

POSUDEK DIPLOMOVÉ PRÁCE

(posudek vedoucí práce)

Autorka: **Jaroslava Tesařová**

Název práce: **Nerovnosti a jejich aplikace**

Vedoucí práce: RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.

Posuzovaná diplomová práce se zabývá nerovnostmi a jejich aplikacemi. Práce je rozčleněna do tří částí.

V kapitole 2 se autorka věnuje aritmetickému, geometrickému, harmonickému a kvadratickému průměru a nerovnostem mezi průměry.

V kapitolách 2.1 až 2.6 autorka souhrnně uvádí vztahy pro průměry. Některé z příkladů, které jsou uvedeny pro ilustraci výpočtu průměrů v kapitole 2.6, mají úroveň pro ZŠ. Pokud už autorka vymyslela vlastní zadání příkladu, např. př. 2.1.1 nebo 2.1.4, 2.1.6, často jen dosazuje do vzorců. Většina z příkladů uvedených v těchto kapitolách je zařazena zbytečně. Na str. 6 ve vztahu (2.6) není jasně definován definiční obor proměnných ani pojem odmocniny.

V tabulce ke vztahu (2.6) se objevuje hodnota $k=0$, pro níž je podle autorky ze vztahu (2.6) odvozen geometrický průměr. V tomto případě však odvození chybí a tvrzení autorky je chybné. Kapitola 2.2. a 2.3 je věnována algebraickým důkazům některých nerovností mezi průměry (konkrétně AG, HG a KA). Autorka poměrně podrobně důkazy rozepisuje. V případě důkazu 2.3.2 se dopouští nepřesnosti, když tvrdí, že provádí pouze ekvivalentní úpravy. V kapitole 2.4 jsou dvěma metodami graficky dokazovány vztahy mezi nerovnostmi pro dvě proměnné (konkrétně AG, HG, KA, AH). První metoda (kružnice) je celkem známá, autorka ji však pěkně vysvětlila a znázornila. Druhá metoda dokazování nerovností mezi průměry (lichoběžník) příliš známá není. Autorka přehledně a názorně popisuje postup důkazu. Na str. 21 ve 3.ř. důkazu 2.4.1 je překlep (místo "bod V je na ramenu BS", má být "bod V je na ramenu BD"). Nepřesně je napsána závěrečná věta důkazu (stačilo by doplnit, že "velikost úsečky UV je rovna..."). Na straně 23 není popsáno, jak byly sestrojeny body E, F, K.

V kapitole 2.5 je uvedeno 17 řešených příkladů na užití nerovností mezi průměry. Řešení některých příkladů jsou zajímavá, většina z příkladů je ale opsaných včetně řešení (s odkazem na zdroj). Uvítala bych, kdyby autorka vymyslela nějaká vlastní zadání.

Kapitola 3 diplomové práce je věnována několika dalším nerovnostem. V úvodu ke kapitole 3 mě zarazila věta "S nerovnostmi se potkáme především při studiu matematiky na vysoké škole". V části 3.1 autorka definuje pojmy, které využívá v dalších kapitolách. Při psaní textu této kapitoly vycházela z přednášek z matematické analýzy, z nichž nejspíše sepsala vhodné pasáže využitelné v dalších částech práce. Kapitola je kompilační, avšak na rozdíl od kapitoly 2 se zabývá o několik úrovní vyšší matematikou. V kapitole 3.2 se autorka zabývá trojúhelníkovou nerovností. Po zavedení nerovnosti a jejím důkazu uvádí dva řešené příklady. U příkladu 3.2.3 se dopouští nepřesnosti na str. 41 v textu pod nerovnicí (2.6). Předpokládám, že jen používá nevhodné formulace, nikoliv důkaz kruhem. V následující kapitole se lze dočíst o Cauchyho nerovnosti. Je uveden její důkaz a také geometrický význam pro $n=2$. Domnívám se, že by bylo vhodnější dodržet stejné značení proměnných (u geometrického významu použít místo x, y také u, v jako v předchozím a následujícím textu). Uveden je také pěkný důkaz (převzatý) Cauchyho nerovnosti pomocí AG nerovnosti a dále důkaz pomocí trojúhelníkové nerovnosti. V následující části autorka řeší několik příkladů užitím Cauchyho nerovnosti. Zadání jsou převzatá, což je v tomto případě pochopitelné, některé z úloh jsou trikové. Podobné typy úloh se však objevují v matematických soutěžích. U příkladu 3.3.8 je zřejmé

překlep (2.řádek řešení příkladu), autorka avizuje použití nerovnosti, následuje ale rovnost. V části 3.4 je rozebírána Jensenova nerovnost. V úvodu této kapitoly je trochu zbytečně velmi jednoduchým způsobem připomenuta konvexnost a konkávnost funkce (jedné proměnné), vhodnější by bylo použít vysvětlení exaktnějším způsobem nebo tuto část vynechat. Naopak se mohla autorka pokusit o důkaz Jensenovy nerovnosti. Zajímavý je příklad 3.4.2, ve kterém je proveden důkaz AG nerovnosti užitím Jensenovy nerovnosti. Následují další řešené příklady, které mají elegantní krátká řešení a dají se použít i v běžné (neolympiádní) SŠ výuce.

V kapitole 3.5 věnované Youngově nerovnosti je předveden pěkný důkaz této nerovnosti užitím nerovnosti Jensenovy. Dále autorka uvádí vlastní důkaz Youngovy nerovnosti, který je mírně neobratně popsán. Na Youngovu nerovnost se později autorka odvolává v kapitole 4.

Část 3.6 se zabývá Bernoulliho nerovností. Je vyslovena věta o nerovnosti (Věta 3.6.2), doplnila bych, kdy nastává rovnost. Pro důkaz Bernoulliho nerovnosti byla použita Jensenova nerovnost. V dalším textu není Bernoulliho nerovnost zmiňována. Jako příklad použití Jensenovy nerovnosti je ale zařazení Bernoulliho rovnosti v pořádku.

Poslední dvě nerovnosti zařazené do textu DP jsou Hölderova a Minkovského nerovnost v kapitole 3.7 a 3.8. Nerovnosti jsou vysloveny a dokazovány, při dokazování se mj. pracuje s nerovností Youngovou. Ve srovnání s předchozími kapitolami je zde používán náročnější matematický aparát. V úvodu DP autorka píše, že DP může být pomůckou pro nadané studenty SŠ. Domnívám se, že pro ně by bylo třeba pracovat s tématem podrobněji a přesněji. Pro studenty VŠ, o nichž se autorka v úvodu DP také zmiňuje, jsou však nerovnosti a jejich důkazy uceleně a přehledně sepsány. Nejsou zařazeny příklady k použití těchto nerovností, což však není na závadu.

Závěrečná **4. kapitola** diplomové práce je věnována mezioborovému tématu, aplikování nerovností v termodynamice. Studentka v této části mírně navazuje na svou bakalářskou práci, kde se věnovala matematickému aparátu termodynamiky. Na počátku kapitoly jsou uvedeny termodynamické věty, které nejsou vysvětleny podrobně, avšak autorka se odvolává na svou BP, kde lze podrobnosti nalézt. V kapitole 4.1 je dána do souvislosti AG nerovnost s prvními dvěma větami termodynamiky. Autorka přehledně zapsala postup odvozování. Pro čtenáře méně orientovaného v termodynamice by bylo jako motivaci na začátku kapitoly 4.1 vhodné uvést, co vlastně bude dále ukazováno. Kapitola 4.2 je ve své teoretické části chaotická, je ale vidět snaha zařadit nějaké obtížnější matematické partie. V pěkném příkladu 4.2.2 by bylo vhodné shrnout, co vlastně bylo odvozeno. Kapitola 4.3 je přehledná a systematická, autorka sama vymyslela a vyřešila pěkné ilustrační příklady, přestože ve vztahu (4.15) je chyba, na straně 72 ve 2.řádku od konce je chyba ve vyjádření přírůstku entropie, na str. 73 ve druhém odstavci ve 3.řádku by místo podmínky $f_i(T) > 0$ měla být spíše podmínka, že $f_i(T)$ je rostoucí. Vztahu (4.19) zřejmě z nepozornosti není správně (chybí sumy), dále už se s nimi počítá.

Autorka prostudovala velké množství literatury. Práce je částečně kompilační, text a matematický styl je víceméně sjednocen. Autorka přidává některá vlastní řešení úloh a vlastní důkazy. Uvítala bych více vlastních zadání příkladů v kapitole 2 a 3 a více ilustračních obrázků. V práci se objevuje minimum typografických chyb, použitý jazyk je místy neobratný, ale nevybočuje z rámce stylu prací podobných. Vytknout lze nesprávné citování některých zdrojů, konkrétně zdrojů 2-6. Autorka by také nemusela odkazovat na svou BP v případě, že uvádí zcela známý vztah (např. první větu termodynamiky) jako např. na str. 69 ve 4.ř. .

Koncepce diplomové práce není špatná. Kapitoly jsou vystavěny s rostoucí náročností. Avšak některé úlohy jsou velmi elementární a téměř v práci zbytečné, a jiná témata jsou ve srovnání s nimi extrémně náročná. Práce tak místy působí nevyváženě. Je vidět, že studentka pracovala pod časovým tlakem.

Původním záměrem zadání bylo více rozpracovat kapitolu 4, která měla být nosnou částí DP. Pokud by autorka tuto koncepci dodržela, její DP by byla originální a v jistém smyslu unikátní. Vzhledem k rozsahu, kterého její DP (často zbytečně) nabyla v prvních dvou kapitolách, už nezbyl prostor pro další rozšiřování. Práce však ztratila na originalitě. Závěrečných prací, bakalářských i diplomových, na téma nerovností je dostupných několik. Většinou se ale věnují jen některým nerovnostem, jsou zaměřeny buď na přehled nebo na příklady. Tato diplomová práce obsahuje jak přehled nerovností s jejich důkazy, tak řešené příklady. Unikátní je kapitola 4, přestože je krátká (a je to škoda).

Diplomová práce může skutečně posloužit nadaným středoškolákům i studentům matematiky na VŠ jako studijní materiál. Pro tento účel by bylo přínosné, kdyby autorka opravila výše zmíněné chyby. Doporučuji autorce, aby dále rozpracovala kapitolu 4 a výsledky se pokusila publikovat v nějakém časopise pro pedagogy, případně vystoupila na nějaké konferenci pro učitele. Při této příležitosti je vhodné připomenout, že část této DP byla autorkou prezentována studentům na matematickém soustředění na Zadově. Prezentace měla pozitivní ohlas od studentů i od přítomných učitelů.

Práce splňuje zadání, přes výše uvedené výhrady ji doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnocení velmi dobře.

V Českých Budějovicích, 17.5.2017

Jana Kalová

Náměty dotazů k obhajobě:

1. Vysvětlíte, jak pro hodnotu $k=0$ v tabulce na str. 6 získáte geometrický průměr.
2. Určete, v kterém kroku důkazu 2.3.2 nebyla provedena ekvivalentní úprava a proč, a zda (jak) by se dalo zadání upravit, aby všechny úpravy byly ekvivalentní.
3. Jak byl sestroyen bod E v obr. 2.10?
4. Vysvětlíte rozdílná značení pro přírůstek tepla - str.65, Věta 4.1.1, str.65 vztah (4.2), str.66 - text nad vztahem (4.3), na str. 72 dole.
5. Vysvětlíte tvrzení na str. 74, že $[dX/dk]>0$ (je správné, ale proč je zřejmé?)