísel (jsou vždy kladné), kdežto na levé straně můžeme sčítat jak kladné, tak záporné hodnoty součinů $x_i y_i$ a teprve z nich spočteme absolutní hodnotu. Rovnost nastává, pokud všechny součiny $x_i y_i$ jsou buď nezáporné nebo nekladné.

S Hölderovou nerovností se také můžeme setkat, pokud budeme zkoumat problematiku nekonečných řad. Nechť $x_i, y_i \in \mathbb{R}, p, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pak platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.31}$$

Z nerovnosti (3.31) plyne, že pokud jsou řady na pravé straně konvergentní, je pravá strana omezená a tudíž musí být konvergentní i řada na levé straně. [17]
Na začátku této kapitoly jsme uváděli, že se Hölderova nerovnost také často vyskytuje v prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí. Uveďme proto nyní tuto nerovnost na prostoru L_p.

Věta 3.7.4 (Hölderova nerovnost na L_p, [13]**)** *Pro* $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *platí pro* $\forall u \in L_p(\Omega), \forall v \in L_q(\Omega)$

$$\int_\Omega |u(x)|\,|v(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ve větě 3.7.4 je důležité si uvědomit, že mluvíme o měřitelných funkcích $u(x), v(x)$ v množině Ω s mírou m (v integrálech zaměňujeme dm za dx).

Důkaz 3.7.5 (Hölderova nerovnost L_p, důkaz vlastní**)** Případ, kdy $u(x)v(x) = 0$ je zřejmý. Tento případ nastane, když $u(x)$ nebo $v(x)$ je rovno 0 skoro všude v Ω (tj. až na množinu míry nula).
Stejně jako v předchozím důkazu Hölderovy nerovnosti použijeme Youngovu nerovnost

$$xy \leq \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{q} \cdot y^q$$

a dosadíme za x, y [13]

$$x = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L_p(\Omega)}}, \qquad y = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L_q(\Omega)}}.$$

Právě získaná nerovnost má tvar

$$\frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|u(x)|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|v(x)|^q}{\|v\|_q^q}. \tag{3.32}$$

Vztah (3.32) budeme v dalším kroku integrovat

$$\int_\Omega \frac{|u(x)||v(x)|}{\|u\|_p \|v\|_q} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{p\|u\|_p^p} \cdot \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \cdot \int_\Omega |v(x)|^q \mathrm{d}x.$$

Pro normu na prostorech L_p platí $\|u\|_{L_p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ z čehož plyne, že

$$\|u\|_p^p = \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x.$$

Po dosazení normy do nerovnosti a několika dalších úpravách dostáváme dokazovaný vztah

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\cdot\int_\Omega |u(x)||v(x)|\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\\
\int_\Omega |u(x)||v(x)|\mathrm{d}x &\leq \|u\|_p\|v\|_q,\\
\int_\Omega |u(x)||v(x)|\mathrm{d}x &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\Omega |v(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

□

Pro $1<p<\infty, 1<q<\infty$ a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ platí také vztah

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\Omega |v(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

ke kterému se váže následující věta a důkaz.

Věta 3.7.6 *[13], Jestliže f je integrovatelná na Ω, pak* $\left|\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\mathrm{d}x.$

Nerovnost ve větě 3.7.6 plyne z vlastností Lebesgueova integrálu.

Důkaz 3.7.7 (**Důkaz věty 3.7.6**, důkaz vlastní)

Platí, že $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ a $|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$, přičemž $f_+(x), f_-(x)$ jsou z definice 3.1.9

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_\Omega f_+(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega f_-(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_\Omega f_+(x)\mathrm{d}x\right| + \left|-\int_\Omega f_-(x)\mathrm{d}x\right|\\
&= \int_\Omega f_+(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega f_-(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \left[f_+(x)+f_-(x)\right]\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

3.8 Minkovského nerovnost

Minkowského nerovnost je poslední nerovností, se kterou se v této kapitole seznámíme. Nerovnost se často používá k důkazu, že L_p prostory jsou normované. Hlavní literaturou je [13].

Věta 3.8.1 (Minkowského nerovnost, [17]**)** *Nechť x_i, y_i, kde $i=1,2,\ldots,n$, jsou reálná čísla a nechť $p>1$. Pak nerovnost*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.33}$$

nazýváme Minkowského nerovností.

Rovnost v Minkowského nerovnosti nastává pokud $x_i = ty_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pro $0 < p < 1$ platí v (3.33) ve větě 3.8.1 obrácená nerovnost. Důkaz provedeme pro větu 3.8.1 (pro obrácenou nerovnost je analogický).

Důkaz 3.8.2 (Důkaz Minkowského nerovnosti, vlastní) Při důkazu nerovnosti z věty 3.8.1 vyjdeme z identity

$$(|x_i| + |y_i|)^p = (|x_i| + |y_i|) \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} = |x_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1}. \tag{3.34}$$

Sečteme rovnosti (3.34) pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1}.$$

Dokazujeme pro $p > 1$. V dalším kroku provedeme vyjádření členů z předchozího vztahu pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)\cdot q}\right]^{\frac{1}{q}}, \\
\sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot (|x_i| + |y_i|)^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)\cdot q}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Pro čísla p, q platí, že $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Z tohoto vztahu vyjádříme rovnost $p = q(p-1)$ a uplatníme ji v následující nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Z tohoto vztahu vytkneme $\left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \tag{3.35}$$

Nerovnost (3.35) zřejmě platí, pokud $\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p = 0$. Jestliže $\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p > 0$, budeme pokračovat v důkazu a dělit nerovnost (3.35) výrazem $\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p}{\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}} \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Upravíme-li výraz na levé straně a použijeme rovnost $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$, dostáváme

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p}{\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}} = \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti platí, že $|x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|$ a tedy, že pro $p>1$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i|.$$

Dokázali jsme Minkowského nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Pro $p=1$ získáme trojúhelníkovou nerovnost danou vztahem $|x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|$. Stejně tak jako Hölderova nerovnost, platí i Minkowského nerovnost pro nekonečné řady (splňující předpoklady o konvergenci) a integrály. Minkowského nerovnost pro nekonečné řady zní:

Věta 3.8.3 (Minkowského nerovnost pro nekonečné řady, [17]**)** *Nechť $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, a zároveň $1<p<\infty$. Pak platí nerovnost*

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i+y_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Minkowského nerovnost můžeme také definovat na L_p prostorech.

Věta 3.8.4 (Minkowského nerovnost v L_p, [13]**)** *Pro $1<p<\infty$ a pro každé $u,v \in L_p(\Omega)$ platí*

$$\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.36}$$

Důkaz 3.8.5 (Minkowského nerovnost v L_p, vlastní) Dokažme nerovnost (3.36) pro $p > 1$. Vyjdeme ze vztahu pro normu na L_p prostoru

$$\|u(x)+v(x)\|_p^p = \int_\Omega |u(x)+v(x)|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)+v(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x.$$

Platí nerovnost

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)+v(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x &\le \int_\Omega (|u(x)|+|v(x)|)\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x\\ = \int_\Omega |u(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x &+ \int_\Omega |v(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pro další krok použijeme nám již známou Hölderovu nerovnost z věty 3.7.4 a aplikujeme ji na následující dva uvedené integrály

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x \quad &+ \quad \int_\Omega |v(x)|\cdot|u(x)+v(x)|^{p-1}\mathrm{d}x\\ \le \left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\cdot \quad \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ + \left(\int_\Omega |v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\cdot \quad \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\cdot \quad \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\\ + \left(\int_\Omega |v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\cdot \quad \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Konečný vztah ještě upravíme vytknutím na tvar

$$\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left[\left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\Omega |v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Dospěli jsme ke vztahu

$$\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left[\left(\int_\Omega |u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\Omega |v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \tag{3.37}$$

Pokud nerovnost (3.37) vydělíme nenulovým výrazem $\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}$ získáme dokazovanou Minkowského nerovnost

$$\frac{\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}} = \left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokud $\displaystyle\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p \mathrm{d}x = 0$, je nerovnost triviální.

$\square$

Kapitola 4

Termodynamické důkazy algebraických nerovností

V této kapitole se seznámíme s aplikacemi algebraických nerovností ve fyzice, konkrétně v termodynamice. Dokážeme termodynamické nerovnosti a také připomeneme některé ze základních pojmů a vět termodynamiky. Vysvětlení ostatních pojmů patřících mezi ty nejdůležitější ze zmiňované oblasti fyziky lze nalézt v bakalářské práci [18].

4.1 Termodynamika a nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

Odvození termodynamických nerovností ze zákonů termodynamiky, jež představili fyzikové Sommerfeld a Landsberg, je nejen intuitivní ale i matematicky správné [19]. Sommerfeld [19] přišel s termodynamickým důkazem algebraické nerovnosti

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \geq T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2}, \tag{4.1}$$

kde $T_1, T_2, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ a $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, přičemž T_1, T_2 určují termodynamickou teplotu. O několik let později měl podobnou myšlenku i Landsberg. Pokud se vrátíme k nerovnostem, které jsou nám známé z předchozí kapitoly, jistě si všimneme nápadné podobnosti s Youngovou nerovností. Jestliže ve vztahu (3.21) položíme $x = T_1, y = T_2, \dfrac{1}{p} = \alpha_1, \dfrac{1}{q} = \alpha_2$, získáme nerovnost (4.1).

Uveďme nyní jeden ze stěžejních zákonů termodynamiky a sice druhý termodynamický zákon. Můžeme se setkat s různými vyjádřeními tohoto zákona, pro nás nejužitečnější bude formulace pomocí entropie.

Věta 4.1.1 (Druhý termodynamický zákon, [21]**)** *Entropie (míra neuspořádanosti systému) uzavřeného systému roste při ději nevratném* [1] *a zůstává stálá při ději vratném* [2]*. Entropie uzavřeného systému nikdy neklesá.*

Pro entropii S podle Clausia platí vztah, který dává do souvislosti teplo Q a teplotu T. Pro vratné děje platí

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

a pro nevratné děje

$$\mathrm{d}S > \frac{\mathrm{d}Q}{T},$$

Entropie části uzavřeného systému může klesat, vždy ale najdeme v jiné části téhož systému stejný či větší přírůstek entropie, takže celková entropie systému nikdy neklesá.

Interpretujme zjednodušeně Sommerfeld-Landsbergovu myšlenku důkazu nerovnosti (4.1), [19]: uvažujeme uzavřený termodynamický systém (systém, v němž nedochází k výměně částic látky s okolím) se dvěma identickými podsystémy, které jsou charakterizovány termodynamickými teplotami T_1, T_2 a stejnou tepelnou kapacitou C. Poté, co se tyto podsystémy dostanou do vzájemné interakce, dosáhnou po čase teplotní rovnováhy s konečnou teplotou systému $\overline{T}$. Uveďme nyní první termodynamický zákon, který je zákonem zachování energie.

Věta 4.1.2 (První termodynamický zákon, [21]**)** *Teplo Q dodané systému se rovná součtu přírůstku jeho vnitřní energie U a práce W, kterou systém vykoná.*

$$\delta Q = dU + \delta W. \tag{4.2}$$

Více o významu a použití symbolů d a δ lze nalézt v bakalářské práci [18]. Stručně řečeno, symbol d označuje diferenciál funkce a symbol δQ znamená infinitezimální množství dodaného tepla a δW infinitezimální práci systému.

---

[1] Děje probíhají v jednom směru. Počátečního stavu nedosáhneme obráceným pořadím jednotlivých fází děje.

[2] Obráceným pořadím úkonů se systém vrátí zpět do původního stavu.

Uvažujme uzavřený systém, který je adiabaticky izolovaný, tzn. nedochází k tepelné výměně mezi systémem a okolím. V adiabaticky izolovaném systému je $\delta Q = 0$. Vnitřní energie bude tedy rovna pouze práci, kterou systém vykoná. Pro teplo Q platí

$$Q = mc\Delta T = C\Delta T,$$

kde m je hmotnost, c měrná tepelná kapacita systému (vztažená na jeden kilogram látky) a ΔT je rozdíl počáteční a konečné teploty systému. Symbolem C budeme značit tepelnou kapacitu, kde

$$C = mc.$$

Dále označíme $\overline{T}$ konečnou teplotu podsystémů a T_1, T_2 počáteční teploty podsystémů. Podle zákona zachování energie musí součet jednotlivých Q_i podsystémů pro $i = 1, 2, \ldots, n$ být nulový. Pro dva podsystémy, jež mají stejné hmotnosti a kapacity, dostáváme

$$\begin{aligned}
m_1c_1\left(T_1 - \overline{T}\right) + m_2c_2\left(T_2 - \overline{T}\right) &= 0, \\
CT_1 - C\overline{T} + CT_2 - C\overline{T} &= 0, \\
CT_1 + CT_2 &= 2C\overline{T}, \\
T_1 + T_2 &= 2\overline{T}, \\
\frac{T_1 + T_2}{2} &= \overline{T}.
\end{aligned}$$

Výsledná teplota systému je rovna aritmetickému průměru teplot jednotlivých podsystémů

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right).$$

Pro n podsystémů bychom konečnou teplotu odvodili analogicky.

Teplejší podsystém ohřívá chladnější a předává mu teplo $\mathrm{d}Q = mc\,\mathrm{d}T$ a entropii $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q}{T}$. Zároveň také platí, že chladnější podsystém ochlazuje teplejší a pro předání tepla a entropie platí tytéž vztahy jako u předchozího procesu. Předpokládejme, že C je konstantní, pak změna entropie ΔS je dána vztahem

$$\Delta S = \int_{T_p}^{T_k} \frac{mc\,\mathrm{d}T}{T} = mc\int_{T_p}^{T_k} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mc\ln\left(\frac{T_k}{T_p}\right) = C\cdot\ln\left(\frac{T_k}{T_p}\right), \tag{4.3}$$

kde T_p je počáteční teplota systému, T_k je konečná teplota systému. Jestliže chladnějšímu podsystému přidělíme index 1, teplejšímu podsystému index 2 a zároveň předpokládáme, že tepelné kapacity prvního a druhého podsystému mají stejnou hodnotu, pak pro jednotlivé změny entropií platí

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= C \cdot \ln\left(\frac{T_{k1}}{T_{p1}}\right), \\ \Delta S_2 &= C \cdot \ln\left(\frac{T_{k2}}{T_{p2}}\right). \end{aligned}$$

Konečná teplota obou podsystémů odpovídá průměrné teplotě $\overline{T}$. Pro zjednodušení pouze zaměníme následující $T_{p1} = T_1$ a $T_{p2} = T_2$. Získáváme tedy dvě rovnosti

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= C \cdot \ln\left(\frac{\overline{T}}{T_1}\right), \\ \Delta S_2 &= C \cdot \ln\left(\frac{\overline{T}}{T_2}\right). \end{aligned}$$

Entropie je extenzivní veličinou, tzn. pro změnu entropie celého systému platí, že je součtem změn entropií podsystémů

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2, \\ \Delta S &= C \cdot \ln\left(\frac{\overline{T}}{T_1}\right) + C \cdot \ln\left(\frac{\overline{T}}{T_2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Z druhého termodynamického zákona plyne, že pro změnu entropie platí $\Delta S \geq 0$. Následujícími úpravami

$$\begin{aligned} C \cdot \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{T_1}\right) + C \cdot \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{T_2}\right) &\geq 0, \\ \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{T_2}\right) &\geq 0, \\ \ln\left(\frac{\left[\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right]^2}{T_1 T_2}\right) &\geq 0, \\ \ln\left(\frac{\left[\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right]^2}{T_1 T_2}\right) &\geq \ln 1, \\ \frac{\left[\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right]^2}{T_1 T_2} &\geq 1, \\ \left[\frac{1}{2}(T_1 + T_2)\right]^2 &\geq T_1 T_2, \end{aligned}$$

dojdeme k nerovnosti [19]

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2) \geq \sqrt{T_1 T_2}. \tag{4.5}$$

Zobecněním nerovnosti (4.5) pro n podsystémů (ve vztahu (4.4) sčítáme entropie n podsystémů, další úpravy jsou analogické), získáme vztah [19]

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \geq \prod_{i=1}^{n} T_i^{\frac{1}{n}}. \tag{4.6}$$

Vztahy (4.5) a (4.6) jistě platí, jelikož se jedná o AG nerovnost.

4.2 Užití metody majorizace

Je dán vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x \in \mathbb{R}_+^n$, pak definujeme vektor x' takový, že $x' \prec x$ (x majorizuje x') [19]. Proces majorizace spočívá v tom, že požadujeme, aby prvky vektoru x' byly méně rozptýlené než prvky vektoru x, tzn. požadujeme, aby vektor x' byl majorizován vektorem x. Ve fyzice se často setkáme s interpretací, že prvky vektoru x jsou více chaotické než prvky x'. Pro uvedené vektory platí, že $x' \prec x$, právě když existuje dvojitě stochastická[3] matice T řádu n, která splňuje kritérium $x' = Tx$ [19]. Jinak řečeno, pro prvky x_i' vektoru x', prvky x_i vektoru x a prvky t_{ij} matice T platí

$$x_i' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i,$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Funkcionál $\phi(x)$ nazveme Schur-konvexní, jestliže pro $x' \prec x$ platí $\phi(x') \leq \phi(x)$ [19]. Popišme nyní Schur-konvexní funkcionál $\phi(x)$.

Věta 4.2.1 *[19]*

Nechť $I \in \mathbb{R}$ je interval a $g : I \to \mathbb{R}$ konvexní, pak

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

je Schur-konvexní na I^n.

Funkcionál $\phi(x)$ nazveme Schur-konkávní, právě pokud je $-\phi(x)$ Schur-konvexní. Pro konvexní funkce $g : I \to \mathbb{R}$ platí nerovnost [22]

$$\sum_{i=1}^{n} g(\overline{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i), \tag{4.7}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde hodnota $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Obrácená nerovnost ve vztahu (4.7) platí pro konkávní funkce.

[3] Nezápornou matici $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazveme dvojitě stochastickou, pokud součet prvků v každém sloupci a v každém řádku je roven jedné.[22]

Dále uvedeme informace o Schur-konvexitě ve spojitosti s entropií $S = S(U, V, N)$ a vnitřní energií $U = U(T, V, N)$, kde V je objem, N počet částic, T termodynamická teplota systému. Předpokládáme, že $V = konst.$, $N = konst.$ a $U = kf(T)$, kde k je celé nezáporné číslo [19]. První termodynamický zákon (4.2) se často uvádí také v podobě [18]

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V.$$

Jelikož $T > 0$ a zároveň i $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) > 0$, pak z termodynamiky plyne [19]

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_{V,N} = -\frac{1}{T^2} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_{V,N} < 0. \tag{4.8}$$

Když $S(U)$ je konkávní pak $-S(U)$ je konvexní a proto funkcionál $-\sum_{i=1}^{n} S(U_i)$ je Schur-konvexní [19]. Platí, že $\overline{U} \prec U$, kde

$$\begin{aligned} U &= (U_1(T_1), U_2(T_2), \ldots, U_n(T_n)), \\ \overline{U} &= (U_1(\overline{T}), U_2(\overline{T}), \ldots, U_n(\overline{T})). \end{aligned}$$

Zároveň předpokládáme, že všechny podsystémy splňují kritéria téže kalorické rovnice [4]. Pro konkávní funkci tedy platí vztah uvedený v [19]

$$\sum_{i=1}^{n} S(U_i(\overline{T})) \geq \sum_{i=1}^{n} S(U_i(T_i)). \tag{4.9}$$

Pokud $\overline{U} = \hat{T}U$, kde $\hat{T}$ je matice, jejíž všechny prvky jsou rovné $\frac{1}{n}$, pak tato matice je zjevně dvojitě stochastická a proto U majorizuje $\overline{U}$.

Příklad 4.2.2 (**Ideální plyn,** zdroj vzorců v zadání [19], řešení vlastní)
Pro ideální plyn platí, že

$$U = kT, S = k \ln U.$$

Určete a zjednodušte vztah nerovnosti (4.9) s dosazenými hodnotami S, U .

[4] Kalorická rovnice vyjadřuje závislost vnitřní energie soustavy na teplotě a dalších vnějších parametrech soustavy, jedná se o vztah pro odvození tepelné kapacity.

Řešení:

Získáváme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} k \ln \left(k\overline{T}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} k \ln \left(kT_i\right). \tag{4.10}$$

Provedeme řadu úprav v nichž využijeme vlastností logaritmů. Jelikož $\sum\limits_{i=1}^{n} k \ln \left(k\overline{T}\right)$ je součet n stejných prvků, můžeme psát

$$\begin{aligned} nk \ln \left(k\overline{T}\right) &\geq \sum_{i=1}^{n} k \left[\ln(kT_1) + \ln(kT_2) + \ldots + \ln(kT_n)\right], \\ n \ln \left(k\overline{T}\right) &\geq \ln k + \ln T_1 + \ln k + \ln T_2 + \ldots + \ln k + \ln T_n, \\ n \ln k + n \ln \overline{T} &\geq n \ln k + \ln T_1 + \ln T_2 + \ldots + \ln T_n, \\ n \ln \overline{T} &\geq \ln \left(\prod_{i=1}^{n} T_i\right). \end{aligned}$$

Nerovnost vydělíme n a použijeme pravidlo, které převádí násobení na mocninu v logaritmu. Nerovnost (4.10) jsme zjednodušili na vztah

$$\ln \overline{T} \geq \ln \left(\prod_{i=1}^{n} T_i^{\frac{1}{n}}\right).$$

4.3 Zobecněný průměr

V poslední kapitole uvedeme aplikace zobecněného průměru. O tuto problematiku se zajímal především P. T. Landsberg a své poznatky uvedl v článku „A Generalized Mean", [23]. Přestože P. T. Landsberg je fyzik, byl článek publikován v matematickém časopise. Odvození daných vztahů je čistě matematické, P. T. Landsberg v článku využívá analogie dané problematiky s fyzikálním pojmem entropie.

Je dána funkce n proměnných $f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ (v termodynamice: n podsystémů s rozdílnou teplotou) a dále je dáno n funkcí $g_i\left(T_i\right)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ jedné proměnné [23]. Definujme nyní zobecněný průměr.

Definice 4.3.1 (Chisini, [23]**)** *Řekneme, že T je zobecněným průměrem hodnot $T_1, T_2, \ldots, T_n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ vzhledem k funkci f pokud platí, že*

$$f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = f(T, T, \ldots, T). \tag{4.11}$$

K definici 4.3.1 uveďme vyjádření zobecněného průměru pro průměr aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický.

Aritmetický průměr

Pokud $f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, pak platí, že

$$f(T, T, \ldots, T) = \underbrace{T + T + \ldots + T}_{n\text{-krát}}.$$

Zobecněný průměr T vzhledem k funkci f získáme z vyjádření podle rovnosti (4.11),

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = nT$$

a tedy

$$T = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{n}. \tag{4.12}$$

Vztah (4.12) je vztahem pro aritmetický průměr hodnot $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Geometrický průměr

Pokud $f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n$, pak platí, že

$$f(T, T, \ldots, T) = \underbrace{T \cdot T \cdot \ldots \cdot T}_{n\text{-krát}}.$$

Zobecněný průměr T vzhledem k funkci f získáme z vyjádření podle rovnosti (4.11),

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n = T^n$$

a tedy

$$T = \sqrt[n]{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n}. \tag{4.13}$$

Vztah (4.13) je vztahem pro geometrický průměr hodnot $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Harmonický průměr

Pokud $f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n}$, pak platí, že

$$f(T, T, \ldots, T) = \underbrace{\frac{1}{T} + \frac{1}{T} + \ldots + \frac{1}{T}}_{n\text{-krát}}.$$

Zobecněný průměr T vzhledem k funkci f získáme z vyjádření podle rovnosti (4.11),

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n} = n \cdot \frac{1}{T}$$

a tedy

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n} \right),$$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \ldots + \frac{1}{T_n} \right)}. \tag{4.14}$$

Vztah (4.14) je vztahem pro harmonický průměr hodnot $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Kvadratický průměr Pokud $f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2$, pak platí, že

$$f(T, T, \ldots, T) = \underbrace{T^2 + T^2 + \ldots + T^2}_{n\text{-krát}}.$$

Zobecněný průměr T vzhledem k funkci f získáme z vyjádření podle rovnosti (4.11),

$$T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2 = nT^2$$

a tedy

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2}. \tag{4.15}$$

Vztah (4.15) je vztahem pro kvadratický průměr hodnot $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 4.3.2 (Speciální případ definice 4.3.1, [23]**)** *Platí, že T je zobecněným průměrem vzhledem k funkci $f(T_1, T_2, \ldots, T_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(T_i)$, pokud*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(T_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i(T). \tag{4.16}$$

Vztahy mezi průměry

Již dříve jsme uvedli vztah pro změnu entropie $\Delta S = \int_{T_p}^{T_k} \frac{\mathrm{d}Q}{T} \mathrm{d}T$. Teplo Q budeme dále vyjadřovat jako funkci teploty $C(T)$,

$$\Delta S = \int_{T_p}^{T_k} \frac{C(T)}{T} \mathrm{d}T.$$

Odvodili jsme také vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (4.6) na základě termodynamických zákonů, ze kterých plyne, že $\Delta S \geq 0$. P. T. Landsberg využil analogie, zobecnil pojmy jako je teplota, tepelná kapacita a matematicky odvodil vztahy mezi různými zobecněnými průměry. Z těchto vztahů lze dále dokazovat zajímavé nerovnosti.

Nechť je dáno $n+1$ kladných funkcí teploty $\phi(T), C_i(T)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Předpokládáme, že $T > 0$ a funkce $\phi(T)$ je neklesající, [23]. Z fyzikálního hlediska lze funkce $C_i(T)$ nazvat zobecněnou tepelnou kapacitou a pokud by $\phi(T) > 0$, můžeme jej nazývat zobecněnou teplotou. P. T. Landsberg ovšem definuje ve svém díle [23] $\phi(T)$ pouze jako neklesající funkci.

Nechť je dáno n podsystémů s teplotami T_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a kapacitou $C_i(T)$. Platí, že kapacita je funkcí teploty. Při spojení podsystémů dochází k vyrovnávání teplot. Pokud přechod do teplotní rovnováhy probíhá dostatečně pomalu, je entropie konstantní (vratný děj). Díky tomuto faktu lze určit konečnou teplotu. Součet změn entropií je roven nule a pro rovnovážnou teplotu tak platí [23]

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t = 0. \tag{4.17}$$

Při hledání rovnovážné teploty T, pro níž je splněn vztah (4.17), použijeme rovnosti (4.16) pro zobecněný průměr. Nechť tedy funkce

$$g_i(T_i) = \int_{A}^{T_i} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t, \tag{4.18}$$

kde A je konstanta. Hledáme zobecněnou teplotu T, pro níž platí vztah

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(T_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i(T).$$

Po dosazení ze vztahu (4.18) dostaneme rovnost

$$\int_{A}^{T_i} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t = \int_{A}^{T} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t. \tag{4.19}$$

Vztah (4.19) upravíme podle pravidel pro počítání se sumami a integrály na

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A}^{T} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \int_{A}^{T_i} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{A}^{T} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t + \int_{T_i}^{A} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Uvedený vztah platí, právě když platí (4.19). Zobecněný průměr T (rovnovážná teplota) pro daná $C_i(T)$, dané počáteční hodnoty T_i a funkci ϕ označíme k_ϕ [23].
Symbolem k_1 označuje rovnovážnou teplotu pro $\phi(t) = 1$ získanou ze vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T} \frac{C_i(t)}{1} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T} C_i(t) \mathrm{d}t = 0. \tag{4.21}$$

P. T. Landsberg přiřazuje $k_\phi = T\left[\{C_i\}, \phi, \{T_i\}\right]$, aby zdůraznil výchozí hodnoty a funkce pro výpočet zobecněné teploty T. Pro k_1 tedy platí $k_1 = T\left[\{C_i\}, 1, \{T_i\}\right]$.
Landsbergova nerovnost pro zobecněné průměry zní [23]

$$k_1 = T\left[\{C_i\}, 1, \{T_i\}\right] \geq T\left[\{C_i\}, \phi, \{T_i\}\right] = k_\phi. \tag{4.22}$$

Jinak řečeno, platí, že zobecněný průměr pro $\phi(t) = 1$ je větší nebo roven zobecněnému průměru pro libovolné jiné $\phi(t)$ pro dané hodnoty $\{C_i\}, \{T_i\}$.

Důkaz 4.3.3 (Důkaz Landsbergovy nerovnosti, [23]**)** Zřejmě pro $k > 0$ platí, že

$$\begin{aligned} X \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{k} \frac{C_i(t)}{\phi(t)} \mathrm{d}t \quad &\geq \quad \sum_{i,(T_i \leq k)} \frac{1}{\phi(k)} \int_{T_i}^{k} C_i(t) \mathrm{d}t - \sum_{i,(T_i > k)} \frac{1}{\phi(k)} \int_{k}^{T_i} C_i(t) \mathrm{d}t \\ &= \quad \frac{1}{\phi(k)} \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{k} C_i(t) \mathrm{d}t \equiv Y. \end{aligned}$$

Pokud vybereme $k = k_1$, pak podle (4.21) je $Y = 0$, takže $X \geq 0$. Pokud vybereme jiné $k = k_\phi$, tak podle vztahu (4.17) je $X = 0$. Jelikož platí, že $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}k} > 0$, tak je zřejmé, že případné snížení X na nulovou hodnotu je možné jen díky snížení hodnoty zobecněného průměru k. Platí tedy, že $k_\phi \leq k_1$.

$\square$

Uveďme příklad na aplikaci Landsbergovy nerovnosti.

Příklad 4.3.4 (Řešení vlastní)
V Landsbergově nerovnosti zvolme $\phi(T) = T, C_i(T) = C_i$ kde T, C_i jsou konstanty. Vyjádřete zobecněné průměry (rovnovážné teploty) k_1, k_ϕ a porovnejte pomocí Landsbergovy nerovnosti.

Řešení:

Pro zobecněný průměr k_1 je $\phi(T) = 1$. Rovnovážnou teplotu v tomto případě označíme T_A ($k_1 = T_A$) a podle vztahu (4.21) a následného využití vlastností integrálů platí

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T_A} C_i \mathrm{d}t = T_A \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} C_i T_i = 0.$$

Z předchozího vztahu vyjádříme T_A

$$T_A = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i T_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i}. \tag{4.23}$$

Určení hodnoty T_A ve vztahu (4.23) odpovídá vyjádření váženého aritmetického průměru hodnot T_i, kde C_i určuje četnost T_i.

Dále určíme zobecněný průměr k_ϕ pro $\phi(T) = T$. Rovnovážnou teplotu budeme značit T_G ($k_\phi = T_G$). Podle vztahu (4.17) platí

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i}^{T_G} \frac{C_i}{t} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} C_i \ln \frac{T_G}{T_i}.$$

Rovnost upravíme pomocí pravidel pro počítání s logaritmy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_i \ln T_G &= \sum_{i=1}^{n} C_i \ln T_i, \\
(\ln T_G) \sum_{i=1}^{n} C_i &= \sum_{i=1}^{n} C_i \ln T_i, \\
\ln T_G^{\sum_{i=1}^{n} C_i} &= \ln \prod_{i=1}^{n} T_i^{C_i}, \\
T_G &= \left(\prod_{i=1}^{n} T_i^{C_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} C_i}}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Určení hodnoty T_G ve vztahu (4.24) odpovídá vyjádření váženého geometrického průměru hodnot T_i, kde C_i je četností T_i.

Podle Landsbergovy nerovnosti platí, že $T_G \leq T_A$. Pro výše vyjádřené hodnoty zobecněných průměrů, získáme tedy AG nerovnost ve tvaru

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i T_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} T_i^{C_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} C_i}}.$$

Kapitola 5

Závěr

Diplomová práce se zabývá nerovnostmi a jejich použitím v příkladech a aplikacemi do fyziky. První kapitola a část druhé může sloužit jako studijní materiál pro nadané studenty středních škol při řešení úloh matematické olympiády. Nerovnosti, které mohou být pro ně užitečné jsou uvedeny i s řešenými příklady. Druhou částí počínaje je předpokládána také znalost analýzy na úrovni vysoké školy. Práce může sloužit jako přehled nejčastěji užívaných nerovností, obohacení teorie o důkazy, řešené příklady a k rozšíření znalostí o nerovnostech s přesahem do termodynamiky.

Literatura

[1] KUFNER, Alois. *Nerovnosti a odhady*. Praha: Mladá fronta, 1975. Škola mladých matematiků, sv. 39. ISBN 23-049-75.

[2] *Rozhledy matematicko-fyzikální: časopis pro studující středních škol a zájemce o matematiku, fyziku a informatiku*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001, 78(3). ISSN 0035-9343.

[3] *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 1999, 8(7). ISSN 12101761.

[4] *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2007, 16(7). ISSN 12101761.

[5] *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2001, 10(8). ISSN 12101761.

[6] *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2011, 20(9). ISSN 12101761.

[7] DOKTOR, Pavel. *Nerovnosti: pro volitelný předmět aplikace matematiky ve IV. ročníku gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. ISBN 231 4003.

[8] ZHOUF, Jaroslav. *Dostal žák správnou známku? aneb pojednání o průměrech* [online]. 2008 [cit. 2017-03-14].
Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_70.doc.

[9] ZAVŘEL, Lukáš. *AG Nerovnost* [online]. 2013 [cit. 2017-03-14].
Dostupné z: https://mks.mff.cuni.cz/library/AGNerovnostLZ/AGNerovnostLZ.pdf.

[10] JANKOVÁ, Lenka. *Nerovnosti a jejich důkazy (včetně počítačových)*. 2014 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: http://hdl.handle.net/11025/13035. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.

[11] KRISL, Tomáš. *Cauchyova-Schwarzova nerovnost* [online]. 2008 [cit. 2017-03-14]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/106635/prif_m/diplomka.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

[12] ŠALOM, Pavel. *Nerovnosti pro nadané žáky středních škol* [online]. 2012 [cit. 2017-03-14].
Dostupné z: kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/pavel_salom/SALOM_DP.pdf. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze.

[13] DANEČEK, Josef. *Matematická analýza V.: Přednášky z předmětu UMB 580.* České Budějovice: 2015. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[14] *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2008, 17(6). ISSN 12101761.

[15] TRČA, Radek. *Metody řešení úloh SŠ: Přednášky z předmětu UMB 030*. České Budějovice: 2015. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[16] REKTORYS, Karel a kol. *Přehled užité matematiky*. 2. opravené vydání. Praha: SNTL, 1968. ISBN 04-002-68.

[17] JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet (II)*. 3. vydání. Praha: Academia, 1984. ISBN 104-21-852.

[18] PETŘEKOVÁ, Jaroslava. *Matematický aparát termodynamiky*. České Budějovice: 2014. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[19] ZYLKA, Ch., VOJTA, G. *Thermodynamic proofs of algebraic inequalities*. Physics Letters A, Volume 152, Issue 3, 1991. ISSN 03759601.

[20] VARADY, Michal. *Učební text k termodynamice* [online]. 2011 [cit. 2014-03-1]. Dostupné z: http://physics.ujep.cz/ mvarady/td_lecture_1.pdf

[21] PŘEDOTA, Milan. *Termodynamika a statistická fyzika: Přednášky z předmětu UFY TSF.* České Budějovice: 2014. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

[22] TEGZE, Miron. *Procedura SDKL-Miner pro dobývání znalostí z databází* [online]. Praha: 2007. [cit. 2017-04-13].
Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120009593. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze.

[23] LANDSBERG, P. T. *A generalized mean*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 76, Issue 1, 1980. Pages 209-212, ISSN 0022-247X.