Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z8

Vypracovala: Lucie Vacková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z8 jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 16.4.2018 ….………..………………….

podpis

Poděkování

Ráda bych své poděkování věnovala vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc., za pomoc při psaní práce, věcné připomínky a za cenné rady a konzultace.

Anotace

Cílem bakalářské práce je srozumitelné řešení příkladů matematické olympiády kategorie Z8, které jsou určeny pro žáky 8. ročníků základních škol, pro žáky 3. ročníku osmiletého gymnázia a pro žáky 1. ročníku šestiletých gymnázií. Tato práce by měla pomoci nejen žákům při počítání úloh, ale také učitelům s přípravou žáků na tuto matematickou soutěž.

Annotation

The main aim of this bachelor thesis is the comprehensive solution of tasks concerning a Mathematical Olympic category Z8 which are assigned to pupils of the 8th grade in a primary school, the 3th grade at an eight-year grammar school or the 1st grade at a six-year grammar school. This thesis should not help only pupils with practising but also it should be helpful for teachers who are preparing pupils for this competition.

Obsah

1 Úvod

V bakalářské práci *„Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z8“* se zaměřuji na vlastní řešení příkladů matematické olympiády. Některé z nich následně porovnávám s řešením autorů příkladu.

Tato práce může sloužit jako učební pomůcka hlavně pro žáky, jelikož řešení uvedené od autorů, které je většinou strohé a moc nepopsané, slouží pouze pro účely opravování olympiády nebo u příkladu řešení uvedené vůbec není. Práce může sloužit také učitelům, kteří připravují žáky na soutěž. Příklady se snažím řešit spíše logicky, aby byly snáze pochopitelné a řešení podrobně popisuji krok za krokem.

Text práce, který je psaný kurzívou, jsou mé poznámky k postupu řešení autorů zadání příkladu.

Práce je rozdělena na dvě části, protože kategorie Z8 matematické olympiády se odehrává ve dvou kolech. V první části práce řeším příklady domácího/školního kola (1. kolo) a v druhé části příklady okresního kola (2. kolo).

2 Matematická olympiáda

Matematická olympiáda (dále „MO“) je předmětová soutěž z matematiky pro žáky základních a středních škol. MO se pořádá každý rok a je jednotná pro celou Českou republiku.

2.1 Organizace matematické olympiády

Olympiádu pořádá Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Úlohy připravuje Úlohová komise Matematické olympiády, která je společná pro Českou i Slovenskou republiku, tudíž jsou úlohy i termíny všech kol pro obě republiky stejné. Účast žáků a studentů je na MO dobrovolná. (Matematická olympiáda 2016)

2.2 Kategorie matematické olympiády

MO se člení do kategorií a každá kategorie zvlášť do soutěžních kol. Olympiáda se dělí do následujících kategorií:

a) kategorie A, která je určena pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol, 7. a 8. ročníků osmiletých gymnázií a 5. a 6. ročníků šestiletých gymnázií. Tato kategorie probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole.

b) Kategorie B je určena pro žáky 2. ročníků středních škol, 6. ročníků osmiletých gymnázií a 4. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie B probíhá ve školním a krajském soutěžním kole.

c) Kategorie C je určena pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých gymnázií a 3. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie probíhá ve školním a krajském soutěžním kole.

d) Kategorie Z9 je určena pro žáky 9. ročníků základních škol, 4. ročníků osmiletých gymnázií a 2. ročníků šestiletých gymnázií. Tato kategorie probíhá ve školním, okresním a krajském soutěžním kole.

e) Kategorie Z8 je určena pro žáky 8. ročníků základních škol, 3. ročníků osmiletých gymnázií a 1. ročníků šestiletých gymnázií. Kategorie B probíhá ve školním a okresním soutěžním kole.

f) Kategorie Z7 je určena pro žáky 7. ročníků základních škol a 2. ročníků osmiletých gymnázií. Probíhá ve školním a okresním soutěžním kole.
g) Kategorie Z6 je určena pro žáky 6. ročníků základních škol a 1. ročníků osmiletých gymnázií. Kategorie Z6 probíhá ve školním a okresním soutěžním kole.
h) Kategorie Z5 je určena pro žáky 5. ročníků základních škol a probíhá ve školním a okresním soutěžním kole. (Matematická olympiáda 2016)

3 Domácí 1. kolo

V domácím kole matematické olympiády kategorie Z8 je vždy šest příkladů, které se odevzdávají po trojicích do určitého data.

3.1 Příklad 1

Součet všech dělitelů jistého lichého čísla je 78. Určete, jaký je součet všech dělitelů dvojnásobku tohoto neznámého čísla.

(K. Pazourek, 64. ročník)

Vlastní řešení:

Vybírá se z lichých čísel, která jsou menší než číslo 78. Jsou to čísla: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77. Větší čísla než 77 by neměla smysl, jelikož každé číslo je dělitelné samo sebou, a protože se dělitelé sčítají, tak by součet byl větší než požadované číslo 78.

Jedničku a prvočísla lze vyškrtnout, jelikož ty jsou dělitelné 1 a samy sebou, součet by poté byl o jedničku větší než prvočíslo. Největší z vypsaných prvočísel je 73, pokud se sečtou jeho dělitelé, to je 1 a 73, vyjde 73 + 1 = 74, což není řešením úlohy. Potom zbydou čísla: 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45, 49, 51, 55, 57, 63, 65, 69, 75, 77.

K výsledku lze dojít tak, že se vypíší dělitelé všech čísel a určí se, jakého čísla je součet jeho dělitelů roven 78.

9 … 1, 3, 9 → 1 + 3 + 9 = 13

15 … 1, 3, 5, 15 → 1 + 3 + 5 + 15 = 24

21 … 1, 3, 7, 21 → 1 + 3 + 7 + 21 = 32

25 … 1, 5, 25 → 1 + 5 + 25 = 31

27 … 1, 3, 9, 27 → 1 + 3 + 9 + 27 = 40

33 … 1, 3, 11, 33 → 1 + 3 + 11 + 33 = 48

35 … 1, 5, 7, 35 → 1 + 5 + 7 + 35 = 48

39 … 1, 3, 13, 39 → 1 + 3 + 13 + 39 = 56

45 … 1, 3, 5, 9, 15, 45 → 1 + 3 + 5 + 9 + 15 + 45 = 78

49 … 1, 7, 49 → 1 +7 + 49 = 57

51 … 1, 3, 17, 51 → 1 + 3 + 17 + 51 = 72

55 … 1, 5, 11, 55 → 1 + 5 + 11 + 55 = 72

57 … 1, 3, 19, 57 → 1 + 3 + 19 + 57 = 80

63 … 1, 3, 7, 9, 21, 63 → 1 + 3 + 7 + 9 + 21 + 63 = 104

65 … 1, 5, 13, 65 → 1 + 5 + 13 + 65 = 84

69 … 1, 3, 23, 69 → 1 + 3 + 23 + 69 = 96

75 … 1, 3, 5, 15, 25, 75 → 1 + 3 + 5 + 15 + 25 + 75 = 124

77 … 1, 7, 11, 77 → 1 + 7 + 11 + 77 = 96

Součet dělitelů je roven 78 pro číslo 45 (1 + 2 + 5 + 9 + 15 + 45 = 78). Dvojnásobek čísla 45 je číslo 90. Všichni dělitelé čísla 90 jsou 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 a součet těchto dělitelů je 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 15 + 18 + 30 + 45 + 90 = 234.
Součet dělitelů dvojnásobku hledaného čísla je 234.

V tomto příkladu jsem zvolila vyřazovací metodu, kdy se postupně vyškrtávají nevyhovující čísla a ze zbylých se určí výsledek. Tento postup řešení je sice pracný a zdlouhavý, ale tím, že se vypíšou a sečtou dělitelé všech zbylých čísel, tak je hned vidět výsledek, i kdyby bylo více řešení.

3.2 Příklad 2

Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady?

(M. Krejčová, 65. ročník)

Vlastní řešení:

Koně, krávy a ovce se označí jako neznámé:

koně . . . x

krávy . . . y

ovce . . . z

Ze zadání je známo:

$$x + y + z < 200$$

$$60x = 45y = 35z$$

Určí se nejmenší společný násobek čísel 60, 45 a 35 → n (60, 45, 35). Způsobů, jak určit nejmenší společný násobek, je několik.

1. Jedna z možností, jak zjistit nejmenší společný násobek, je výčtem násobků čísel.
   Násobky čísla 60 … 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720, 780, 840, 900, 960, 1 020, 1 080, 1 140, 1 200, **1 260**, 1 320, 1 380, …
   Násobky čísla 45 … 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450, 495, 540, 585, 630, 675, 720, 765, 810, 855, 900, 945, 990, 1 035, 1 080, 1 125, 1 170, 1 215, **1 260**, 1 215, 1 305, 1 350, …
   Násobky čísla 35 … 35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, 315, 350, 385, 420, 455, 490, 525, 560, 595, 630, 665, 700, 735, 770, 805, 840, 875, 910, 945, 980, 1 015, 1 050, 1 085, 1 120, 1 155, 1 190, 1 225, **1 260**, 1 295, 1 330, …
   Nejmenší společný násobek čísel 60, 45, 35 je číslo 1260.
   $$n\ (60, 45, 35) = 1260$$

2. Nejmenší společný násobek lze najít i rozkladem čísel na součin prvočísel: *Každé přirozené číslo lze rozložit na součin konečného počtu prvočísel.*

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

Vynásobíme čísla $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

Pokud hledáme nejmenší společný násobek pomocí rozkladu na součin prvočísel, vždy se vynásobí ta čísla, která jsou v rozkladu zastoupena. Je-li v jednom rozkladu číslo zastoupeno vícekrát, bere se právě tento součin čísel. V našem prvočíselném rozkladu jsou čísla 2, 3, 5 a 7, všechna tato čísla se vynásobí a hledá se, zda nějaké z těchto čísel někde není zastoupeno vícekrát. V čísle 60 je zastoupena jedna trojka a v čísle 45 jsou trojky dvě, tudíž se do součinu (ve kterém se hledá nejmenší společný násobek) dají právě dvě trojky. Číslo 5 je u všech třech čísel zastoupeno jedenkrát, proto se do součinu nejmenšího společného násobku napíše pouze jednou.

3. Další možností, jak najít nejmenší společný násobek, je pomocí jedné vlastnosti nejmenších společných násobků. Tato vlastnost spočívá v tom, že lze vytknout společný dělitel všech čísel:

$$n\,(ax, bx, cx) = x \cdot n\,(a, b, c).$$

Po dosazení:

$$n\,(60, 45, 35) = n\,(12 \cdot 5, 9 \cdot 5, 7 \cdot 5)$$

Všechna čísla mají jednoho stejného (společného) dělitele, kterým je číslo 5. Toto číslo se může vytknout před celý výraz:

$$5 \cdot n\,(12, 9, 7)$$

Z tohoto výrazu je jasné, že pětka v součinu nejmenšího společného násobku čísel bude. Dále se hledá $n\,(12, 9, 7)$. Tato tři čísla 12, 9 a 7 jsou čísla nesoudělná, jelikož mají pouze jednoho společného kladného dělitele, kterým je číslo 1. Číslice 7 je prvočíslo, což znamená, že se bude také vyskytovat v součinu nejmenšího společného násobku. Potom se hledá pouze nejmenší společný násobek čísel $n\,(12, 9)$:

$$5 \cdot 7 \cdot n\,(12, 9)$$

Nejmenší společný násobek $n\,(12, 9) = 36$ *(viz 1. a 2. možnost, jak určit nejmenší společný násobek)*. Poté se dostane součin

$$5 \cdot 7 \cdot 36 = 1260$$

Nalezený největší společný násobek se vydělí číslem, o které se má zvětšit počet koní, krav a ovcí.

Koně … 1 260 : 60 = 21

Kozy … 1 260 : 45 = 28

Ovce … 1 260 : 35 = 36

$$x + y + z = 21 + 28 + 36 = 85$$

Na louce se dohromady pase 85 koní, koz a ovcí.

Jelikož je na louce dohromady méně jak 200 zvířat, může existovat i další řešení.
Určí se další společný násobek čísel 60, 45 a 35, tím je číslo 2 520. Tento společný násobek se vydělí čísly, kterými se má počet zvětšit.

Koně … 2 520 : 60 = 42

Kozy … 2 520 : 45 = 56

Ovce … 2 520 : 35 = 72

$$x + y + z = 42 + 56 + 72 = 170$$

Číslo 170 je menší než číslo 200, tudíž existuje ještě jedno řešení. Pokud by se našel další společný násobek, což je číslo 3 780 bylo by na louce 255 zvířat. Tento počet nevyhovuje podmínce, že zvířat je na louce dohromady méně než 200.
Na louce se mohlo pást buď 85, nebo 170 zvířat.

Řešení M. Krejčové:
Poměr mezi stávajícím počtem krav a koní je 60 : 45 = 4 : 3 a poměr mezi stávajícím počtem ovcí a koní je 60 : 35 = 12 : 7. *První poměr lze zkrátit číslem 15 a druhý poměr číslem 5.* Počet koní tedy musí být nějakým násobkem čísla 3 a současně čísla 7, tedy násobkem čísla 21. *Druhé číslo v poměru vždy srovnává koně s ostatními zvířaty, proto počet koní bude násobkem čísla 21.* Kdyby na louce bylo 21 koní, potom by tam bylo 21 · 4 : 3 = 28 krav a 21 · 12 : 7 = 36 ovcí, celkem tedy 21 + 28 + 36 = 85 zvířat. Kdyby na louce bylo 42 koní, potom by všechny počty byly dvojnásobné, celkem tedy 2 · 85 = 170 zvířat. Kdyby na louce bylo 63 koní, potom by všechny počty byly trojnásobné, celkem tedy 3 · 85 = 255 zvířat, což je ovšem víc než 200. Na louce se tedy páslo buď 85, nebo 170 zvířat.

Druhé řešení M. Krejčové:

K témuž výsledku lze dojít také rozkladem daných násobků na součiny prvočísel: $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$. Aby se odpovídající násobky počtů jednotlivých zvířat rovnaly, musí být v jejich prvočíselných rozkladech zastoupena všechna předchozí prvočísla (včetně jejich násobností). Nejmenší možný počet krav tedy je $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, koní $3 \cdot 7 = 21$ a ovcí $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, celkem $28 + 21 + 36 = 85$ zvířat.

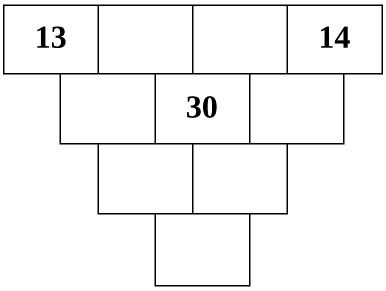
V druhém způsobu řešení autorka příkladu nezvažuje více možných výsledků příkladu. Zároveň je nedostatečně vysvětlené, jak se dostane nejmenší počet kusů jednotlivých zvířat. Autorka získala nejmenší počet krav tak, že z rozkladu prvočísel u koní a ovcí ($60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$) vzala pouze ta čísla, která se nevyskytují v prvočíselném rozkladu krav ($45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$). Jelikož se číslo pět vyskytuje ve všech rozkladech, tak se s ním dál nebude operovat. V prvočíselném rozkladu krav se vyskytuje u číslo tři, které v tomto případě zanedbáme, jelikož se vyskytuje u rozkladu krav a koní. Tudíž zbydou čísla 2, 2, 7 a toto $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$ je nejmenší možný počet krav na louce. Nejmenší počet koní autorka dostala stejným způsobem, s tím rozdílem, že vybírala čísla z prvočíselného rozkladu krav a ovcí. Pětky se zase zanedbají a zbydou čísla 3 a 7, čili nejmenší možný počet koní na louce je $3 \cdot 7 = 21$. Nejmenší počet ovcí se dostane tak, že z prvočíselného rozkladu krav a koní se vyškrtne pouze pětka, protože sedmička se vyskytuje pouze u ovcí a nikde jinde není. Proto se jejich počet bude rovnat $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Poznámka:

Více o dělitelnosti, soudělných a nesoudělných číslech je psáno v různých učebnicích pro základní, ale i střední školy. V 7. kapitole této práce je to například literatura označená čísly [2], [4] nebo[6].

3.3 Příklad 3

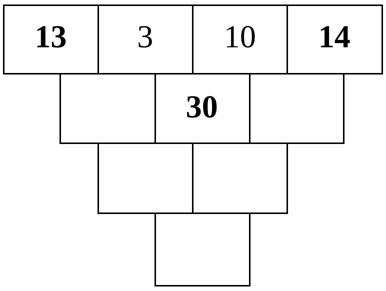
Každá cihlička následující pyramidy obsahuje jedno číslo. Kdykoli to je možné, je číslo v každé cihličce nejmenším společným násobkem čísel ze dvou cihliček ležících přímo na ní. Které číslo může být v nejspodnější cihličce? Určete všechny možnosti.



(A. Bohiniková, 66. ročník)

Vlastní řešení:

V cihličkách nad číslem 30 budou dva dělitelé tohoto čísla, jejichž součin je právě 30 (tzn. nad číslem 30 nemůže být dělitelé 3 a 5, sice to jsou dělitelé čísla 30, ale jejich součin není 30). Těmi jsou například čísla 3 a 10.

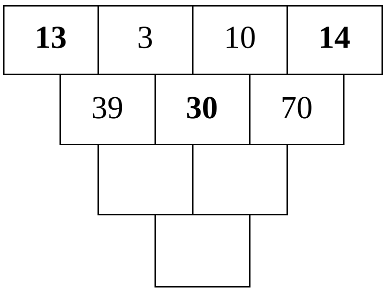


Musejí se určit nejmenší společné násobky čísel 13 a 3, 10 a 14.

$$n\,(13, 3) = 39$$

$$n\,(10, 14) = 70$$

Po doplnění do pyramidy:



Další postup je stejný.

$$n\ (39, 30) = 390$$

$$n\ (30, 70) = 210$$

13	3	10	**14**
39	**30**	70	
390	210		

$$n\ (390, 210) = 2730$$

13	3	10	**14**
39	**30**	70	
390	210		
2730			

Možností je více, jelikož číslo 30 má více dělitelů než pouze čísla 3 a 10. Dalšími jsou čísla 5 a 6. Pro čísla 5 a 6 tabulka vypadá následovně:

13	5	6	**14**
65	**30**	42	
390	210		
2730			

Dalšími děliteli čísla 30 jsou čísla 2 a 15. Pro tyto dělitele vypadá pyramida následovně:

13	2	15	**14**
26	**30**	210	
390	210		
2730			

Další možností, jak doplnit pyramidu, jsou čísla 1 a 30.

13	1	30	**14**
13	**30**	210	
390	210		
2730			

Další možnosti jsou, že se dělitelé čísla 30 v cihličkách nad číslem 30 zamění. V prvním případě byly dělitelé 3 a 10 a hledal se společný násobek čísel *n* (13, 3) a *n* (10, 14). Záměna čísel 3 a 10 nad číslem 30 znamená, že se čísla do cihliček napíšou v opačném pořadí. Po přehození čísel budou v cihličkách čísla napsána v pořadí 10 a 3 a bude se hledat společný násobek čísel *n* (13, 10) a *n* (3, 14).

13	10	3	**14**
130	**30**	42	
390	210		
2730			

Zamění se i další dělitelé čísla 30.

13	6	5	**14**
78	**30**	70	
390	210		
2730			

13	15	2	**14**
195	**30**	14	
390	210		
2730			

13	30	1	**14**
390	**30**	14	
390	210		
2730			

Ve všech dokončených pyramidách jsou čísla v cihličkách na třetím a čtvrtém řádku stejné jako v první pyramidě.

Možností, jak dojít k nejspodnější cihličce je celkem 8. *Číslo 30 má 4 dělitele, a jak bylo řečeno výše, čísla v cihličkách se mohou zaměnit, proto existuje 4 · 2 možností, jak dojít k poslední cihličce.* Řešení existuje pouze jedno, kdy v nejspodnější cihličce vyjde vždy číslo 2 730.

Druhé vlastní řešení:

Dalším a rychlejším řešením je určit nejmenší společný násobek čísel 13, 14 a 30. Tato čísla jsou v pyramidě umístěna tak, že v nejspodnější cihličce bude jejich nejmenší společný násobek.

Určit nejmenší společný násobek lze výčtem násobků nebo rozkladem na prvočísla.

$$n\,(13, 14, 30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,730$$

$$13 = 1 \cdot 13$$

$$14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$$

$$30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Jak určit nejmenší společný násobek je více popsaný u příkladu 2.2 Příklad 2.

3.4 Příklad 4

Součin tří přirozených čísel je 600. Kdybychom jednoho činitele zmenšili o 10, zmenšil by se součin o 400. Kdybychom místo toho jednoho činitele zvětšili o 5, zvětšil by se součin na dvojnásobek původní hodnoty. Která tři přirozená čísla mají tuto vlastnost?

(L. Hozová, 62. ročník)

Vlastní řešení:

Z informací ze zadání se vypíšou rovnice, ze kterých se bude vyjadřovat a dosazovat do dalších rovnic.

Ze zadání:

$$x \cdot y \cdot z = 600$$

$$x \cdot y \cdot (z - 10) = 200$$

$$x \cdot (y + 5) \cdot z = 1\,200$$

Po vyjádření *x* z první rovnice:

$$x = \frac{600}{y \cdot z}.$$

Tato rovnice se dosadí do druhé rovnice:

$$\frac{600}{y \cdot z} \cdot y \cdot (z - 10) = 200$$

$$600z - 6\,000 = 200z$$

$$400z = 6\,000$$

$$\underline{z = 15}$$

Do třetí rovnice se dosadí již známé *z* a vyjádří *x*:

$$x \cdot (y + 5) \cdot 15 = 1\,200$$

$$x \cdot (y + 5) = 80$$

$$x = \frac{80}{y + 5}$$

Do první rovnice se dosadí vyjádřené *x* a již známé *z*:

$$\frac{80}{y+5} \cdot y \cdot 15 = 600$$

$$\frac{80}{y+5} \cdot y = 40$$

$$80y = 40y + 200$$

$$40y = 200$$

$$\underline{y = 5}$$

Do první rovnice se dosadí *y* a *z* a dopočítá se poslední neznámé číslo *x*:

$$x \cdot 5 \cdot 15 = 600$$

$$\underline{x = 8}$$

Tuto vlastnost mají čísla 8, 5 a 15.

Řešení L. Hozové:

Pracujme nejprve s druhou větou: zmenšením jednoho činitele o 10 se zmenší součin o 400. Přitom 400 jsou dvě třetiny z 600, tedy 10 musejí být dvě třetiny ze zmíněného činitele. Tím je proto číslo 15. Dále pracujme s třetí větou: zvětšením jednoho činitele o 5 se zvětší součin na dvojnásobek. Zvětšením o 5 se tedy tento činitel zvětší také na dvojnásobek. Činitel je proto 5. Z první věty zadání víme, že součin všech činitelů je 600, dva z nich uvádíme výše, třetí je 600 : 15 : 5 = 8. Informacím ze zadání vyhovují čísla 5, 8 a 15.

Druhé řešení L. Hozové:

Protože ze zadání není jasné, zda zmenšujeme/zvětšujeme jednoho a téhož činitele nebo pokaždé jiného, musíme probrat obě možnosti. V každém případě si hledaná přirozená čísla označíme *x*, *y* a *z*.

1. Předpokládejme, že se v zadání mluví o dvou různých činitelích. V takovém případě můžeme informace ze zadání přepsat následovně:

$$x \cdot y \cdot z = 600,$$

$$(x - 10) \cdot y \cdot z = 200,$$

$$x \cdot (y + 5) \cdot z = 1\,200.$$

Druhá rovnost po roznásobení je $x \cdot y \cdot z - 10 \cdot y \cdot z = 200$. Jelikož $x \cdot y \cdot z = 600$, po úpravě dostáváme $10 \cdot y \cdot z = 400$, tj. $y \cdot z = 40$. Z rovnosti $x \cdot y \cdot z = 600$ nyní plyne $x \cdot 40 = 600$, tj.

$$x = 15.$$

Podobně, třetí rovnost po roznásobení je $x \cdot y \cdot z + 5\, x \cdot z = 1\,200$. Jelikož $x \cdot y \cdot z = 600$, po úpravě dostáváme $5\, x \cdot z = 600$, tj. $x \cdot z = 120$. Protože již známe $x = 15$, musí být

$$z = 8.$$

Dosazením opět do rovnosti $x \cdot y \cdot z = 600$ máme $120y = 600$, odkud plyne

$$y = 5.$$

2. Předpokládejme, že se v zadání mluví dvakrát o stejném činiteli. V takovém případě můžeme psát:

$$x \cdot y \cdot z = 600,$$
$$(x - 10) \cdot y \cdot z = 200,$$
$$(x + 5) \cdot y \cdot z = 1\,200.$$

Stejně jako výše roznásobíme druhou, resp. třetí rovnost, dosadíme $x \cdot y \cdot z = 600$ a po úpravě obdržíme $10 \cdot y \cdot z = 400$, tj. $y \cdot z = 40$, resp. $5 \cdot y \cdot z = 600$, tj. $y \cdot z = 120$. Jelikož $40 \neq 120$, vidíme, že výchozí předpoklad nemůže být splněn.

V zadání se mluví o dvou různých činitelích; uvažovanou vlastnost mají právě tato tři přirozená čísla: 5, 8 a 15.

V tomto příkladu nezáleží, zda se číslo 10 odečte od x, y nebo z, ale číslo 5 se musí přičíst k jiné neznámé, než se odečítalo číslo 10. Což je vidět v postupu vlastního řešení a v druhém řešení L. Hozové, kdy se vždy číslo 10 odečítalo do jiné neznáme a výsledek byl stejný. Od stejných neznámých se čísla 10 a 5 nesmějí odečítat a přičítat, což dokázala autorka příkladu L. Hozová ve druhém řešení.

3.5 Příklad 5

Děda zapomněl čtyřmístný kód svého mobilu. Věděl jen, že na prvním místě nebyla nula, že uprostřed byly buď dvě čtyřky nebo dvě sedmičky nebo taky čtyřka se sedmičkou (v neznámém pořadí) a že šlo o číslo dělitelné číslem 15. Kolik je možností pro zapomenutý kód? Jaká číslice mohla být na prvním místě?

(M. Volfová, 62. ročník)

Vlastní řešení:

Ze zadání vyplývá, že čtyřky a sedmičky mají čtyři možnosti pozic v kódu.

_ 4 4 _	_ 7 7 _	_ 4 7 _	_ 7 4 _

Číslo má být dělitelné 15, to znamená, že musí být dělitelné trojkou a pětkou zároveň. Pěti je číslo dělitelné, je-li na místě jednotek 0 nebo 5.

_ 4 4 0	_ 7 7 0	_ 4 7 0	_ 7 4 0
_ 4 4 5	_ 7 7 5	_ 4 7 5	_ 7 4 5

Aby bylo číslo dělitelné třemi, musí být jeho ciferný součet dělitelný třemi. To znamená, že se na první místo kódu připíše takové číslo, aby následný ciferný součet byl dělitelný třemi.

Pro nulu na místě jednotek:

1 4 4 0	1 7 7 0	1 4 7 0	1 7 4 0
4 4 4 0	4 7 7 0	4 4 7 0	4 7 4 0
7 4 4 0	7 7 7 0	7 4 7 0	7 7 4 0

Pro pětku na místě jednotek:

2 4 4 5	2 7 7 5	2 4 7 5	2 7 4 5
5 4 4 5	5 7 7 5	5 4 7 5	5 7 4 5
8 4 4 5	8 7 7 5	8 4 7 5	8 7 4 5

Nyní je splněna podmínka, že PIN kód je dělitelný 15, na začátku není číslice 0 a uprostřed jsou čtyřky, sedmičky nebo obě číslice dohromady.

Možností pro zapomenutý kód je 24. Na prvním místě kódu může být číslice 1, 2, 4, 5, 7 nebo 8.

3.6 Příklad 6

Loď vezla 100 pokladnic. Ve všech byl stejný počet perel. V prvním přístavu piráti tajně odebrali z 1. pokladnice několik perel. Nikdo nic neodhalil, a tak ve 2. přístavu tajně vzali z 2. pokladnice dvakrát více perel než z první. Opět nikdo nic neodhalil, a tak ve 3. přístavu piráti odebrali ze 3. pokladnice třikrát více, než vzali z první. Tak to šlo pořád dál, až po posledním odebrání zůstala ve sté pokladnici jen jediná perla. Loď dovezla do cíle jen 24 850 perel. Kolik perel bylo původně v každé pokladnici?

(Volfová, 49. ročník)

Vlastní řešení:

Jelikož byl v každé pokladnici stejný počet perel, potom v každé pokladnici bylo x perel a celkový počet perel ve všech pokladnicích byl $100 \cdot x$. Piráti z první pokladnice odebraly y perel, z druhé $2 \cdot y$ perel, ze třetí $3 \cdot y$ perel atd. V jednotlivých pokladnicích zbylo:

1. přístav: $x - y$
2. přístav: $x - 2y$
3. přístav: $x - 3y$
4. přístav: $x - 4y$
5. přístav: $x - 5y$

⋮

99. přístav: $x - 99y$
100. přístav: $x - 100y = 1$

Loď do cíle dovezla 24 850 perel, což je součet perel, které zůstaly v pokladnicích. Zbytek perel se odečte od celkového počtu perel $100x$ a zbyde počet perel, které loď přivezla.

$$100x - (y + 2y + 3y + 4y + 5y + \dots + 99y + 100y) = 24\,850$$

Předchozí součet v závorce $(y + 2y + 3y + 4y + 5y + \dots + 99y + 100y)$ lze jednoduše vypočítat pomocí Gaussovi úvahy na součet 100 prvních čísel. Úvaha spočívá v tom, že se sto čísel rozdělí na půlku (od 1 do 50 a od 51 do 100) a vždy se sečtou dvojice čísel nejmenší a největší (1 + 100, 2 + 99, …). V těchto součtech vyjde vždy 101 (viz níže).

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 49 & + & 50 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 52 & + & 51 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Nyní je 50 součtů a každý má hodnotu 101, tedy celkový součet od 1 do 100 je roven součinu:

$$50 \cdot 101 = 5\,050$$

Pokud by se takto sčítal lichý počet čísel, tak je postup stejný, akorát se k výsledku přičte číslo, které zbylo. Například se sčítají čísla od 1 do 101. V tomto případě schéma vypadá následovně:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 49 & + & 50 \\ 101 & + & 100 & + & 99 & + & \dots & + & 53 & + & 52 \\ \hline 102 & + & 102 & + & 102 & + & \dots & + & 102 & + & 102 \end{array}$$

Zbylo číslo 51. Je 50 sčítanců a každý vyjde 102. To vyjadřuje rovnice:

$$50 \cdot 102 + 51 = 5\,151$$

Poznámka:
Více o Gaussově součtu v seznamu literatury na konci práce, publikace č. [7] strana 32.

Po úpravě má rovnice tvar:

$$100x - 5\,050y = 24\,580$$

Nyní jsou dvě rovnice o dvou neznámých:

$$x - 100y = 1$$
$$100x - 5\,050y = 24\,580.$$

Z první rovnice se vyjádří x … $x = 100y + 1$.

Toto x se dosadí do druhé rovnice:

$$100 \cdot (100y + 1) - 5\,050y = 24\,580$$
$$10\,000y + 100 - 5\,050y = 24\,580$$
$$4\,950y = 24\,480$$
$$\underline{y = 5}$$

Je znám počet ukradených perel z první pokladnice. Dosazením y do první rovnice vyplývá, že $x = 501$.
Původně bylo v každé pokladnici 501 perel.

3.7 Příklad 7

Myslím si 4 dvojciferná čísla. Dvě jsou prvočísla a dvě jsou čísla složená. Součet prvočísel je 100 a součet čísel složených je také 100. Jak prvočísla, tak čísla složená jsou tvořená stejnou čtveřicí různých cifer. Jaká čísla si myslím?

(Š. Ptáčková, 53. ročník)

Vlastní řešení:

Prvočíslo je číslo, které je dělitelné pouze jedničkou a samo sebou, tudíž má pouze dva dělitele. Dvojciferná prvočísla jsou: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 a 97. Z těchto prvočísel se vyberou dvě taková, která při sčítání dávají součet 100.

Součet 100 dávají prvočísla: 83 + 17; 71 + 29; 41 + 59; 47 + 53.

Z těchto předchozích součtů se vybere takový, který bude po přehození jeho číslic dávat součet 100 a sčítanci budou složená čísla. Složené číslo je takové, které má tři a více dělitelů (jedničku, samo sebe a alespoň jednoho dalšího dělitele). Pokud se přehodí čísla součtu 71 + 29, bude součet 21 + 79. Součet sice je roven 100, ale číslo 79 není číslo složené. To samé platí pro přehozený součet 43 + 57, kde číslo 43 také není číslo složené, nýbrž prvočíslo. Jediné řešení je součet 49 + 51, kde čísla 41 a 59 jsou prvočísla a čísla 49 a 51 jsou čísla složená.

Čtyři myšlená čísla jsou 41, 59, 49 a 51.

Poznámka:

Více o prvočíslech a číslech složených v seznamu literatury číslo [3].

3.8 Příklad 8

Najděte všechna čtyřciferná čísla dělitelná sedmi, pro která platí:

- součet prvních dvou cifer je 10,
- součet prostředních dvou cifer je 10,
- součet posledních dvou cifer je 9.

(Králl ová, 49. ročník)

Poznámka: V zadání je napsáno „pro která platí“ a je vypsané, co platí. Ovšem takto formulované zadání příkladu by se nechalo chápat jako tři různá zadání. Proto bych v tomto příkladu volila spíše formulaci „pro která současně/zároveň platí“. Ve vlastním řešení je příklad řešen, aby zadání platilo současně.

Vlastní řešení:

Najdou se čtyřciferná čísla taková, aby splňovaly podmínky ze zadání. Všechna čtyřciferná čísla jsou od 1 000 do 9 999, tudíž se budou vybírat právě taková čísla, která patří do tohoto intervalu.

První podmínkou je, aby součet prvních dvou cifer byl 10 (to je součet cifer na místě tisíců a stovek). To platí pro číslice 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5 a pro součet v opačném pořadí číslic, jelikož sčítání je komutativní. Součet 5 + 5 se zapíše pouze jednou, protože je zbytečné psát dvakrát ten samý zápis.

1	9		

2	8		

3	7		

4	6		

5	5		

6	4		

7	3		

8	2		

9	1		

K první podmínce se připojí druhá, aby součet prostředních cifer byl 10. Nyní platí obě podmínky současně.

1	9	1	

2	8	2	

3	7	3	

4	6	4	

5	5	5	

6	4	6	

7	3	7	

8	2	8	

9	1	9	

K předchozím dvěma podmínkám se připojí třetí, aby součet posledních dvou cifer byl 9:

1	9	1	8

2	8	2	7

3	7	3	6

4	6	4	5

5	5	5	4

6	4	6	3

7	3	7	2

8	2	8	1

9	1	9	0

Posledních devět čísel současně splňuje tři podmínky ze zadání. Poslední podmínkou je najít z těchto čísel taková, která jsou dělitelná sedmi. Číslo je dělitelné sedmi, právě když číslo, které vznikne odtržením cifry na místě jednotek a odečtením dvojnásobku jednotek od zkráceného čísla, je dělitelné sedmi. Podle tohoto kritéria dělitelnosti jsou sedmi dělitelná čísla: 1 918 a 8 281.

1 918 … $191 - 2 \cdot 8 = 175 \rightarrow 17 - 2 \cdot 5 = 7$

8 281 … $828 - 2 \cdot 1 = 826 \rightarrow 82 - 2 \cdot 6 = 70$

Řešením jsou dvě čísla, která jsou dělitelná sedmi a zároveň splňují všechny tři podmínky ze zadání, a to čísla 1 918 a 8 281.

V tomto příkladu by žáci mohli chybovat, právě kvůli nepřesně formulovanému zadání.

3.9 Příklad 9

Myslím si číslo. Záměnou pořadí jeho cifer dokážu vytvořit dalších pět čísel. Sečtu-li je všechny i s původním číslem, dostanu číslo 4 218. Má kamarádka Monika si myslí číslo o 5 větší a když k němu přičte všechna čísla získaná záměnou pořadí jeho číslic, dostane součet 5 328. Jaké číslo si myslím já a jaké Monika?

(Bednářová, 49. ročník)

Poznámka: V zadání je napsáno „záměnou pořadí jeho cifer", což by se nechalo pochopit jako záměnou jeho libovolných cifer. To znamená, že by se mohly zaměnit jakékoliv cifry a libovolný počet cifer, například by se mohli zaměnit pouze dvě cifry. V tomto případě by byla vhodnější formulace příkladu „Všemi možnými záměnami jeho cifer" nebo „Záměnou pořadí všech jeho cifer". Důležité je upozornit na slovo všemi, jelikož poté už je jasné, že se musí zaměnit všechny cifry na všech možných místech.

Vlastní řešení:

Ze zadání je zřejmé, že po přeházení číslic jednoho čísla se dostane dalších pět čísel, dohromady tedy šest čísel. Šesti čísel se dosáhne po zpřeházení číslic tříciferných čísel nebo čísel čtyřciferných, která obsahují dvě stejná čísla a dvě nuly.

1. Čtyřciferná čísla se dvěma nulami:

Pokud se dvě nenulové číslice označí jako a, potom se zpřeházením všech cifer čísla dostanou čísla: $aa00$, $a0a0$, $a00a$, $aa0$, $a0a$, aa. Čísel je šest, tudíž je možné, že nějaké čtyřciferné číslo se dvěma nenulovými číslicemi a se dvěma nulami bude řešením příkladu. Součet šesti čísel, které mají přeházené všechny cifry, má být 4 218:

$$\begin{array}{r} a\,a00 \\ a\,0a0 \\ a\,00a \\ aa0 \\ a0a \\ \underline{aa} \\ 4\,218 \end{array}$$

Z tohoto součtu je patrné, že toto nemá řešení. Z posledního sloupečku součtu vychází, že $3 \cdot a = 8$. Kdyby se za neznámou a dosadilo jakékoliv přirozené číslo, nikdy se tento součin nebude rovnat osmi, protože číslice 8 není dělitelná třemi.
Čtyřciferné číslice nejsou řešením příkladu.

2. Další možností, jak vyřešit příklad je tedy zpřeházením všech cifer trojciferného čísla. Pro usnadnění se jednotlivé cifry označí písmeny *a*, *b*, *c*. Po zpřeházení cifer se dostanou následující čísla: *abc*, *bca*, *cab*, *acb*, *bac*, *cba*.
Součet těchto šesti čísel má být 4 218:

$$\begin{array}{r} abc \\ bca \\ cab \\ acb \\ bac \\ \underline{\quad cba} \\ 4\,218 \end{array}$$

Jelikož ve sloupečku na místě jednotek, desítek i stovek jsou vždy dvakrát ta samá čísla (*a*, *b* a *c*), bude vždy součet jednotlivých sloupečků stejný a pouze se přičte z výsledku předchozího sloupečku číslice na místě desítek, která se nesepisuje, ale přičítá k dalšímu sloupečku.

Jelikož se v každém sloupečku pokaždé sčítají ty samé číslice, součet se bude vždy lišit pouze v tom, kolik se přičte ze sčítání předchozího sloupečku (číslice, která vyjde na místě desítek a nesepisuje se, ale přičítá k dalšímu sloupečku). Ve výsledném součtu je na konci (na místě jednotek) číslice 8 a před ní je číslice 1. To znamená, že součet posledního sloupečku je $c + a + b + b + c + a = 38$. Na místě desítek bude číslice 3, protože druhé sčítání se zvětší právě o 3. Číslice 8 se sepíše a číslice 3 se přičte k výsledku součtu dalšího sloupečku (sčítání desítek). Tento součet je také 38 plus číslice 3 z předchozího sčítání a výsledek je 41. Číslice 1 se sepíše a 4 se přičte k dalšímu sčítání. Poslední sčítání je 38 + 4 = 42, a to se sepíše celé, jelikož příklad končí sčítáním stovek. Celkový výsledek je tedy 4218.

Součet $c + a + b + b + c + a = 38$ lze také zapsat jako: $2 \cdot (a + b + c) = 38$, odtud $a + b + c = 19$.

Nyní se najdou takové tři číslice, které při součtu budou rovny 19. Těmi jsou: 1 + 9 + 9; 2 + 8 + 9; 3 + 7 + 9; 4 + 6 + 9; 5 + 5 + 9; 3 + 8 + 8; 4 + 7 + 8; 5 + 6 + 8; 4 + 8 + 7; 5 + 7 + 7; 6 + 6 + 7. Tímto se našla všechna čísla (199, 289, 379, 469, 559, 388, 478, 568, 577, 667), která při záměně pořadí mají součet 4 218. Na pořadí číslic nezáleží, jelikož se číslice budou přehazovat a vždy jejich součet bude 19.

Z jednoho čísla se dalších 5 vytvoří podle vzoru *abc*, *bca*, *cab*, *acb*, *bac*, *cba*. Pokud je číslo např. 123, tak $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Číslice se dosazují za písmenka a další čísla jsou: $bca \rightarrow 231$, $cab \rightarrow 312$, $acb \rightarrow 132$, $bac \rightarrow 213$, $cba \rightarrow 321$.

Kamarádka Monika si myslí číslo o 5 větší. Řešením budou čísla v závorce, ke kterým se přičte 5 nebo jejich přeházené cifry plus 5.

Řešení pro číslo 199:

Promíchají se cifry čísla a ke každému se přičte 5.

199 + 5 = 204 → 204 + 42 + 420 + 240 + 24 + 402 = 1 332, což není číslo, které se hledá. Prohodí se číslice čísla 199 a vznikne číslo 919, postup bude stejný:

919 + 5 = 924 → 924 + 249 + 492 + 942 + 294 + 429 = 3 330, což také není číslo, které se hledá.

Poslední možnost, jak namíchat číslice je 991 + 5 = 996. Pro toho číslo je součet 996 + 969 + 699 + 969 + 996 + 699 = 5 328. Toto je součet, který dají přeházené číslice Moničina myšleného čísla. Tudíž první řešení je, že já si myslím číslo 991 a Monika číslo 996. Další možnosti, jak promíchat číslice už nejsou, jelikož jsou v čísle dvě stejné číslice, tak by i řešení bylo stejné.

Řešení pro číslo 289:

289 + 5 = 294; 294 + 942 + 429 + 249 + 942 + 492 = 3 303, toto číslo se nehledá.

Další možnost je 892 + 5 = 897; 897 + 978 + 789 + 879 + 987 + 798 = 5 328, toho číslo je dalším řešením příkladu. Pokud já si myslím číslo 892, tak Monika si myslí číslo 897.

Další prohození číslic je 928 + 5 = 933; 933 + 393 + 339 + 933 + 393 + 339 = 3 330, což není hledané číslo.

Další možnost je 298 + 5 = 303; 303 + 330 + 33 + 303 + 330 + 33 = 1 332.

Předposlední možnost je 829 + 5 = 834; 834 + 348 + 483 + 843 + 438 + 384 = 3 330.

Poslední možností je 982 + 5 = 987; 987 + 879 + 798 + 978 + 789 + 897 = 5 328. Toto už je třetí řešení.

Zbytek čísel se dopočítá stejným způsobem.

Příklad má celkem 10 řešení. Pokud si já myslím číslo 991, tak Monika si myslí číslo 996. Já si myslím číslo 892 a Monika 897. Já si myslím číslo 982 a Monika 987. Dále budou výsledky zapsány následovně: „mé myšlené číslo“ → „Moniky myšlené číslo“. 793 → 798; 973 → 978; 694 → 699; 964 → 969; 883 → 888; 784 → 789; 874 → 879.

3.10 Příklad 10

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej ten druhý rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno. V 9:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 27 kafemlýnků. Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně v 19:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 120 kafemlýnků. Za jak dlouho složí kafemlýnek Hubert? Za jak dlouho jej složí Robert?

(K. Pazourek, 67. ročník)

Vlastní řešení:

V zadání je napsáno, že kafemlýnek robot složí čtyřikrát rychleji, než jej druhý rozebere. To znamená, že za dobu, co jeden robot rozloží 1 kafemlýnek, tak druhý robot složí 4 kafemlýnky. Pokud x je počet složených a rozložených kafemlýnků, potom lze označit počet všech složených kafemlýnků jako $4 \cdot x$ a počet všech rozložených kafemlýnků jako x. Roboti složené kafemlýnky rozkládají, to znamená, že celkový počet složených kafemlýnků ubývá. Toto vyjadřuje rozdíl $4x - x$.

Za první směnu od 9:00 do 12:00 hodin přibylo 27 kafemlýnků.

Kolik kafemlýnků složí nebo rozloží za tuto směnu vyjadřuje rovnice $4x - x = 27$. Po úpravě rovnice je $x = 9$. To znamená, že Robert rozložil 9 kafemlýnků a Hubert složil 36 ($4 \cdot 9 = 36$) kafemlýnků.

Za jak dlouho složí Hubert jeden kafemlýnek? Směna byla dlouhá 3 hodiny (od 9:00 do 12:00) a za tyto 3 hodiny Hubert složil 36 kafemlýnků. Hodiny se převedou na minuty (3 h = 180 min), které se vydělí počtem složených kafemlýnků (180 : 36) a vyjde, že Hubert složí jeden kafemlýnek za 5 minut.

Stejně se řeší i příklad, kdy kafemlýnky skládá Robert. V tomto případě se řeší rovnice $4x - x = 120$. Vyjde, že Hubert jich rozebral 40 a Robert složil čtyřikrát více čili složil 160 kafemlýnků. Druhá směna byla od 13:00 do 19:00, což je 6 hodin. Robert tedy za 6 hodin (360 minut) složil 160 kafemlýnků. Jeden kafemlýnek složil za 2,25 minuty (za 2 min 15 s).

Hubert složí jeden kafemlýnek za 5 minut a Robert za 2,25 minut.

4 Okresní 2. kolo

V každém ročníku okresního kola olympiády kategorie Z8 jsou pouze tři příklady. Zatímco v domácím kole mohli žáci nad jednotlivými příklady přemýšlet, jak dlouho chtěli, v okresním kole musí tři příklady vyřešit ve dvou hodinách.

4.1 Příklad 1

Šifrovací hry se zúčastnilo 168 hráčů v 50 týmech, které měly dva až pět členů. Nejvíce bylo čtyřčlenných týmů, trojčlenných týmů bylo 20 a hry se zúčastnil alespoň jeden pětičlenný tým. Kolik bylo dvojčlenných, čtyřčlenných a pětičlenných týmů?

(M. Mach, 62. ročník)

Vlastní řešení:

Hry se zúčastnilo 20 trojčlenných týmů, tzn. 60 hráčů. Tento počet se odečte od počtu všech hráčů a všech týmů. Zbyde 108 hráčů v 30 týmech. Jelikož čtyřčlenných týmů bylo nejvíce, bude jejich počet větší než počet tříčlenných, dvojčlenných i pětičlenných týmů. Tříčlenných bylo 20, tudíž čtyřčlenných bude 21 a více.

Jelikož zbylo 108 hráčů, musejí být sudé počty pětičlenných týmů (2, 4, atd.). Pokud by byl počet pětičlenných týmů lichý, zbylé hráče by nešlo rozdělit do dvojčlenných a čtyřčlenných týmů.

Pokud budou 2 pětičlenné týmy (tj. 10 hráčů), zbyde 98 hráčů v 28 týmech. Tito hráči se rozdělí do týmů po dvou a po čtyřech.

- Aby bylo čtyřčlenných týmů nejvíce, musí jich být 21 a více (84 a více hráčů). Dvojčlenných týmů bude tedy 7 (14 hráčů).
- Pokud by bylo čtyřčlenných týmů 22 (88 hráčů) na dvojčlenné týmy zbyde 10 hráčů (5 týmů). Toto ale nevyhovuje, protože hry se zúčastnilo 50 týmů a v tomto případě je pouze 49 týmů (20 + 2 + 22 + 5).
- Může být i 23 čtyřčlenných týmů (92 hráčů), potom týmy po dvojicích budou 3. Tento případ také nevyhovuje, protože by bylo pouze 48 týmů.
- Kdyby bylo 24 čtyřčlenných týmů, dvojčlenný tým bude pouze 1. V tomto případě by bylo 47 týmů.

Pokud byly 4 pětičlenné týmy (20 hráčů), na dvojčlenné a čtyřčlenné týmy zbyde 88 hráčů v 26 týmech.

- Čtyřčlenných týmů bude 21 (84 hráčů), potom na dvojčlenné týmy zbydou 4 hráči. Tento případ také neplní podmínku, aby se hry zúčastnilo 50 týmů.
- 22 čtyřčlenných týmů být nemůže, protože potom by nezbyl ani jeden hráč na dvojčlenný tým.

Možnost je tedy pouze jedna. A to taková, že se hry zúčastnilo 7 dvojčlenných, 20 trojčlenných, 21 čtyřčlenných a 2 pětičlenné týmy.

4.2 Příklad 2

Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti:

- součin dvou krajních číslic je 40,
- součin dvou vnitřních číslic je 18,
- rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic,
- rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla (tj. čísla napsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí) je největší možný.

Určete Moničino myšlené číslo.

(L. Hozová, 66. ročník)

Vlastní řešení:

Číslice na jednotlivých pozicích (tisícovek, stovek, desítek a jednotek) se pro zjednodušení označí pomocí písmen.

A	*B*	*C*	*D*

$$A \cdot D = 40$$

$$B \cdot C = 18$$

$$A - D = B - C$$

Aby se součin dvou krajních čísel rovnal 40, v úvahu připadají následující čtyři možnosti: $40 \cdot 1$, $20 \cdot 2$, $10 \cdot 4$, $8 \cdot 5$.

Rozdíly těchto čísel jsou: 40 - 1 = 39, 20 - 2 = 18, 10 - 4 = 6, 8 - 5 = 3.

Aby součin dvou vnitřních číslic byl 18, mohou to být součiny čísel: $9 \cdot 2$, $6 \cdot 3$.

Rozdíly čísel jsou: 9 - 2 = 7, 6 - 3 = 3.

Jelikož se mají rozdíly vnějších a vnitřních čísel rovnat, vhodná jsou čísla 8, 5, 6 a 3.

$$A = 8,\ B = 6,\ C = 3,\ D = 5$$

8	6	3	5

Monika přemýšlela o čísle 8635.

Pro zrychlení a zjednodušení řešení tohoto příkladu, lze využít toho, že v zadání se píše o krajních a vnitřních číslicích. Číslice jsou pouze 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Potom by u vlastnosti myšleného čísla, aby se součin dvou krajních číslic rovnal 40, připadá v úvahu pouze součin 8 · 5, tudíž krajní číslice jsou vyřešené. Ostatní součiny nejsou pouze z číslic, ale i z čísel. Dále je řešení stejné.

4.3 Příklad 3

Na kartičku jsem napsala dvojmístné přirozené číslo. Součet číslic tohoto čísla je dělitelný třemi. Odečtu-li od napsaného čísla číslo 27, dostanu jiné dvojmístné přirozené číslo, psané týmiž číslicemi, ale v opačném pořadí. Která čísla jsem mohla napsat na kartičku?

(L. Hozová, 60. ročník)

Vlastní řešení:

Napsané dvojmístné přirozené číslo: *ab*. Součet $a + b$ je dělitelný 3. Odečtením čísla 27od čísla *ab* vyjde číslo *ba* (ab - 27 = ba). Číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Jakých dvou číslic $a + b$ bude součet dělitelný 3?

0 + 3, 0 + 6, 0 + 9, 1 + 2, 1 + 5, 1 + 8, 2 + 1, 2 + 4, 2 + 7, 3 + 0, 3 + 3, 3 + 6, 3 + 9, 4 + 2, 4 + 5, 4 + 8, 5 + 1, 5 + 4, 5 + 7, 6 + 0, 6 + 3, 6 + 6, 6 + 9, 7 + 2, 7 + 5, 7 + 8, 8 + 1, 8 + 4, 8 + 7, 9 + 0, 9 + 3, 9 + 6, 9 + 9.

Má-li po odečtení čísla 27 vyjít číslo s číslicemi v opačném pořadí, musí být ab > 27, jinak by výsledek byl záporný nebo rovný nule. Poté přicházejí v úvahu součty číslic 3 + 0, 3 + 3, 3 + 6, 3 + 9, 4 + 2, 4 + 5, 4 + 8, 5 + 1, 5 + 4, 5 + 7, 6 + 0, 6 + 3, 6 + 6, 6 + 9, 7 + 2, 7 + 5, 7 + 8, 8 + 1, 8 + 4, 8 + 7, 9 + 0, 9 + 3, 9 + 6, 9 + 9.

Další podmínkou je, aby číslo *a* bylo větší než *b*. Jelikož po odečtení budou tato čísla vyměněná. Nemůžou to být ani čísla stejná, protože po odečtení čísla 27 nikdy nebude výsledek stejný. Zbydou součty 3 + 0, 4 + 2, 5 + 1, 5 + 4, 6 + 0, 6 + 3, 7 + 2, 7 + 5, 8 + 1, 8 + 4, 8 + 7, 9 + 0, 9 + 3, 9 + 6.

Součet s číslicí 0 to také být nemůže. Sice například 3 + 0 (číslo 30) je dělitelné třemi a po odečtení čísla 27 vyjde číslo opačné (30 - 27 = 03), ale už se nejedná o dvojciferné číslo. Zbydou čísla: 42, 51, 54, 63, 72, 75, 81, 84, 87, 93 a 96. Od těchto zbylých čísel se postupně odečte číslo 27.

42 - 27 = 15; 51 - 27 = 24; 54 - 27 = 27; 63 - 27 = 36; 72 - 27 = 45; 75 - 27 = 48; 81 - 27 = 54; 84 - 27 = 57; 87 - 27 = 60; 93 - 27 = 66; 96 - 27 = 69.

Řešení jsou dvě, a to čísla 63 (63 - 27 = 36) a 96 (96 - 27 = 69).

Řešení L. Hozové:

Číslice myšleného dvojmístného čísla označíme takto: x je na místě desítek a y na místě jednotek. V zadání se požaduje, aby součet $x + y$ byl dělitelný třemi a $10x + y - 27 = 10y + x$, což po úpravě dává $9x - 9y = 27$, $x - y = 3$. Protože rozdíl číslic má být tři a současně součet má být dělitelný třemi, musí být i obě číslice x a y dělitelné třemi. (To zjevně vidíme, pokud si součet číslic $x + y$ vyjádříme ve tvaru $y + 3 + y$.) *Autorka příkladu si z rovnice $x - y = 3$ vyjádřila $x = 3 + y$ a dosadila do součtu $x + y$.* Jediné možnosti tedy jsou $x = 9$, $y = 6$ nebo $x = 6$, $y = 3$, tj. hledané číslo může být 96 nebo 63. (Možnost 30 není přípustná, protože 03 není dvojmístné přirozené číslo.)

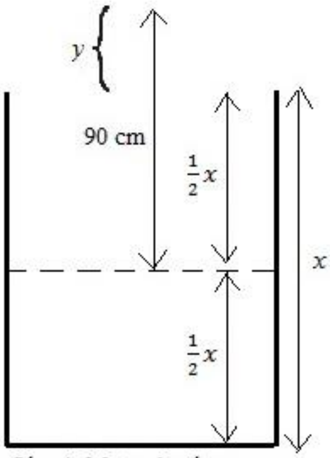
Jelikož už se jedná o druhé kolo soutěže, kdy žáci řeší příklady v určitém čase, tak řešení L. Hozové je vhodnější, protože není dlouhé jako vlastní řešení. V tomto případě je vlastní řešení pro lepší pochopení příkladu.

4.4 <u>Příklad 4</u>

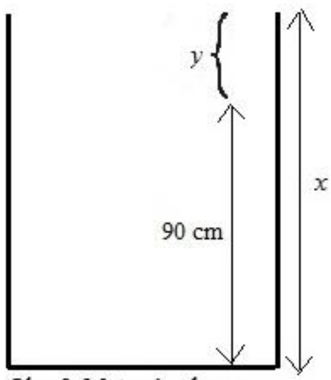
Mat kopal jámu. Pat se ho zeptal, jak bude jáma hluboká. Mat odpověděl hádankou: „Měřím 90 cm a právě mám vykopánu polovinu jámy. Až vykopu jámu celou, bude vršek mojí hlavy pod povrchem země tak hluboko, jak je nyní nad povrchem země.“ Jak hlubokou jámu Mat kopal?

(L. Hozová, 66. ročník)

Vlastní řešení:



Obr. 1: Mat má vykopanou polovinu jámy



Obr. 2: Mat má vykopanou celou jámu

Podle zadání se načrtnou pomocné obrázky (obr. 1 a obr. 2). Na obrázkách neznámá x značí celkovou hloubku jámy a neznámá y je délka od Matova temene k povrchu země, kdy je Mat nad nebo pod povrchem země. Pomocí těchto obrázků se sestaví dvě rovnice. Z obr. 1 vyplývá rovnice:

$$\frac{1}{2}x + 90 = x + y$$

a z obr. 2 rovnice:

$$90 + y = x.$$

Rovnice se dají do soustavy.

$$\frac{1}{2}x + 90 = x + y$$
$$\underline{90 + y = x}$$

Všechny neznámé se převedou na levou stranu a zbytek na pravou stranu.

$$\frac{1}{2}x + y = 90$$
$$\underline{x - y = 90}$$

Sčítací metodou se vypočítá x.

$$\frac{3}{2}x = 180$$

$$\underline{\underline{x = 120}}$$

Pat kopal jámu hlubokou 120 cm.

Řešení L. Hozové:

Z Matova vysvětlení plyne, že jeho výška je přesně mezi hloubkou celé jámy a její polovinou. Tedy 90 cm je rovno třem čtvrtinám hloubky celé jámy. Mat kopal jámu hlubokou $\frac{4}{3} \cdot 90 = 120$ (cm).

Druhé řešení L. Hozové:

Pokud označíme j hloubku celé jámy, potom podle Matova vysvětlení můžeme vzdálenost vršku Matovy hlavy od povrchu země vyjádřit jako

$$j - 90 = 90 - \frac{1}{2}j.$$

Odtud dostáváme $\frac{3}{2}j = 180$, tedy $j = 120$. Mat kopal jámu hlubokou 120 cm.

U tohoto příkladu bych volila spíše řešení pomocí rovnic, které jsou více názorné. Autorka příkladu u druhého řešení sice vyřešila příklad rovnicí, ale myslím, že tento příklad je nejlepší řešit nakreslením obrázku podle Matovi hádanky a následně z obrázku udělat soustavu rovnic (viz vlastní řešení). Pomocí obrázků si žáci lépe příklad představí a je pro ně snazší sestavit rovnice.

4.5 Příklad 5

Majka vytvořila posloupnost čísel, ve které je každé následující číslo součtem druhých mocnin číslic předcházejícího čísla. Vypište prvních 10 členů této posloupnosti, pokud je její první člen číslo 29. Které číslo je v posloupnosti na 2 006. místě?

(M. Dillingerová, 55. ročník)

Vlastní řešení:

První člen posloupnosti je znám, takže se dopočítá dalších devět členů posloupnosti. Další členy se vypočítají jako součet druhých mocnin číslic. Pokud se čísla označí jako *ab*, potom se další členy budou počítat následovně: $a^2 + b^2$ = další člen posloupnosti.

1. člen … 29
2. člen … $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$
3. člen … $8^2 + 5^2 = 89$
4. člen … $8^2 + 9^2 = 145$
5. člen … $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$
6. člen … $4^2 + 2^2 = 20$
7. člen … $2^2 + 0^2 = 4$
8. člen … $4^2 = 16$
9. člen … $1^2 + 6^2 = 37$
10. člen … $3^2 + 7^2 = 58$

Další členy posloupnosti:

11. člen … $5^2 + 8^2 = 89$
12. člen … $8^2 + 9^2 = 145$
13. člen … $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$
14. člen … $4^2 + 2^2 = 20$
15. člen … $2^2 + 0^2 = 4$

⋮

Od čísla 89 (11. člen) se posloupnost začala opakovat, protože 2. a 10. člen jsou sice různá čísla, ale pokud se mají sčítat mocniny číslic daného čísla, tak na pořadí nezáleží, jelikož sčítání je komutativní.

Opakuje se pouze osm čísel, 1. a 2. člen posloupnosti se neopakuje. Jestliže se první dva členy posloupnosti vynechají, tak by se hledalo číslo posloupnosti na 2 004. místě. Pokud se toto číslo vydělí 8 (2 004 : 8 = 250 a zbytek 4), potom je na 2 004. místě číslo, které je čtvrté v pořadí čili číslo 20. Pokud se k posloupnosti vrátí první dva členy, tak stále bude na 2 006. místě posloupnosti číslo 20.

Příklad lze řešit i bez vynechání prvních dvou členů posloupnosti. Pokud se k 10. členu bude stále přičítat číslo 8 (počet opakujících se členů), tak se posloupnost přiblíží k 2 006. místu (přesněji na 2 000. místo). Do 2 006. členu chybí 6 členů (2 006 : 8 = 250 a zbytek 6) a 6. člen v pořadí je číslo 20.

V posloupnosti je na 2 006. místě číslo 20.

4.6 Příklad 6

Kolik existuje šestimístných přirozených čísel, která mají na místě statisíců číslici 1, na místě tisíců číslici 2 a na místě desítek číslici 3 a jsou beze zbytku dělitelná číslem 45?

(L. Šimůnek, 59. ročník)

Ze zadání je známo:

_1_ __ _2_ __ _3_ __

Další podmínkou je, aby bylo toto šesticiferné číslo dělitelné číslem 45. Číslo je dělitelné 45, právě když je dělitelé pětkou a devítkou zároveň. Číslo je dělitelné pěti, končí-li číslicí 0 nebo 5.

_1_ __ _2_ __ _3_ _0_

_1_ __ _2_ __ _3_ _5_

Nyní je jisté, že je číslo dělitelné pěti. Devíti je dělitelné tehdy, pokud je ciferný součet čísla dělitelný devíti. To znamená, že se chybějící kolonky musí dopočítat tak, aby číslo splňovalo kritérium dělitelnosti devíti.

Pro nulu na konci čísla:

_1_ __ _2_ __ _3_ _0_

Zatím je ciferný součet 1 + 2 + 3 + 0 = 6. Aby bylo číslo dělitelné devíti, musí být součet násobkem devíti, to jsou čísla 9 nebo 18. Větší číslo to nebude, jelikož největší číslice je 9 a pokud by se do obou prázdných políček dosadila právě číslice 9, tak by ciferný součet byl 24, což není násobkem devíti.

1. Kdy se bude ciferný součet rovnat 9? Stačí najít takové dvě číslice, které budou dávat součet 3, protože už nyní je ciferný součet 6. To bude splněno, pokud se dosadí 0 a 3 nebo 1 a 2 v libovolném pořadí. Po dosazení:

_1_ _0_ _2_ _3_ _3_ _0_

_1_ _3_ _2_ _0_ _3_ _0_

_1_ _1_ _2_ _2_ _3_ _0_

_1_ _2_ _2_ _1_ _3_ _0_

2. Kdy se bude ciferný součet rovnat 18? Jelikož je součet bez dosazení zbylých číslic 6, tak stačí najít takové dvě číslice, jejichž součet bude 12. Jsou to číslice 3 a 9, 4 a 8, 5 a 7, 6 a 6 v libovolném pořadí. Po dosazení:

1 3 2 9 3 0

1 9 2 3 3 0

1 4 2 8 3 0

1 8 2 4 3 0

1 5 2 7 3 0

1 7 2 5 3 0

1 6 2 6 3 0

Pro nulu na konci čísla existuje celkem 11 řešení.

Pro pětku na konci vypadá číslo následovně:

1 __ 2 __ 3 5

S pětkou na konci čísla je ciferný součet 1 + 2 + 3 + 5 = 11. Aby bylo číslo dělitelné devíti, musí být jeho ciferný součet násobkem devíti. Zatím je ciferný součet roven 11, tudíž násobky devíti musí být větší, než je číslo 11. To splňují násobky 18 nebo 27.

1. Kdy bude ciferný součet roven 18? Nyní je součet 11, tudíž se hledají takové dvě číslice, které budou mít součet 7. To splňují číslice 0 a 7, 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4 v libovolném pořadí. Po dosazení:

1 0 2 7 3 5

1 7 2 0 3 5

1 1 2 6 3 5

1 6 2 1 3 5

1 2 2 5 3 5

1 5 2 2 3 5

1 3 2 4 3 5

1 4 2 3 3 5

2. Kdy bude ciferný součet roven 27? Stačí, pokud se najdou takové číslice, které mají součet 16, protože zatím je ciferný součet 11. Jimy jsou 7 a 9, 8 a 8 v libovolném pořadí. Po dosazení:

1	7	2	9	3	5
1	9	2	7	3	5
1	8	2	8	3	5

Pro pětku na konci čísla existuje 11 řešení.

Celkem je tedy 11 řešení s nulou na konci a 11 řešení s pětkou na konci, dohromady existuje 11 + 11 = 22 řešení, kdy je hledané šesticiferné číslo dělitelné 45 beze zbytku.

4.7 Příklad 7

Znamínko * značí operaci $a * b = ab - 4a - 4b + 16$. Určete číslo x tak, aby $(3 * x) * (3 * x) = 0$.

(Úlohy matematickej olympiády základnej školy, 42. ročník, str. 21)

Vlastní řešení:

Nejprve se vyřeší $(3 * x)$, kde $a = 3$, $b = x$ a dosadí se do výrazu $ab - 4a - 4b + 16$ a upraví:

$$3 \cdot x - 4 \cdot 3 - 4 \cdot x + 16 = 3 \cdot x - 12 - 4 \cdot x + 16 = -x + 4$$

Jelikož je sčítání komutativní lze výraz $-x + 4$ zapsat jako $4 + (-x) = 4 - x$

Druhý činitel $(3 * x)$ je stejný. Po dosazení do rovnice vyjde:

$$\underbrace{(4 - x)}_{(a} * \underbrace{(4 - x)}_{b)} = 0$$

Nyní se $a = (4 - x)$, $b = (4 - x)$, tudíž $a = b$. Pokud se do výrazu $a * b = ab - 4a - 4b + 16$ za b dosadí a, výraz bude vypadat následovně:

$$a * a = a \cdot a - 4 \cdot a - 4 \cdot a + 16 = a^2 - 8a + 16$$

Po dosazení $(4 - x)$ za a do předchozího výrazu:

$$(4 - x)^2 - 8 \cdot (4 - x) + 16 = 0$$

Úpravy výrazu:

$$(16 - 8x + x^2) - (32 - 8x) + 16 = 0$$
$$16 - 8x + x^2 - 32 + 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - 8x + 8x + 16 - 32 + 16 = 0$$
$$x^2 - 0x + 0 = 0$$

Po úpravách výrazu vyjde:

$$x^2 = 0$$

Tato rovnice se odmocní:

$$x = 0$$

Výraz $(3 * x) * (3 * x) = 0$ má řešení pouze tehdy, pokud $x = 0$.

Řešení autorů:

Pro $a = b$ má operace * tvar: $a * a = a \cdot a - 4 \cdot a - 4 \cdot a + 16 = a^2 - 8a - 16$. *V tomto výrazu je tisková chyba, kdy se výraz má rovnat $a^2 - 8a + 16$. Už v prvním kroku autoři počítají s tím, že a = b, jelikož tyto výrazy (3 * x) a (3 * x) se rovnají.*

Položme $a = 3 * x$. Potřebujeme najít řešení rovnice $a * a = 0$.

$$a^2 - 8a - 16 = 0 \rightarrow (a - 4)^2 = 0 \rightarrow a = 4.$$

V tomto kroku se stále objevuje tisková chyba. S touto chybou by však předchozí rovnice nedávaly smysl.

Nyní stačí vyřešit rovnici $3 * x = 4$.

$$3x - 12 - 4x + 16 = 4 \rightarrow 4 - x = 0 \rightarrow x = 0.$$

Pokud si rozebereme tyto předchozí tři rovnice, tak první rovnici autoři dosadili tak, že do původní rovnice ab - 4a - 4b + 16 dosadili za a = 3, b = x. Pokud se podíváme dál, tak z rovnice 4 - x = 0 určitě nevyplývá, že x = 0. Místo rovnice 4 - x = 0 by správně měla být rovnice 4 - x = 4 a z této rovnice plyne, že x = 0.

Řešením je $x = 0$.

Řešením je číslo 0, ovšem podle chyb autorů v rovnicích by jim mělo vyjít jiné číslo.

5 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo analyzovat řešení příkladů z matematické olympiády z kategorie pro žáky 8. ročníků základních škol, pro žáky 3. ročníku osmiletého gymnázia a pro žáky 1. ročníku šestiletých gymnázií. V práci jsem popsala, jaká řešení jsou pro žáky vhodnější. Komentuji řešení autorů příkladu, jelikož jsou často strohá a málo vysvětlená, proto jsem vypracovala svá řešení, která jsem podrobně popsala, aby byly řešení příkladů lépe pochopitelné. Své řešení uvádím i z toho důvodu, aby žáci viděli, že jeden příklad může mít několik řešení.

Hlavní rozdíl mezi 1. a 2. kolem je ten, že v 1. domácím kole žáci nemají určený čas na vyřešení úkolů, mají určené pouze datum, dokdy musí odevzdat trojici příkladů. Proto mají příklady v tomto kole obsáhlejší řešení, které je časově náročnější. Na rozdíl od kola okresního, kde už mají určený čas, během kterého musí vyřešit tři příklady. Právě proto jsou příklady voleny tak, aby se všechny tři příklady stihly v daném čase.

Práce je určena pro žáky, kteří se připravují na matematickou olympiádu nebo jinou matematickou soutěž, rovněž také může sloužit talentovaným žákům, kteří se o matematiku zajímají. Práci mohou využít také učitelé, kteří vedou různé matematické kroužky, kde se berou složitější příklady než o běžné hodině.

6 Použitá literatura a zdroje

Literatura:

[1] BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. (2009): Matematika 8: Aritmetika. Fraus, Plzeň, s.127. ISBN 978-80-7238-684-0

[2] BUŠEK, I., CALDA, E. (2010): Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha, s. 195. ISBN 978-80-7196-366-0

[3] ČIŽMÁR, J., HRDINA, Ľ. a kol. (1989): Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, s. 237. ISBN 80-04-26298-8

[4] HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E. a kol. (1994): Matematika: Dělitelnost, Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, s. 100. ISBN 80-85849-41-0

[5] MIHALÍKOVÁ, B., ONDOVČÍKOVÁ, D., SEMANIŠINOVÁ I. (2003): Úlohy matematickej olympiády základnej školy. Iuventa Bratislava, s. 224. ISBN 80-8027-010-X

[6] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. (2007): Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl: Desetinná čísla, Dělitelnost. Prometheus, Praha, s. 88. ISBN 978-80-7196-143-7

[7] PLOCKI, A., TLUSTÝ, P. (2010): Kombinatoryka wokol nas. Wydawnictwo Naukowe NOVUM, s.310. ISBN 978-83-60662-28-1

Internetové zdroje:

[8] Glouny.cz: Karl Friedrich Gauss; http://www.glouny.cz/matematika/mat_sem/priklady/gauss.htm (13.4.2018)

[9] Matematická olympiáda (2016): Organizační řád matematické olympiády; http://www.matematickaolympiada.cz/media/41005/orgradmo.pdf (25.3.2018)

[10] Matematická olympiáda: Olympiáda pro ZŠ; http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly