Posudek oponenta diplomové práce

Jaroslava Tesařová: Nerovnosti a jejich aplikace

Obor: Matematika

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky

Jaroslava Tesařová se ve své práci zabývá různými průměry a nerovnostmi mezi nimi. Ukazuje, jak některé známé nerovnosti mezi těmito průměry souvisejí s některými známými nerovnostmi z geometrie, z matematické analýzy a z termodynamiky.

Část věnovaná nerovnostem z geometrie a matematické analýzy v konečné dimenzi je vhodná pro zvídavé studenty středních škol, kteří mohou předkládanou práci využít například k řešení úloh matematické olympiády. Nerovnosti z matematické analýzy v nekonečné dimenzi jsou určeny především všem studentům vysokoškolské matematiky, termodynamické nerovnosti ze závěru práce mohou využít studenti vysokoškolské fyziky.

Po úvodní kapitole jsou ve druhé části textu zavedeny nejčastěji užívané průměry (aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický a čtyři další) s typickými příklady jejich použití. Dále jsou zde uvedeny nejdůležitější nerovnosti, které mezi jednotlivými průměry platí. Nejčastěji zmiňovaná v celé praci je AG-nerovnost mezi arimetickým a geometrickým průměrem. Jednotlivé nerovnosti jsou dokazované jak analyticky, tak geometricky, a to pomocí jednak kružnice a tak i lichoběžníku, kde autorka graficky znázorňuje dokazované nerovnosti. V kapitole 3 jsou zavedeny některé pojmy z matematické analýzy a také některé důležité nerovnosti. Některé z nerovností jsou uváděny v Eukleidovských prostorech konečné dimenze E_n i v Lebesguegových prostorech nekonečné dimenze—tato část již není určena pro středoškoláky. Poslední kapitola je zaměřena na využití AG-nerovnosti v termodynamice. Autorka zde ukazuje, že některé fyzikální zákony platí, protože to jsou vlastně jen různé verze zmiňované AG-nerovnosti. Kapitoly 3 a 4 jsou doprovázené množstvím konkrétních příkladů nejrůznějších nerovností v konečné i nekonečné dimenzi, které jsou buď dokazované pomocí základních nerovností mezi průměry nebo je alespoň uváděn jejich konkrétní vztah k některé vybrané základní nerovnosti. Všechny užívané průměry i nerovnosti jsou doprovázeny řadou pěkných a ilustrativních příkladů.

V práci samotné jsem nenašel žádné závažné věcné chyby a jen několik překlepů, jejichž množství přirozeně odpovídá rozsahu práce (namátkou chybějící $1/n$ ve (4.15), chybějící sumy ve (4.19), suma navíc v 1. řádku matematického textu pod (4.10), sumy navíc před koncem Důkazu 3.8.2. na str.61). Práci bych vytknul nepřesnost ve formulacích některých tvrzení, u kterých bych ocenil explicitní vyjádření všech potřebných předpokladů, byť jsou zřejmě implicitně předpokládané z předchozího textu. Také jednodušší a přesnější vyjadřování v argumetaci by podle mého názoru pomohlo k hladší čitelnosti některých důkazů. Přiznám se, že jsem byl v některých místech ztracen, co se pomocí které nerovnosti právě dokazuje, kterým směrem je vedena implikace a podobně. (Co jsme získali z čeho na konci str. 43, Cauchyovu nerovnost pomocí kosinové věty? nebo fakt, že cosinus leží v intervalu $[-1,1]$? Nebo je to shrnutí faktů, které jsme použili výše?) Nerozumím některým dalším závěrečným větám na koncích některých důkazů, například nevím, jaký je význam poslední věty Sekce 4.1, tj. první věty na str. 68. Podobně, je poslední věta v důkaze 3.5.1 jen matematickým vyjádřením chvilku předtím vysloveného faktu (v první větě na straně 53), že 'vztah (3.22) je jen jiným vyjádřením Youngovy nerovnosti'? Pokud ano, měl být o větu dříve před vloženým faktem o speciální volbě $p = q = 2$. Další větu, kterou bych z důvodu větší přesnosti a i hladkosti porozumění textu spíše vynechal/zrušil je poznámka o případném použití logaritmu o základu menším než jedna a nutnosti otočení znaménka ve finální nerovnosti. K čemu by nám použití takovéhoto logaritmu bylo? Dokazujeme AG-nerovnost, ne nerovnost opačnou. K hladkosti čtení i verifikace důkazů bych ocenil například i důsledné korektní odkazovaní, že v daném místě používáme tu a tu nerovnost, kde jednotlivé proměnné a parametry mají v daném místě tu a tu hodnotu (např. 'volbou $\lambda_i = 1/n$ a $f(x) = \ln(x)$...' na str.50, 'volbou $x_1 = 1 + px$, $x_2 = 1$ a $f(x) = \ln(x)$...' na str. 55). Častá volba konkávní funkce v Jensenově nerovnosti ukazuje zároveň, že poznámka za Větou 3.4.1 o opačné nerovnosti v Jensenově nerovnosti pro konkávní funkce by měla být součástí tvrzení této věty. Některým argumentům o ekvivalentních úpravách (hlavně v Kapitole 2) by pomohlo, kdyby byly explicitně vyjádřeny (co se v daném kroku důkazu děje), případně bylo vysvětleno, proč je pro dané proměnné úprava ekvivalentní —například získání 'ekvivalentní nerovnosti k (3.9), (3.10)' na konci str.44 nebo Důkaz 2.3.2 na str.15. V textu lze nalézt některé nepřesnosti (například je třeba dodat 'a druhá bude záporná' na konec první věty pod (3.5) na str.41). Je škoda, že jen některá tvrzení byla zformulována pro nejširší třídu použitých proměnných (zbytečné omezení se na jen kladné parametry) a že jen některá byla doplněna dovětkem, v jakých případech nastane v nerovnostech rovnost, přestože tento dovětek byl v důkaze dokázán (například Příklad 3.2.3 na str.40 a 41). Chápu, že autorka se v těchto případech zřejmě chtěla držet citovaných zadání.

Rád bych se zeptal, jak je to s volbou $k = 0$ pro G_n v tabulce jednotného vyjádření všech zmiňovaných průměrů na str.6?

Studentka rozhodně splnila zadání, přes uvedené nedostatky diplomovou práci hodnotím kladně, doporučuji ji k obhajobě a navrhuji hodnocení velmi dobře.

V Českých Budějovicích, 18.5.2017, Jan Eisner

Oponentský posudek k Diplomové práci

Nerovnosti a jejich aplikace od Jaroslavy Tesařové

Hlavním tématem práce jsou průměry a nerovnosti mezi nimi. V první části se studentka zabývá aritmetickým, geometrickým, harmonickým a kvadratickým průměrem a nerovnostmi mezi nimi. Studentka teorii vysvětluje na příkladech (včetně praktických slovních úloh) a také vše nápaditým způsobem demonstruje geometricky s využitím konstrukčních úloh. V druhé části studentka připomíná základní struktury lineární algebry a matematické analýzy, na kterých posléze studuje nerovnosti, a to trojúhelníkovou, Cauchyovu, Jensenovu, Youngovu, Bernoulliovu, Hölderovu a Minkovského. Teorie je opět demonstrována na příkladech (přejatých i vlastních) a studentka také uvádí (často vlastní) důkazy. V poslední části studentka vysvětluje originálním způsobem souvislosti mezi termodynamickými zákony a teorií průměrů a nerovností.

První část práce je psaná tak, aby ji mohli bez problémů číst středoškoláci. V druhé části následuje obtížnostní skok, kdy zejména část o měřitelných funkcích není pro středoškoláky (a některé vysokoškoláky) čitelná. Rozumím snaze vložit do práce co nejvíce „těžké matematiky", nicméně práce by podle mě měla větší užitek, kdyby se studentka v této části věnovala pouze prostorům E_n, zato vše definovala a vysvětlovala mnohem pečlivěji. Bez této části by byla práce velmi vhodným textem pro středoškoláky a pregraduální studenty vysokých škol. Třetí část je psána fyzikálním jazykem, což není překvapivé, neboť studentka má jako druhý obor studia fyziku. Práce má velmi dobrou myšlenku a základní logickou strukturu, samotný text je ovšem často chaotický a neuspořádaný.

V první středoškolské části mi chybí nějaká bližší motivace pro zavedení průměrů a něco jako návod, kdy je použít. U řešených úloh je nějaké (ne úplně jednoduché) fyzikální nebo chemické zdůvodnění, ale motivace mi chybí (a případným čtenářům z řad studentů bude podle mě také chybět).

Některé formulace mi přijdou nešťastné (např. pokud je zmiňována nerovnost pro n=2, není to pro mě „zjednodušení", ale speciální případ (definice průměrů), formulace „pro nerovnost platí vztah" je poněkud zvláštní, pokud ten vztah je přímo ta nerovnost (formule (2.9))).

Občas studentka málo nebo nepřesně vysvětluje. Má začátečnický pocit, že když už něco ví ona, tak to ví každý. Je třeba lépe komentovat postupy. Studentka často říká "provedeme ekvivalentní úpravu" tam, kde by bylo jednodušší říct, co přesně dělá a proč to udělat může (například umocňování a odmocňování nerovností). Čtenářům (hlavně z řad středoškoláků) by pomohlo, kdyby raději explicitně řekla, které úpravy jsou ekvivalentní a které ne, ale lze je v omezené míře použít (např. v příkladě 2.5.15. píšete "nerovnost upravíme ekvivalentně na vztah" ale neřeknete, co se stalo).

Vysvětlování příkladů je občas velmi nevyvážené v tom smyslu, že některé úlohy studentka vysvětluje velmi podrobně a některé zase skoro vůbec a není to v obvyklém pořadí, kdy první příklad je nejpodrobněji a pak se od podrobností ustupuje. Pokud se používá nějaký nový postup, má být vysvětlen u prvního výskytu, nebo vůbec. Není pěkné, když autor nechá čtenáře u prvního příkladu, aby si na to přišel sám, a u dalšího to detailně popíše (např. příklady 3.3.5. a 3.3.6, až v 3.3.6 je zmíněno, jak se explicitně použije Cauchyova nerovnost, nebo příklady 2.5.10 a 2.5.11, kde až v 2.5.11 vysvětlujete pořádně, kdy nastává rovnost).

Občas se ve formulacích stává, že to nejdůležitější k pochopení bývá schováno v nějaké poznámce v závorce (např. závorka ve větě po formuli (2.10), značení průměrů). Také by bylo vhodné používat mnohem víc obrázků (např. u formule (2.3) nebo u trojúhelníkové nerovnosti). Občas by bylo vhodné naznačit, kdy přecházíme z teorie na příklady (např. str. 38-39) a lépe rozlišovat mezi důkazy a příklady (např. Důkaz 3.2.1 je důkaz čeho nebo příklad na co?) a mezi tvrzeními a definicemi (např. co má říct Věta 3.7.1?). Některá tvrzení si zaslouží být větou a ne poznámkou nakonec (např. porovnání průměrů str. 16 nahoře).

U tvrzení je potřeba mnohem pořádněji kvantifikovat a psát pořádně a jednoznačně vstupní předpoklady na parametry (např. co je p v popisu normy na E_n v 3.1.4? co jsou x, y, z v příkladě 2.5.1?) a označovat nové objekty včasněji (co je r na str. 16 dole?). U důkazů je nutné nepřeskakovat některé možnosti, i když jsou triviální, ale zmínit všechny. Zejména občas zapomínáte diskutovat nulu/nulový vektor (např. důkaz 3.7.2). I když je situace jasná, je třeba to říct.

Úvodní část druhé kapitoly je asi nejvíce nepřehledná. V textu, který mohl/měl? být z velké části čitelný pro středoškoláky, by studentka neměla zbytečně používat pojmy jako těleso nebo pozitivně definitní forma, když vše lze snadno říct bez nich. V dané části se nevhodně zaměňuje E_n, R^n a obecný (vektorový) prostor, v důsledku čehož nedávají některé části smysl (např. text na začátku strany 36, před částí 3.1.3.).

Diferenciální počet mi občas přijde používán zbytečně složitě (např. důkaz 3.5.3). U Jensenovy nerovnosti mi v příkladech chybí ověření, že se opravdu jedná o konvexní kombinace. V této části textu by mohlo být vhodné prezentovat grafy funkcí.

Studentka sepsala obsáhlý text, který se zabývá teorií průměrů a nerovností. Text má velmi dobrou základní myšlenku a hrubou strukturu. Studentka prezentuje teorii, řeší (samostatně) modelové příklady, část z nich sama vymýšlí, a předkládá (často vlastní) důkazy. Nicméně samostatné provedení pokulhává, text je chaotický a občas nepřesně napsaný. Kvantita převyšuje kvalitu. V textu je několik chyb, nejsou však zásadní a spíše než neznalostí matematiky jsou způsobeny nevhodným vyjadřováním. Studentka splnila zadání diplomové práce, proto práci navrhuji k obhajobě, a to s hodnocením 2 nebo 3.

Otázky:

Pro koho je celý text určen? Hodláte jej nebo některé části dále použít?

V obrázku 2.7, jakou roli hraje vzájemné umístění té horní a spodní úsečky v lichoběžníku? Co když jednu z nich posuneme?

V příkladu 2.5.10, proč jsou pro s-a, s-b, s-c splněny předpoklady AG nerovnosti?

Co je ve fyzice míněno slovem důkaz? Jedná se v poslední části práce o důkazy v „matematickém" slova smyslu, nebo jde o aplikace, experimenty, odvození, ... ?

Lenka Zalabová

17.5. 2017