Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vybrané úlohy z matematické olympiády

Vypracovala: Zuzana Mácová
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štepánková, Ph.D.
České Budějovice 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Vybrané úlohy z matematiky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 27. dubna 2018 ....

podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí práce, paní Mgr. Hana Štepánková, Ph.D., za podporu a trpělivost, kterou se mnou měla. Také bych ráda poděkovala své rodině za poskytnutí vhodných podmínek a podpory při tvorbě této práce.

Anotace

V této bakalářské práci „Vybrané úlohy z matematické olympiády“ jsou srozumitelně rozepsány a vypočítány převzaté příklady z matematických olympiád. Tyto příklady jsou určeny pro žáky pátých až sedmých tříd. Úlohy jsou doplněny o návodné úlohy, které by žákům měly pomoci pochopit složitější úlohy. Učitelé příklady mohou využívat jako pomůcku či inspiraci do hodin matematiky. Převzaté úlohy jsou rozděleny do tří kategorií, podle typu řešení úloh, a to na logické, geometrické a analytické.

Annotation

In this bachelor thesis „Some problems from the Olympic games in Mathematics“ are comprehensively elaborated and calculated examples taken from mathematical Olympiads. These examples are intended for pupils of the fifth to seventh classes. Tasks are supplemented by an instruction tasks, that should help pupils to understand more complex tasks. Teachers can use examples as an aid or inspiration for their mathematics lessons. The assumed tasks are divided into three categories, depending on the type of task resolution, logical, geometric and analytical.

Obsah

1 Úvod **6**

2 Kategorie Z5 **7**
2.1 Logické řešení úloh 7
2.1.1 První příklad Z5-I-6 55. ročník 7
2.1.2 Druhý příklad Z5-I-1 63. ročník 8
2.1.3 Třetí příklad Z5-I-2 66. ročník 9
2.1.4 Čtvrtý příklad Z5-II-1 67. ročník 11
2.2 Geometrické řešení úloh 12
2.2.1 První příklad Z5–I–6 66. ročník 12
2.2.2 Druhý příklad Z5-II-2 63. Ročník 14
2.2.3 Třetí příklad Z5-II-3 67. ročník 15
2.2.4 Čtvrtý příklad Z5-I-5 67. ročník 16
2.3 Analytické řešení úloh 18
2.3.1 První příklad Z5-II-1 64.ročník 18
2.3.2 Druhý příklad Z5-II-1 62. ročník 19
2.3.3 Třetí příklad Z5-I-1 67. ročník 20
2.3.4 Čtvrtý příklad Z5–I–3 60. ročník 21

3 Kategorie Z6 **22**
3.1 Logické řešení úloh 22
3.1.1 První příklad Z6-I-4 66. ročník 22
3.1.2 Druhý příklad Z6-I-6 66. ročník 23
3.2 Geometrické řešení úloh 24
3.2.1 První příklad Z6-II-3 62. ročník 24
3.2.2 Druhý příklad Z6-I-6 55. ročník 26
3.2.3 Třetí příklad Z6-I-5 53. ročník 27
3.3 Analytické řešení úloh 28
3.3.1 První příklad Z6-II-2 66.ročník 28
3.3.2 Druhý příklad Z6-I-4 59. ročník 29
3.3.3 Třetí příklad Z6-I-1 57. ročník 30

4 Kategorie Z7 **32**
4.1 Logické řešení úloh 32
4.1.1 První příklad Z7-II-1 61. ročník 32
4.1.2 Druhý příklad Z7-II-3 57. ročník 32
4.1.3 Třetí příklad Z7-I-4 65. ročník 33
4.2 Geometrické řešení úloh 35
4.2.1 Příklad první Z7-I-4 64. ročník 35
4.2.2 Druhý příklad Z7-II-3 60. ročník 36
4.2.3 Třetí příklad Z7-II-2 62. ročník 37
4.3 Analytické řešení úloh 39
4.3.1 První příklad Z7-I-3 60. ročník 39
4.3.2 Druhý příklad Z7-II-2 63. ročník 40
4.3.3 Třetí příklad Z7-I-1 54. ročník 40

5 Řešení návodných úloh **43**
5.1 Kategorie Z5 . . . 43
5.1.1 Logické řešení úloh . . . 43
5.1.2 Geometrické řešení úloh . . . 45
5.1.3 Analytické řešení úloh . . . 48
5.2 Kategorie Z6 . . . 48
5.2.1 Logické řešení úloh . . . 48
5.2.2 Geometrické řešení úloh . . . 49
5.2.3 Analytické řešení úloh . . . 50
5.3 Kategorie Z7 . . . 50
5.3.1 Logické řešení úloh . . . 50
5.3.2 Geometrické řešení úloh . . . 51
5.3.3 Analytické řešení úloh . . . 51

6 Závěr **53**

7 Použitá literatura a zdroje **54**

1 Úvod

Matematická olympiáda je dobrovolná soutěž určená pro žáky základních škol od pátých tříd až do tříd devátých. Také pro žáky odpovídajících ročníků víceletých gymnázií v kategoriích Z5 až Z9. Pro studenty středních škol v kategoriích A až C. Soutěž je rozdělena na školní, okresní a krajské kolo. Ve školním kole má každá kategorie na řešení šest úloh, které žáci řeší dobrovolně ve svém volném čase. V kole okresním žáci v kategoriích Z6, Z7 a Z8 řeší 3 úlohy během dvou hodin. V kategorii Z5 žáci řeší 3 úlohy v průběhu 90-ti minut. Kategorie Z9 v okresním kole plní čtyři úlohy během 4 hodin. Krajské kolo se týká pouze kategorie Z9 a má stejný průběh jako kolo okresní. Na internetových stránkách matematické olympiády jsou dostupné úlohy ze všech kol olympiád za posledních dvacet let. V každém ročníku jsou zastoupeny úlohy typu geometrického, analytického i logického myšlení. Ve školním roce 2017/2018 se již konal 67. ročník matematické olympiády.

V mé bakalářské práci jsou převzaty a řešeny příklady ze školních a okresních kol, dostupné na internetové stránce [6]. Úlohy jsou rozděleny podle typu příkladu na úlohy geometrické, analytické a logické. Příklady jsou vybírány z různých ročníků matematických olympiád, uspořádány do kategorií Z5, Z6 a Z7. Ke každému z vybraných příkladů jsem vytvořila podrobné a srozumitelné řešení, doplněné o grafické znázornění. Jsou zde návodné úlohy, které by měli žákům pomoci k pochopení složitějších úloh v matematické olympiádě, a díky návodným úlohám lépe porozumět a snadněji vyřešit. Tato práce by měla posloužit jako pomůcka pro žáky, ale i učitele, kteří řeší matematické olympiády.

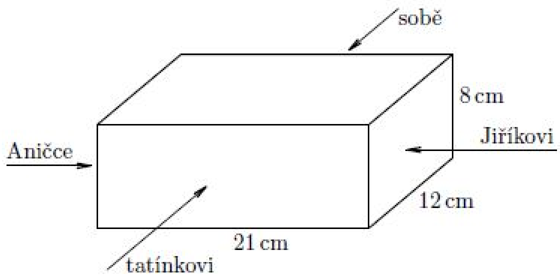
Bakalářská práce je sázena v programu Latex, který umožňuje autorům textů, psát svá díla ve vysoké kvalitě a profesionálním předdefinovaném vzhledu dokumentu. Obrázky pro doplnění představivosti situace jsou tvořeny v programu GeoGebra.

2 Kategorie Z5

2.1 Logické řešení úloh

2.1.1 První příklad Z5-I-6 55. ročník

Zadání
Maminka má v lednici cihlu sýra, která je znázorněna na obrázku. Postupně z ní odřezává 1 cm silné plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak z boku odřízla pro Jiřího, zezadu pro sebe a na konec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.



Řešení
K řešení využijte obrázek. Víte, že prvně se odřízne plátek pro tatínka, který má rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm z přední strany sýra. Musí se tedy 1 centimetr odečíst od strany sýra o délce 12 cm a zbyde nám 11 cm strana. Další plátek pro Jiříka bude odříznut z boku, který bude 8 cm vysoký, 11 cm dlouhý a 1 cm široký. Centimetr odečteme od 21 cm dlouhé strany a zbyde nám 20 cm. Plátek odříznutý zezadu pro maminku bude mít rozměry 20 cm, 8 cm, a 1 cm. Po odkrojení plátku z boku pro Aničku zbyde 19 cm dlouhá strana. Zbytek sýra má tedy 19 cm, 10 cm a 8 cm.

Návodné úlohy

Příklad první
Babička má salám dlouhý 12 cm. Každý den z něj ukrajuje 2 cm silný plátek pro dědečka na svačinu. Kolik svačin babička připraví?

Příklad druhý
Tatínek má 80 cm dlouhé prkno, nejprve z něj uřízne 14 cm dlouhý kus, který použije jako podpěru. Zbytek rozdělí na půl a jednu část ještě také přepůlí. Jak dlouhé má části?

Příklad třetí
Katka si dělala svačinu do školy. Vzala si novou „kostku" másla o délce 10 cm, šířce 5 cm a výšce 4 cm. Máslo leží na největší ploše. Na chleba si namazala máslo, které ukrojila tak, že ubylo z délky „kostky". Její bratr Karel si máslo ukrojil z vršku.

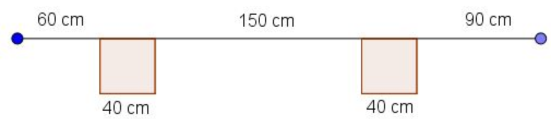
Zbylé máslo má rozměry 7 cm, 5 cm a 2 cm. Jak silný kus si každý odkrojil?

2.1.2 Druhý příklad Z5-I-1 63. ročník

Zadání
Mezi dvěma tyčemi je napnutá šňůra dlouhá $3,8$ m, na kterou chce maminka pověsit vyprané kapesníky. Všechny kapesníky mají tvar čtverce o straně 40 cm. Na šňůře však už visí dva kapesníky stejného tvaru od sousedky a ty chce maminka nechat na svých místech. Přitom levý roh jednoho z těchto kapesníků je 60 cm od levé tyče a levý roh toho druhého je $1,3$ m od pravé tyče. Kolik nejvíce kapesníků může maminka na šňůru pověsit? Kapesníky se věší natažené za oba rohy tak, aby se žádné dva nepřekrývaly.

(M.Mach[7])

Řešení
Pro lepší názornost použijte názorný obrázek.



Nyní vidíme, že na levé straně máme místo pouze na jeden kapesník. Na pravé straně je místo právě na dva kapesníky. Uprostřed pak může maminka pověsit tři kapesníky, které budou těsně u sebe. Celkem tedy maminka může pověsit šest kapesníků.

Návodné úlohy

Příklad první
Máme 180 cm dlouhé prkno, které potřebujeme rozřezat
a) na 3 stejné části,
b) na 3 části, z toho 2 budou 50 cm dlouhé, jak dlouhá bude třetí část?

Příklad druhý
Na elektrickém vedení sedí 7 holubů. Mezi prvním a prostředním holubem je vzdálenost 3 metry. Vzdálenost mezi prostředním a posledním holubem je 6 metrů. Holoubci sedící mezi prvním a prostředním mají mezi sebou stejnou vzdálenost. To stejné platí i pro holuby sedící mezi prostředním a posledním. Jaká je mezi holuby mezera?

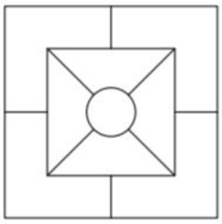
Příklad třetí
Silnice je široká 8 metrů. Nakreslete na ni přechod, pokud víte, že bílé pruhy obdélníkového tvaru mají šířku 50 cm a délku 3 metry. Mezery mezi nimi mají být 30 cm. Začíná se bílým pruhem hned u chodníku. Kolik bude bílých pruhů?

2.1.3 Třetí příklad Z5-I-2 66. ročník

Zadání

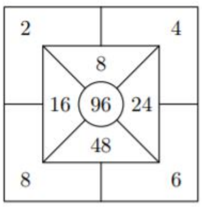
V každém z rohových polí vnějšího čtverce má být napsáno jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, přičemž v různých polích mají být různá čísla. Ve čtyřech polích vnitřního čtverce mají být součiny čísel ze sousedních polí vnějšího čtverce. V kruhu má být součet čísel ze sousedních polí vnitřního čtverce. Která čísla mohou být napsána v kruhu? Určete všechny možnosti.

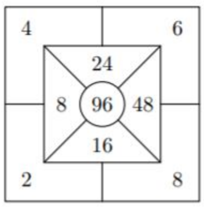
(M. Dillingerová[8])

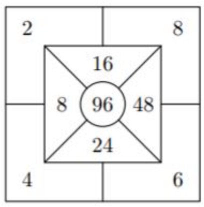


Řešení

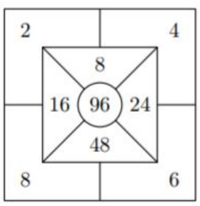
Ve vnějším čtverci mohou být čísla zapsána různě. Nejprve jsou zapsána v této posloupnosti 2, 4, 6 a 8, jak je vidět na obrázku. Když se čísla budou posouvat a otáčet, výsledek bude stále stejný. Pro tento výsledek se čísla do čtverce dosadí tímto způsobem 2, 8, 6 a 4. Je to dáno tím, že čísla 2, 4, 6 a 8, jsou v rohových pozicích souměrná.

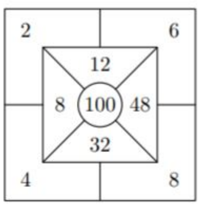


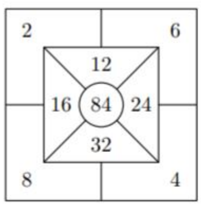




Z toho vyplývá, že 2 je souměrná se všemi, ale 4 není souměrné s 6, tedy ani 8 není souměrná s 6. Čísla lze dosadit do rohu tímto způsobem. 2 si dosadíme od jednoho rohu, například levého horního. Přes uhlopříčku s ním může být číslo souměrné, tak, že jsou 3 způsoby jak to vyřešit. Řešení je vidět zde:







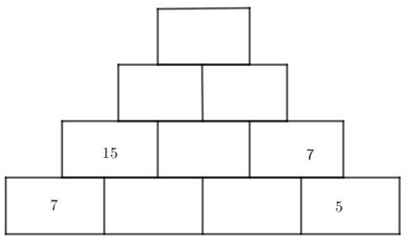
V kruhu pak vyjdou čísla 84, 96, 100.

Návodné úlohy

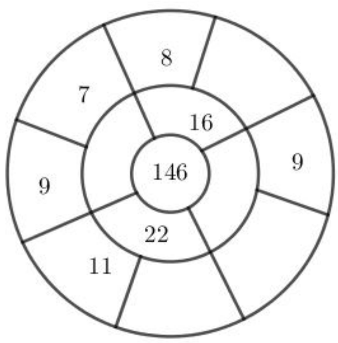
Příklad první
Je dán čtverec, který je rozdělen do 16-ti čtverečků. Naším úkolem je zapsat jednociferná sudá čísla tak, aby se v řádku ani sloupečku neopakovala.

2			8
	8	2	
	2	8	
8			2

Příklad druhý
Je dána pyramida. Najděte číslo v jejím vrcholu. Ve spodním řádku se dvojice čísel sčítají, tak že výsledek se zapíše do obdélníku nad nimi. V dalším řádku se dvojice čísel násobí a v předposledním odečítají.



Příklad třetí
Je dán následující útvar. Zjistěte chybějící čísla, když víte, že dvojice čísel nejdál od středu, oddělené delší čárou, se násobí a v menším kruhu se čtveřice čísel sčítají.



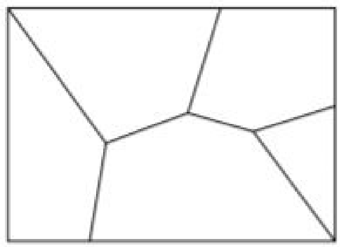
2.1.4 Čtvrtý příklad Z5-II-1 67. ročník

Zadání

Na obrázku je znázorněno pět výběhů části zoo. Každý výběh obývá jeden z pěti druhů zvířat. Přitom víme, že
- výběh žiraf má pět stran,
- výběh opic nesousedí ani s výběhem nosorožců, ani s výběhem žiraf,
- výběh lvů má stejný počet stran jako výběh opic,
- ve výběhu tuleňů je bazén.

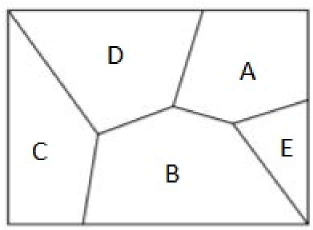
Určete, která zvířata jsou ve kterém výběhu.

(E. Novotná[9])



Řešení

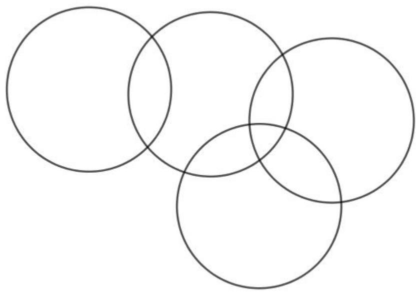
Nejprve sečteme počty stran všech výběhů. Zjistili jsme, že jsou zde 2 výběhy s pěti stranami, označme A, B, 2 výběhy se čtyřmi stranami C, D a jeden výběh se třemi stěnami E.



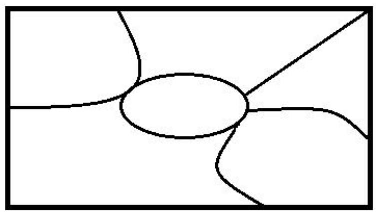
Ze zadání vidíme, že žirafa bude v jednom z pětistranných výběhů. Podle další informace, žirafy nemají sousedit s opicemi. Z toho soudíme, že výběh žiraf bude v pravém horním výběhu A, protože druhý výběh B sousedí se všemi ostatními. Opice nesousedí se žirafami, nachází se tedy v levém výběhu C. Výběh lvů má mít stejný počet stran jako výběh opic. Tuto podmínku splňuje výběh D. Výběh nosorožců také nesousedí s opicemi, zbývá tedy nejmenší výběh E. Tuleňům pak připadá největší výběh B.

Návodné úlohy

Příklad první
Na obrázku jsou 4 kruhy, znázorňující Aničku, Tomáše, Jakuba a Lucku. Propojené kruhy znamenají kamarádství. Přiřaďte kruhy k jednotlivým kamarádům, pokud víte, že Tomáš a Jakub jsou dobří kamarádi. Lucka nemá ráda Tomáše, ale kamarádí se s Jakubem i Aničkou.



Příklad druhý
Dětské hřiště je rozděleno na 6 částí. V jedné části jsou houpačky, které nesousedí s pískovištěm. Uprostřed je fotbalové hřiště. Naproti houpačkám se nachází rybník. Vedle rybníka jsou skluzavky. U pískoviště najdeme kolotoč. Označte, kde se co na hřišti nachází.

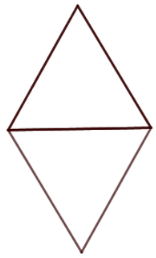


2.2 Geometrické řešení úloh

2.2.1 První příklad Z5–I–6 66. ročník

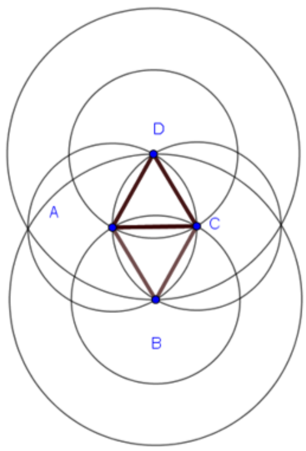
Zadání
Jiřka sestrojila dva shodné rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku. Dále chce sestrojit všechny kružnice, které budou mít střed v některém z vrcholů a budou procházet některým jiným vrcholem některého z trojúhelníků. Sestrojte a spočítejte všechny kružnice vyhovující Jiřčiným požadavkům.

(K. Pazourek[8])



Řešení

Víme, že dané trojúhelníky jsou rovnostranné. Z toho vyplývá, že námi označené dvojice vrcholů jsou od sebe stejně vzdálené. Proto kružnice z bodu A prochází všemi třemi body. V bodě C je to stejné. Další kružnice splňující podmínky najdeme se středy v bodě B a D procházející body A, C. Další dvojice kružnic má také střed v bodech B a D. Prochází nejvíce vzdáleným bodem. Dohromady existuje tedy 6 kružnic splňující Jiřčiny podmínky.



Návodné úlohy

Příklad první

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC o délce stran 5 cm. Sestrojte těžnice stran.

Příklad druhý

Sestrojte kružnici opsanou rovnostrannému trojúhelníku ABC.

Příklad třetí

V rovnostranném trojúhelníku KLM o délce stran 7 cm veďte kružnice se středem v jednom z vrcholů a poloměru rovnajícímu se délce strany trojúhelníku. Kolik takových kružnic lze vytvořit?

2.2.2 Druhý příklad Z5-II-2 63. Ročník

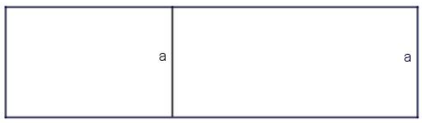
Zadání

Libor rozdělil obdélník jednou čárou na dva menší obdélníky. Obvod velkého obdélníku je 76 cm, obvody menších obdélníků jsou 40 cm a 52 cm. Určete rozměry velkého obdélníku.

(L. Šimůnek[10])

Řešení

Nejprve sečteme obvody menších obdélníků $40 + 52 = 92$. V porovnání s obvodem původního obdélníku 76 je větší o 16 cm. Je to tím, že byl obdélník rozdělen čárou, která je pak započítána do menších obdélníků. Ta pak byla započítána dvakrát do velkého obdélníku, proto je rozdíl 16 cm. Z toho vyplývá délka této strany, označené a, je 8 cm. Pomocí vzorce obvodu $o = 2a + 2b$ si dopočítáme zbylou stranu.



$$
\begin{aligned}
2 \cdot b &= 72 - 2 \cdot 8 \\
2 \cdot b &= 60 \\
b &= 30
\end{aligned}
$$

Rozměry původního obdélníka jsou 30 cm a 8 cm.

Návodné úlohy

Příklad první

Čtverec o obvodu 20 cm je rozdělen na dva shodné obdélníky. Určete obvod obdélníku.

Příklad druhý

Jsou zadány dva obdélníky o velikosti obvodu 18 cm a 30 cm. Jejich výška 5 cm je stejná pro oba obdélníky. Jaký by byl obvod, kdyby tvořily jeden obdélník?

Příklad třetí
Určete obvod a obsah obdélníka o délce 8 cm a šířce 12 cm.

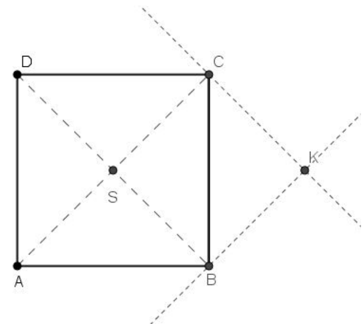
Příklad čtvrtý
Je dán obvod obdélníka 78 cm. Urči rozměry obdélníka, když šířka je dvakrát větší než výška.

2.2.3 Třetí příklad Z5-II-3 67. ročník

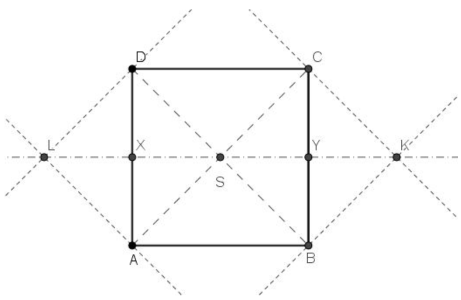
Zadání
Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm a průsečík jeho uhlopříček označte S. Sestrojte bod K tak, aby spolu s body S, B, C tvořili čtverec $BKCS$. Sestrojte bod L tak, aby spolu s body S, A, D tvořil čtverec $ASDL$. Sestrojte úsečku KL, průsečík úseček KL a AD označte X, průsečík úseček KL a BC označte Y. Ze zadaných údajů vypočtěte délku lomené čáry $KYBAXL$

(L. Růžičková[11])

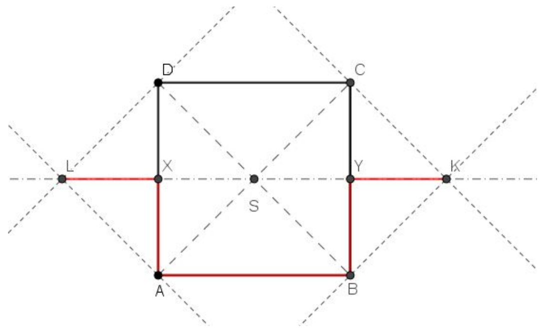
Řešení
Začneme sestrojením čtverce o délce strany 6 cm. Následně narýsujeme uhlopříčky. Vzniknou tak na sebe kolmé úsečky AC a BD. Bod K nám vznikne pomocí kolmic na strany SB v bodě B a k SC v bodě C. Tam, kde se protnou, vznikne bod K a tím i čtverec $BKCS$. Bod L uděláme také pomocí kolmic, jen na opačné straně.



Nyní spojíme body K a L pro vznik úsečky KL. Tam, kde nám nově vzniklá úsečka protne náš původní čtverec, tedy úsečky AD a BC, vzniknou body X a Y. Víme, že



čtverec má úsečku $|AB| = 6$ cm. Bod Y je středem úsečky BC a tak i průsečíkem uhlopříček, protože strana BC je zároveň uhlopříčka čtverce $BKCS$. Z toho plyne, že délka úsečky BY i KY je 3 cm. To platí i pro protější stranu. Délka lomené čáry je $3 + 3 + 3 + 3 + 6 = 18$ cm.



Návodné úlohy

Příklad první
Sestrojte uhlopříčky ve čtverci $ABCD$ o straně 3 cm.

Příklad druhý
Ve čtverci $ABCD$ sestrojte uhlopříčky. Ve všech vrcholech A, B, C a D veďte přímky, kolmé na uhlopříčky. Zvýrazněte nově vzniklé body jako průsečíky přímek.

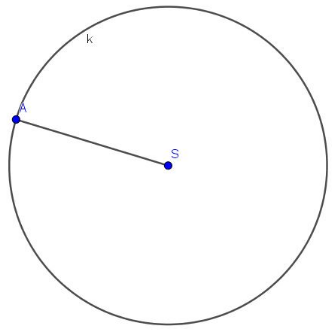
Příklad třetí
Je dán čtverec $KLMN$ o velikosti strany 8 cm. Středem S prochází úsečka OP. Body O, P jsou středy stran. Vypočtěte délku úsečky.

2.2.4 Čtvrtý příklad Z5-I-5 67. ročník

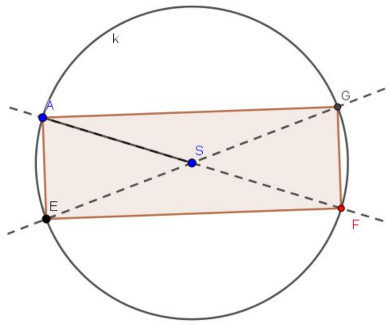
Zadání
Sestrojte libovolnou úsečku AS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem A.
1. Sestrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodem A tvořily obdélník $AEFG$. Najděte alespoň dvě řešení.
2. Sestrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodem A tvořily čtverec $ABCD$.

(L. Růžičková[12])

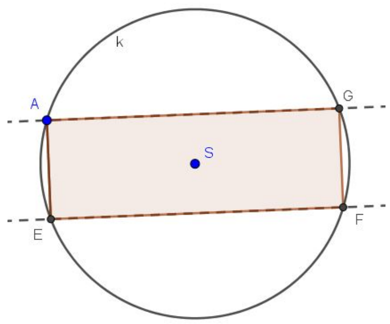
Řešení
Sestrojíme si úsečku AS a kružnici k podle zadání.



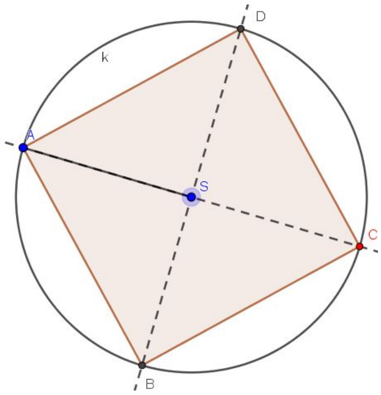
1. Víme, že strany obdélníku jsou na sebe kolmé, a protilehlé strany rovnoběžné. Dále víme, že uhlopříčky obdélníku jsou stejně dlouhé a protínají se ve středu obdélníku. Toto nám pomůže pro vytvoření bodu F, který vznikne jako průsečík kružnice k a přímky AS. Bod E můžeme zvolit libovolně. Bod G sestrojíme obdobně jako bod F a to pomocí přímky ES a jeho průsečíku s kružnicí k.



Jako další způsob můžeme obdélník vytvořit tak, že si na kružnici k libovolně určíme bod E. Vznikne nám úsečka AE. Veďte kolmici na tuto úsečku AE v bodech A a E. Tam kde se kolmice protnou s kružnicí k vzniknou body F a G. Spojením těchto bodů sestrojíme obdélník $AEFG$.



2. O čtverci víme, že jeho uhlopříčky jsou na sebe kolmé. Můžeme tedy pomocí přímky AS a kružnice k vytvořit bod C. Body B a D nám vzniknou pomocí kolmice na úsečku AC ve středu S.



Návodné úlohy

Příklad první
Sestrojte úsečku BK o velikosti 5 cm. Bodem B veďte kružnici r se středem v bodě K. Sestrojte kolmici k na úsečku BK v bodě K. Vyznačte průsečíky kolmice k a kružnice r.

Příklad druhý
Na kružnici k se středem S a poloměrem 3 cm zvolte bod P. Vytvořte bod O, jako průsečík kružnice k a přímky PS. Na vzniklou úsečku OP sestrojte kolmici l ve středu S. Průsečíky kolmice l a kružnice k zvýrazněte.

Příklad třetí
V kružnici n s daným bodem K. Vyznačte libovolnou úsečku PL, procházející středem S na kružnici n. Spojte body P a L s bodem K. Najděte bod T, který pak tvoří poslední vrchol obdélníku.

2.3 Analytické řešení úloh

2.3.1 První příklad Z5-II-1 64.ročník

Zadání
V kouzelnickém bazaru si kouzelníci mezi sebou měnili kouzelnické klobouky, hůlky a pláště. Za 4 hůlky je 6 plášťů a za 5 hůlek je 5 klobouků. Kolik plášťů je za 5 hůlek a 1 klobouk?

(V. Hucíková[13])

Řešení
Ze zadání je zřejmé, že za 5 hůlek je 5 klobouků, tedy 1 hůlka za 1 klobouk. Tak, že 1 klobouk má hodnotu 1 hůlky. Vznikne nám tak z 5-ti hůlek a jednoho klobouku 6 hůlek. Dále známe, že 6 plášťů je za 4 hůlky, tedy za 2 hůlky jsou 3 pláště. Celkem za 6 hůlek je 9 plášťů. Respektive 5 hůlek a 1 klobouk má cenu 9 plášťů.

Návodné úlohy

Příklad první
Na trhu probíhá výměnný obchod. Za 2 jablka dostaneme 1 hrušku. Za 2 hrušky dostaneme 4 jahody. Kolik musíme donést na trh jablek, aby jsme si odnesli 12 jahod a 3 hrušky?

Příklad druhý
Maminka třídí oblečení. Dvě stará trička vymění za nové kalhoty, mikinu vymění za dvě nová trička. Maminka má 3 nové kalhoty a čtyři nová trička. Kolik a jaké druhy oblečení maminka vytřídila?

Příklad třetí
Katka má několik hraček, které nepotřebuje a chce si je vyměnit s mladší sestrou. Dva pejsky vymění za jednu panenku, medvídka za 3 autíčka a dvě kachničky za jedno autíčko. Katka vyměnila čtyři pejsky, dva medvídky a čtyři kachničky. Kolik a jaké hračky má nové?

2.3.2 Druhý příklad Z5-II-1 62. ročník

Zadání
Na táboře se skauti vážili na starodávné váze. Vedoucí je upozornil, že váha sice neváží správně, ale rozdíl mezi skutečnou a naměřenou hmotností je vždy stejný. Míšovi váha ukázala 30 kg, Emilovi 28 kg, ale když si stoupli na váhu oba, ukázala 56 kg. Jaká byla skutečná hmotnost Míši a Emila?

(M. Volfová[14])

Řešení
Když se sečtou obě naměřené váhy 30 a 28 kg dostaneme 58 kg. V této hodnotě je ale započten rozdíl mezi skutečnou a naměřenou hmotností dvakrát, protože se každý vážil zvlášť. Když se vážili spolu, hodnota hmotnosti je 56 kg, kde je rozdílná hodnota započtena pouze jednou, protože se kluci vážili naráz. Rozdíl těchto dvou hodnot $58 - 56 = 2$ kg. Tyto 2 kg určují chybu mezi skutečnou a naměřenou hodnotou. Skutečná hodnota Míši byla $30 - 2 = 28$ kg a Emila $28 - 2 = 26$ kg.

Návodné úlohy

Příklad první
Maminka v obchodě nakupovala ovoce a zeleninu. Na váze si zvážila 500 g zeleniny a 250 g ovoce. Když přišla domů a zvážila si zeleninu na své váze, zvážila 425 g. O kolik g vážila váha v obchodě jinak? Kolik gramů vážilo ovoce?

Příklad druhý
Babička pekla cukroví, na plech se jí vešlo 20 kusů cukroví. Na dva plechy babička dala větší kusy cukroví a vešlo se tam o 5 kusů méně než ostatní plechy. Napekla

8 plechů cukroví. Kolik celkem kusů cukroví babička napekla?

Příklad třetí
U Terezky doma si kamarádky hrály na kuchařky. Měly 1 kg pytlík mouky. Na váhu si daly misku a do ní sypaly mouku, dokud na váze nebylo 250 g mouky, podle receptu. Když měly těsto hotové, bylo moc řídké. Poté se zeptaly maminky na radu, zjistila, že děvčata započítala i hmotnost mísy. Kolik mouky musely dívky přidat, když v pytlíku zbylo 780 g mouky? Kolik vážila mísa?

2.3.3 Třetí příklad Z5-I-1 67. ročník

Zadání
Honzík dostal kapesné a chce si za ně koupit něco dobrého. Kdyby si koupil čtyři koláče, zbylo by mu 5 Kč. Kdyby si chtěl koupit pět koláčů, chybělo my mu 6 Kč. Kdyby si koupil dva koláče a tři koblihy, utratil by celé kapesné beze zbytku. Kolik stojí jedna kobliha?

(L. Dedková[12])

Řešení
Kapesné můžeme zapsat třemi způsoby,
1. Kapesné = 4 koláčky + 5 Kč
2. Kapesné = 5 koláčku - 6 Kč
3. Kapesné = 2 koláčky + 3 koblihy
Ze zadání je vidět, že cena jednoho koláče je 11 Kč, protože pokud při koupi 5-ti koláčku nám chybí 6 Kč a při koupi 4 koláčku nám 5 Kč přebývá, pak $5 + 6$=11 Kč. Odtud vypočítáme výši kapesného, tedy $4 \cdot 11 + 5 = 49$ Kč. Koblihy lze vypočítat pomocí kapesného a koláčků, tedy $49 - 2 \cdot 11 = 27$. Vyjádříme jednu koblihu $27 : 3 = 9$ Kč.

Návodné úlohy

Příklad první
Markéta dostala od tatínka peníze na dárek pro kamarádku Katku. Chtěla koupit tři hračky, ale 4 koruny by jí chyběly. Jedna hračka stála 13 Kč. Kolik Kč dostala Markéta od tatínka?

Příklad druhý
Radek má 60 Kč. Chtěl si koupit na snídaní osm rohlíků, ale chyběli mu 4 Kč. Kolik stál jeden rohlík, a kolik rohlíků si mohl koupit?

Příklad třetí
K narozeninám si dědeček přál velký narozeninový dort. Když koupili dort, zbyly nějaké peníze, za které se rozhodli koupit několik zákusků. Za jeden velký dort a tři řezy zaplatili o 50 Kč více, než kdyby koupili velký dort a čtyři rolády, za který zaplatili 245 Kč. Jeden řez stál 25 Kč. Kolik Kč stál dort a jedna roláda?

2.3.4 Čtvrtý příklad Z5–I–3 60. ročník

Zadání
Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejúspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam?

(M. Volfová[15])

Řešení
Celkem tedy bylo 52 smajlíků, z toho odečteme 33 smajlíků dvojčat Petra a Pavla. Zůstane nám 19 smajlíků pro Mojmíra a Adama. Petr a Pavel mají 33 smajlíků, z toho je vidět, že jeden bude mít 17 a druhý 16 smajlíku. A jelikož má každý alespoň jednoho smajlíka a Mojmír byl nejúspěšnější, musí mít tedy právě 18 smajlíků, Adam má jednoho smajlíka.

Návodné úlohy

Příklad první
Tři sourozenci Tomáš, Karel a Adam hráli hry. Celkem měli 25 bodů. Nejvíce měl Tomáš, což bylo 11 bodů. Adam měl o 4 body méně než Karel. Kolik bodů měl každý?

Příklad druhý
Tatínek, maminka, dcera Jana a syn Filip mají společnou kasičku, ve které mají zatím 99 Kč. Maminka s tatínkem přispěli 76 Kč. Kolik přispěl syn Filip, když Jana přispěla o tři koruny více než Filip?

Příklad třetí
Čtyři děti mají doma tabulku, kde mají body za slušné chování. Dohromady jich nasbírali 25. Každý má alespoň 2 body. První dva mají celkem 18 bodů. Poslední má nejmenší možný počet bodů. Kolik bodů má třetí?

3 Kategorie Z6

3.1 Logické řešení úloh

3.1.1 První příklad Z6-I-4 66. ročník

Zadání
Čtyři rodiny byly na společném výletě. V první rodině byli tři sourozenci, a to Alice, Bětka a Cyril. Ve druhé rodině byli čtyři sourozenci, a to David, Erika, Filip a Gábina. Ve třetí rodině byli dva sourozenci, a to Hugo a Iveta. Ve čtvrté rodině byli tři sourozenci, a to Jan, Karel a Libor. Cestou se děti rozdělily do skupin tak, že v každé skupině byly všechny děti se stejným počtem bratrů a nikdo jiný. Jak se mohly děti rozdělit? Určete všechny možnosti.

(V. Hucíková[16])

Řešení
Ze zadání vyplývá, že v každé skupině mohou být děti se stejným počtem bratrů.
Nejprve tedy určíme a vypíšeme, kdo má kolik bratrů.
Cyril a Hugo nemají žádného bratra.
Alice, Bětka, David, Filip a Iveta mají každý jednoho bratra.
Erika, Gábina, Jan, Karel i Libor mají každý dva bratry.
Tedy děti se rozdělily do těchto tří skupin.

Návodné úlohy

Příklad první
Na hřišti si hrají skupinky sourozenců. Sourozenci Anička, které je 10 let a její o 3 roky starší bratr Tomáš. Katce je 8 let, její sestře Monice je o 2 roky více. V poslední skupince sourozenců je Honza, kterému je 13 let, jeho o 5 let mladší sestra Lenka a bratr Jindřich, který je o 2 roky mladší než Lenka. Jak lze děti rozdělit do skupinek podle věku?

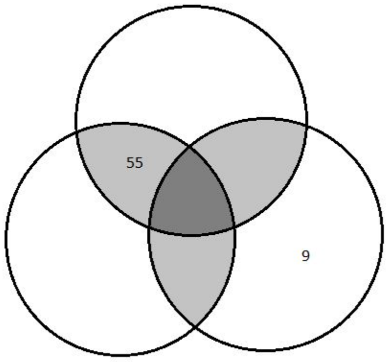
Příklad druhý
Děti si hrají se třemi plyšáky, dvěma vláčky, čtyřmi autíčky, jedením robotem a třemi panenkami. Celkem mají tři krabice do kterých mají hračky uklidit. V krabicích ale může být pouze stejný počet kusů hraček. Panenky a plyšáci spolu být nemohou, robot může být jenom s autíčkem. Jak můžeme hračky rozdělit?

Příklad třetí
Kamarádka Jana má za úkol roztřídit oblečení. Měla by vytvořit 3 hromádky, se stejným počtem kusů oblečení. Na rozdělení má 6 kalhot, 3 trička, 9 svetrů a 3 mikiny. Jak lze oblečení rozdělit?

3.1.2 Druhý příklad Z6-I-6 66. ročník

Zadání
Do prázdných polí v následujícím obrázku doplňte celá čísla větší než 1 tak, aby v každém tmavším políčku byl součin čísel ze sousedních světlejších políček.

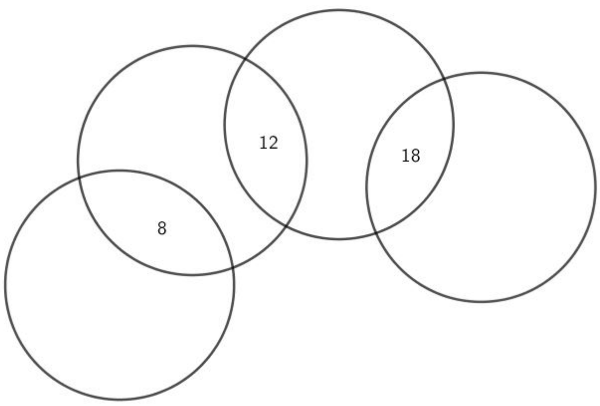
(T. Salčák[16])



Řešení
Ze zadání vyplývá, že číslo 55 vzniklo součinem bílých políček. Číslo 55 vznikne pouze součinem čísel 5 a 11. Je jedno, do kterého pole napíšeme které číslo. Dále víme, že obě čísla musíme vynásobit číslem 9. Vzniknou tak čísla 99 a 45. Ty zapíšeme do příslušných šedých polí. V nejtmavším poli vznikne číslo vynásobením $55 \cdot 45 \cdot 99 = 245025$.

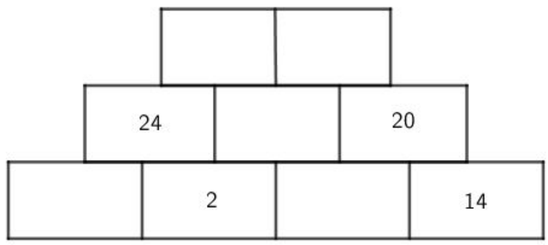
Návodné úlohy

Příklad první
V následujícím obrázku doplňte čísla tak, aby zadaná čísla byla součinem čísel z okolních políček.



Příklad druhý
Čtverec je rozdělen na 9 částí, určete čísla 2, 3 a 4 tak, aby ve všech řádcích a sloupcích byl součet stejný.

Příklad třetí
Na obrazci určete chybějící čísla v prázdných polích. V prostředním řádku jsou čísla, která vznikla jako součet dvou čísel z polí pod nimi. Ve vrcholu vzniknou čísla jako součin předchozích čísel.



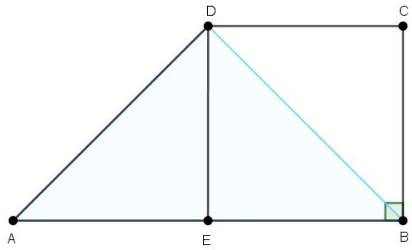
3.2 Geometrické řešení úloh

3.2.1 První příklad Z6-II-3 62. ročník

Zadání
Čtyřúhelník $ABCD$ má následující vlastnosti:
- strany AB a CD jsou rovnoběžné,
- u vrcholu B je pravý úhel,
- trojúhelník ADB je rovnoramenný se základnou AB,
- strany BC a CD jsou dlouhé 10 cm
Určete obsah tohoto čtyřúhelníku.

(J.Mazák[17])

Řešení
Pro lepší pochopení si čtyřúhelník načrtneme.



K výpočtu obsahu využijeme znalosti obsahu trojúhelníků. Ze zadání je jasné, že u bodu C je také 90°. Známe délky stran BC a CD. Bodem D veďte rovnoběžku se stranou BC. Vznikne nám bod E, který je zároveň středem základny rovnoramenného trojúhelníku. Pro vzniklý čtverec $EBCD$ známe strany o délce 10 cm. Obsah toho čtverce je tedy:

$$S_1 = b \cdot b$$
$$S_1 = 10 \cdot 10$$
$$S_1 = 100 \text{ cm}^2$$

Nyní zbývá jen dopočítat vzniklý pravoúhlý trojúhelník AED, kde známe také dvě strany. $|DE| = 10$ cm a strana AE má také 10 cm, protože je to polovina základny z rovnoramenného trojúhelníku ABD. Obsah pravoúhlého trojúhelníku vypočítáme podle vzorce:

$$S_2 = \frac{a \cdot d}{2}$$
$$S_2 = \frac{10 \cdot 10}{.}$$
$$S_2 = \frac{100}{2}$$
$$S_2 = 50 \text{ cm}^2$$

Sečteme s předešlým výsledkem obsahu čtverce.

$$S \ = S_1 + S_2$$
$$S \ = 100 + 50$$
$$2 = 150 \text{ cm}^2$$

Obsah tohoto čtyřúhelníku $ABCD$ je 150 cm^2.

Návodné úlohy

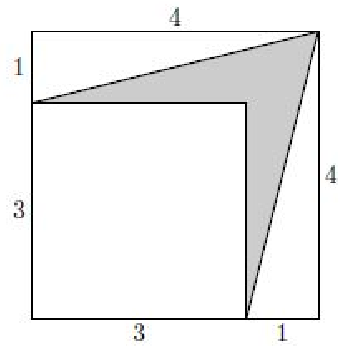
Příklad první
Vypočtěte obsah rovnoramenného trojúhelníka ABC, jestliže odvěsna AC je dlouhá 5 cm. Víme, že v trojúhelníku ABC je pravý úhel při vrcholu A.

Příklad druhý
V daném čtverci $KLMN$ o obsahu 16 cm^2 vypočtěte délku strany KL.

Příklad třetí
Rovnoramenný trojúhelník OPR s délkou základny 8 cm má obsah 10 cm^2. Určete výšku trojúhelníku.

3.2.2 Druhý příklad Z6-I-6 55. ročník

Zadání
Určete obsah šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obrázku jsou v centimetrech).



Řešení
Začneme s výpočtem obsahu velkého čtverce, který označíme S_1.

$$S_1 = 4 \cdot 4 \text{ cm}$$
$$S_1 = 16 \text{ cm}^2$$

Následně vypočteme obsah menšího čtverce S_2.

$$S_2 = 3 \cdot 3 \text{ cm}$$
$$S_2 = 9 \text{ cm}^2$$

Na obrázku je možno vidět dva totožné pravoúhlé trojúhelníky. Jelikož jsou pravoúhlé, tak jejich spojením nám vznikne obdélník o rozměrech 1 a 4 cm. Vypočteme tedy obsah, který označíme S_3.

$$S_3 = 1 \cdot 4 \text{ cm}$$
$$S_3 = 4 \text{ cm}^2$$

Výsledný obsah S šedé plochy vypočteme odečtením od velkého čtverce malý čtverec a obsah vzniklého obdélníku.

$$S = S_1 - S_2 - S_3 = 16 - 9 - 4 = 3 \text{ cm}^2$$

Obsah šedé plochy je 3 cm^2.

Návodné úlohy

První příklad
V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou dány odvěsny $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Vypočtěte jeho obsah.

Příklad druhý
Vypočtěte obsah čtverce o délce strany $a = 4$ cm.

Příklad třetí
Jaký je obsah trojúhelníku ABC v obdélníku $ABCD$, jestliže známe délku jedné strany AB, $a = 8$ cm a strany BC $b = 15$ cm?

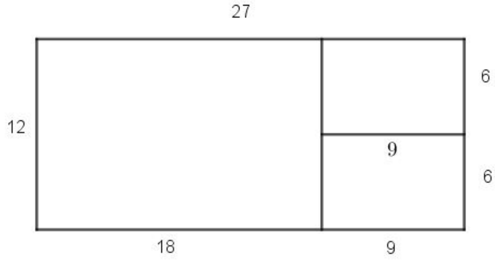
3.2.3 Třetí příklad Z6-I-5 53. ročník

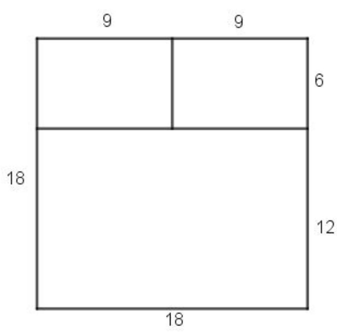
Zadání
Rozděl obdélník o rozměrech 27 cm a 12 cm
a) na tři obdélníky,
b) na dvě části,
tak, aby z nich bylo možné složit čtverec (díly se nesmí překrývat).

(M. Volfová[18])

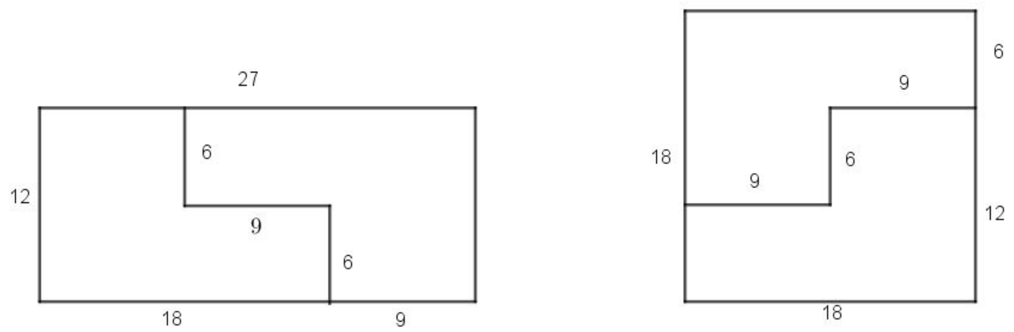
Řešení
Nejprve si musíme uvědomit, že pokud skládáme čtverec z obdélníku, musí mít nově vzniklý čtverec stejný obsah jako zadaný obdélník. Spočteme tedy obsah $S_1 = 27 \cdot 12 = 324$ cm^2. Obsah čtverce je také 324 cm^2, pomocí rozkladu na prvočísla zjistíme, že strana čtverce je 18 cm.

A) Na tři obdélníky
Obdélník tedy rozdělíme na menší obdélníky. První obdélník bude o rozměrech 12 a 18 cm. Zbude obdélník o rozměrech 9 a 12 cm. Ten rozdělíme na obdélníky 9 a 6 cm. V následujícím obrázku je vidět, jak čtverec lze složit.





B) Na dvě části.
Pokud chceme z obdélníka složit čtverec ze dvou částí, musíme obdélník rozdělit na jakési puzzle. Základ bude opět 18 cm a 12 cm obdélník. Délku tohoto obdélníku zkrátíme o 9 cm, tam kde je polovina výšky 12 cm. Vzniknou nám tak dva shodné obrazce. Jak je vidět na obrázku.



Návodné úlohy

Příklad první
Čtverec o straně 9 cm rozdělte na dva shodné útvary. Kolika způsoby lze čtverec rozdělit?

Příklad druhý
Vypočtěte obsah obdélníku o rozměrech 16 cm a 9 cm. Určete, zda jde z tohoto obdélníku složit čtverec. Pokud ano, jaký bude mít rozměr?

Příklad třetí
Určete obsah obdélníku $ABCD$ o stranách $a = 8$ cm a $b = 12$ cm a čtverce $KLMN$ o straně $k = 8$ cm.

3.3 Analytické řešení úloh

3.3.1 První příklad Z6-II-2 66.ročník

Zadání
Pat a Mat kopali studnu. První den vykopal Pat jámu hlubokou 40 cm. Druhý den pokračoval Mat a dokopal se do trojnásobné hloubky. Třetí den vykopal Pat tolik, kolik předchozí den vykopal Mat, a narazil na vodu. V tom okamžiku byl povrch země 50 cm nad vrškem jeho hlavy. Určete, kolik centimetrů měřil Pat.

(M. Dillingerová[19])

Řešení

V první den Pat vykopal 40 cm hlubokou jámu. Den druhý se Mat dokopal do trojnásobku hloubky, tedy $3 \cdot 40 = 120$ cm. Vykopal $120 - 40 = 80$ cm. Třetí den Pat také vykopal 80 cm. Celkem už je tedy vykopáno $40 + 80 + 80 = 200$ cm. Když Pat měl 50 cm povrchu nad hlavou, tak Pat měřil 200 - 50 = 150 cm.

Návodné úlohy

Příklad první

Tomáš řeže klády na 20 cm dlouhé špalky. Když to zjistí tatínek, řekne mu, aby to řezal na čtyřnásobek délky, aby mu to šlo rychleji. Jak dlouhé špalky má řezat?

Příklad druhý

Libor, který je vysoký 180 cm, šplhal na strom. Když vylezl na větev, byl 80 cm nad zemí. Nad hlavou měl větve ve vzdálenosti 30 cm. Jak vysoký byl strom?

Příklad třetí

Maminka dělala svačiny pro tatínka a dvě děti do školy. Starší syn dostává čtyři housky. Mladší dcera o polovinu méně než její bratr. Tatínek dostává dvojnásobek toho co děti mají dohromady. Kolik housek dostává dcera a tatínek?

3.3.2 Druhý příklad Z6-I-4 59. ročník

Zadání

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojmírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojmír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojmír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojmír při prvním kapesném v lednu?

(L. Honzová[20])

Řešení

První kapesné, které Mojmír v lednu dostal, označíme a. V únoru dostal o 4 Kč více, označme $a + 4$, v březnu tedy dostal $a + 8$ a tak dále až v prosinci dostal $a + 44$. Víme že celkem by měl 900 Kč. Zapíšeme ve tvaru:

$$a + (a + 4) + (a + 8) + (a + 12) + ... + a + 44 = 900$$

Jelikož je kapesné v lednu základní, od kterého se kapesné zvyšuje, sčítá se dvanáctkrát. Proto upravíme do tvaru:

$$\begin{aligned} 12a + 4 + 8 + ... + 44 &= 900 \\ 12a + 264 &= 900 \\ 12a &= 636 \\ a &= 53 \end{aligned}$$

Z této rovnice je zřejmé, že Mojmír v lednu dostal 53 Kč.

Návodné úlohy

Příklad první
Dědeček dával od začátku roku, každý měsíc, vnučce Aničce 10 Kč na dobroty. Když měla narozeniny nebo svátek dal dědeček Aničce navíc 50 Kč. Kolik peněz měla Anička na konci roku, pokud žádné neutratila?

Příklad druhý
Petr si chtěl našetřit na nové tričko, které stojí 450 Kč. Od rodičů dostává kapesné 30 Kč týdně. Jak dlouho bude na tričko šetřit, pokud od rodičů dostane navíc 120 Kč?

Příklad třetí
Pepa měl na konci listopadu v kasičce 550 Kč. Každý první den v měsíci dostával od března 50 Kč od maminky. V červenci, o prázdninách, si koupil dvakrát hru, jednu za 150 Kč a druhou za 200 Kč. Jaké kapesné dával Pepovi tatínek také od začátku března?

3.3.3 Třetí příklad Z6-I-1 57. ročník

Zadání
Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokolády, ale ve školním bufetu. Potom zjistili, že průměrně je vyšla jedna čokoláda na $19,70$ Kč. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a o $6,50$ Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Za kolik korun prodávají čokoládu v jednotlivých obchodech?

Řešení
Chlapci si dohromady koupili 5 čokolád, celkem za ně tedy zaplatili $5 \cdot 19,7 = 98,5$ Kč. Kdyby si čokolády zakoupili v obchodě naproti škole, ušetřili by 6 Kč. Jedna čokoláda by tedy stála

$$98,5 - 6 = 92,5$$
$$92,5 : 5 = 18,5$$

Jedna čokoláda z obchodu naproti škole stála 18,5 Kč.
Oproti obchodu za školou ušetřili 6,5 Kč.

$$98,5 + 6,5 = 105$$
$$105 : 5 = 21$$

Za jednu čokoládu tedy zaplatili 21 Kč.
Cenu čokolády ve školním bufetu vypočteme sečtením koupených čokolád.

$$2 \cdot 18,5 + 2 \cdot 21 = 79$$

Tuto cenu odečteme od celkové ceny 98,5 Kč. Za jednu čokoládu v bufetu Ivan zaplatil

$$98,5 - 79 = 19,5 \text{ Kč.}$$

Návodné úlohy

Příklad první
Monika má z matiky tyto známky: 1, 3, 2, 1, 1. Jaký je její průměr?

Příklad druhý
Jitka nakupovala ovoce v supermarketu. Její kamarádka Alena koupila stejné ovoce na tržnici o 10 Kč dráže. Průměrně zaplatili za ovoce 60 Kč. Kolik korun zaplatili za ovoce?

Příklad třetí
Teta Maruška koupila 4 rajčata u obchodníka v její ulici. Strýc koupil 6 rajčat v obchodě na náměstí. Když porovnali ceny které za ně zaplatili, zjistili, že kdyby rajčata koupili na náměstí, bylo by to výhodnější, protože teta za rajčata zaplatila 16 Kč. Strýc za ně zaplatil o 2 Kč více. Kolik stálo jedno rajče tetu a kolik strýce?

4 Kategorie Z7

4.1 Logické řešení úloh

4.1.1 První příklad Z7-II-1 61. ročník

Zadání

Petr a Karel spolu sehráli řadu partií šachu. Domluvili se, že za výhru si hráč připočítá 3 body, za prohru 2 body odečte, za remízu žádné body nejsou. Kamarádi chtěli vědět, kolik už Petr s Karlem sehráli partií a kdo nyní vede, ale dozvěděli se jenom, že Petr šestkrát vyhrál, dvakrát remizoval, několikrát prohrál a Karel že má právě 9 bodů. Kolik partií chlapci sehráli a kdo nyní vede?

(M. Volfová[21])

Řešení

Jestliže Petr šestkrát vyhrál, měl 18 bodů. Karel musel 6x prohrát, tedy si musel odečíst 12 bodů od skóre takového,aby mu zbylo právě 9 bodů. Takové skóre dostaneme sečtením výher a proher $9 + 12 = 21$, což ale odpovídá 7-mi výhrám. Z toho vyplývá že Petr 7x prohrál. Celkové skóre Petra nyní je $18-7\cdot2 = 3$ body. Za remízu žádné body nikdo nedostal.
Karel s 9 ti body vede. Celkem hráli $6 + 2 + 7 = 15$ partií.

Návodné příklady

První příklad

Hanka s Jitkou si venku hrály s kroužky, které trefovaly do barevných krabic. Každá měla 4 kroužky. Soutěžily o to, kdo hodí nejvíce bodů. Dva body dostaly za trefu do červené krabice a jeden bod za trefu do modré krabice. Hanka se třikrát trefila do červené krabice a Jitka jenom 2 krát. Holky se v házení střídaly, začínala Hanka. Kolik měla každá bodů, když v modré krabici byly tři kroužky.

Druhý příklad

Ve škole mají sportovní den a skupinky žáků soutěží mezi sebou. Jsou 2 skupinky po 10-ti žácích. Soutěží v pěti disciplínách. Skupinka A vyhrála dvakrát. Dvakrát byla remíza. Kolikrát vyhrála skupinka B?

Příklad třetí

Sourozenci Petr a Pavel hrají kostky. V házení se střídají. Za každou výhru mají 2 body. Za prohru nemají žádný bod. Pavel má 18 bodů. Petr vyhrál šestkrát. Kolik hodů kostek určitě proběhlo?

4.1.2 Druhý příklad Z7-II-3 57. ročník

Zadání

U Nováků napekli svatební koláče. Čtvrtinu zavezli příbuzným na Moravu, šestinu rozdali kolegům v práci a devítinu dali sousedům. Kdyby jim zůstalo o tři koláče více, byla by to polovina původního počtu. Kolik koláčů napekli?.

Řešení

Nejprve sečteme rozdané koláče. Pro snazší počítání si zlomky převedeme na stejného jmenovatele, kterým je číslo 36, protože $4 \cdot 9 = 36$ a $36 = 6 \cdot 6$. Máme tedy zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = x$$
$$\frac{9}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{19}{36}$$

Rozdali tedy $\frac{19}{36}$ koláčů. Polovina koláčů je $\frac{18}{36}$. Ze zadání vyplývá že $\frac{1}{36}$ jsou 3 koláče. Celkem tedy napekli $36 \cdot 3 = 108$ koláčů.

Návodné úlohy

Příklad první

Maminka dostala na oslavě k narozeninám dort. Rozhodla se, že se o dort podělí s hosty. Dort rozdělila na osm dílků. Z toho se rozdala jedna čtvrtina dortu. Kolik dortu zbylo?

Příklad druhý

Lenka dostala 90 korun. Polovinu peněz si schovala do kasičky. Ze zbylých peněz si koupila za dvě pětiny svačinu. Kolik korun Lence zbylo?

Příklad třetí

V kamenické dílně vyrobili kamenný sloupek 180 cm dlouhý. Při špatné manipulaci se sloupek rozlomil na dvě stejné poloviny. Rozhodli se, že z jedné poloviny vytvoří tři schody. Z druhé poloviny vyrobili schody dva. Jak dlouhé byli schody?

4.1.3 Třetí příklad Z7-I-4 65. ročník

Zadání

V robotí škole do jedné třídy chodí dvacet robotů Robertů, která jsou očíslováni Robert 1 až Robert 20. Ve třídě je zrovna napjatá atmosféra, mluví spolu jen někteří roboti. Roboti s lichým číslem nemluví s roboty se sudým číslem. Mezi Roberty s lichým číslem spolu mluví pouze roboti, kteří mají číslo se stejným počtem číslic. Roberti se sudým číslem se baví pouze s těmi, jejich číslo začíná stejnou číslicí. Kolik dvojic robotů Robertů se může spolu vzájemně bavit?

(K. Pazourek[22])

Řešení

Nejprve si roboty rozdělíme na sudé a liché skupinky.

Mezi liché patří roboti s čísly:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

Mezi liché patří roboti s čísly:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$$

O robotech s lichými čísly víme, že spolu mluví pouze ti roboti se stejným počtem číslic, tedy buď jednociferná nebo dvouciferná čísla. Vzniknou nám tak dvě skupiny.

$$(1, 3, 5, 7, 9), (11, 13, 15, 17, 19)$$

V obou skupinkách je 5 robotů. V každé skupince jde vytvořit 10 dvojic, jak si roboti mohou povídat.
Roboti se sudými čísly si povídají pouze tehdy, začínají-li na stejné číslice. Jak vidíme v našem zápisu, na čísla se stejnými počátečními číslicemi, objevují pouze u dvou skupin a to

$$(2, 20) \text{ a } (10, 12, 14, 16, 18)$$

.
Roberti s čísly 4, 6 a 8 si bohužel s nikým nepovídají. I v této skupince je 5 robotů, tedy 10 dvojic na povídání. Celkem je 10 + 10 + 10 + 1 = 31 dvojic robotů, kteří se spolu mohou bavit.

Návodné úlohy

Příklad první
Ve škole se děti rozdělovaly na dvě skupinky. Paní učitelka žáky očíslovala od jedničky. Ve třídě je 28 žáků. Kolik dětí bylo v jaké skupince, když byly rozděleny podle sudých a lichých čísel?

Příklad druhý
V klobouku jsou koule s čísly od 2 do 15. Rozdělte je do krabic tak, aby vznikly skupiny dvojic koulí, ve kterých se číslice opakují. Jaká čísla na koulích zbyla?

Příklad třetí
Mimozemšťané vlastní lodě, které mají čísla 3 až 10. Mají přísná pravidla, s kterými mohou létat. V pondělí a ve středu mohou létat s lichými čísly. V úterý létají se sudými čísly dělitelné čtyřmi. Ve čtvrtek létají s čísly dělitelné dvěma a v pátek mohou létat lodě s čísly, které jsou sudé a dají se dělit 3-mi. Jaké lodě kdy mohou létat?

4.2 Geometrické řešení úloh

4.2.1 Příklad první Z7-I-4 64. ročník

Zadání

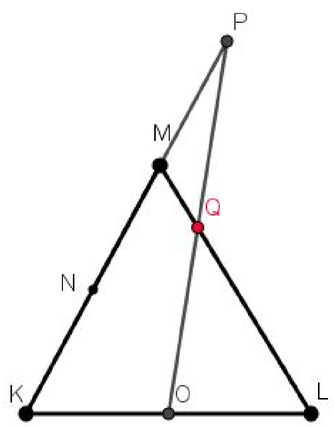
Body N,O, P a Q jsou vzhledem k trojúhelníku KLM zadány následujícím způsobem:
- body N a O jsou popořadě středy stran KM a KL,
- vrchol M je středem úsečky NP,
- bod Q je průsečíkem přímek LM a OP.

Určete, jaký je poměr délek úseček MQ a ML.

(L. Honzová[23])

Řešení

Do trojúhelníku KLM si postupně zakreslíme body určené v zadání.
Body N a O jako středy stran KM a KL.
Bod P vznikne tak, že protáhneme úsečku NM a za bod M naneseme vzdálenost MN.
Bod Q vznikne spojením bodu O a P jako průsečík na úsečce LM.



Body N a O jsou středy stran. Když se spojí tyto body, vznikne úsečka NO, která je zároveň středová úsečka v trojúhelníku KLM. Ze znalostí o střední příčce, je známo, že je poloviční od strany s ní rovnoběžné. Platí tedy $2|NO| = |ML|$. V nově vzniklém trojúhelník NOP je bod M, který je středem strany NP. Když je strna ML rovnoběžná s NO, tak i úsečka MQ je rovnoběžná se stranou NO. Z toho vyplývá, že úsečka MQ je středová úsečka trojúhelníku NOP. Platí také $|NO| = 2|MQ|$. Z těchto dvou vztahů:

$$\begin{aligned} 2|NO| &= |ML| \\ |NO| &= 2|MQ| \end{aligned}$$

lze vyjádřit poměr délek úseček MQ a ML následovně:

$$|ML| = 2|NO| = 4|MQ|$$

Poměr délek úseček $|MQ| : |ML|$ je $4 : 1$.

Návodné úlohy

Příklad první
Je dán obdélník $ABCD$ s kratší stranou $b = 5$ cm. Strany obdélníka jsou v poměru $3 : 1$. Jaký je obvod obdélníka?

Příklad druhý
V trojúhelníku RST jsou strany v poměru $2 : 3 : 4$. Obvod trojúhelníka je 27 cm. Určete délky stran.

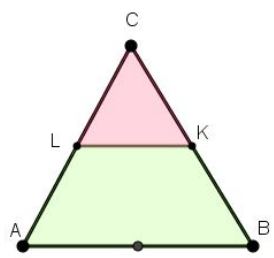
Příklad třetí
Jsou dány dva čtverce. Strana prvního čtverce je $a = 8$ cm. Obsahy čtverců jsou v poměru $4 : 6$. Určete oba obsahy čtverců.

4.2.2 Druhý příklad Z7-II-3 60. ročník

Zadání
V trojúhelníku ABC označme středy stran CB a CA písmeny K a L. Víme, že čtyřúhelník $ABKL$ má obvod 10 cm a trojúhelník KLC má obvod 6 cm. Vypočítejte délku úsečky KL.

(J. Mazák[24])

Řešení
Pro názornost načrtneme trojúhelník ABC.



Z obrázku je vidět že,délky úseček $|CL| = |AL|$ a $|CK| = |BK|$. K a L jsou středy stran BC a AC, úsečka KL je střední příčka v trojúhelníku, která spojuje středy stran trojúhelníku. Navíc má poloviční délku strany, se kterou je rovnoběžná. Tedy $2|KL| = |AB|$. Délku KL vypočteme pomocí obvodu. Když od obvodu čtyřúhelníku odečteme obvod trojúhelníku, vznikne nám délka 4 cm. Jelikož je tam započítaná dvakrát, musíme ji vydělit dvěma. Úsečka KL je dlouhá 2 cm.

Návodné úlohy

Příklad první
Určete obvod rovnoramenného trojúhelníka ABC s rameny $a = 5$ cm a základnou $c = 7$ cm.

Příklad druhý
Obvod rovnoramenného trojúhelníka KLM je 16 cm. Délka úsečky KL je 6 cm. Určete délku střední příčky rovnoběžnou s úsečkou KL.

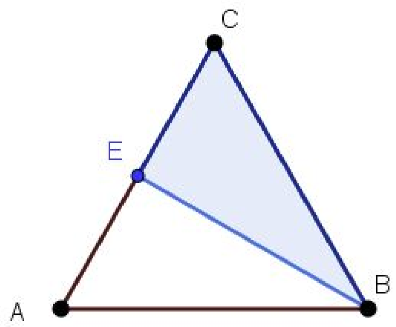
Příklad třetí
V trojúhelníku ABC jsou středy stran určeny následovně: střed strany AB je bod O, střed P je středem BC a bod Q je středem úsečky AC. Úsečka OP je dlouhá 5 cm, $|PQ| = 4$ cm, $|OQ| = 6$ cm. Určete rozměry trojúhelníka ABC

4.2.3 Třetí příklad Z7-II-2 62. ročník

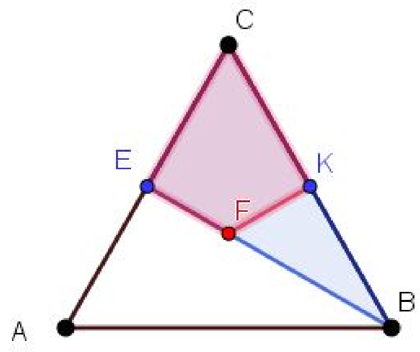
Zadání
Petra má rovnostranný trojúhelník ABC. Nejdřív trojúhelník přehnula tak, aby bod A splynul s bodem C. Potom vzniklý útvar přehnula tak, že bod B splynul s bodem C. Tento útvar poté obkreslila na papír a zjistila, že jeho obsah je $12cm^2$. Určete obsah původního trojúhelníku.

(E. Novotná[25])

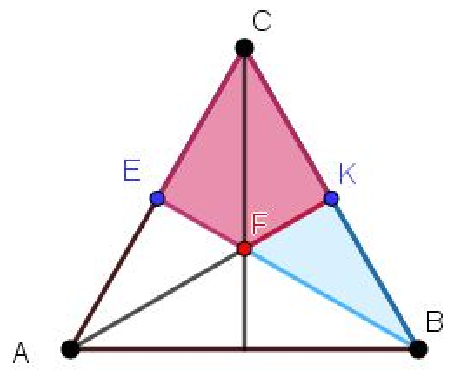
Řešení
Když Petra poprvé přehne trojúhelník tak, aby bod A splynul s bodem C, vznikl bod E, který je středem úsečky AC, protože máme rovnostranný trojúhelník. Vzniklý trojúhelník EBC je poloviční oproti původnímu trojúhelníku.



Druhým přehnutím bodu B na bod C vznikne další bod K, který je středem úsečky BC rovnostranného trojúhelníka.



Přímka, podle které se přímky přehýbaly, jsou osy úseček. Bod F vznikne jako průsečík těchto os. Osy stran jsou osami souměrnosti trojúhelníku.



Odtud je vidět, že vzniklé čtyřúhelníky jsou navzájem shodné a mají stejný obsah. Obsah trojúhelníku ABC je tedy roven součtu tří těchto čtyřúhelníků.

$$S = 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2.$$

Návodné úlohy

Příklad první
Určete obsah rovnoramenného trojúhelníka KLM, se stranou $m = 8$ cm. Výška je 7 cm.

Příklad druhý
Obsah rovnostranného trojúhelníku ABC je 66 cm^2. Určete obsah trojúhelníku ABD, když bod D je střed úsečky AC.

Příklad třetí
V rovnostranném trojúhelníku OPQ určete osy stran.

4.3 Analytické řešení úloh

4.3.1 První příklad Z7-I-3 60. ročník

Zadání
Šárka prohlásila:
„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29 let.“
Před kolika lety se Šárka narodila?

(M. Volfová[26])

Řešení
Věk Šárky označíme r. Z výroku co řekla Šárka, určíme věky Líby a Elišky. Líba je starší o 3 roky, tedy $r + 3$. Eliška je o 8 let starší, tedy $r + 8$. Věk maminky je $r + 29$. Protože když se Šárka narodila, mamince bylo 29 let. Průměr jejich věku je 21, který dostaneme sečtením všech věků děleno čtyřmi osobami. Zapíšeme ve tvaru:

$$(r + (r + 3) + (r + 8) + (r + 29)) : 4 = 21$$

po sečtení dostaneme:

$$r = 11$$

Věk Šárky je 11 let. Narodila se před 11 lety.

Návodné úlohy

Příklad první
Jiří a Blanka jsou sourozenci. Jejich průměrný věk je 19 let. Jiří je o 4 roky starší než Blanka. Kolik je sourozencům?

Příklad druhý
Natálka se narodila v roce 2000. Mamince v roce 2018 bylo 42 let. Kolik bylo mamince, když se Natálka narodila?

Příklad třetí
Dědečkovi je 60 let. Jeho vnučka je o dvě třetiny mladší než on. Když se vnučka narodila, mamince bylo 24 let. Kolik let je mamince nyní?

4.3.2 Druhý příklad Z7-II-2 63. ročník

Zadání
Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka závodily v četbě téže knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka přečíst 32 stran, což bylo přesně v polovině mezi počty stran, které stihly přečíst Saša a Zuzka. Ivana přečetla o 5 stran více než Zuzka a Majka přečetla o 8 stran méně než Saša. Žádná dvě děvčata nepřečetla stejný počet stran a nejhorší výsledek byl 27 stran. Určete, kolik stran přečetla jednotlivá děvčata.

(M. Dillingerová[27])

Řešení
Lucka přečetla 32 stran. Saša a Zuzka dohromady přečetly 64 stran. Nyní musíme rozhodnout, kdo přečetl nejméně stran. Lucka to být nemohla. Kdyby Zuzka přečetla 27 stran, Ivana by tedy přečetla 32 stran, stejně jako Lucka. To je ze zadání zřejmé, že být nemůže. Tedy Zuzka nepřečetla nejméně stran. Saša také ne, jelikož přečetla o 8 více stran než Majka. Z toho plyne, že nejméně stran přečetla Majka. Když Majka přečetla 27 stran, Saša musela přečíst o 8 více, tedy 35 stran. Saša se Zuzkou dohromady přečetli 64 stran, z toho je pro Sašu 35 stran a na Zuzku zbývá 29 přečtených stran. Ivana přečetla o 5 více stran jak Zuzka, tedy 34 stran.

Návodné úlohy

Příklad první
Karel, Tomáš a Jirka mezi sebou soutěží v tom, kdo vypočítá nejvíce příkladu z matematiky. Na počítání měli 45 příkladů. Nejméně spočtených příkladů bylo 8. Nejlépe na tom byl Karel. Tomáš měl o 11 příkladů méně než Karel. Kolik měl každý vypočítaných příkladů?

Příklad druhý
Babička, dědeček, a teta luštili knihu křížovek. Babička s dědečkem měli celkem vyluštěno 40 křížovek. Teta měla vyluštěno o 8 křížovek méně než babička. Nejméně vyluštěných křížovek bylo 15. Dědeček vyluštil o 2 více jak teta. Kdo vyluštil kolik křížovek?

Příklad třetí
Kamarádi cvrnkali kuličky do důlku. Karel měl 14 kuliček. Hanka měla o 5 kuliček více než Jitka. Petr měl o 3 méně než Jitka. Karel a Hanka celkem měli 22 kuliček. Kolik kuliček měl každý?

4.3.3 Třetí příklad Z7-I-1 54. ročník

Zadání
Dlouhý, Široký a Bystrozraký změřili svou výšku. Zjistili, že Dlouhý je dvakrát vyšší než Široký, výška Bystrozrakého představuje dvě třetiny výšky Dlouhého, ale přitom je o 44 cm vyšší než Široký. Zjisti, jak vysoký je Dlouhý, Široký i Bystrozraký.

Řešení
Ze zadání si upravíme co známe a zapíšeme do tvaru rovnic. Dlouhý je dvakrát vyšší než Široký. Ve tvaru rovnice zapíšeme takto:

$$d = 2 \cdot s$$

Výška Bystrozrakého jsou dvě třetiny výšky Dlouhého.

$$b = \frac{2}{3}d$$

Dlouhý je o 44 cm vyšší než Široký.

$$b = s\ + 44$$

Vidíme, že b máme vyjádřeno dvěma způsoby, proto si do druhé rovnice za b dosadíme z rovnice třetí $s + 44$ a vyjádříme jedno s. Dostaneme

$$\begin{aligned} s\ + 44 &= \frac{2}{3}d \\ s\ &= \frac{2}{3}d - 44 \end{aligned}$$

To samé uděláme s první rovnicí, do které dosadíme za s.

$$\begin{aligned} d &= 2 \cdot (\frac{2}{3}d - 44) \\ d &= \frac{4}{3}d - 88 \end{aligned}$$

Nyní odstraníme zlomek tak, že celý výraz vynásobíme třemi a upravíme.

$$d = 264$$

Když známe výšku Dlouhého, můžeme vypočítat délky ostatních.

$$\begin{aligned} s\ &= \frac{2}{3} \cdot 264 - 44 \\ s\ &= 132 \end{aligned}$$

Široký je vysoký 132 cm. Bystrozraký je o 44 cm vyšší než Široký, měří tedy 176 cm.

Návodné úlohy

Příklad první
Sourozenci Luboš, Lukáš a Daniel si na zeď kreslili svou výšku. Když si porovnávali své výšky, zjistili, že Danielova výška je o 30 cm větší než Lukáše. Libor je o 10 cm menší než Lukáš. Libor a Lukáš mají dohromady 260 cm. Kolik každý měří?

Příklad druhý
Tamara kupovala kytice. První kytice růží stála 300 Kč. Druhá kytice tulipánu stála o čtvrtinu méně než růže. Třetí kytice gerber je o 40 Kč levnější jak tulipány. Kolik Kč stojí kytice tulipánů a gerber?

5 Řešení návodných úloh

5.1 Kategorie Z5

5.1.1 Logické řešení úloh

Příklad 2.1.1

1) 6. svačin.
2) 33 cm, 16,5 cm, 16,5 cm.
3) Katka 3 cm, Karel 2 cm.

Příklad 2.1.2

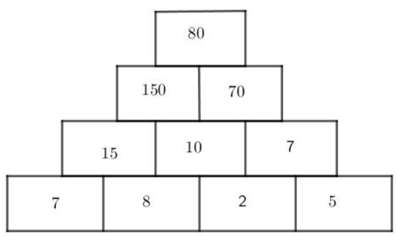
1) a) 60 cm; b) 80 cm.
2) Mezera mezi holuby v první části je jeden metr, v druhé části mají mezeru dva metry.
3) Bude 10 bílých pruhů.

Příklad 2.1.3

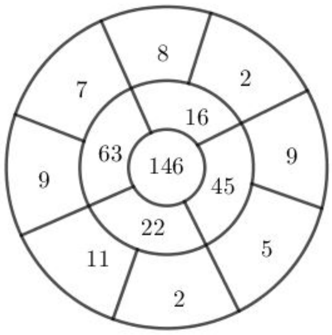
1)

2	6	4	8
6	8	2	4
4	2	8	6
8	4	6	2

2)

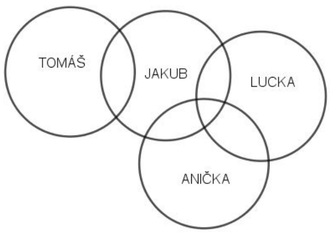


3)

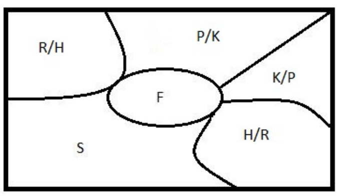


Příklad 2.1.4

1)



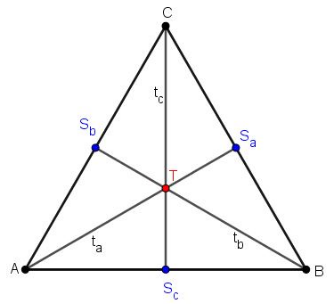
2)



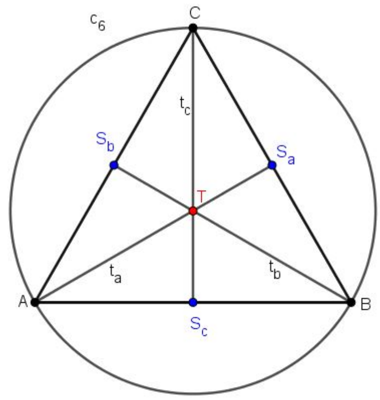
5.1.2 Geometrické řešení úloh

Příklad 2.2.1

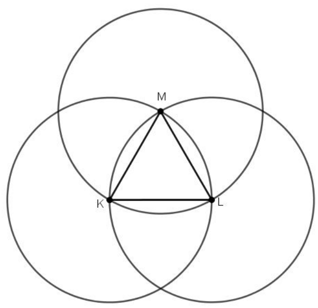
1)



2)



3) Lze vytvořit tři kružnice

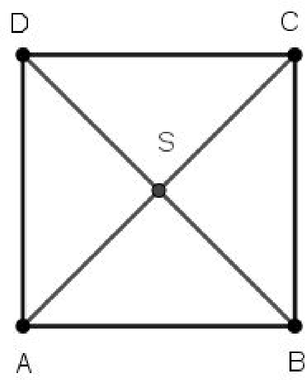


Příklad 2.2.2

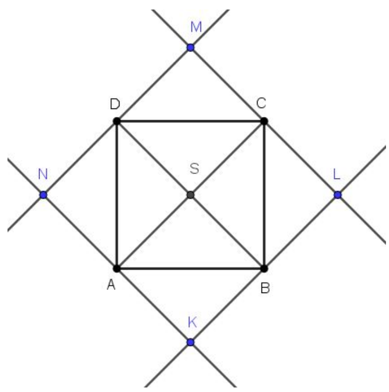
1) Obvod obdélníku je $o = 15$ cm.
2) Obvod obdélníku je $o = 38$ cm.
3) Obvod obdélníku je $o = 40$ cm. Obsah obdélníku je $S = 96$ cm^2.
4) Rozměry obdélníka jsou 26 cm a 13 cm.

Příklad 2.2.3.

1)



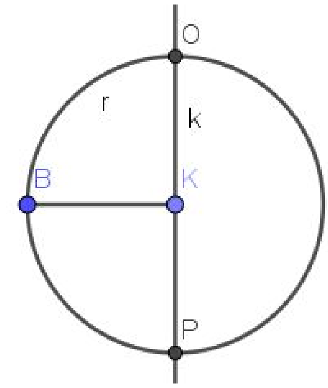
2)



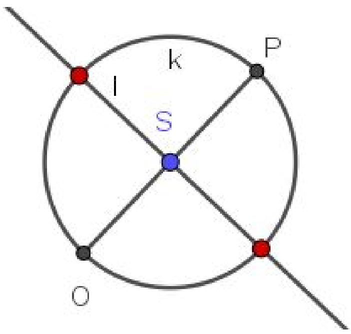
3) Délka úsečky je 8 cm.

Příklad 2.2.4

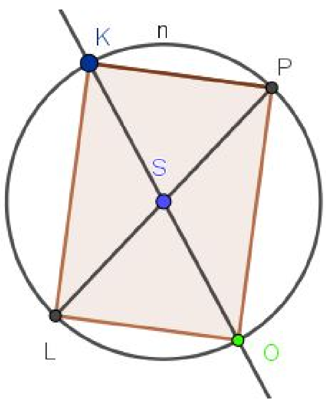
1)



2)



3)



5.1.3 Analytické řešení úloh

Příklad 2.3.1

1) Musí donést 18 jablek.
2) Maminka vyřadila šest starých trik a dvě mikiny.
3) Katka má dvě panenky a osm autíček.

Příklad 2.3.2

1) Váha vážila o 75 g jinak. Ovoce vážilo 175 g.
2) Celkem babička napekla 150 kusů cukroví.
3) Musely přidat 30 g mouky. Mísa vážila 30 g.

Příklad 2.3.3

1) Markéta dostala do tatínka 35 Kč.
2) Jeden rohlík stál 8 Kč. Mohl si koupit 7 rohlíků.
3) Dort stál 220 Kč a roláda stála 6,25 Kč.

Příklad 2.3.4

1) Adam měl 5 bodů a Karel měl 9 bodů.
2) Filip přispěl 10 Kč, Jana 13 Kč.
3) Třetí má 5 bodů.

5.2 Kategorie Z6

5.2.1 Logické řešení úloh

Příklad 3.1.1

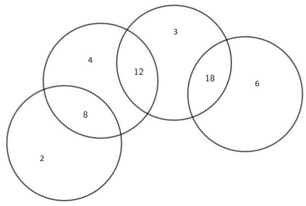
1) 8 let je Katce a Lence. 10 let je Aničce, Monice a Jindrovi. 13 let je Tomášovi a Honzovi.

2) V první krabici bude robot, autíčko a plyšák (panenka), v druhé krabici budou 3 autíčka a 3 panenky (3 plyšáci). Ve třetí krabici budou dva vláčky a dva plyšáci (dvě panenky).

3) V každé hromádce budou dvoje kalhoty, tričko, tři svetry a mikina.

Příklad 3.1.2

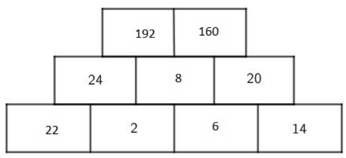
1)



2)

2	4	3
4	3	2
3	2	4

3)



5.2.2 Geometrické řešení úloh

Příklad 3.2.1

1) Obsah trojúhelníka je 12,5 cm^2.
2) Délka strany $|KL| = 4$ cm.
3) Výška v trojúhelníku ORP je 2,5 cm.

Příklad 3.2.2

1) Obsah trojúhelníka ABC je $S = 6$ cm^2.
2) Obsah čtverce je $S = 16$ cm^2.
3) Obsah trojúhelníku ABC je $S = 60$ cm^2.

Příklad 3.2.3

1) Čtverec lze rozdělit na dva shodné trojúhelníky, podle uhlopříček. Nebo na dva shodné obdélníky. Lze rozdělit čtyřmi způsoby.
2) Obsah obdélníka je $S = 144$ cm^2. Ano jde. Když obdélník rozdělíme na 4 části. Viz obrázek.
3) Obsah obdélníka je $S = 86$ cm^2. Obsah čtverce je $S = 64$ cm^2.

5.2.3 Analytické řešení úloh

Příklad 3.3.1

1) Řezal 80 cm dlouhé špalky.
2) Strom byl vysoký 290 cm.
3) Dcera dostává dvě housky, tatínek dostává dvanáct housek.

Příklad 3.3.2

1) Na konci roku měla Anička 220 Kč.
2) Musí šetřit 11 týdnů.
3) Od tatínka dostával 50 Kč.

Příklad 3.3.3

1) Průměr Moniky je 1,33 po zaokrouhlení.
2) Jitka zaplatila 25 Kč. Alena zaplatila 35 Kč za ovoce.
3) Tetu stálo jedno rajče 4 Kč. Strýce stálo rajče 3 Kč.

5.3 Kategorie Z7

5.3.1 Logické řešení úloh

Příklad 4.1.1

1) Hanka měla 7 bodů a Jitka 6.
2) Skupinka B vyhrála pouze jednou.
3) Celkem odehráli 15 hodů.

Příklad 4.1.2

1) Zbyla šest osmin, neboli tři čtvrtiny dortu.
2) Lence zbylo 27 Kč.
3) Tři schody byly dlouhé 30 cm. Dva schody byli dlouhé 45 cm.

Příklad 4.1.3

1) Ve skupince sudých čísel bylo 14 dětí. Ve skupince lichých čísel bylo také 14 dětí.
2) Dvojice tvoří (2, 12), (3, 13), (4, 14), (5, 15). Zbylá čísla 6, 7, 8, 9, 10, 11 netvoří dvojice.
3) V pondělí a ve středu létají lodě: 3, 5, 7, 9. V úterý lodě s čísly 4 a 8. Ve čtvrtek létají s čísly 4, 6, 8, 10. V pátek lodě s čísly 3, 6, 9.

5.3.2 Geometrické řešení úloh

Příklad 4.2.1

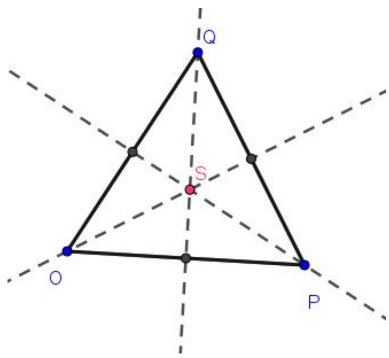
1) Druhá strana je 15 cm. Obvod obdélníka je $o = 40$ cm.
2) Délky stran jsou 6 cm, 9 cm a 12 cm.
3) Obsah zadaného čtverce je 64 cm^2. Obsah druhého čtverce je 96 cm^2.

Příklad 4.2.2

1) Obvod trojúhelníka je $o = 17$ cm.
2) Délka střední příčky je 3 cm.
3) a = 12 cm, b = 10 cm, c = 8 cm.

Příklad 4.2.3

1) Obsah trojúhelníka KLM je $S = 14$ cm^2.
2) Obsah trojúhelníka ABD je $S = 33$ cm^2.
3)



5.3.3 Analytické řešení úloh

Příklad 4.3.1

1) Blance je 17 let. Jiřímu je 21 let.
2) Mamince bylo 24 let, když se Natálka narodila.
3) Mamince je 44 let. Vnučce je 20 let.

Příklad 4.3.2

1) Jirka měl 8 příkladů. Tomáš měl 13 příkladů a Karel 24.
2) Babička vyluštila 23 křížovek, dědeček 17 a teta 15.
3) Karel měl 14 kuliček, Hanka 8 kuliček, Jitka tři kuličky a Petr žádnou.

Příklad 4.3.3

1) Daniel měří 165 cm, Lukáš 135 cm a Libor 125 cm.
2) Tulipány stály 225 Kč, gerbery stály 185 Kč.

6 Závěr

Cílem této bakalářské práce je srozumitelné, podrobné řešení příkladů z vybraných úloh matematické olympiády, které jsou rozděleny do kategorií Z5, Z6 a Z7. Ke každé úloze byly vytvořeny návodné příklady, které by žákům měly pomoci při řešení složitějších úloh. Příklady jsou rozděleny podle typu řešení úloh a to do logického, geometrického a analytického řešení příkladů. Logické řešení úloh je sestaveno tak, aby žáci rozvíjeli svou představivost. Při analytickém řešení úloh, je psán postup pro správné vytvoření rovnic, které jsou pro usnadnění, pochopení a řešení úlohy. Pro geometricky řešené úlohy jsou typické názorné obrázky, které žákům usnadní jejich vyřešení. Obrázky jsou tvořeny v programu GeoGebra především pro geometrické a logické řešení úloh, kdy žákům názorný obrázek pomůže pochopit zadanou úlohu. Návodné úlohy jsou psány tak, aby byly jednoduší a žáci pochopili i složitější úlohy.

Práce je určena pro žáky, kteří řeší matematické olympiády a chtějí se připravit nebo pomoci při řešení úloh. Návodné úlohy by měly žákům napomoct při řešení složitějších úloh.

7 Použitá literatura a zdroje

[1] BĚLOUN, František. Sbírka úloh z matematiky pro základní školu. 8., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-104-3.

[2] FUCHS, Eduard a Helena BINTEROVÁ. Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště. 1. vydání.Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-294-5.

[3] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.

[4] HOŠPESOVÁ, Alena. Matematická gramotnost a vyučování matematice. 1. vydání. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-259-5.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Matematika pro 7. ročník základní školy. 3., přeprac. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-427-8.

[6] Matematická olympiáda kategorie Z5 - Z7 pro základní školy.[cit. 2018-04-20] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly

[7] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/1026022/z63i.pdf

[8] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟhttp://www.matematickaolympiada.cz/media/3308589/z66i-5.pdf

[9] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/4190012/z5ii-r.pdf

[10] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/1025043/z5ii-r.pdf

[11] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/4190012/z5ii-r.pdf

[12] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/4189969/z67i-5.pdf

[13] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/1681776/z5ii-r.pdf

[14] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: ȟttp://www.matematickaolympiada.cz/media/440989/Z62II-5.pdf

[15] Matematická olympiáda kategorie Z5 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440956/Z60I-5.pdf

[16] Matematická olympiáda kategorie Z6 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/3309251/z66-6.pdf

[17] Matematická olympiáda kategorie Z6 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440990/Z62II-6.pdf

[18] Matematická olympiáda kategorie Z6 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440870/Z53I.pdf

[19] Matematická olympiáda kategorie Z6 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/3494993/z6ii-r.pdf

[20] Matematická olympiáda kategorie Z6 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440944/Z59I-6.pdf

[21] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440977/Z61II-7.pdf

[22] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/2603411/z65i.pdf

[23] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/1026021/z64.pdf

[24] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440964/Z60II-7.pdf

[25] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440991/Z62II-7.pdf

[26] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440958/Z60I-7.pdf

[27] Matematická olympiáda kategorie Z7 pro základní školy. [cit. 2018-04-24] Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/1025045/z7ii-r.pdf