Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Ekonomická fakulta
Katedra aplikované matematiky a informatiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Společný jazyk matematiky a ekonomie

Vedoucí práce: Mgr. Michal Houda, Ph.D.
Vypracoval: RNDr. Radim Hošek

České Budějovice, 2016

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Fakulta ekonomická
Akademický rok: **2014/2015**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Mgr. Radim HOŠEK**
Osobní číslo:	**E13028**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Účetnictví a finanční řízení podniku**
Název tématu:	**Společný jazyk matematiky a ekonomie**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Zásady pro vypracování:

Cíl práce: Matematický proud v ekonomii prosazuje aplikování matematických metod pro budování ekonomických teorií. Cílem práce je na ekonomických příkladech (zejména z oblasti mikro nebo makroekonomie) demonstrovat aplikaci takové matematické metodologie: ujednotit rozdílné názvosloví, identifikovat problémové oblasti a analyzovat možná zjednodušení, kterých se jak v ekonomii, tak v matematice užívá.

Metodický postup:

1. Studium řešené problematiky mikro/makroekonomie a souvisejícího matematického aparátu, zejména diferenciálního a integrálního počtu.
2. Vyhledání, resp. konstrukce relevantních příkladů a modelů, reformulace pojmů.
3. Diskuse výsledků.
4. Závěr.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**

Rozsah pracovní zprávy: **40 - 50 stran**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

1. **Chiang, A. C. (2005).** *Fundamental methods of Mathematical Economics.* **New York: McGraw-Hill.**
2. **Holman, R. (2007).** *Mikroekonomie: středně pokročilý kurz.* **(2. aktualiz. vyd.) Praha: C .H. Beck.**
3. **Krugman, P. R., & Wells, R. (2008).** *Microeconomics.* **Worth Publishers.**
4. **Mas-Colell, A. (1995).** *Microeconomic theory.* **New York: Oxford University Press.**
5. **Volná, B., & Smítalová, K. (2013).** *Matematika v ekonomii.* **(Pomocný učební text). Opava. Dostupné online.**
6. **Zorich, V. A. (2004).** *Mathematical Analysis I* **(Universitext). (1st ed.). Springer.**
7. **Další časopisecká a knižní literatura dle zaměření práce.**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Michal Houda, Ph.D.**
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: **9. ledna 2015**
Termín odevzdání bakalářské práce: **15. dubna 2016**

doc. Ing. Ladislav Rolínek, Ph.D.
děkan

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
Studentská 13 (8)
370 05 České Budějovice
IČ 600 76 658, DIČ CZ60076658

L.S.

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 27. března 2015

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47 zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

14. dubna 2016 Radim Hošek

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval své přítelkyni, snoubence, manželce a spolužačce Tereze Hoškové za spolupráci při studiu, tvorbu zázemí a také vytrvalost, se kterou k našemu společnému studiu přistupuje, dále svým rodičům za vstřícnost k naší bláznivé myšlence studovat další vysokou školu a také všem z těch přednášejících, kteří naplnili má očekávání ohledně jejich přístupu k nám, studentům kombinovaného studia. V neposlední řadě bych rád poděkoval Mgr. Michalu Houdovi, Ph.D. za bezproblémové vedení této bakalářské práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Ekonomie byla dlouhou dobu vnímána jako společenská věda, neboť lidské chování se zdálo být jevem příliš specifickým na to, aby jej bylo možné zachytit matematickým aparátem, a historicky se tak v ekonomii z matematických metod uplatňovaly pouze elementární počty (Fatulescu, 2012, s. 2). Teprve v polovině 19. století díky ekonomům jako byli Walras, Cournot či Pareto se do ekonomických modelů začaly dostávat rigorózní matematické metody. Jejich práce se zprvu setkaly v anglosaské části ekonomické veřejnosti s nezájmem až odmítnutím. Za velký průlom je proto považována až práce Paula Samuelsona z poloviny 20. století, který své ekonomické modely odvodil z modelů používaných v termodynamice, (Wai-Lim, 2015). Vliv rigorózních matematických postupů v ekonomii od té doby narůstá, přesto je dnes stále poměrně rozšířený názor o spíše společenskovědním charakteru ekonomie a ekonomii jako obor ke studiu si nezřídka vybírají i studenti, kteří chtějí „studovat obor bez matematiky“[1]. Možná i této *poptávce* se přizpůsobuje *nabídka* a při výkladu je minimalizováno využití matematických postupů na nezbytné minimum.

Významnou roli matematiky v ekonomii nicméně tuzemské veřejné vysoké školy v různé míře ve skladbě svých studijních oborů reflektují, Ekonomická fakulta Jihočeské

[1] O fenoménu volby studijního oboru s akcentem na eliminaci veškeré matematiky v rámci studiu referuje i Evropská komise (*Matematické vzdělávání v Evropě: Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí*, 2011), četné důkazy o pravdivosti výše uvedeného tvrzení i v českém prostředí pak poskytují rozličná internetová diskusní fóra týkající se studia na vysoké škole.

univerzity v Českých Budějovicích, jak ukážeme v příloze A, v míře větší. Bohužel, tyto mnohdy pracně získané znalosti ovšem později v ekonomických předmětech nejsou, podle zkušeností autora, v dostatečné míře uplatňovány. V očích studentů ekonomie pak matematika ztrácí pozici univerzálního nástroje, což mimo jiné napomáhá rozšiřování mýtů o neužitečnosti matematiky a zpochybňování její role ve vzdělávacím procesu.

Jenže matematiku nelze chápat jen jako souhrn znalostí a metod, aplikovatelný do přírodních věd a koneckonců i dalších oborů, ale i jako ukázku rozmanitosti vnitřně konzistentních struktur, jimiž lze reálný svět modelovat. Taková matematika má svoji nezastupitelnou roli ve vzdělanosti obyvatelstva, zdokonaluje totiž schopnost kritického myšlení, jehož nezbytnost se nevytratila ani s masivním nástupem výpočetní techniky[2], která jinak usnadnila použití některých matematických metod.

1.1 Cíle práce

Tato práce na pomezí matematické analýzy a základních ekonomických oborů (mikroekonomie, finance, atd.) vybírá některé problematické pasáže učiva, a sice dvojího typu. Prvním typem jsou témata, při jejichž výkladu lze odvodit platné vztahy s využitím standardních matematických postupů, případně by jejich aplikace osvětlila kontext jednotlivých fragmentů učiva. V praxi je však takový přístup často nahrazen pouhým uvedením „vzorců“, což ovšem vede k upřednostňování memorování znalostí před *kritickým myšlením*. Jak uvádí (Klooster, 2001), memorování je však nutno chápat pouze jako jeden ze způsobů, jimž lze získat základní data jako výchozí informace[3], se kterými je pak nutno pracovat za použití kritického myšlení.

Druhým typem jsou ekonomická témata, která z důvodu nedodržení ustálené matematické konvence o rolích horizontální a vertikální osy při grafickém znázornění funkcí jedné reálné proměnné znesnadňují při svém tradičním výkladu interpretaci zobrazovaných vztahů dvou veličin. Ukážeme také, že je celá situace mnohdy komplikovanější a nemá snadné řešení.

[2]Ba právě naopak.

[3]Dalším způsobem získání výchozích dat je využití různých informačních zdrojů, jež jsou zkraje 21. století pro každého snadno dostupné.

Autor si je vědom existence množství kvalitních knih a publikací, které podrobně popisují matematické podloží ekonomických teorií. Tyto jdou však většinou svým rozsahem nad rámec běžných vysokoškolských kursů pro bakalářské obory. Cílem této práce je identifikovat některé, ve světle výše uvedeného, problematické fragmenty v učivu základních kursů ekonomických oborů a doplnit je jejich matematickým kontextem za účelem osvětlení logických souvislostí a vazeb. U fragmentů učiva, jejichž společným jmenovatelem je převrácený význam os v grafickém znázornění, se pokusíme odhalit důvody nedodržení této konvence objasněním některých zavedených zvyklostí v mikroekonomické teorii. Tento rozpor se dále pokusíme zmírnit, a to oběma směry, s cílem sblížit ekonomický a matematický pohled na tato témata.

Pokud byť jen jedinému studentovi přečtení této práce pomůže k lepšímu pochopení třeba jen jediného z uvedených témat, naplnila tato práce autorův záměr.

1.2 Struktura práce

Tato práce je standardně rozdělena na dvě části, teoretickou a praktickou. Avšak vzhledem k jejímu z velké části matematickému charakteru, je obsah obou částí mírně nestandardní.

V teoretické části (Kapitola 2) nejprve shrneme náhled na matematiku z pohledu ekonomie, uvedeme základní principy matematického modelování a srovnáme přístupy matematického modelování v přírodních vědách a v ekonomii. Jako ilustraci uvedeme příklad současných vědeckých přístupů v aplikaci matematiky na teorii finančních trhů.

Krátká rešerše výuky matematiky v rámci ekonomických oborů na českých univerzitách by v jiné práci byla zřejmě řazena do praktické části, v našem případě je jen krátkým podkladem pro naše tvrzení, že na EF JU je rozsah výuky matematiky v rámci sledovaného oboru nadprůměrný, a do práce ji zařazujeme pouze pro úplnost jako přílohu.

Vlastní práce (praktická část) je pak tvořena vybranými fragmenty učiva, se kterými se student oboru Účetnictví a finanční řízení podniku v bakalářském stupni na EF JU setká a na nichž lze ilustrovat výše popsané fenomény.

Kapitola 3 obsahuje tři témata, jejichž matematické pozadí využívá metod a nástrojů vyučovaných v úvodních kursech matematiky, avšak výklad této látky se o tyto znalosti neopírá. Osvětlíme proto výpočet hodnoty anuit, úskalí stanovení přibližné hodnoty vnitřního výnosového procenta i teorii užitku.

Kapitolu 4 také vyplňují tři témata, jejichž standardní grafické zobrazení je vzhledem k nedodržení konvence přiřazení významu os spíše zavádějící než osvětlující. Konkrétně jsme vybrali teorii individuální nabídky práce, diverzifikaci investičního portfolia a teorii poptávky. Prodiskutujeme problematiku „sčítání křivek“ a vysvětlíme, v čem tkví úskalí interpretace grafu s opačnou konvencí.

Práci uzavírá kapitola 5, ve které shrneme dosažené výsledky, a dvě přílohy s doplňkovým materiálem.

Kapitola 2

Ekonomie a matematika (Teoretická část)

„Problémem ekonomie není, že by používala málo matematiky, ale že používá velké množství příliš jednoduché matematiky.“

- Harbir Lamba, *profesor na George Mason University, Virginia, USA*

Matematik doplňující si ekonomické vzdělání na se nemůže ubránit dojmu, že mezi přednášejícími ekonomických předmětů převládá názor, že matematika již nemá ekonomii co nabídnout. V následujících čtyřech podkapitolách nabízíme některé podklady pro opačný názor.

2.1 Ekonomie jako vědní obor

Ekonomie jako věda stojí na pomezí společenských a přírodních věd, jak naznačuje například i (Holman, 2002, s. 2), a matematika se pro zkoumání vztahů v ekonomii používá prakticky odjakživa. Zvláštní, avšak ne ojedinělý, náhled na roli matematiky v ekonomii má (Soukupová et al., 1996, s. 41):

„Používání matematiky v ekonomii má své výhody i nevýhody. Mezi výhody patří skutečnost, že matematika je srozumitelná lidem hovořícím různým národním jazy-

kem; její jazyk je přesnější než verbální vyjádření. Formalizujeme-li určitý ekonomický problém, může nám matematika umožnit tento problém lépe řešit. Nevýhodou matematiky v ekonomii je nebezpečí převážení matematického pohledu nad ekonomickým. (...)"

Vcelku správný je náhled na matematiku jako *jazyk*, umožňující vyjádřit fenomény jednotlivých vědních oborů a pracovat s nimi užitím poněkud odlišné perspektivy. Avšak obava z „převážením matematického pohledu" zde svědčí spíše o nepochopení úlohy matematiky. Naprosto analogická by byla obava, aby při výuce ekonomie v anglickém jazyce nepřevážilo hledisko jazykovědné nad ekonomickou podstatou probírané látky.

Přes důvody uvedené výše, které jsou spíše polemikou s nešťastnou formulací než její nosnou myšlenkou, je artikulace ekonomie jako vědního oboru rozkročeného mezi dvěma velkými skupinami společenských a přírodních věd přesnější vyjádření skutečnosti, než rozdělení ekonomie na dva proudy, které se v různých učebních textech mikroekonomie na českých univerzitách opakuje s až zarážející doslovností. Viz například (Macáková & kol., 2003, s. 13):

- „*Matematická větev prosazuje názor, že kritériem pravdivosti a vědeckosti je možnost matematického důkazu.*"
- „*Společenská větev odmítá matematickou větev, argumentuje tím, že ekonomie je věda o chování lidí ve výrobě.*"

Výše uvedená definice matematické větve je z matematického pohledu nesmyslná. Matematika totiž není a nemůže být nástrojem objektivizace pravdivosti teorií. Ve výrokové logice, která je standardním nástrojem pro konstrukci matematických důkazů, totiž možnost dokázat určité tvrzení silně závisí na výběru *axiomů*, základních pravdivých tvrzení, na kterých teorii stavíme. A vhodným výběrem souboru axiomů lze dokázat pravdivost téměř libovolného tvrzení. Navíc za jeden z největších matematických objevů 20. století je považován důkaz brněnského rodáka Kurta Gödela, že žádný logický systém založený na konečné množině axiomů nemůže být zároveň úplný a bezesporný, (Gödel, 1931). Tedy, že ne každý výrok lze prostředky matematické logiky dokázat či vyvrátit.

2.2 Matematické modelování

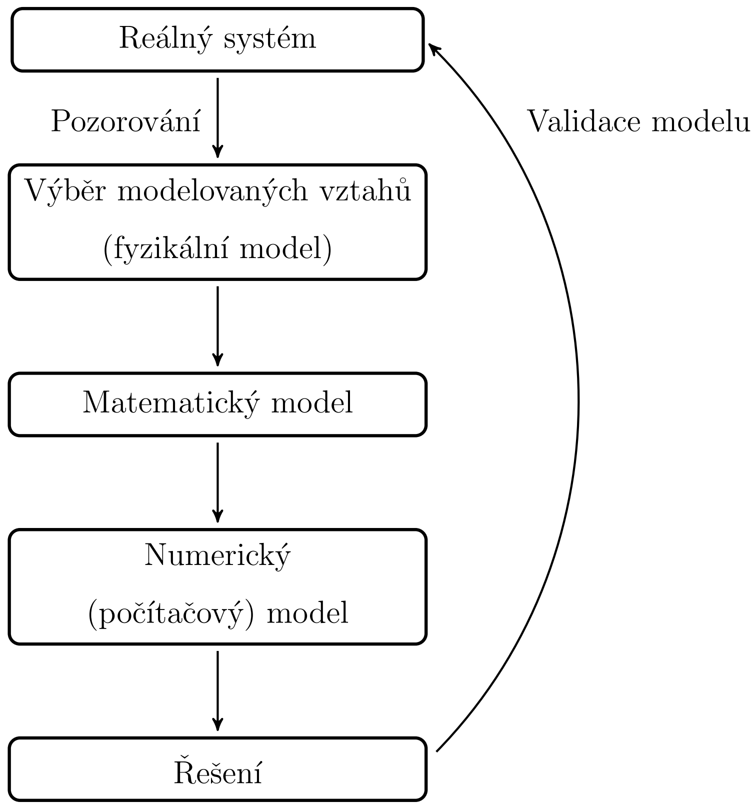
Dnešní matematika k reálným procesům z rozličných vědních oborů přistupuje s pomocí nástroje *matematického modelování*, jež umožňuje zachytit zákonitosti mezi jednotlivými fenomény užitím matematických metod a abstrahovat tak od nedůležitých skutečností. Výsledkem tohoto procesu je matematický model jako soubor vztahů mezi abstraktními pojmy. Takovým modelem může být například evoluční diferenciální rovnice, která reprezentuje zákonitosti uplatňující se při vzájemném fyzikálním působení několika stavových veličin, které popisují daný reálný systém. Model pak může posloužit k predikci chování systému při simulaci různých okolních vlivů, anebo i budoucího vývoje.

Z podstaty věci je jasné, že model do jisté míry *zjednodušuje* skutečnost. Důležité přitom je, aby efekty, které model nezahrnuje, nebyly pro chování sledovaného systému podstatné. Například na efektivitu práce sledovaného zaměstnance nebude mít zřejmě vliv barva jeho košile, avšak jeho náchylnost k nemocnosti už třeba ano. Na to, které skutečnosti je možné zanedbat a které již nikoli, nám ovšem matematika odpověď nedá a ani dát nemůže. Proto je při práci s matematickým modelem nezbytné respektovat klasické schéma, znázorněné na Obrázku 1, které se v různých podobách vyskytuje ve všech učebnicích matematického modelování, viz například (Hřebíček & Škrdla, 2006) či (Blaheta, 2012).

Nezřídka se matematik setká i s názorem, že „*matematika vše umí*“. Tento mýtus patrně pramení z faktu, že obsah matematického učiva v rozsahu základní a střední školy zůstává nezměněn již více než 200 let, od dob Newtona a Leibnize. Že je v matematice velké množství nezodpovězených otázek, popularizoval na přelomu tisíciletí Clayův institut publikací sedmi nejzásadnějších problémů, které před matematikou v 21. století stojí[1]. Je mezi nimi i existence řešení pro Navierovy-Stokesovy rovnice (Fefferman, 2006), které tvoří všeobecně přijímaný a používaný model pro proudění tekutin[2]. Jedná

[1]Obdobný seznam 23 problémů pro 20. století publikoval v roce 1900 německý matematik David Hilbert. Není bez zajímavosti, že z oněch 23 bylo dodnes zcela vyřešeno pouze 10, viz (Hazewinkel, 2001).

[2]Mezi tekutiny řadíme kapaliny, plyny a plazma.



Obrázek 1: Schéma matematického modelování. Na každé úrovni dochází k určitému zjednodušení, o němž nelze obecně rozhodnout, zda nebude zásadní pro kvalitu řešení, které model poskytne. Proto je nezbytnou součástí modelovacího procesu i validace výsledků modelu oproti reálné situaci.

se o dvě nelineární diferenciální rovnice, pro které v plné obecnosti nejsme schopni prokázat existenci a nebo neexistenci řešení. Přitom případné prokázání neexistence řešení neznamená, že by *přestala téct voda*, znamená pouze, že jsme se při odvození modelu dopustili příliš velkého zjednodušení a že náš model nutně nezachycuje všechny skutečnosti, které jsou pro daný proces podstatné.

Tedy ona *možnost matematického důkazu*, citovaná výše v definici matematické větve ekonomie, naráží kromě problémů filozofických, které jsme zmínili v kapitole předchozí, i na reálné hranice poznání v matematice jako vědní disciplíně.

2.3 Srovnání aplikace matematických metod v různých vědních oborech

Odmítání matematických metod v ekonomii získalo po roce 2008 nový argument, že *matematické modely beztak nefungují*, podrobněji například v (Nabeal, 2012). Jenže to může být argument pouze pro zavržení daného modelu, nikoli matematiky samotné.

Je zajímavé sledovat paralelu ekonomie a mechaniky jako dvou oborů využívajících matematické metody. Nejjednodušší model volného pádu tělesa, který se stále učí na základních školách, redukuje těleso na konstrukt *hmotného bodu*, zanedbává přitom možnost rotace či deformace tělesa, o odporu vzduchu ani nemluvě. Proto je obtížné přesvědčit studenty, že rychlost pádu hmotného bodu nezávisí na jeho hmotnosti. Ostatně i v průmyslové praxi je takový model, vzhledem k nepřesnostem vyvolaným těmito zjednodušeními, prakticky nepoužitelný. Důsledkem bylo vytvoření komplikovanějších a přesnějších modelů, jejichž správnost je každodenně verifikována úspěchy v praktických aplikacích, ale i rozvoj matematických metod hnaný potřebami oboru aplikace. Za všechny lze jmenovat například dopad Einsteinových objevů na rozvoj teorie neeuklidovských geometrií.

Oproti tomu v ekonomii, snad i díky existenci alternativní společenskovědní větve, byl tlak na zdokonalení modelů nesrovnatelně menší. Přitom soudobé matematické nástroje umožňovaly konstrukci i řešení komplikovanějších modelů, než jakých bylo využíváno, jak podrobně ukážeme v následující kapitole na příkladě využití modelů magnetických materiálů pro modelování finančních trhů.

Ilustrací toho, že matematický aparát potřebný pro řešení takových problémů je mnohdy již připraven a *stačí jej jen aplikovat*, je známý příběh Johna F. Nashe, který dokázal existenci Nashových ekvilibrií (Mas-Colell et al., 1995, s. 244) v teorii her (Nash, 1950) a (Nash, 1951). Za tyto výsledky získal v roce 1994 Nobelovu cenu za ekonomii, přestože z pohledu matematiky se jednalo o poměrně elementární aplikaci *Věty o pevném bodě*[3].

[3] S poukazem právě na tuto skutečnost označil údajně Nashův školitel John von Neumann tento výsledek za triviální, jak uvádí čtivě napsaná a později i zfilmovaná Nashova biografie Beautiful Mind

2.4 Finanční trh jako hysterezní materiál

„Umíme modelovat fáze euforie a fáze strachu na finančních trzích. Jejich parametry jsou poměrně odlišné. Nikdy jsme však úspěšně nenamodelovali přechod od euforie ke strachu.“

- Alan Greenspan[4], *Financial Times, March 27th 2009.*

Tuto podkapitolu zařazujeme jako ilustraci současné hranice poznání v oblasti aplikace matematiky do ekonomie.

(Lamba, 2010) přišel s kritikou matematického modelování finančních trhů. Logický impulsem pro revizi stávajících modelů byly rozsáhlé obchody s finančními deriváty, kvůli kterým na sebe v roce 2008 finanční kolaps amerických trhů s hypotékami navázal zásadní propady finančních trhů prakticky na celém světě, což mělo za důsledek následnou finanční krizi.

Lamba poukazuje na fakt, že stávající modely dynamiky finančních trhů jsou založeny na předpokladu, že trh prochází pouze rovnovážnými stavy, a předpokládají racionalitu všech finančníků, maximalizaci užitku jako jejich cíl a vzájemnou nezávislost rozhodování. Takové modely pak mají stabilní rovnovážný stav. Tyto modely převzaly automaticky některé principy používané ve standardních aplikacích v mechanice a termodynamice, kde se také předpokládá, že systém prochází pouze rovnovážnými stavy. Jenže velký rozdíl mezi finančním trhem a termodynamickým systémem je ten, že termodynamický systém vždy spěje k rovnovážnému stavu — zaručují to termodynamické zákony[5], tedy zákon zachování energie a princip rostoucí entropie, který předepisuje částicím určité chování. Takže přestože model není dokonale přesný, je alespoň *přibližně přesný*, tedy chování skutečného systému nemůže být diametrálně odlišné od chování modelu.

Jinými slovy, v termodynamickém systému máme zajištěnou jak existenci rovnováhy, tak i mechanismus, který směřování k rovnováze zaručuje. Jenže v ekonomickém systému

(Nasar, 2011, s. 94).

[4](Greenspan, 2009)

[5]Viz libovolná učebnice či skripta základů termodynamiky, například (Králík, 2012, s. 111–116).

nic takového není. Budeme-li sledovat ještě chvíli tuto analogii, lze připodobnit finanční trh ke krabici s plynem, jehož částice mohou samovolně libovolně zrychlovat či zpomalovat. Tato vnitřní dynamika pak může značně ochromit stabilitu rovnovážného stavu. A stejné je to s finančními trhy; vnitřní dynamika může rozpohybovat ceny daleko od předpokládané rovnováhy.

Velkým trendem je také aplikace stochastických diferenciálních rovnic, které předpokládají, že vstupní funkce jsou dány až na určitou náhodnou výchylku. Jenže běžný předpoklad je, že tyto výchylky mají nulovou střední hodnotu, řídí se Gaussovým rozdělením a jsou navzájem nezávislé. Zvláště poslední předpoklad si protiřečí s pozorováními, že výchylky mají tendenci se spíše kumulovat. Tyto metody tedy jen stěží budou naší spásou.

Vezměme si příklad vývoje ceny určitého zboží, jejíž rovnovážný stav je dán průsečíkem křivek nabídky a poptávky. Pokud se některá z křivek skokově změní a rychle se skokově vrátí zpět, cena by se měla rychle stabilizovat opět na původní hodnotě. Tedy *neviditelná ruka trhu* by měla zaúčinkovat a systém si nenese žádnou informaci o prodělaném cenovém šoku. Jenže pokud připustíme vnitřní strukturu (analogii k neplatnosti termodynamických zákonů), systém se nemusí vrátit zpět do rovnováhy. Tento jev lze interpretovat jako nedůvěru investorů v daný produkt.

Vnitřní dynamice finančních trhů přispívá i *stádní efekt*, kdy obchodníci mají tendenci upřednostňovat strategii zaujímanou většinou obchodníků, často zvanou také *nálada na trhu*. Tento efekt je nezachytitelný standardními modely.

Teorie, že *nálada na trhu* je dána předchozím vývojem, je dalším z impulsů k zanesení historie systému do modelu, například prostřednictvím fenoménu *paměti*. Takové modely jsou známy z fyzikálních aplikací takzvaných hysterezních materiálů, jejichž magnetické vlastnosti závisí nejen na stavových veličinách, ale i na historii daného materiálu. Teorie modelování hysterezních materiálů je poměrně široce rozpracována a nyní se pracuje i na jejich přizpůsobení pro finanční trhy. Podrobnosti lze nalézt v odborných matematických článcích (Grinfeld et al., 2013), (Lamba, 2010), (Krejčí et al., 2014) či (Krejčí et al., 2015), ze kterých bylo čerpáno při tvorbě této podkapitoly.

Kapitola 3

Fragmenty ekonomického učiva a doplnění jejich matematického kontextu

V této kapitole se zaměříme na některá témata různých ekonomických oborů, při jejichž výkladu by bylo užitečné rozkrýt jejich matematické pozadí. Ač se jedná o heterogenní látku, jedno téma mají všechny tři fragmenty společné. Jakkoli je matematický aparát, o něž se opírají, součástí kursů matematiky, který studenti v prvním ročníku bakalářského studia absolvují, jejich výklad jej mnohdy plně nevyužívá. V této kapitole se pokusíme o doplnění tohoto přístupu.

3.1 Budoucí a současná hodnota anuit

Anuitou rozumíme konstantní platbu v pravidelných časových intervalech po určitý časový úsek. Celková hodnota anuit ovšem není dána prostým souhrnem všech plateb, neboť do hry vstupuje časový faktor. Pojmy *budoucí a současná hodnota* souvisí s teorií časové hodnoty peněz, která vychází z jednoduchého principu „jedna koruna dnes je víc než jedna koruna zítra, protože ta dnešní již může vydělávat“, viz (Kislingerová, 2004, s. 130).

Finanční toky lze tedy podle této teorie ocenit k určitému datu a anuity jsou pouze jedním speciálním případem.

Během bakalářského studia se lze setkat s touto látkou opakovaně, vždy bohužel formulovanou pouze jako seznam následujících čtyř součinových koeficientů s těžko zapamatovatelnými názvy:

- *střadatel* umožňuje spočítat budoucí hodnotu anuit,
$$FV = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{3.1}$$
- *fondovatel* výši anuity pro dosažení dané budoucí hodnoty,
$$A = FV \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}, \tag{3.2}$$
- *zásobitel* současnou hodnotu anuity,
$$PV = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i}, \tag{3.3}$$
- *umořovatel* požadovanou výši anuit pro danou současnou hodnotu,
$$A = PV \cdot \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}. \tag{3.4}$$

Tyto čtyři vzorce se vztahují k polhůtnému úročení, tedy variantě, kdy jsou úroky připisovány na konci úrokovacího období. Úročení předlhůtné vyžaduje buď další čtveřici vzorců k zapamatování, nebo dvojkrokový výpočet, kdy se výsledek musí ještě dodatečně oddiskontovat.

S využitím znalostí získaných v úvodním kursu matematiky lze počítat současnou hodnotu anuity jako částečný součet řady

$$PV = \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{(1+i)^k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A}{1+i} \cdot \frac{1}{(1+i)^j},$$

ve které je každá následující platba diskontována stejným diskontním faktorem. Jde tedy o řadu geometrickou,

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_0 q^j, \tag{3.5}$$

pro hodnoty $a_0 = \frac{A}{1+i}, q = \frac{1}{1+i}$.

Pro úplnost zde odvoďme nyní součet geometrické řady, viz například (Zorich & Cooke, 2004, p. 96). Rozepsáním (3.5) dostaneme

$$s_n = a_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}),$$
$$qs_n = a_0(q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n),$$

jejichž vzájemným odečtením a elementární úpravou získáme

$$s_n = a_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{3.6}$$

A tedy dosazením do (3.6) lze získat současnou hodnotu anuity jako

$$PV = \frac{A}{1+i} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{1+i}} = A \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 + i - 1} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Podobně je budoucí hodnota anuit rovna částečnému součtu řady

$$FV = A(1+i) + A(1+i)^2 + \cdots + A(1+i)^n = \sum_{k=1}^{n} A(1+i)^k = \sum_{j=0}^{n-1} A(1+i)(1+i)^j,$$

tedy jde o geometrickou řadu s $a_0 = A(1+i), q = 1+i$. Dosazením těchto hodnot do (3.6) dostaneme

$$FV = A \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

čímž jsme odvodili koeficienty zvané *zásobitel* (3.3) a *střadatel* (3.1). Zbývající dva, tedy *fondovatel* (3.2) a *umořovatel* (3.4) jsou pouze převrácenými hodnotami předchozích dvou.

Znalost vyjádření částečného součtu geometrické řady umožňuje přímo počítat i předlhůtné nebo nestandardní anuity. Bude-li například vypláceno ročně A Kč po dobu n let, přičemž je první splátka odložena o d let, lze využít podobné úvahy k odvození hodnot $a_0 = \frac{A}{(1+i)^{d+1}}, q = \frac{1}{1+i}$, které dosadíme do vztahu (3.6).

(Kislingerová, 2004, s. 142) využívá ve výkladu pouze jednodušší vzorec pro nekonečné anuity, tzv. *perpetuity* a počítá částečný součet geometrické řady jako rozdíl dvou časově navzájem posunutých perpetuit. Jakkoli je tento postup z pohledu filozofie matematiky zvláštní[1], z pohledu věcně-logického proti němu nelze nic namítat. Tato metoda má však omezení spočívající v nutné konvergenci příslušné geometrické řady, je proto aplikovatelná pouze v případě $|q| < 1$, tedy pouze pro současnou hodnotu. Tento postup nelze aplikovat na budoucí hodnotu anuity, předpokládáme-li nezápornou úrokovou míru.

3.2 Vnitřní výnosové procento

Vnitřní výnosové procento (IRR z anglického *internal rate of return*) se řadí v teorii financí mezi výnosové metody hodnocení investic a všeobecně se definuje jako taková hodnota úrokové míry, při které je *čistá současná hodnota* investice rovna nule;

$$NPV(i) = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t} - K, \tag{3.7}$$

kde

NPV je čistá současná hodnota investice,

n je počet let životnosti investice,

CF_t je očekávané cash-flow z investice v t-tém roce,

K je výše kapitálového výdaje, předpokládám $K > 0$.

Problém je, že pro $NPV(i) = 0$ nelze obecně proměnnou i z rovnice (3.7) vyjádřit pomocí elementárních matematických operací. Navíc funkce $NPV(i)$ nemusí být ani prostá, takže řešení rovnice $NPV(i) = 0$ nemusí být jednoznačné. To záleží na hodnotách cash-flow, které je zde parametrem úlohy, což také ilustrujeme na Příkladu 2 v této podkapitole.

S těmito úskalími se matematika dokáže více či méně elegantními metodami vypořádat, v ekonomických učebnicích však již po desetiletí dominuje metoda nejjednodušší a nejméně vhodná.

[1]Postup je zvláštní v tom ohledu, že se jedná o výpočet konečné sumy s pomocí nekonečné, pro níž byl vzorec odvozen díky právě konečným součtům.

3.2.1 Metoda lineární interpolace

Metoda lineární interpolace vychází z myšlenky nahradit složitou funkci sečnou, tedy úsečkou, s využitím znalosti funkčních hodnot ve dvou bodech. Pro ni již není problém dopočítat průsečík s horizontální osou, a tento výsledek prohlásit za přibližnou hodnotu *vnitřního výnosového procenta*.

Předpokládejme, že všechny peněžní toky CF_t plynoucí z investice jsou nezáporné a že jejich nediskontovaný úhrn převyšuje kapitálový výdaj K. Pak platí

$$\lim_{i\to 0^+} NPV(i) = \sum_{t=1}^{n} CF_t - K > 0, \quad \lim_{i\to\infty} NPV(i) = -K < 0,$$
$$NPV''(i) = \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)CF_t}{(1+i)^{t+2}} > 0, \quad \text{pro všechna } i \in \mathbb{R}^+,$$

z čehož, za přispění spojité závislosti čisté současné hodnoty na diskontní sazbě, plyne existence jediného $i^\star$, hodnoty diskontní sazby, pro kterou je čistá současná hodnota nulová, tedy vnitřní výnosové procento, $i^\star = IRR$.

Se znalostí základních transformací funkcí z prvního semestru matematiky lze rovnici přímky procházející body $[a, A], [b, B]$ psát jako

$$y - A = \frac{B - A}{b - a}(x - a).$$

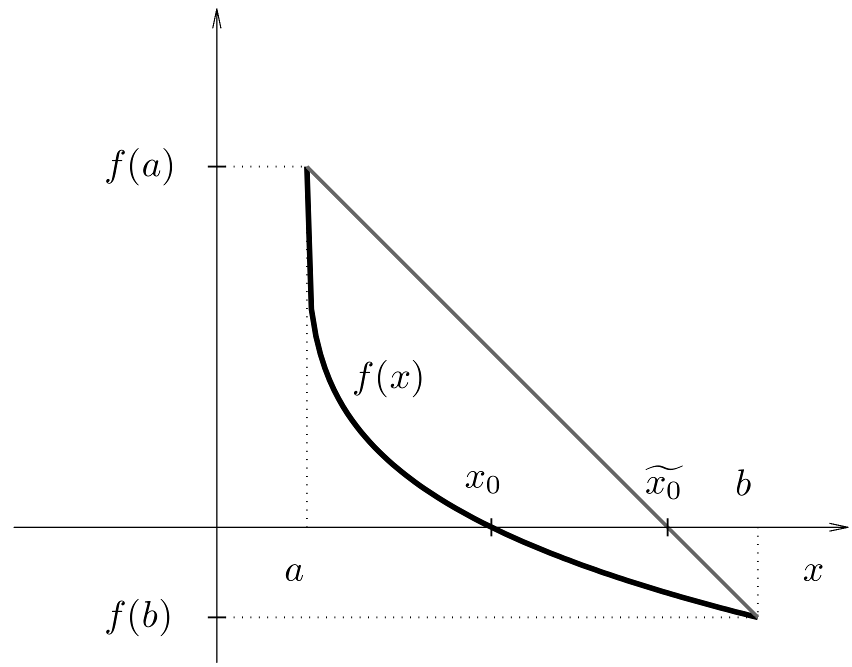
Přibližnou hodnotu $\widetilde{IRR}$ vnitřního výnosového procenta IRR odtud získáme dosazením $[a, A] = [i_N, NPV_N], [b, B] = [i_V, NPV_V]$ a $x = \widetilde{IRR}, y = 0$, tedy

$$-NPV_1 = \frac{NPV_2 - NPV_1}{i_2 - i_1}(\widetilde{IRR} - i_1),$$

odkud vyjádříme

$$\widetilde{IRR} = i_1 + NPV_1 \frac{i_2 - i_1}{NPV_1 - NPV_2}. \tag{3.8}$$

Při řešení se postupuje následovně: Odhadnou se dvě úrokové míry i_1, i_2, které plní funkci spodního a horního odhadu pro IRR, spočítají se pro ně pomocí (3.7) hodnoty NPV_1, NPV_2, a po ověření $NPV_1 > 0, NPV_2 < 0$ se všechny čtyři hodnoty dosadí do (3.8).



Obrázek 2: Hledání kořenu funkce pomocí lineární interpolace: Ilustrace nahrazení spojité funkce f na intervalu $[a, b]$, kde mění znaménko $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, sečnou a s tím spojená aproximace kořenu x_0 funkce f průsečíkem sečny a vodorovné osy, bodem $\widetilde{x_0}$.

I přes zjednodušení ve formě nezápornosti peněžních toků metoda lineární interpolace poskytuje pouze přibližné řešení, jehož kvalita výrazně závisí na dvou parametrech:

- vzdálenosti bodů i_1, i_2,
- „míry konvexnosti“ funkce $NPV(i)$, tedy velikosti její druhé derivace.

Oba tyto jevy ilustruje náčrt grafu na Obrázku 2.

3.2.2 Metoda bisekce

I nadále předpokládejme nezápornost peněžních toků plynoucích z investice, a tedy existenci jediného $i^\star$, pro které je čistá současná hodnota investice nulová. Pro takový případ lze použít metodu bisekce, viz například (Süli & Mayers, 2003, s. 28), která úspěšně minimalizuje chybu odhadu přesného řešení, přitom je stále jednoduchou metodou.

Podobně jako u metody lineární interpolace, i zde je počátečním krokem stanovení dvou úrokových měr, nižší i_{a_1}, pro kterou je čistá současná hodnota investice $NPV_{a_1} = NPV(i_{a_1})$ kladná, a vyšší i_{b_1}, pro kterou je $NPV_{b_1} = NPV(i_{b_1})$ záporná. Střed intervalu (i_{a_1}, i_{b_1}) označme i_{c_1}, tedy

$$i_{c_1} = \frac{i_{a_1} + i_{b_1}}{2},$$

a definujeme interval poloviční délky (i_{a_2}, i_{b_2}) jako

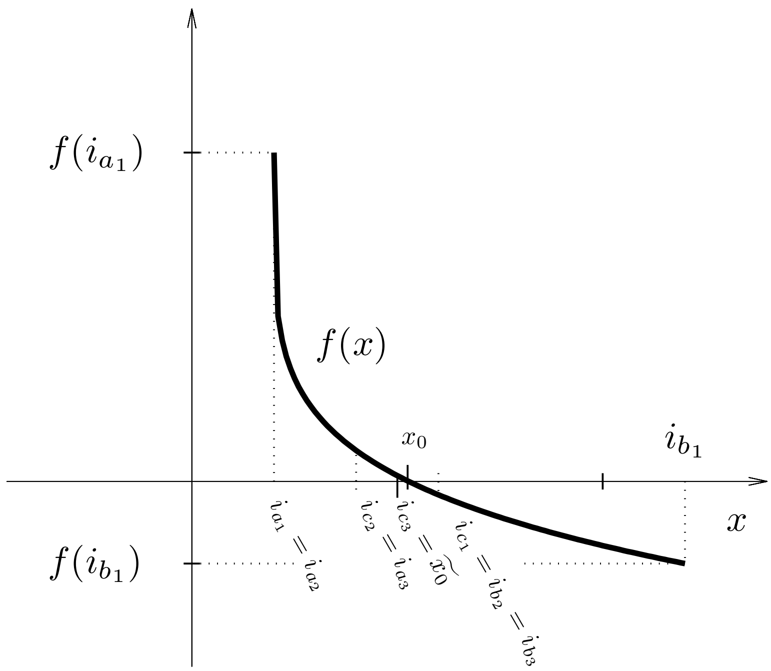
$$(i_{a_2}, i_{b_2}) = \begin{cases} (i_{a_1}, i_{c_1}), & \text{je-li } NPV_{c_1} \cdot NPV_{b_1} > 0, \\ (i_{c_1}, i_{b_1}), & \text{je-li } NPV_{c_1} \cdot NPV_{b_1} < 0. \end{cases}$$

Tuto proceduru opakujeme v každém kroku, tedy pro interval $(i_{a_k}, i_{b_k}), k \in \mathbb{N}$, pro který $NPV_{a_k} \cdot NPV_{b_k} < 0$ označme jeho střed $i_{c_k} = \frac{i_{a_k} + i_{b_k}}{2}$. Je-li $NPV_{c_1} = 0$, nalezli jsme vnitřní výnosové procento dokonce přesně. V opačném případě definujeme interval poloviční délky

$$(i_{a_{k+1}}, i_{b_{k+1}}) = \begin{cases} (i_{a_k}, i_{c_k}), & \text{je-li } NPV_{c_k} \cdot NPV_{b_k} > 0, \\ (i_{c_k}, i_{b_k}), & \text{je-li } NPV_{c_k} \cdot NPV_{b_k} < 0. \end{cases}$$

Z Bolzanovy-Cauchyovy věty o nulové hodnotě, viz například (Zorich & Cooke, 2004, s. 160), plyne, že přesná hodnota vnitřního výnosového procenta IRR leží v každém intervalu (i_{a_k}, i_{b_k}), přičemž jeho délka je $l_k := (i_{b_k} - i_{a_k}) = 2^{-k}(i_{b_0} - i_{a_0})$. Tedy pro předem zvolenou požadovanou přesnost ε proces opakujeme, dokud není délka intervalu pod touto hranicí, tedy $l_k < \varepsilon$. Za přibližnou hodnotu vnitřního výnosového procenta pak položíme například střed posledního intervalu, tedy $\widetilde{IRR} := c_k$, jak je ilustrováno na Obrázku 3.

Na tomto principu fungují i metody hledající kořen v mnohých softwarových programech, jako je například *Řešitel* v aplikaci Microsoft Excel nebo funkce *fzero* v prostředí MATLAB, které mohou být pro určení vnitřního výnosového procenta s úspěchem využity.



Obrázek 3: Hledání kořenu funkce čisté současné hodnoty (tj. vnitřního výnosového procenta) pomocí metody bisekce: Tři kroky metody, řešení aproximováno bodem $\widetilde{x_0}$, jenž je středem třetího intervalu.

3.2.3 Využití volně dostupného softwaru

Dneska nosí každý z nás v kapse větší výpočetní výkon, než měla posádka Apolla 11 při přistání na Měsíci.

- Shelley Canright, *NASA*[2]

Jakkoli metoda bisekce úspěšně řeší úlohu vnitřního výnosového procenta, není stejně jako metoda lineární interpolace robustní ve vztahu k multiplicitě řešení. Investice, které přináší *nekonvenční peněžní toky*, mohou dávat nulovou čistou současnou hodnotu pro více různých úrokových měr. Výše uvedené metody v takovém případě vrátí přibližnou hodnotu jedné z nich, aniž poskytnou informaci, že řešení existuje více.

Že taková situace může nastat, si lze ilustrovat na následujícím příkladě.

Příklad 1. Nechť investice o výši 413 tisíc o dvouleté životnosti má předpokládané

[2] (Canright, 2009)

finanční toky 1 milion v prvním roce a −600 tisíc ve druhém roce. Určete, pro jakou hodnotu úrokové míry lze investici doporučit[3].

Čistou současnou hodnotu takové investice lze psát jako

$$NPV(i) = \frac{1000}{1+i} - \frac{600}{(1+i)^2} - 413,$$

a její nulovou hodnotu lze spočítat dokonce analyticky řešením kvadratické rovnice. Kořeny jsou dva, $i_1^\star \approx 0,097$ *a* $i_2^\star \approx 0,324$.

Vysvětlení je zde nasnadě. Pro nulovou úrokovou míru, která odpovídá zanedbání časového faktoru v příjmech a výdajích, výdaje jsou vyšší než příjmy, a tedy nelze investici doporučit. Teprve s rostoucí úrokovou mírou poklesne současná hodnota výdaje v druhém roce životnosti investice natolik, aby byla čistá současná hodnota kladná. Při dalším růstu úrokové míry klesá současná hodnota příjmu z prvního roku investice, a čistá současná hodnota opět klesne do záporných hodnot. □

Pro delší životnost investice a více záporných peněžních toků může být kořenů rovnice $NPV(i) = 0$ ještě více a situace se stává nepřehlednou. Naštěstí dnes již každý z nás disponuje mnohem mocnějšími nástroji a není složité si nulové body funkce spočítat a funkci si graficky znázornit.

Příklad 2. Nechť investice ve výši jednoho milionu korun přinese v následujících letech finanční toky: devět milionů v druhém roce, minus šest milionů ve třetím roce, minus osmnáct milionů v pátém roce a osmnáct milionů v sedmém roce. Ve zbylých letech předpokládáme toky nulové. Jaká je hodnota vnitřního výnosového procenta? □

Takový příklad již nelze řešit analyticky a je nezbytné využít numerických metod. Není přitom potřeba instalovat žádné drahé komerční softwary či jejich volné, ale časově omezené verze. Dnes je již na internetu k dispozici spousta online řešičů, jejichž výhoda spočívá i v tom, že k výpočtu nepoužívají operační paměť vašeho zařízení, a lze je tedy efektivně využít například i z mobilního telefonu. Zvláštní oblibě se těší zejména web `www.wolframalpha.com` společnosti Wolfram, který stojí za komerčním softwarem

[3] Zadání příkladu se může zdát mírně nereálné, ale použití jednoduchého příkladu zde pomůže názorněji ukázat jev, jehož objasnění v komplikovanějším reálném příkladě by bylo méně transparentní.

Mathematica.

Většina softwarů vyžaduje poměrně přísnou kázeň při syntaxi příkazů a právě rozvolnění tohoto požadavku zřejmě napomohlo k popularitě projektu WolframAlpha. Tedy například vykreslení funkce $NPV(i)$ lze dosáhnout intuitivním příkazem:

```
y = 9/(1+x)^2 -6/(1+x)^3  - 18/(1+x)^5 +18/(1+x)^7 - 1,  in  (0,2),
```

získání všech hodnot úrokové míry, pro niž je čistá současná hodnota investice nulová, pak:

```
9/(1+x)^2 -6/(1+x)^3  - 18/(1+x)^5 +18/(1+x)^7 = 1.
```

Ukázka výstupu pro oba příkazy je součástí přílohy B, zde jen pro úplnost konstatujme, že $NPV(i) = 0$ pro $i_1^\star = 0,099, i_2^\star = 0,594, i_3^\star = 1,251$, přičemž je kladná na intervalech $(0, i_1^\star)$ a $(i_2^\star, i_3^\star)$.

Úloha má i záporná řešení, která neuvádíme pro jejich nerelevanci. Úrokové míry sice mohou dosahovat mírně záporných hodnot, ale pouze na dobu, která je výrazně kratší než kalkulovaný jeden rok.

3.3 Teorie užitku

Teorie užitku patří mezi základní stavební kameny mikroekonomické teorie. Její podstatou je odhalit, jakým způsobem konkrétní spotřebitel rozdělí svůj nutně omezený důchod mezi dostupné statky.

Důvody pro zařazení teorie užitku do výčtu témat v této práci jsou dva. Prvním z nich je aplikace teorie funkcí více proměnných do teorie užitku. Ta je totiž někdy pro jednoduchost vysvětlována na příkladu dvou statků, viz například (Urban, 2015). V takové situaci si lze pro popis vystačit s funkcí jedné proměnné, přičemž není zřejmé, jakým způsobem aparát zobecnit pro případ více statků.

Druhým důvodem je zavádějící rozdělení teorie užitku na ordinalistickou a kardinalistickou teorii, což je přístup běžný v učebnicích, viz například (Hořejší et al., 2010, s. 51), ale i (Holman, 2002, s. 49). Přitom jsou oba přístupy spíše dvě strany téže mince a jako způsob odhalení preferencí spotřebitele, z pohledu autora, spíše okrajovým tématem. V obou případech jsou totiž metody odhalení optima totožné.

3.3.1 Ordinalistická a kardinalistická teorie

Jednotlivé kombinace N statků (přičemž N může být opravdu velké číslo) lze reprezentovat jako body v kladné části[4] N-dimenzionálního vektorového prostoru, kterou značíme $\mathbb{R}^N_+$. Teorie užitku přitom předpokládá *racionální chování* spotřebitele, kdy jeho volba kombinace statků je vedena cílem maximalizovat svůj *užitek*. Tedy pro (přípustné) kombinace statků musí existovat relace s vlastnostmi *uspořádání* ($\preceq$), která pro každé dvě kombinace $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N_+$ určí, která z nich je preferovaná. Jinými slovy, $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě tehdy, když kombinace statků $\mathbf{y}$ přináší spotřebiteli (neostře) větší užitek než kombinace $\mathbf{x}$. Podle kardinalistické teorie lze pro každou kombinaci $\mathbf{x}$ kvantifikovat užitek $U(\mathbf{x})$. Funkce $U : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto U(\mathbf{x})$ pak zprostředkuje uspořádání $\preceq$ pouhým porovnáním funkčních hodnot, tedy

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}). \tag{3.9}$$

Oproti tomu, ordinalistický přístup pracuje pouze s uspořádáním $\preceq$, neboť předpokládá, že spotřebitel není schopen svůj užitek kvantifikovat, ale pouze projevit svou preferenci při porovnání dvou variant možných kombinací statků. Preference spotřebitele je pak podle (Hořejší et al., 2010, s. 54) pro dvoudimenzionální případ vyjádřena pomocí indiferenčních křivek, které spojují kombinace přinášející stejný užitek spolu s informací o uspořádání indiferenčních křivek. Ponechme nyní stranou předpoklady, za kterých lze uvažovat, že indiferenční množiny tvoří spojité (a dokonce hladké) křivky a že užitková funkce v případě kardinalistickém je spojitě diferencovatelná, diskusi na toto téma společně s rigorózními důkazy najde čtenář v (Mas-Colell et al., 1995, Kapitola 3.C).

Co je ale podstatné, indiferenční křivky v případě dvou statků (a jejich analogie v obecném N-dimenzionálním případě) lze chápat jako *hladiny* nějaké užitkové funkce. Funkci užitku U lze tedy zrekonstruovat z hladin funkce, podobně jako lze podobu terénu rekonstruovat z vrstevnic neznámé ekvidistance. Pochopitelně, taková *ordinalistická užitková funkce* není jednoznačně určená, neboť pro každou reálnou rostoucí funkci f je i složená funkce $U \circ f$ užitkovou funkcí, viz (Mas-Colell et al., 1995, s. 9).

[4] Přesněji vyjádřeno, kladnou částí N-dimenzionálního vektorového prostoru rozumíme množinu $\mathbb{R}^N_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,|\, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, N\}$.

Tedy, ať už je užitková funkce přímo dána s pomocí teorie kardinalistické nebo zrekonstruována z informací poskytovaných teorií ordinalistickou, lze s ní pro účely stanovení optimální kombinace statků zacházet naprosto ekvivalentním způsobem.

3.3.2 Stanovení optima

Vraťme se nyní k případu, kdy $N = 2$, tedy spotřebitel se rozhoduje mezi dvěma statky. (Urban, 2015) uvádí, že nutnou podmínkou optima je, že se v něm *rozpočtová linie* a nějaká indiferenční křivka dotýkají. Dotyk křivky s úsečkou chápeme ve smyslu společných tečen, jak ale situaci zobecnit pro větší N, není zřejmé. V následujícím textu využijeme znalostí z operační analýzy a rozkryjeme matematické pozadí tohoto tvrzení.

Ke stanovení optima je nutné znát výši omezeného rozpočtu $w \in \mathbb{R}$, ale i jednotkové ceny spotřebovávaných statků p_i, které předpokládáme, že jsou kladné. Ty lze uspořádat do N-dimenzionálního vektoru $\mathbf{p}$, přičemž je zřejmé, že přípustné jsou pouze takové kombinace statků $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, které splňují

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_Nx_N \leq w, \tag{3.10}$$

tedy ty, které jsou spotřebiteli finančně dostupné. Nadrovina, která je dána rovnicí $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = w$, se jmenuje *rozpočtová nadrovina*, pro $N = 2$ se používá výše zmíněný název *rozpočtová linie*. Pro optimum spotřebitele platí, (Holman, 2002, s. 29) nebo (Hořejší et al., 2010, s. 64), že

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \cdots = \frac{MU_N}{p_N}, \tag{3.11}$$

kde MU_j je funkce *mezního užitku*, která je definovaná jako přírůstek užitku vyvolaný pořízením dodatečné jednotky statku j. Z pohledu matematika je vlastně jedná o *parciální derivaci U podle x_j*.

Zdůvodněme nyní vztah (3.11). Tvrdíme, že optimální kombinace statků $\mathbf{x}^\star$ splňuje nutnou podmínku

$$\nabla U(\mathbf{x}^\star) = \lambda \mathbf{p}, \quad \lambda > 0, \tag{3.12}$$

kde parametr λ lze chápat jako Langrangeův multiplikátor. Toto tvrzení z elementární optimalizace můžeme ukázat následovně:

Ať je $\mathbf{x}^\star$ bodem optima, pak nutně $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^\star = w$, jinak bychom za neutracený důchod dokoupili libovolný statek a zvýšili tak svůj užitek. Vektor $\mathbf{p}$ je normálovým vektorem rozpočtové nadroviny a jeho průmět do ní je tedy nulový. Pokud není vektor $\nabla U(\mathbf{x}^\star)$ jeho násobkem, měl by nenulový průmět do rozpočtové nadroviny a mírná změna skladby statků ve směru projekce vektoru $\nabla U(\mathbf{x}^\star)$ by tak zvýšila užitek spotřebitele.

Povšimněte si, že vzhledem k definici mezního užitku lze ztotožnit podmínky (3.12) a (3.11). (Hořejší et al., 2010, s. 65) tvrdí, že (3.11) platí i pro užitek stanovený ordinalistickou teorií, třebaže mezní užitek nelze přesně vyjádřit. To lze potvrdit i naším přístupem, kde je funkce užitku v ordinalistické teorii zvolena až na rostoucí funkci f, kterou lze funkci užitku vždy obalit, přičemž preference zůstanou zachovány. Vzhledem k pravidlům derivování složených funkcí dovodíme, že taková změna má za následek pouze změnu hodnoty λ v (3.12), kvalitativní vliv na výsledné optimum však nemá.

Kapitola 4

Záměna významu os v grafickém znázornění

V matematice se definuje graf funkce f jako následující podmnožina kartézského součinu

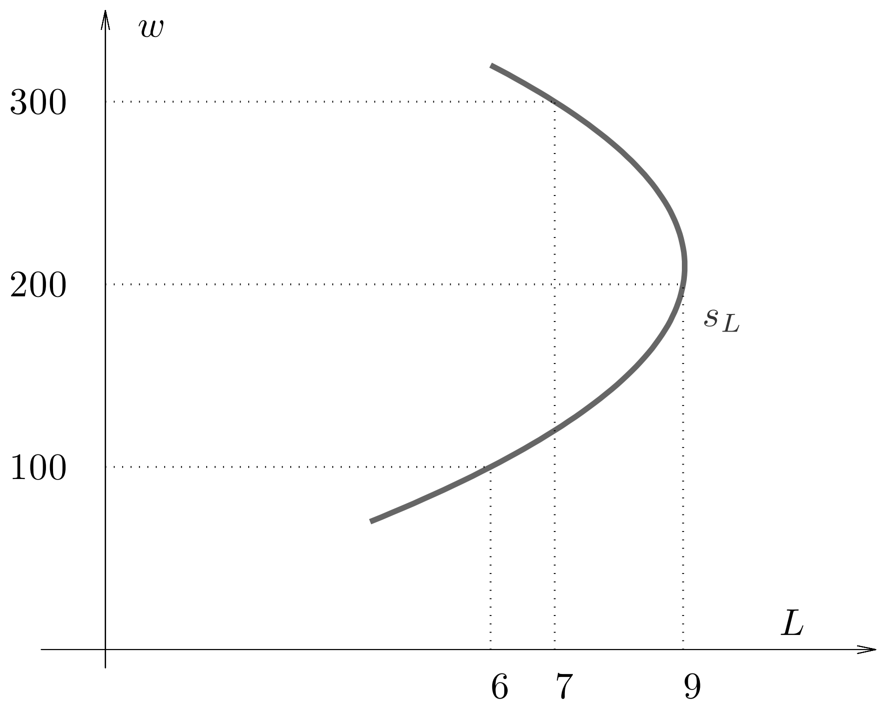
$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D(f) \quad \& \quad y = f(x)\}, \tag{4.1}$$

tedy nezávisle proměnné je vyhrazena vodorovná osa, závisle proměnné pak osa svislá, viz například (Zorich & Cooke, 2004, s. 21). Je to záležitost konvenční, teoreticky nic nebrání tomu definovat graf obráceně, pro obecnou srozumitelnost jsou však konvence hodné následování a například přírodní vědy (fyzika, chemie či biologie) ji obecně akceptují.

Grafické znázornění má být doplňující informací, umožňující z vizuálního dojmu rychle získat představu o globálním chování funkce, o jejích vlastnostech, které nemusí být z funkčního předpisu zřejmé. **Bez znalosti toho, zda graf dodržuje konvenci o použití os, nebo nikoli, nelze z grafu získat informace**, respektive nemůžeme vizuální dojem grafu jednoznačně interpretovat. To je pro studenty při grafickém znázorňování v ekonomii zásadním kamenem úrazu. Více se této problematice budeme věnovat v kapitole 4.4.

Zřejmě nejznámější příklad použití převrácené konvence je grafické znázorňování nabídky a poptávky v rámci mikroekonomických teorií. Přestože je dnes za nezávisle proměnnou považována cena a nabízené/poptávané množství za proměnnou závislou, vykresluje se cena na svislou osu. Jak ale ukážeme, situace je složitější, neboť s poptávkovou křivkou se pracuje jednou jako s funkcí množství v závislosti na ceně, podruhé jako s funkcí závislosti ceně na množství. Začneme však od jednodušších problémů, kde se jedná o čisté nedodržení konvence grafického znázornění a zjednání nápravy je přímočařejší. Na nich můžeme snáze ilustrovat úskalí, která nedodržení konvence přináší.

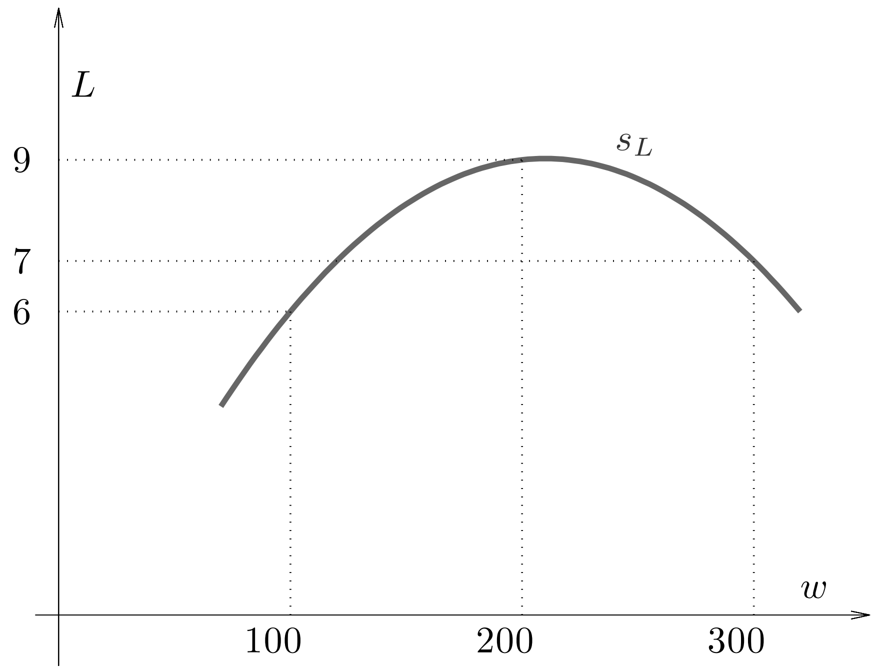
4.1 Individuální nabídka práce



Obrázek 4: Standardně zobrazovaná křivka nabídky práce, převzato z (Hořejší et al., 2012). Jedná se o inverzní graf podle definice (4.2).

Mikroekonomické téma týkající se modelování trhu s výrobními faktory, konkrétně lidskou prací, je krásnou ukázkou nedodržení konvence znázorňování grafu funkce, viz (Hořejší et al., 2010, s. 414) či (Holman, 2002, s. 273). Je zde odvozena *individuální nabídka práce* v hodinách v závislosti na výši nabízené mzdy. Tato funkce přitom není monotonní, neboť proti sobě působí dva protichůdné vlivy. *Substituční efekt zvýšení* *mzdy* motivuje jedince k obětování volného času a tedy vyššímu časovému objemu nabízené práce, zatímco později se dostaví *důchodový efekt zvýšení mzdy*, který naopak stimuluje k nákupu více statků, mezi nimiž figuruje i volný čas.

V obou výše citovaných publikacích je přitom graf funkce individuální nabídky práce znázorněn jako na Obrázku 4, jak by graf vypadal při dodržení konvence, je ukázáno na Obrázku 5.



Obrázek 5: Zobrazení grafu nabídky práce v souladu s definicí grafu (4.1).

Na svislé ose figuruje v tradičním zobrazení výše mzdy, tedy nezávislá proměnná, zatímco na vodorovné ose hodinová nabídka práce, což je proměnná závislá. Žák základní školy, navyklý na přísné dodržování standardní konvence, tedy křivku na Obrázku 4 klasifikuje tak, že nemůže být grafem funkce[1]. Přitom se o graf funkce jedná, graf je zde totiž definován následovně,

$$G'(f) = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D(f) \quad \& \quad y = f(x)\}. \tag{4.2}$$

[1]Přesněji řečeno, křivka se jeví, že není grafem *jednoznačné* funkce. S jinými se v rámci učiva základní školy ani nepracuje.

Dále budeme grafu s opačnou konvencí os, který je definovaný vztahem (4.2) říkat *inverzní graf*. Důvodem tohoto pojmenování je skutečnost, že $G'(f)$ je, v případě, že je funkce f prostá, a tudíž invertovatelná, grafem funkce f^{-1}, která je k f inverzní. Pro dvojici (y, x) z definice (4.2) lze opravdu psát

$$(y, x) = (f(x), x) = (y, f^{-1}(y)),$$

což naše tvrzení dokazuje.

V případě grafického znázorňování individuální nabídky práce nic nebrání dodržování konvence. Argumentem pro je i následná definice agregátní nabídky práce, jak ukážeme v následující podkapitole.

4.1.1 Horizontální součet křivek

> *„Křivka tržní nabídky vzniká horizontálním součtem všech individuálních křivek nabídky práce.“*
>
> \- (Hořejší et al., 2010, s. 415),

Z pohledu matematika je sčítání křivek operací mírně řečeno nestandardní. Křivka v dvourozměrném prostoru je definována jako následující zobrazení

$$\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

přičemž křivky lze dále klasifikovat podle hladkosti funkcí γ_i, jež ji tvoří, viz (Zorich & Cooke, 2004, s. 377). Jakkoli to nebývá v ekonomických učebnicích explicitně řečeno, křivkou se v ekonomii rozumí spíše *obraz křivky*, tedy *množina*

$$\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \subset \mathbb{R}^2 : t \in [a, b]; \gamma_i \in C(a, b), i = 1, 2\}.$$

Sčítání množin je definováno po prvcích, tedy součtem dvou křivek lze chápat množinu všech bodů, které jsou součtem libovolného bodu první a libovolného bodu druhé křivky, tedy[2]

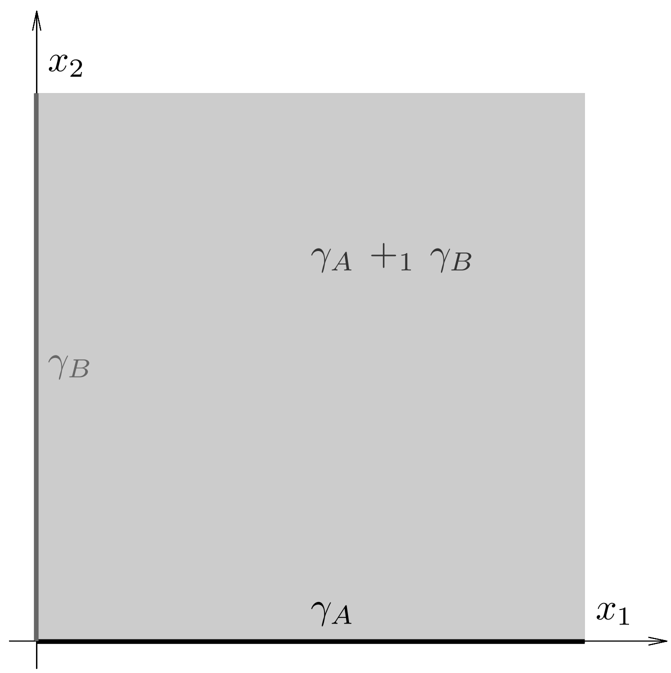
[2]Zde se dopouštíme zneužití značení, pro součet obrazů křivek by mělo být správněji použito Γ namísto γ.

$$\gamma_A +_1 \gamma_B \stackrel{\text{def}}{=} \{A + B \in \mathbb{R}^2; A \in \gamma_A, B \in \gamma_B\}. \tag{4.3}$$

Takový přístup ovšem není šťastný, neboť součtem dvou křivek totiž obecně není křivka. Například snadno ověříme, že součtem horizontální a vertikální úsečky je čtverec,

$$([0,1] \times \{0\}) +_1 (\{0\} \times [0,1]) = [0,1] \times [0,1],$$

viz též grafické znázornění na Obrázku 6.

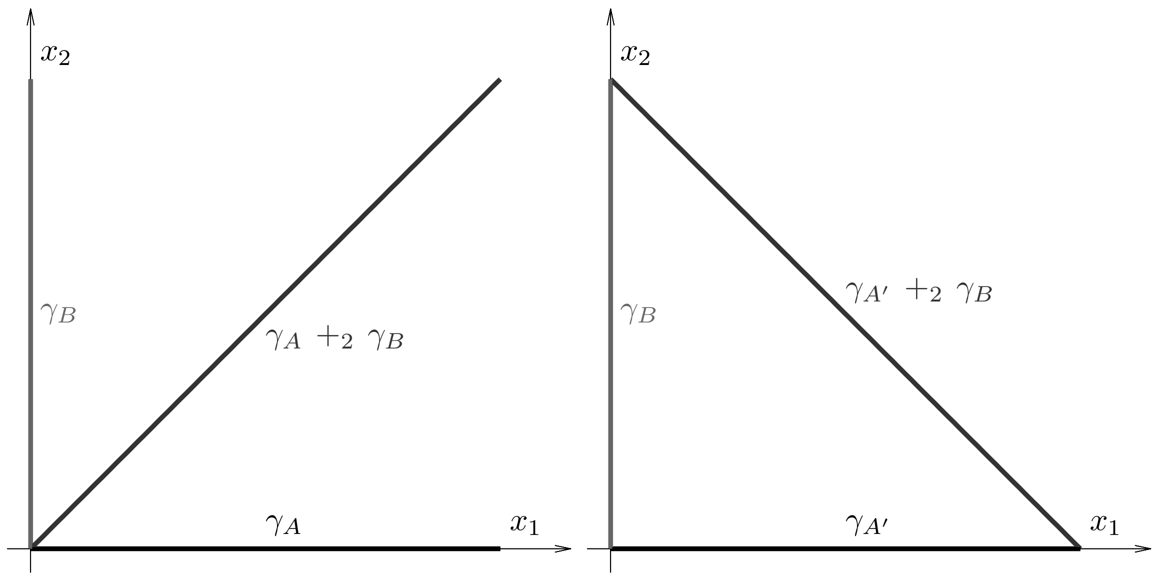


Obrázek 6: Ilustrace k definici součtu křivek: Součet křivek ve smyslu sčítání množin není obecně křivkou.

Vhodnějším způsobem sčítání křivek je tedy sčítání pouze bodů, které vznikly zobrazením stejné hodnoty parametru,

$$\gamma_A +_2 \gamma_B \stackrel{\text{def}}{=} \{(g_{1,A}(t) + g_{1,B}(t), g_{2,A}(t) + g_{2,B}(t)) \subset \mathbb{R}^2; t \in [a,b]\}, \tag{4.4}$$

kde $\gamma_A = \{(g_{1,A}(t), g_{2,A}(t)) \subset \mathbb{R}^2, t \in [a,b]\}$ a $\gamma_B = \{(g_{1,B}(t), g_{2,B}(t)) \subset \mathbb{R}^2, t \in [a,b]\}$. Tato definice má dvě úskalí. Zaprvé, musí být obě křivky definovány nad stejným intervalem parametru $t \in [a, b]$, a za druhé, je tento součet *závislý na parametrizaci křivky.* Opět můžeme situaci ilustrovat na součtu dvou úseček, viz Obrázek 7.



Obrázek 7: Ilustrace závislosti sčítání křivek na její parametrizaci. Ačkoli je v obou případech obraz křivky γ_A a $\gamma_{A'}$ stejný, na obrázku vlevo je dána předpisem $\gamma_A = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$, na obrázku vpravo pak $\gamma_{A'} = (1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$. V obou případech je $\gamma_B = (0, t)$, $t \in [0, 1]$.

K tomu, abychom mohli správně uchopit koncept součtu křivek, jak je v ekonomických učebnicích bez explicitní definice používán, je nutné se vrátit k řešenému problému, kde je součet křivek doplněn přívlastkem *horizontální.* Pokud tedy křivka znázorňuje inverzní graf funkce podle vztahu (4.2), pak ji lze parametrizovat nezávisle proměnnou, umístěnou na svislé ose, kterou je v tomto případě w. Pak lze definici (4.4) modifikovat následovně,

$$\gamma_A +_3 \gamma_B = \{(g_{1,A}(t) + g_{1,B}(t), t) \subset \mathbb{R}^2; t \in [a, b]\}.$$

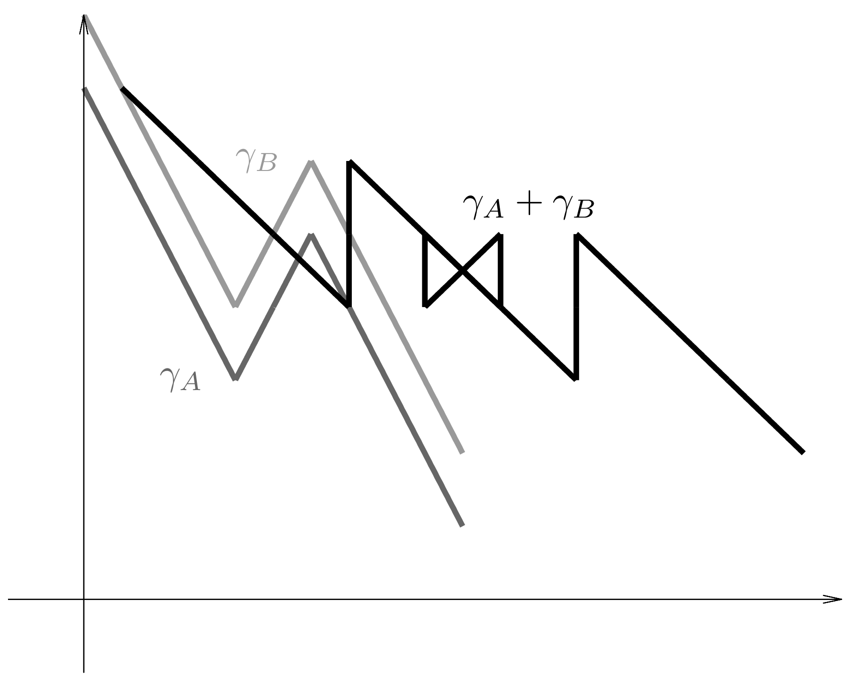
Taková definice součtu odpovídá standardně definovanému součtu funkcí $g_{1,A}$ a $g_{1,B}$. Tedy, pokud bychom měli funkce individuální nabídky práce reprezentovány jejich standardními grafy, křivka agregátní nabídky je pak grafem běžného součtu těchto funkcí.

Křivky a grafy funkcí

Situace se zásadně komplikuje ve chvíli, kdy křivku nelze vyjádřit jako inverzní graf funkce. To sice není případ nabídkových křivek, obecně však nelze existenci tohoto fenoménu v mikroekonomii vyloučit.

Takovou křivku nelze popsat jednoznačnou funkcí jedné reálné proměnné, ale k jejímu popisu je nutné použít *implicitní funkce*. Křivka popisující vzájemný vztah dvou veličin je popsána jako nulová hladina funkce dvou reálných proměnných, tedy

$$G(p, q) = 0. \tag{4.5}$$



Obrázek 8: Horizontální součet křivek, jež nelze popsat jednoznačnou funkcí závislou na proměnné, která figuruje na svislé ose.

Tento přístup se v matematickém modelování uplatňuje například v dynamice tekutin, kde pro některé tekutiny, jejichž chování je dalece vzdálené chování vody, která přenáší mechanické napětí na prostorovou deformaci v podstatě lineárně. Takovou tekutinou může být například med či různé pastové hmoty, viz například (Rajagopal & Srinivasa, 2008). Dalece rozvinutá teorie v tomto směru by mohla být inspirací i pro podobný výzkum v oblasti ekonomické. Nutno dodat, že popis (4.5) je univerzální. Lze jej využít vždy, tedy i pro funkce jednoznačné, či dokonce prosté.

Problematické je ovšem sčítání takových křivek. Například křivku na Obrázku 8 nelze popsat jako jednoznačnou funkci $x = g(y)$. Takové křivky lze horizontálně sčítat pouze jako víceznačné, množinové funkce. Jenže součtem takových křivek není (jednoduchá) křivka, jak naznačuje Obrázek 8.

4.2 Eliminace rizika v dvousložkovém portfoliu

Pro další ukázku opustíme vody mikroekonomie, vypůjčíme si téma z teorie financí, a sice eliminaci rizika v investičním portfoliu. Rizikem investice se rozumí pravděpodobnost, že její výnos se bude lišit od předpokládané hodnoty[3].

Riziko investice lze snížit její diverzifikací do více produktů. Soubor investičních produktů se označuje jako portfolio. Pro analýzu je nejjednodušší začít s portfoliem dvousložkovým, i z důvodu snadného grafického znázornění.

Uvažujme tedy portfolio složené ze dvou investičních produktů A a B, jejichž očekávané výnosy a rizika označíme po řadě r_A, r_B a σ_A, σ_B. Pokud je zastoupení produktu A v portfoliu dáno faktorem $w \in (0, 1)$, a tedy zastoupení produktu B faktorem $(1 - w)$, je celkový očekávaný výnos investice dán jejich konvexní kombinací

$$r = r(w) = wr_A + (1 - w)r_B. \tag{4.6}$$

S rizikem je to složitější, závisí totiž nejen na poměru produktů v portfoliu, ale i na jejich vzájemné provázanosti ve smyslu reakce na pohyb trhu. Tato provázanost je dána *korelačním koeficientem* ϱ_{AB}, pro jehož výpočet odkazujeme do libovolné standardní učebnice pravděpodobnosti a statistiky, viz například (Friesl, 2014). Zde jen připomeneme, že $\varrho_{AB} \in [-1, 1]$.

Riziko celé investice je dáno

$$\sigma_{AB}(w) = \sqrt{w^2\sigma_A^2 + 2w(1 - w)\varrho_{AB}\sigma_A\sigma_B + (1 - w)^2\sigma_B^2}. \tag{4.7}$$

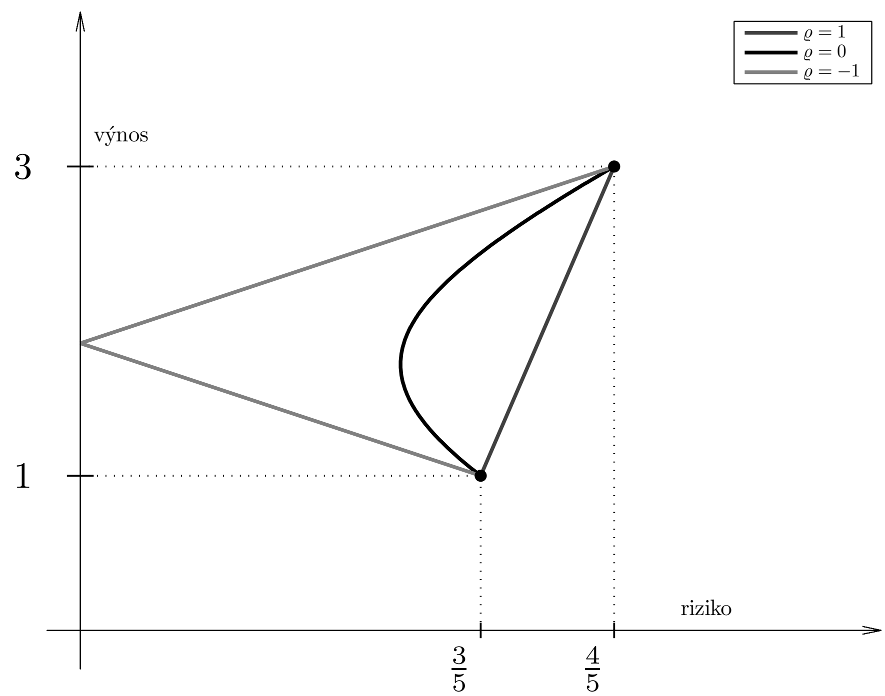
[3](Hnilica & Fotr, 2009, s. 14)

Tedy speciálně platí $\sigma_{AB}(w) = w\sigma_A + (1-w)\sigma_B$, je-li $\varrho_{AB} = 1$. V takovém případě diverzifikace portfolia nemá smysl, protože nejnižšího rizika dosáhneme, pokud se bude v portfoliu zastoupen pouze jeden z produktů A, B, a sice ten s nižším rizikem. V případě $\varrho_{AB} = -1$ lze najít takovou váhu w, že se riziko zcela eliminuje, neboť $\sigma_{AB}(w) = |w\sigma_A - (1-w)\sigma_B|$. Snadno odvodíme, že

$$w_{-1} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}.$$

V praxi je dosažení krajní hodnoty $\varrho_{AB} = -1$ nereálné z důvodu existence *systematického rizika*[4], proto je nutné využít základního vztahu (4.7) a minimální možnou míru rizika spočítat jako derivaci položenou rovnou nule, tedy

$$w^\star = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\varrho_{AB}}{\sigma_A^2 - 2\sigma_A\sigma_B\varrho_{AB} + \sigma_B^2}. \tag{4.8}$$

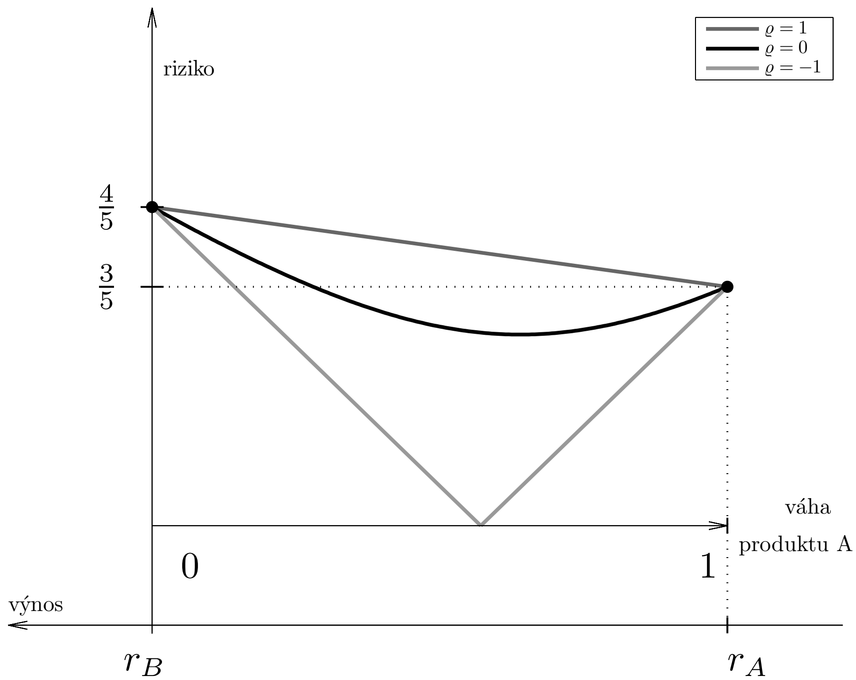


Obrázek 9: Grafické znázornění možnosti snížit riziko diverzifikací portfolia, s nedodržením konvence os. Přibližná reprodukce Obrázků 2.13–2.15 z (Kislingerová, 2004).

[4] (Hnilica & Fotr, 2009, s. 17)

Grafické znázornění pro elementární případy $\varrho_{AB} \in \{-1, 0, 1\}$ lze najít například jako Obrázky 2.13–2.15 v (Kislingerová, 2004), které shrnujeme na Obrázku 9.

Riziko dvousložkového portfolia vyjadřujeme jako funkci váhy produktu A v portfoliu, viz (4.7). Matematik by proto, v souladu s definicí (4.1) znázorňoval závislost rizika na váze pomocí grafu na Obrázku 10.



Obrázek 10: Grafické znázornění možnosti snížit riziko diverzifikací portfolia, s váhou jednoho ze dvou produktů jako nezávisle proměnnou.

Podobně jako v předchozím tématu individuální nabídky práce zde máme ukázku nedodržení konvence významu os v grafickém znázornění. Navíc je zde situace složitější, že graf podle Kislingerové (Obrázek 9) používá jako nezávisle proměnnou výnos. Mezi výnosem $r \in [r_A, r_B]$ a vahou produktu A $w \in [0, 1]$ existuje vztah (4.6), což je bijektivní zobrazení, avšak pouze za předpokladu $r_A \neq r_B$, tedy rozdílných výnosů produktů A a B. V Obrázku 10 je proto uvedena i alternativní interpretace horizontální osy ve smyslu výnosu. Povšimněte si, že osy w a r mají opačnou orientaci, což je důsledkem nerovnosti $r_A < r_B$. Přeznačením obou produktů bychom snadno dosáhli souhlasné orientace obou os.

O záměně rolí obou os v grafickém znázornění platí vše uvedené v předchozí kapitole. Zde navíc figuruje úskalí zavedení výnosu jako nezávisle proměnné. Tedy pro dva produkty se stejným výnosem graf degeneruje do úsečky a nedává tedy informaci o poměru produktů A a B, který by minimalizoval riziko. Graf na Obrázku 10 v takovém případě pouze přichází o alternativní interpretaci nezávisle proměnné jako výnosu, neboť výnos je konstantní. Informace v něm však zůstávají zachovány.

4.3 Teorie nabídky a poptávky

Jedním z typických příkladů nekompatibility způsobu grafického znázorňování mikroekonomického učiva se standardními matematickými konvencemi je jedno z prvních témat základního kursu, tedy teorie nabídky a poptávky, přesněji řečeno, její poptávková složka.

V dnešním pojetí mikroekonomie je poptávka chápána převážně jako množství statku v závislosti na jeho tržní ceně, viz např. (Holman, 2002, s. 71), (Soukupová et al., 1996, s. 35). Tedy, matematicky řečeno, cena je nezávisle proměnnou, nabízené množství proměnnou závislou. Podle definice (4.1) náleží při vykreslování funkce jedné proměnné horizontální osa proměnné nezávislé, tedy v tomto případě ceně.

Teorie nabídky a poptávky tuto zvyklost nedodržuje, umisťuje přitom cenu na osu vertikální. Stejně tak je tomu i v úvodních kursech mikroekonomie, přičemž všetečné otázky na důvod této neobvyklosti bývají odpovězeny neurčitě odkazem na tradici či konzistenci s pozdější látkou, kde je objem produkce již chápán jako proměnná nezávislá[5]. Pátrání po příčině není nikterak průkopnické, zajímavý rozcestník lze najít například na blogu Jamese Parsonse, (Parsons, 2011).

Historie grafického znázornění křivky nabídky sahá až do roku 1838, kdy jej ve své práci *Recherches sur le principes mathématiques de la theorie des richesses* použil Antoine-Augustin Cournot[6], jakkoli je v literatuře často přisuzováno Alfredu Marshallovi, viz (Humphrey, 1992), jenž tento koncept zpopularizoval ve své učebnici Prin-

[5] Například při odvození křivky nabídky se vychází z nákladů výroby, tedy cena je zde nezávisle proměnnou.

[6] (Cournot, 1838)

ciples of economics (Marshall, 1890). Marshall přitom vycházel z článku Fleeminga Jenkina z r. 1870 *The graphic representation of the laws of supply and demand and their application to labour*[7]. Podle Kleinové (Klein, 2002) byl zásadním výsledkem Jenkinovy práce rovnovážný stav trhu jako průnik křivek nabídky a poptávky, určující rovnovážnou cenu a množství. Matematický popis křivek a tedy i otázka, která z proměnných má být chápána jako nezávislá, byla daleko od středu zájmu. O několik let později dokonce Marshall prosazoval teorii, že „*metoda grafického znázornění by měla být vnímána nezávisle na metodách matematické analýzy*“, viz (Klein, 2002, s. 112).

Pro získání křivky agregátní poptávky platí to, co bylo odvozeno v kapitolce 4.1.1 o „horizontálním součtu křivek“. Tedy, jedná se o prostý součet poptávkových funkcí, s cenou jako nezávisle proměnnou. V kontrastu se zvyklostmi ve zobrazování nabídky a poptávky, není zaručeno, že dílčí poptávkové křivky, stejně tak jako křivka agregátní poptávky, jsou klesající. To může vést až k nejednoznačnosti rovnovážného bodu na trhu, viz například (Mas-Colell, 1988).

4.4 Získávání informací z inverzního grafu

Jak jsme již zmiňovali v úvodu této kapitoly, grafické znázornění funkce má za cíl pomoci uživateli pomocí vizuálního vjemu snáze zachytit některé důležité charakteristiky, které nemusí být z funkčního předpisu patrné. Pokud je ovšem zachycena například křivka poptávky bez patřičného zdůraznění významu os, je takové znázornění značně zavádějící. Uveďme nyní základní charakteristiky (hladkých) funkcí a odvoďme jejich podobu v inverzním grafu.

4.4.1 Inverzní graf a derivace funkce

Při výkladu derivace se obvykle zmiňuje (Zorich & Cooke, 2004, s. 183), že derivace určuje sklon grafu funkce v daném bodě. Použijeme-li namísto grafu funkce její inverzní graf, je interpretace derivace odlišná.

[7](Jenkin, 1870)

Vzhledem k identifikaci grafu inverzní funkce a inverzního grafu funkce lze (nenulovou[8]) derivaci funkce v bodě x_0 v inverzním grafu $G'(f)$ interpretovat jako sklon derivace inverzní funkce. Připomeňme, že platí[9]

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{4.9}$$

je-li $f'(x_0) \neq 0$ a funkce f spojitá.

Je-li $y_0 = f(x_0)$, ze vztahu (4.9) snadno odvodíme $f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_0) < 0$. Tedy je-li funkce f klesající, je i v inverzním grafu reprezentována klesající křivkou. Jinými slovy, co se týče monotonie funkce, nelze se mýlit v interpretaci, i při neznalosti toho, zda je nakreslen graf či inverzní graf.

K mýlce může dojít, pokud poměřujeme velikost derivace, tedy sklon dvou křivek, neboť v souladu s výše uvedeným má větší sklon křivka s menší derivací. Tato problematika souvisí mj. i s tématem elasticity poptávky, kdy je poměřování elasticit právě z tohoto důvodu v rozporu s intuicí.

4.4.2 Konvexita a konkávita

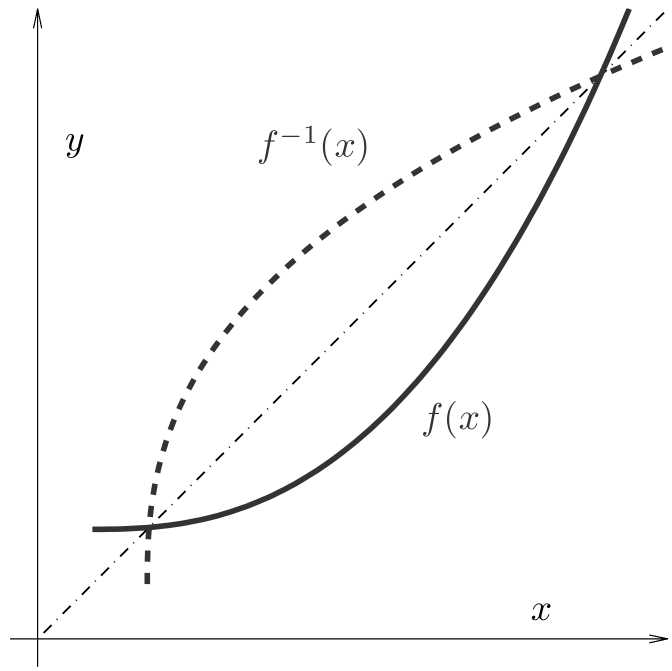
V předchozí části jsme ukázali, že pokud přistupujeme ke křivce, o níž nevíme, je-li grafem či inverzním grafem funkce, není problém rozhodnout o její monotonii. Často ale potřebujeme informací o funkci víc. Zatímco znaménko první derivace dává informaci o monotonii, znaménko druhé derivace pak určuje konvexitu a konkávitu funkce. Připomeňme, že funkce f je konvexní na intervalu[10] (a, b) právě když

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{4.10}$$

[8]Nenulová derivace funkce f v bodě x_0 zaručuje lokální monotonii funkce a tedy její invertovatelnost.

[9](Zorich & Cooke, 2004, s. 199)

[10]Funkce může být konvexní (konkávní) na určitém intervalu. V ekonomických učebnicích, například (Hořejší et al., 2010, s. 57), se uvádí: „*Indiferenční křivky jsou konvexní vzhledem k počátku.*“, aniž by bylo zřejmé, co je tím míněno. Tyto křivky jsou pochopitelně konvexní, ale proč je zde pojem konvexity vztažen k bodu, není jasné. Kniha (Rockafellar, 2015), všeobecně přijímaná jako „bible“ konvexní analýzy, pojem *konvexity vzhledem k bodu* nezná.



Obrázek 11: Spojitá rostoucí konvexní funkce f a její graf a inverzní graf, který je totožný s grafem inverzní funkce f^{-1}.

pro všechna x_1, x_2 splňující $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ a všechna $t \in [0,1]$, konkávní právě když platí v (4.10) opačná nerovnost. Řečeno slovy, graf konvexní funkce leží pod sečnou, graf konkávní funkce nad sečnou.

Při transformaci grafu na inverzní graf, což je prostá osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu (tj. přímky $x - y = 0$), se vztahy horizontální mění na vertikální, tedy „nad" se transformuje na „vpravo", „pod" na „vlevo".

Graf klesající konvexní funkce leží pod sečnou a vlevo od ní. Její inverzní graf bude tedy ležet také pod sečnou a vlevo od ní. Podobně to platí pro klesající konkávní funkci. Funkce, která je rostoucí a konvexní, leží pod sečnou a vpravo od ní. Po transformaci bude ležet nad a vpravo. Jeví se proto jako rostoucí konkávní funkce[11], viz Obrázek 11. Ze stejného důvodu se rostoucí konkávní funkce jeví jako rostoucí konvexní.

[11]Poznamenejme jen, že výše uvedenou diskusi lze nahradit rigorózním matematickým důkazem, který by byl jen technicky složitým zápisem téže myšlenky, proto jej zde neuvádíme.

Kapitola 5

Závěr

Bakalářská práce je věnována možnostem logičtějšího či kompletnějšího výkladu ekonomických témat s využitím aparátu základní matematické analýzy. Podnětem pro vznik práce byl rozpor mezi rozsáhlou výukou matematiky pro studenty ekonomických oborů a následným nízkým využitím získaných matematických znalostí v ekonomických předmětech.

Druhá kapitola věnovaná teoretické části osvětlila pozici matematiky ve vztahům k ostatním vědním disciplínám, s důrazem na ekonomii. Byla vymezena dnešní pozice matematiky a jejích nástrojů jako vědní disciplíny živé, vyvíjející se a připravené čelit výzvám, které jí ekonomie chystá.

Obsahem dalších dvou praktických kapitol jsou rozličná témata z oborů mikroekonomie a teorie financí. V kapitole třetí jsme se zaměřili na ta témata, u nichž nebývá při výkladu uplatněno plně jejich matematické pozadí. Tato skutečnost nejenže neposkytuje kompletní informaci o kontextu daného učiva, ale zejména devalvuje hodnotu matematických znalostí získaných v kursech matematiky tím, že rezignuje na jejich aplikaci tam, kde je to vhodné a užitečné. Vybraná témata dle názoru autora vhodně ilustrují tento fenomén v rozličných ekonomických oborech i na různém matematickém aparátu.

Čtvrtou kapitolu jsme věnovali problematice nestandardního grafického znázorňování v ekonomii. Původní hypotézu autora, že jde pouze o rozmar a veškeré problémy lze odstranit přísným dbáním na dodržování konvence při grafickém zobrazování, se podařilo během příprav práce vyvrátit. Zejména pokud jde o teorii nabídky a poptávky, kde poptávku lze chápat jako graf závislosti poptávaného množství na ceně, avšak nabídka je závislá, zjednodušeně řečeno, na vstupních nákladech výroby, tedy ceně. Nicméně přesto se podařilo nalézt dva příklady, kde dodržení konvence grafického zobrazování nic nebrání, a poukázat na některé nevýhody zobrazování současného, v ekonomii obvyklého. V závěru této kapitoly jsme zmínili úskalí získávání informací z inverzních grafů, dodržujících opačnou konvenci grafického zobrazování.

Celkově se cíle práce z velké části podařilo naplnit a nezbývá než věřit, že i díky svému skromnému rozsahu u jednotlivých dílčích témat může sloužit jako dodatečný zdroj informací pro studenty ekonomických oborů. Zároveň lze práci vnímat jako drobný příspěvek ke stavbě tolik potřebných mostů mezi matematikou a ekonomií.

Summary in English

This bachelor thesis emanates from the paradox that undergraduate students of economics are given a number of mathematical courses that endow them with powerful tools, which are not afterwards used in the courses of economics and finance. The goal of this thesis is to provide a supplementary explanation of some of these topics, using various mathematical tools that are contained in the standard courses. Special attention is given to the problematics of graphical representation in economics, as in many cases there is a tendency to disobey the standard convention of using the horizontal axis for the independent variable. For some topics an alternative graphical visualisation is supplied while we show that it is not always useful. We investigate the issue of summing the curves and offer an explanation, how the information can be obtained from the graphs that do not obey the above mentioned convention.

Key words: mathematics in economics, annuity calculus, internal rate of return, profit theory, graphs in economics, graph conventions, labour supply, risk elimination, supply and demand, inverse graph.

Abstrakt

Podnětem pro vznik této bakalářské práce bylo paradoxní zjištění, že ač studenti bakalářských oborů ekonomie absolvují poměrně velké množství matematických předmětů, znalosti v nich získané nejsou později v ekonomických předmětech uplatňovány. Cílem této práce je doplnit vysvětlení některých takových témat za použití různých matematických technik, jež jsou součástí standardních kursů. Zvláštní pozornost je věnována problematice grafického znázorňování v ekonomii, neboť často nedodržuje konvenci o využití vodorovné osy pro nezávisle proměnnou. K některým tématům doplňujeme alternativní grafické znázornění, které je v souladu s touto konvencí, avšak také ukazujeme, že ne vždy je to vhodné. Dále zkoumáme problematiku sčítání křivek a nabízíme vysvětlení, jak interpretovat grafy, které nedodržují výše uváděnou konvenci.

Klíčová slova: matematika v ekonomii, anuitní počet, vnitřní výnosové procento, teorie užitku, grafy v ekonomii, konvence grafického znázorňování, nabídka práce, eliminace rizika, nabídka a poptávka, inverzní graf.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Reference

Blaheta, R. (2012). *Matematické modelování a metoda konečných prvků.* VŠB-TUO.

Canright, S. (2009). *Do-it-yourself podcast: Rocket evolution.* (2009-07-13)

Cournot, A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.* L. Hachette.

Fatulescu, P. (2012). Mathematics in economics: Necessity or sufficiency? *International Journal of Advances in Management and Economics*.

Fefferman, C. L. (2006). Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. In *The millennium prize problems* (pp. 57–67). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute.

Friesl, M. (2014). *Pravděpodobnost a statistika hypertextově.* Dostupné online: http://home.zcu.cz/friesl/hpsb.

Gödel, K. (1931). Über formal unentschiedbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

Greenspan, A. (2009). *We need a better cushion against risk.* (2009-03-26)

Grinfeld, M., Lamba, H., & Cross, R. (2013). A mesoscopic stock market model with hysteretic agents. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, *18*(2), 403–415.

Hazewinkel, M. (2001). Hilbert problems. In *Encyclopedia of mathematics.* Springer.

Hřebíček, J., & Škrdla, M. (2006). *Úvod do matematického modelování.* Masarykova univerzita v Brně.

Hnilica, J., & Fotr, J. (2009). *Aplikovaná analỳza rizika - ve finančním managementu a investičním rozhodování.* Grada.

Hořejší, B., Soukupová, J., Macáková, L., & Soukup, J. (2010). *Mikroekonomie.* Management Press, s.r.o.

Holman, R. (2002). *Ekonomie.* C. H. Beck.

Humphrey, T. M. (1992). Marshallian cross diagrams and their use before Alfred Marshall: The origins of supply and demand geometry. *ERV*.

Jenkin, F. (1870). The graphical representation of the laws of supply and demand, and their application to labour. In *Recess studies.*

Kislingerová, E. (2004). *Manažerské finance.* C. H. Beck.

Klein, J. (2002). The method of diagrams and the black arts of inductive economics. In *Measurement, quantification and economic analysis: Numeracy in economics.* Taylor & Francis.

Klooster, D. (2001). What is critical thinking. *Thinking Classroom*.

Krejčí, P., Lamba, H., Melnik, S., & Rachinskii, D. (2015). Kurzweil integral representation of interacting prandtl-ishlinskii operators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, *20*(9), 2949-2965.

Krejčí, P., Lamba, H., Melnik, S., & Rachinskii, D. (2014). Analytical solution for a class of network dynamics with mechanical and financial applications. *Physical Review E*, *90*(3), 032822.

Králík, J. (2012). *Úvod do studia fyziky.* Univerzita Jana Evangelisty Purkyně.

Lamba, H. (2010). How sensitive are equilibrium pricing models to real-world distortions? *arXiv*.

Macáková, L., & kol. (2003). *Mikroekononomie, základní kurs* (8. vydání ed.). Melandrium.

Marshall, A. (1890). *Principles of economics* (No. sv. 1). Macmillan and Company.

Mas-Colell, A. (1988). Four lectures on the differentiable approach to general equilibrium theory. In *Mathematical economics* (pp. 19–43). Springer.

Mas-Colell, A., Whinston, M., & Green, J. (1995). *Microeconomic theory.* Oxford University Press.

Matematické vzdělávání v Evropě: Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí. (2011). Brusel: Eurydice.

Nabeal, N. (2012). Did mathematics cause the financial crisis. (2012-07-04)

Nasar, S. (2011). *A beautiful mind.* Simon & Schuster.

Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *36*(1), 48-49. doi: 10.1073/pnas.36.1.48

Nash, J. F. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, *54*(2), 286-295.

Parsons, J. (2011). *Why do economists put price on vertical axis?* (Dostupné online: http://blog.jparsons.net/2011/02/why-do-economists-put-price-on-vertical.html)

Rajagopal, K., & Srinivasa, A. (2008). On the thermodynamics of fluids defined by implicit constitutive relations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, *59*(4), 715–729.

Rockafellar, R. (2015). *Convex analysis.* Princeton University Press.

Soukupová, J., Hořejší, B., Macáková, L., & Soukup, J. (1996). *Mikroekonomie.* Management Press, s.r.o.

Süli, E., & Mayers, D. (2003). *An introduction to numerical analysis.* Cambridge University Press.

Urban, J. (2015). *Teorie národního hospodářství - 4., aktualizované vydání:.* Wolters Kluwer.

Wai-Lim, M. (2015). What is the proper role of mathematics in economics? *South China Morning Post*. (2015-05-13)

Zorich, V., & Cooke, R. (2004). *Mathematical analysis I.* Springer.

Příloha A

Výuka matematiky v bakalářských oborech Účetnictví a finančního řízení v ČR

Pro podložení dojmu, že výuka matematiky na Ekonomické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích je poměrně rozsáhlá, jsme vytvořili drobnou rešerši z veřejně dostupných zdrojů. Na jednotlivých regionálních univerzitách jsme vždy vybrali obor nejpodobnější oboru Účetnictví a finanční řízení podniku a zjišťovali rozsah (kreditový) výuky matematických předmětů. Ve všech případech se jedná o tříleté obory s rozsahem výuky 180 kreditů, který lze studovat v kombinované formě. EF JU vychází z tohoto srovnání vítězně. Vzhledem k povrchnosti daného průzkumu nelze dělat z tohoto výsledku dalekosáhlé závěry, jako potvrzení myšlenky, že výuka matematiky je pro potřeby oboru více než dostatečná, to však dle mínění autora postačuje.

Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Program Ekonomika a management, obor Účetnictví a finanční řízení podniku: **35 kr.**

Matematika I (6), Matematika II (6), Teorie pravděpodobnosti a statistika (6), Finanční matematika (6), Operační analýza (5), Statistické modelování a analýza časových řad (6)

Zdroj: `http://portal.jcu.cz`

Fakulta ekonomická, Západočeská univerzita v Plzni

Program Ekonomika a management, obor Podniková ekonomika a management: **18 kr.**

Základy matematiky I (4), Základy matematiky II (3), Statistika (6), Statistické zpracování dat (5)

Zdroj: `http://portal.zcu.cz`

Obchodně-podnikatelská fakulta v Karviné, Slezská univerzita v Opavě

Program a obor Podniková ekonomika a management, Specializace Finance podniku: **15 kr.**

Kvantitativní metody (5), Statistika (5), Finanční a pojistná matematika (5)

Zdroj: `http://stag.slu.cz/portal`

Fakulta sociálně-ekonomická, Univerzita J.E.Purkyně v Ústí nad Labem

Program Podniková ekonomika, obor Finanční management: **14 kr.**

Matematika I (4), Statistika I (5), Statistika II (5)

Zdroj: `http://portal.ujep.cz`

Ekonomická fakulta, Technická univerzita v Liberci

Ekonomika a management, Podniková ekonomika: **24 kr.**

Matematika 1 (5), Matematika 2 (7), Statistika 1 (5), Statistika 2 (7)

Zdroj: `http://stag.tul.cz`

Ekonomická fakulta, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

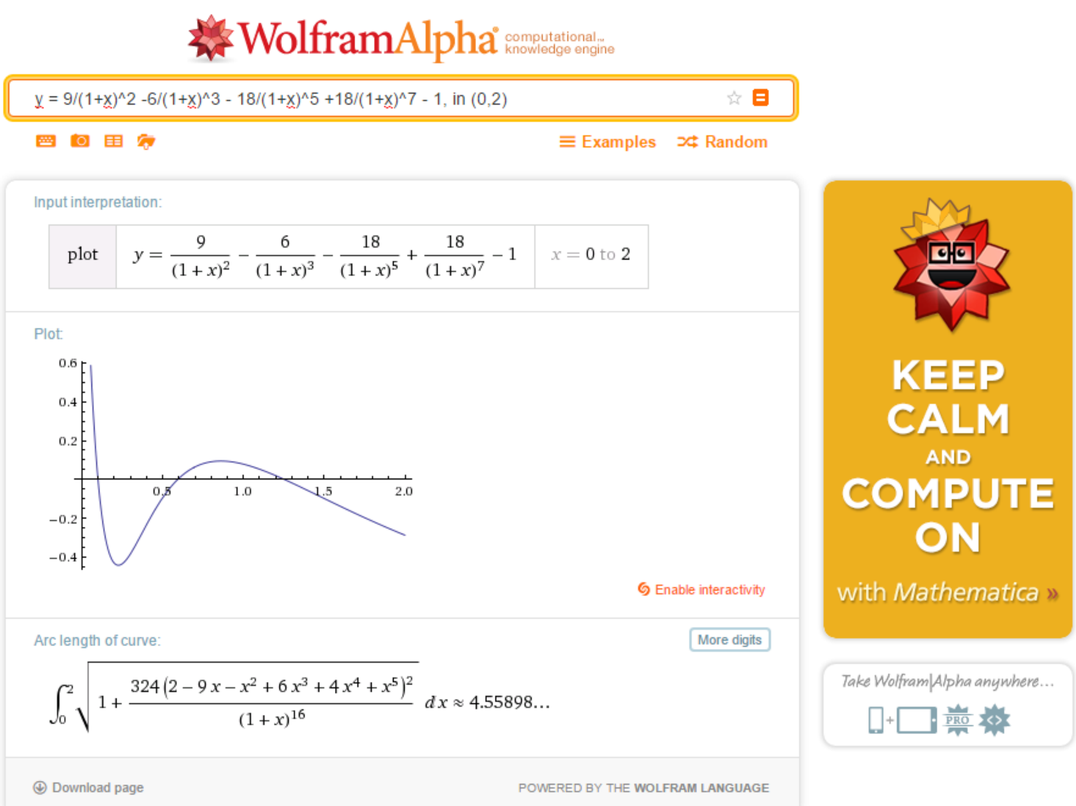
Obor Ekonomika a management, program Ekonomika podniku: **10 kr.**

Matematika A (5), Matematika B (5)

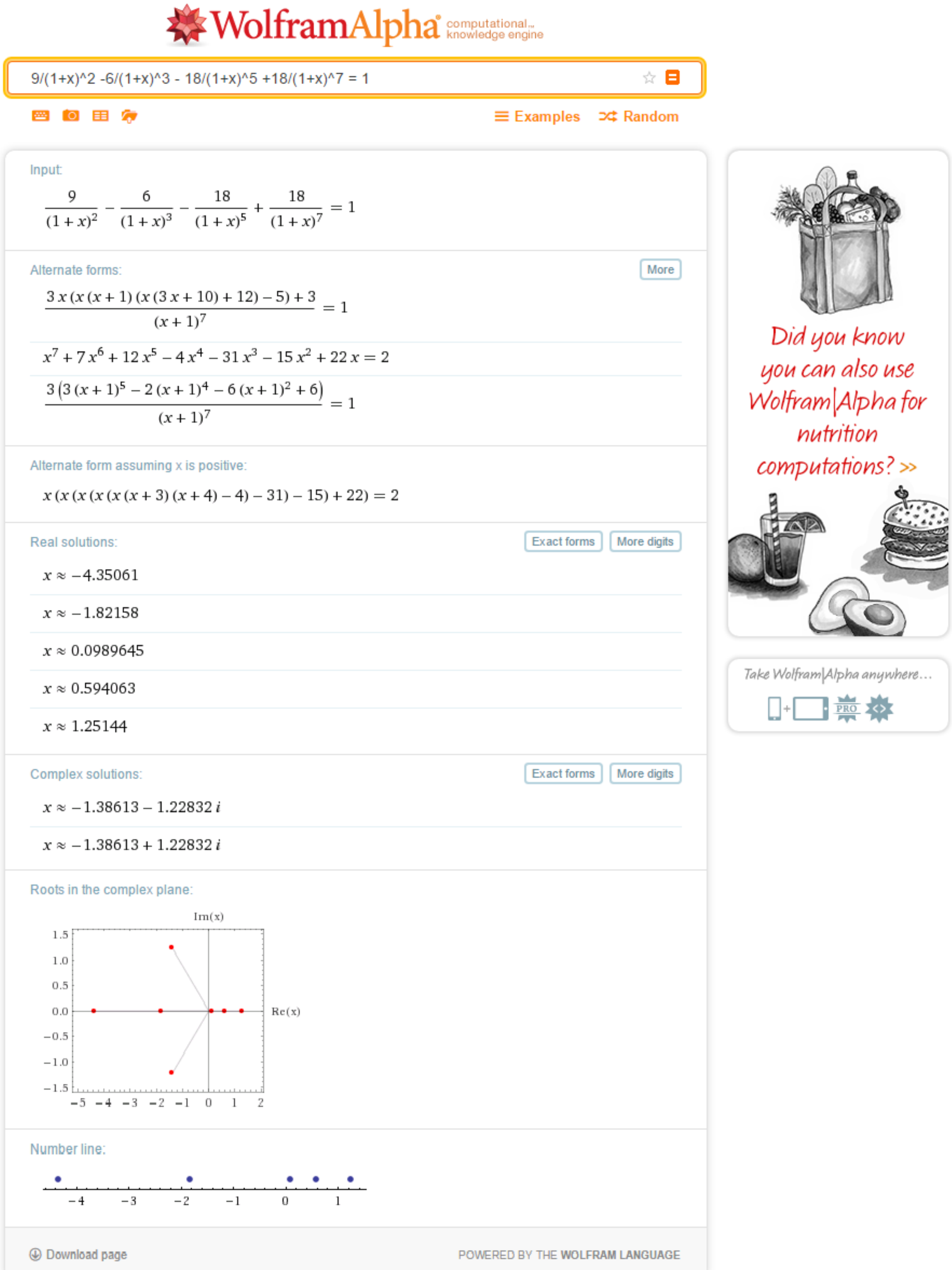
Zdroj: `http://innet.vsb.cz`

Příloha B

Výstupy z appletu WolframAlpha pro řešení Příkladu 2 z kapitoly 3.2.3



Obrázek 12: Ukázka vykreslení funkce čisté současné hodnoty investice volně dostupným appletem softwaru WolframAlpha (`www.wolframalpha.com`).



Obrázek 13: Ukázka výpočtu kořenů rovnice (hodnot vnitřního výnosového procenta) volně dostupným appletem softwaru WolframAlpha (`www.wolframalpha.com`).