



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Diplomová práce

Historie vybraných matematických problémů

Vypracoval: Bc. Jan Váňa
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Historie vybraných matematických problémů jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne Podpis:

PODĚKOVÁNÍ

Chci poděkovat vedoucímu své diplomové práce, panu profesorovi RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení při řešení diplomové práce. A také děkuji rodině za podporu při studiu.

ANOTACE

Cílem diplomové práce „Historie vybraných matematických problémů“ je zkoumání vybraných problémů, které řešili slavní matematici v minulosti, pomocí současných poznatků matematiky. U každého problému je uvedena jeho historie, několik obrázků popisujících vznik a řešení problému.

ABSTRAKT

The aim of the diploma thesis „History of selected math problems“ is to explore specific math issues, which famous mathematicians dealt with in the past, using up-to-date knowledge and methods. For each issue there is explained history and diagrams describing its origin and solution.

Obsah

Úvod	8
1 Brachistochrona	9
1.1 Vznik problému brachistochrony	9
1.2 Zadání problému	10
1.3 Řešení jednotlivých slavných matematiků	10
1.3.1 Galileo a problém padajících těles	10
1.3.2 Využití odrazu a lomu světla	13
1.3.3 Řešení Jeana Bernoulliho	14
1.3.4 Využití cykloidy	16
1.3.5 Newtonova konstrukce	19
1.3.6 Jacques a Jean Bernoulli	19
1.3.7 Variační počet	20
1.3.8 Euler a Lagrange	21
1.4 Vlastnosti cykloidy	22
1.4.1 Parametrické rovnice cykloidy	22
1.4.2 Základní vlastnosti cykloidy	22
1.5 Podobné křivky	23
1.5.1 Cykloidy	23
1.5.2 Epicykloidy	25
1.5.3 Hypocykloidy	27
1.6 Izochronnost cykloidy	28
1.7 Porovnání cykloidy s jinými křivkami	32
1.7.1 Pohyb po cykloidě	33
1.7.2 Pohyb po přímce	34
1.7.3 Pohyb po parabole	35
1.7.4 Srovnání	38

2	Witch of Agnesi	39
2.1	Historie křivky	39
2.2	Konstrukce křivky	39
2.3	Parametrické rovnice křivky	40
2.4	Kartézské rovnice	42
2.5	Vlastnosti křivky	43
3	Pascalova závitnice - Limaçon	45
3.1	Historie křivky	45
3.2	Konstrukce křivky	45
3.2.1	Limaçon jako epicykloida	45
3.2.2	Limaçon jako množina bodů	47
3.2.3	Limaçon jako množina pat kolmic	48
3.3	Rovnice křivky	50
	Závěr	53
	Seznam použité literatury	54
	Seznam obrázků	56

Úvod

Matematika prošla během svého vývoje několika významnými etapami. Matematické příklady a úlohy se měnily v závislosti na tom, jak se lišila situace, zvyklosti a potřeby v různých dobách.

Při objevení problému, který se jevil v té době jako neřešitelný, se lidstvo snažilo přijít na možnosti, jak si s ním poradit a překonat ho. Ve většině případů byla objevena nová teorie, která pomohla k objasnění problémů a k získání nových poznatků matematiky.

Ve své práci se zabývám úlohami, které se objevily v 16. a 17. století našeho letopočtu.

Nejvýznamnější problém popsany v první kapitole práce byl publikován v roce 1696 jako matematická soutěž. Této soutěže se zúčastnili nejlepší matematici Evropy své doby a v polovině 18. století byla vytvořena nová teorie matematiky na základě pokusů řešení zadané úlohy.

V druhé kapitole je popsany problém z počátku 17. století, na jehož vyřešení se podílela žena a je dochovaný jako první publikace matematiky z poloviny 18. století, kterou nevydal muž.

Ve třetí kapitole je zmíněný problém, který je nejstarší z řešených úloh. První zmínky pochází z počátku 16. století. Tímto problémem se zabývá analytická geometrie.

Při své práci jsem využíval program GeoGebra pro konstrukci obrázků a program CoCoA pro úpravu složitějších rovnic.

Práci nechybí závěr a seznam použitých zdrojů, ze kterých jsem čerpal.

1 Brachistochrona

1.1 Vznik problému brachistochrony

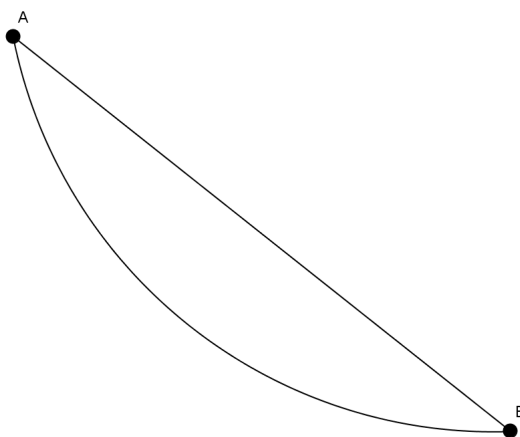
Počáteční otázka pro křivku brachistochrona může znít: Jaký tvar by měla mít dětská klouzačka, aby byly děti v co nejkratším čase na jejím konci?

Odpověď na tuto otázku ale závisí na mnoha parametrech. Jako jeden z nich můžeme zmínit tření mezi oblečením a povrchem klouzačky. Takový problém ale nedokážeme vyřešit a tuto úlohu si musíme upravit pro výpočty. Zanedbáme-li tření mezi oblečením dítěte a houpačkou, dostáváme problém, který publikoval Jean Bernoulli v Acta Eruditorum vydaném v Lipsku v červnu roku 1696.

„Datis in plano verticali duobus punctis A at B assignare Mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descenden, at moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.“ [2]

Výraz *brevissimo tempore* je latinský překlad *brachistochrone* z řečtiny, kde *brachisto* znamená nejrychlejší a *chrono* čas, po spojení tedy nejrychlejší nebo nejkratší čas. Překlad celého znění původního zadání zní:

Jsou dány dva body A a B ve svislé rovině. Po jaké křivce vytyčené bodem, na který působí pouze gravitační síla, se dostaneme z bodu A do bodu B v nejkratším čase.



Obrázek 1.1: Pozice bodů v prostoru

Podmínka, že tato křivka je umístěna ve svislé rovině obsahující body A a B , může vést k myšlence, že nejrychlejší cestou může být ta nejkratší a je daná částí přímky procházející body A a B . Tento případ by nastal pouze v případě, že by body A a B byly přímo pod sebou, což by značně zjednodušilo celou situaci. Z praktického života však známe příklady, kdy nejkratší cesta není tou nejrychlejší. Jako příklad můžeme uvést cestu z města A do města B , která může být rychlejší při využití dálnice, která je sice delší než jízda po přímé cestě. K vyřešení problému brachistochrony je třeba zohlednit všechny možné křivky procházející body A a B a porovnat časy pohybu bodů po těchto křivkách. [2]

1.2 Zadání problému

Problém Brachistochrony byl zprvu pojat jako hra pro matematiky, ale změnil se ve značný problém. Rozdílné přístupy nalezení řešení jsou považovány za počáteční bod nových teorií matematiky. Zatímco skutečné matematické řešení problému zahrnuje nám známý variační počet, teorie, na které založili své řešení Euler a Lagrange, je pro tehdejší dobu nová. Bernoulliho řešení bylo založeno na analogii se zákonem lomu v optice. Podobná analogie mezi optikou a mechanikou se znovu objevila, když Hamilton aplikoval princip nejmenší akce v mechanice, na kterém Maupertuis založil základní zákony optiky. Tato podobnost byla příkladem pro de Broglia a Schrödingera při vytváření postulátů o vlnové mechanice a vlnové optice. Další, kdo vyřešili tento problém, byli Jacques Bernoulli, bratr zadavatele, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnitz, Guillaume de L'Hospital.[2]

1.3 Řešení jednotlivých slavných matematiků

1.3.1 Galileo a problém padajících těles

V roce 1638, dávno předtím, než byl zadán problém brachistochrony, Galileo získal podobné řešení, které publikoval v průběhu třetího dne jeho Diskuze o dvou nových vědách. Když studoval rovnoměrné zrychlení, které nazýval „přírodní zrychlení“ ve srovnání s rovnoměrným pohybem ukázal, že dráha tělesa, které padá v prostoru, závisí

na čtverci času pádu. Dnes řečeno, dráha volného pádu závisí na druhé mocnině času, po který těleso padá. „Theorem II“.

Pokud těleso při pádu vykonává ještě rovnoměrný pohyb v kolmém směru pádu, získal Galileo jiné řešení, které publikoval jako „Theorem V“, který si můžeme vyložit jako:

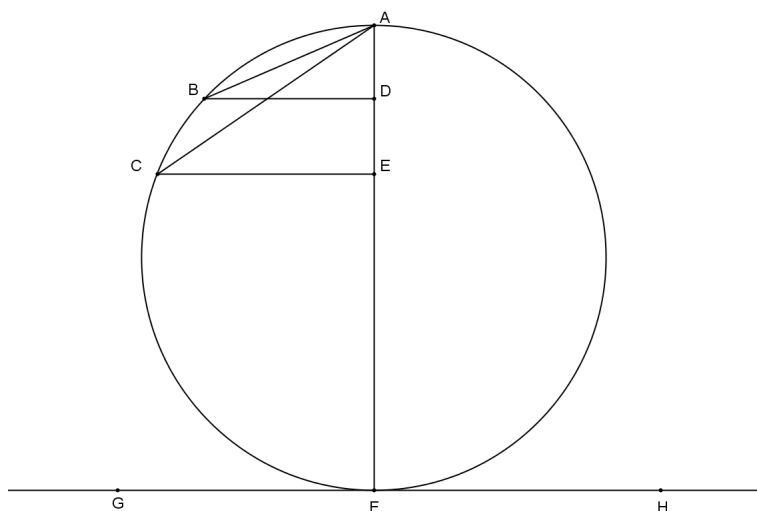
Čas, za který těleso urazilo vzdálenost L a sestoupilo o výšku H v čase t , je roven:

$$t = kL/\sqrt{H}$$

Galileo dále dokazuje následující elegantní řešení v „Theorem VI“:

Pokud je z vrcholu kruhu vedena jakákoliv nakloněná rovina, která se protíná s obvodem kruhu, je čas sestupu po všech těchto rovinách shodný.

Nad vodorovnou linií GH zkonstruujeme kruh se svislým průměrem AF a z vrcholu kruhu narýsujeme dvě linie do bodů B a C , které jsou na obvodu kruhu. Potom čas sestupu tělesa podél těchto linií je sobě rovný.

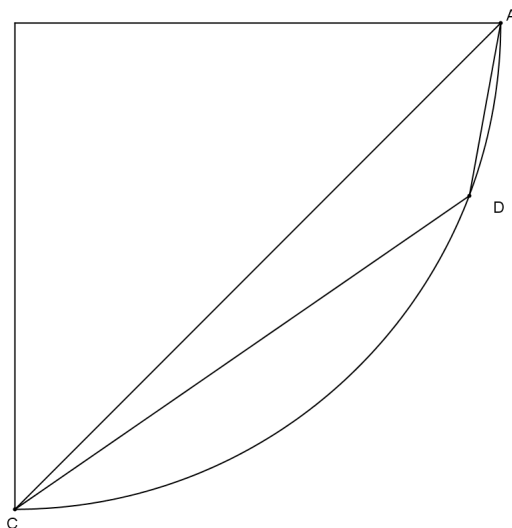


Obrázek 1.2: Galileovy padající tělesa

Pokud budeme dále hledat, jak Galileo navrhoval, optimální sklon, abychom dosáhli z nulové rychlosti pohybu z bodu A vodorovné roviny v nejkratším čase, dojdeme k závěru, že je ideální sklon pohybu 45° .

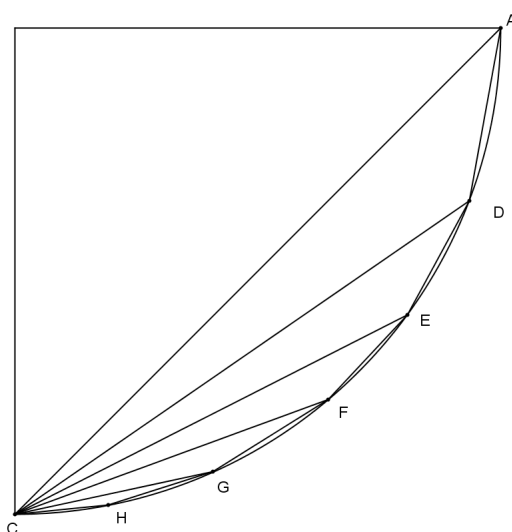
Na konci třetího dne Galileo ukázal, že se nechá tato konstrukce ještě zlepšit.

Pokud máme dva body A a C , které jsou ve svislé rovině umístěny tak, že přímka procházející těmito body svírá s vodorovným směrem úhel 45° , pak čas sestupu v gravitačním poli mezi body se nechá minimalizovat nahrazením segmentu AC dvěma segmenty AD a DC , kde bod D je jakýkoliv bod čtvrtkružnice mezi body AC .



Obrázek 1.3: Galileův postup řešení

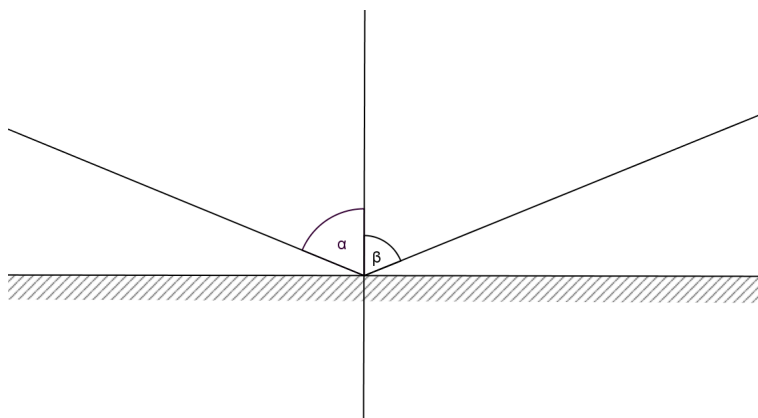
Na základě tohoto postupu, který aplikoval vícekrát, sestrojil lomenou čáru, která spojuje dva body ve svislé rovině. Při nekonečném opakování tohoto postupu získal Galileo křivku spojující body AC jako část kružnice. [2]



Obrázek 1.4: Galileovo řešení

1.3.2 Využití odrazu a lomu světla

Jak ze zkušeností vyplývá, světlo se vždy šíří v přímém směru. Další poznatek o dráze světla je, že si světlo vybírá vždy nejkratší cestu. Toto tvrzení bylo základem pro Heróna Alexandrijského, který v prvním století před naším letopočtem formuloval zákon odrazu. Nám známé tvrzení, zní: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu.



Obrázek 1.5: Úhel odrazu

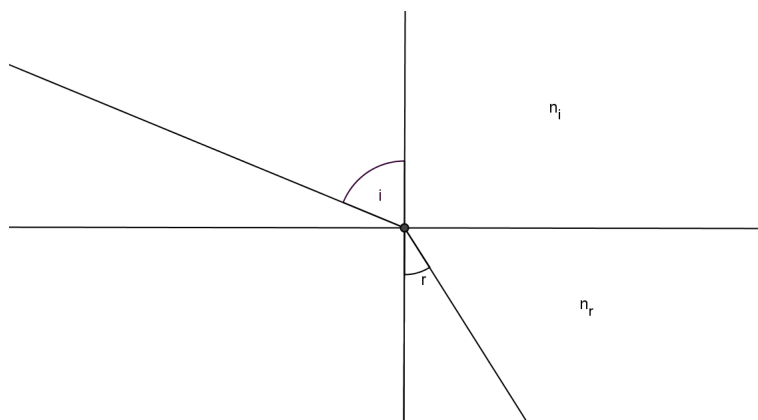
V případě odrazu světla se světelný paprsek pohybuje v jednom homogenním prostředí a nedochází ke změně jeho rychlosti. Toto ovšem neplatí pro lom světla, kde světelný paprsek prochází rozhraním prostředí a na tomto rozhraní se mění jeho rychlost v závislosti na indexu n prostředí.

$$v = c/n$$

Pokud budeme sledovat paprsek světla, který prochází přes rozhraní dvou prostředí s rozdílným indexem n_i a n_r , trajektorie světelného paprsku nebude přímkou, nýbrž půjde o dvě polopřímky s počátkem na hranici prostředí.

Trajektorie světla je v tomto případě také nejkratší, ale z hlediska času, za který paprsek urazí tuto vzdálenost. Při použití známých hodnot úhlů dopadu a rychlostí světla v prostředích, můžeme vypočítat druhý neznámý úhel ze vztahu:

$$\sin i/v_i = \sin r/v_r$$



Obrázek 1.6: Úhel lomu

nebo za použití indexů prostředí:

$$n_i \cdot \sin i = \sin r \cdot n_r$$

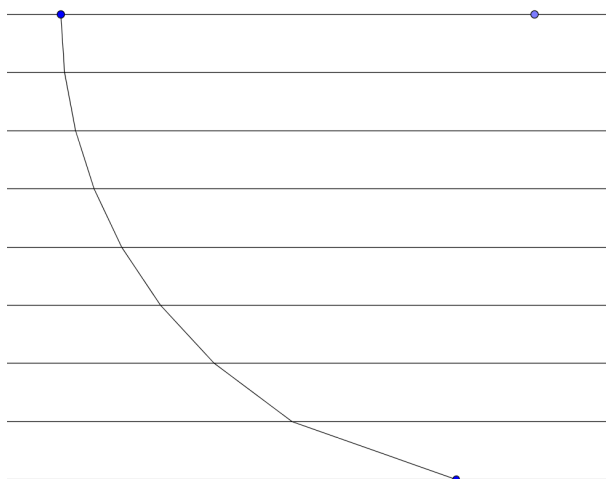
Tento vzorec objevil holandský vědec Snell v roce 1621 a v roce 1637 ho publikoval Descartes ve své práci o optice „Dioptrics“. [2]

1.3.3 Řešení Jeana Bernoulliho

Jean Bernoulli publikoval své řešení v Acta Eruditorum v květnu roku 1697. Jeho metoda řešení spočívala v diskretizaci problému a využití znalostí Snellova zákonu šíření světla na rozhraní prostředí. Prostor si představil rozdělený do jednotlivých pruhů, dostatečně tenkých, tak aby rychlost pohybujícího se bodu mohla být považována za konstantní. V rámci každého pruhu se trajektorie bodu stala nejkratší trasou a tvořila nezbytné segmenty. Celá trajektorie bodu pak byla složena z jednotlivých segmentů.

Ale jak se můžeme pohybovat z jednoho segmentu do druhého? Musíme vždy optimalizovat čas pohybu. Jako při odrazu světla, toto řešení je založeno na Fermatově principu. Pokud je v_i rychlost v daném pásu a v_r v pásu následujícím, úhel i je úhel, který je tvořen vertikálou v prvním segmentu a úhel r je v sousedním pásu dán pravidlem:

$$\frac{\sin i}{v_i} = \frac{\sin r}{v_r}$$



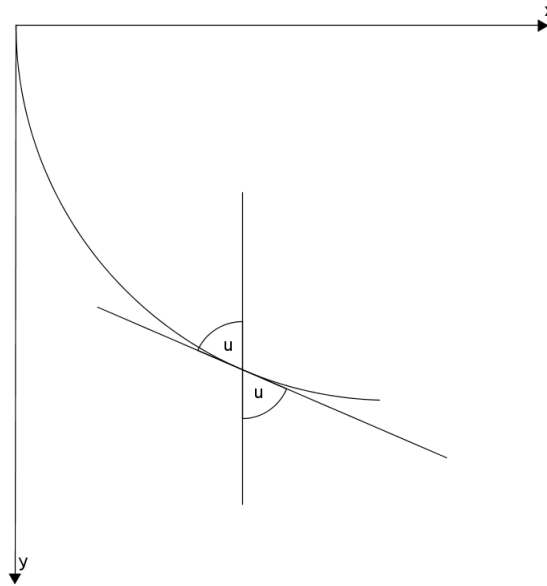
Obrázek 1.7: Pohyb přes segmenty

Pokud si představíme, že jednotlivé horizontální pásy se budou stávat postupně tenčí a jejich počet se blíží nekonečnu, pak daná řada segmentů směřuje ke křivce. Tečna v každém bodě této křivky se přibližuje k trajektorii tělesa. Úhel u , který svírá tečna s vertikální přímkou, je spojen s rychlostí vztahem:

$$\frac{\sin u}{v} = konst.$$

V tomto vztahu je rychlost v zastoupená nám známým vztahem, který je výsledkem působení gravitační síly a jak víme už od dob Galilea, je funkcí délky volného pádu podle vztahu:

$$v = \sqrt{2gy}$$



Obrázek 1.8: Závislost úhlu u

Při dosazení do předcházejícího pravidla dostáváme vztah:

$$\frac{\sin u}{\sqrt{2gy}} = konst.$$

V případě $y = 0$ je tečnou svislá přímka. [2]

1.3.4 Využití cykloidy

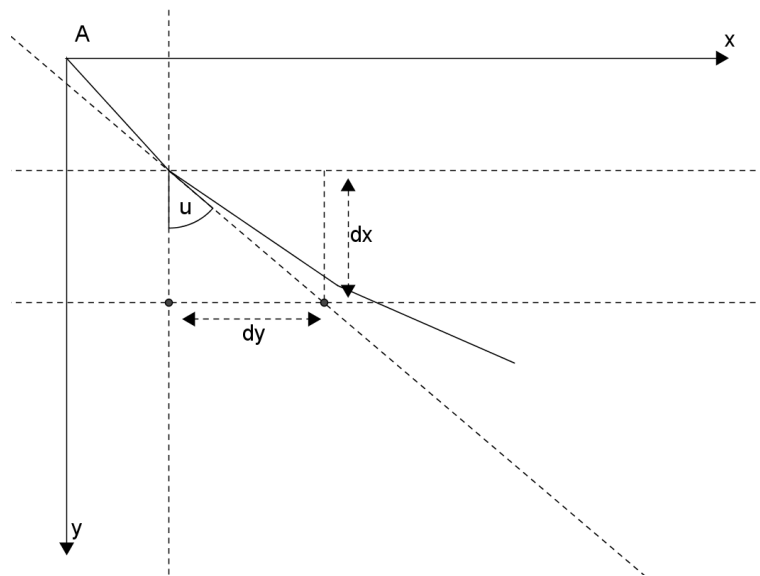
Proč je cykloida řešením diferenciální rovnice?

$$\frac{\sin u}{\sqrt{2gy}} = k, /()^2$$

$$y = c \sin^2 u,$$

kde konstanta $c = \frac{1}{2gk^2}$. V řešení diferenciální rovnice si můžeme pomoci zna-

lostmi základních poznatků geometrie. v předchozí kapitole jsme si popsali, jak je tvořen úhel u od vertikální přímky k samotné tečně, procházející bodem y a těchto poznatků využijeme. [2]



Obrázek 1.9: Odvození rovnice cykloidy

Podle obrázku (Obr.1.9) si výraz $\sin u$ vyjádříme pomocí souřadnic x a y

$$\sin u = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Pokud tento vztah dosadíme do předcházející rovnice dostaneme diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{c}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \\ 1 + y'^2 &= \frac{c}{y} \\ y' &= \sqrt{\frac{c - y}{y}} \end{aligned}$$

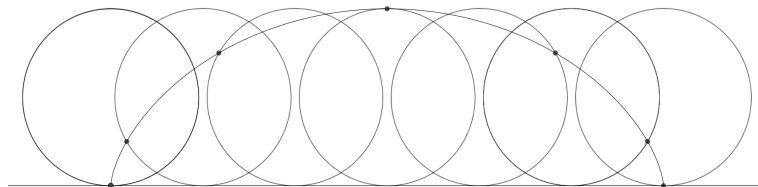
Diferenciální rovnici budeme řešit pomocí substituce $y = c \sin^2 \phi$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{c-y}{y}} \\ \frac{2c \sin \phi \cos \phi d\phi}{dx} &= \sqrt{\frac{c - c \sin^2 \phi}{c \sin^2 \phi}}, \quad \left(\begin{array}{l} y = c \sin^2 \phi \\ dy = 2c \sin \phi \cos \phi d\phi \end{array} \right) \\ 4c^2 \sin^4 \phi d^2 \phi &= dx^2 \\ 2c \sin^2 \phi d\phi &= dx, \quad \left(\sin^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) \\ c(1 - \cos 2\phi) d\phi &= dx \end{aligned}$$

Můžeme odvodit parametrické rovnice křivky pro souřadnice x a y :

$$\begin{aligned} x &= \int dx = \int c(1 - \cos 2\phi) d\phi = c\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi = \frac{c}{2} (1 - \sin 2\phi), \\ y &= c \sin^2 \phi = c \left(\frac{1 - \cos 2\phi}{2} \right) = \frac{c}{2} (1 - \cos 2\phi) \end{aligned}$$

Tímto jsme získali cykloidu, protože pokud $t = 2\phi$ a $a = \frac{c}{2}$ dostaneme její parametrické vyjádření. Viz[1.4.1]



Obrázek 1.10: Cykloida

Jak už víme, tvar křivky je dán kinematikou pohybu bodu v prostoru. Cykloida je křivka, která je dána pohybem bodu pevně spojeného s kotálející se kružnicí po vodorovné ploše. Pohyb bodu M , který opisuje cykloidu, vzniká složením dvou jednotlivých pohybů. Prvním je rotace bodu po kružnici a druhým je horizontální posun středu kružnice tak, aby vzdálenost, o jakou se střed posunul, byla rovna délce oblouku, o kterou se posunul bod po kružnici. Jednodušeji řečeno, kružnice se otáčí po podložce bez prokluzování.

1.3.5 Newtonova konstrukce

Řešením problému nejrychlejší křivky se jeví cykloida. Další otázka nastává v případě, že máme pevně dány dva body v prostoru a chceme je propojit tak, aby křivka začínala v bodě A a procházela bodem B jako brachistochrona.

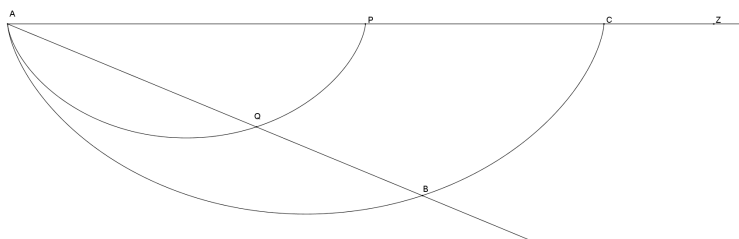
Řešení tohoto problému zaslal Newton v roce 1697 Montaguemu s jednoduchým postupem.

Samotný problém popsal jako:

Je třeba najít křivku ADB , po které se pohybuje bod pouze silou gravitace a sestoupí co nejrychleji z daného bodu A do daného bodu B .

Popis řešení:

Z daného bodu A vedeme vodorovně polopřímku AZ směrem k bodu B . Pod přímkou sestrojíme libovolnou cykloidu AQP tak, že bod P leží na polopřímce AZ . Dále vytvoříme přímou spojnici bodů A a B , která protíná cykloidu v době Q . Potom sestrojíme druhou cykloidu ADC , jejíž základna a výška je k základně a výšce první cykloidy ve stejném poměru jako je poměr mezi AB a AQ . Tato cykloida prochází bodem B a je křivkou, která sestoupí co nejrychleji z daného bodu A do daného bodu B . [2]



Obrázek 1.11: Newtonova konstrukce

1.3.6 Jacques a Jean Bernoulli

Otázku o hledané spojnici dvou bodů v prostoru položil Jacques Bernoulli svému bratru Jeanu. Nejprve uvažoval stejně jako Galileo, že nejrychlejší spojnice je ta nejkratší, tedy přímka. Svému bratrovi odpověděl, že cykloida je jediná křivka, která může dosáhnout nejrychleji daného bodu horizontálně. Jinak řečeno, že může dosáhnout koncového bodu v pravém úhlu ke svislému směru.

Otázka, kterou položil Jacques svému bratru Jeanu vedla k velkému matematickému sporu, který pomohl ke zrození nové matematické oblasti - Variační počet.[2]

1.3.7 Variační počet

Když hledáme hraniční hodnoty funkce f s proměnou x , bereme v úvahu hodnoty proměnné, pro které je hodnota $f(x)$ maximální nebo minimální. Zkoumáme tedy body, kde je tečna ke grafu funkce vodorovná přímka, nebo-li $f'(x) = 0$.

V případě funkce f s dvěma proměnnými x a y hledáme bod, ve kterém je tečná rovina vodorovná k ploše vzniklé jako funkce $z = f(x,y)$. Případně můžeme říct, že hledáme dvojice (x,y) pro které platí, že jsou jejich parciální derivace $f'_x(x,y)$ a $f'_y(x,y)$ rovny nule. Objevuje se nová teorie nazvaná Variační počet, kde variace jsou funkce. Tato teorie nebyla ovšem v roce 1696 formulována, ale náš problém dal podnět k jejímu vytvoření.

Abychom si mohli představit, čemu se variační počet věnuje, uvedeme si malý příklad.

Snažíme se najít křivku, která je grafickou podobou funkce $y = f(x)$, která minimalizuje nebo maximalizuje určité vlastnosti všech možných křivek omezenými počátečními podmínkami. V případě brachistochrony křivka spojuje dva body A a B . Extrém, který má být nalezen, v našem případě brachistochrony čas, je obecně vyjádřen jako integrál

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y') dx$$

kde y reprezentuje hledanou funkci a y' její derivaci, x je proměnná a F je partikulární funkce.

Mezi typické problémy variačního počtu patří izoperimetrický problém zmíněný výše, zkoumání geometrických linií, nebo nejkratší spojnice dvou bodů na zemském povrchu.

Zveřejnění problému brachistochrony v roce 1696 zapříčinilo počátek matematické teorie o variačním počtu. Proto je tento problém, díky kterému byly získány základní postupy vyšetřování, tak slavný. [2]

1.3.8 Euler a Lagrange

Jean Bernoulli zaslal své řešení Eulerovi, který přepracoval původní myšlenku a jako první formuloval metodu, která umožnila řešení základního problému pomocí variačního počtu. Své myšlenky publikoval v roce 1744 v *Method for finding palne curves that show same property of Maxima and Minima*. Stejně jako Bernoulli také Euler uchopil problém jako limitní problém vyšetřování extrému funkce. Rozdělil původní problém následovně:

Redukoval hledání křivky na polygonární čáru tvořenou n částmi

$$A = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, B = (x_n, y_n)$$

a potom hledal jednotlivé hodnoty souřadnic y_0, y_1, \dots, y_n , které nám dávají jednotlivé extrémy

$$W(y_0, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot F(x_k, y_k, (y_{k+1} - y_k) / (x_{k+1} - x_k))$$

Pokud bychom n položili rovno nekonečnu, dostali bychom vztah, který získal i Euler:

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0$$

Tento vztah obsahuje řešení pro každé y a kde F'_y a $F'_{y'}$ jsou parciální derivace F . Tento zápis je pouze nezbytný stav a metoda nezaručující existenci řešení. Předcházející rovnice se dnes nazývá Euler-Lagrangeova rovnice a představuje druhý stupeň diferenciální rovnice v y :

$$F'_y - F''_{y'x} - y' F''_{y'y} - y'' F''_{y'^2} = 0$$

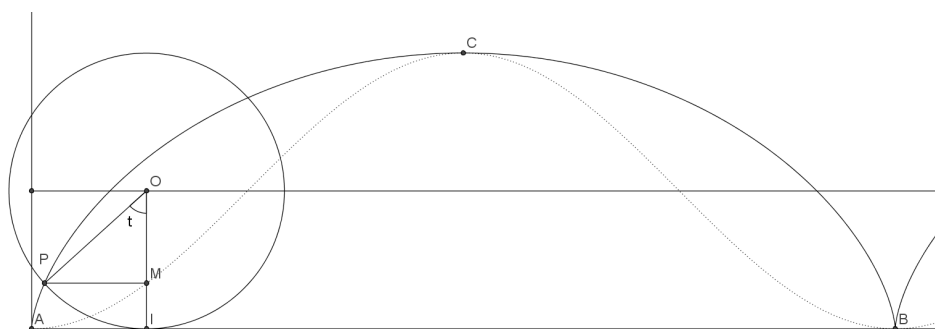
V roce 1760 Lagrange velmi zjednodušil zápis řešení zavedením symbolu δ používaném především ve variačním počtu, kde nahradil odpovídající změnu dané funkce.
[2]

1.4 Vlastnosti cykloidy

Jak již jsme zmínili v předcházejícím textu, cykloida je křivka, která vzniká jako stopa bodu, který je pevně spojen s otáčející a posunující se kružnicí.

1.4.1 Parametrické rovnice cykloidy

Nechť je oblouk cykloidy ACB s bodem C uprostřed, bod P je libovolný bod křivky a OP je poloměr rotující kružnice, PM je kolmá vzdálenost k svislému průměru OI . Pokud je $OP = a$ a úhel $MOP = t$ (v radiánech), AI délka oblouku $PI = at$. [6]



Obrázek 1.12: Cykloida

Při použití souřadnicových os vycházejících z bodu A , souřadnice (x,y) bodu P jsou:

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t)$$

$$y = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

Toto jsou parametrické rovnice cykloidy. [6]

1.4.2 Základní vlastnosti cykloidy

- Parametrické rovnice jsou

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t)$$

$$y = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

- Plocha mezi křivkou a její základnou je rovna $3\pi a^2$
- Délka křivky $s = 4a(1 - \cos \frac{1}{2}t)$, kde $0^\circ < t < 360^\circ$
- Délka základny $d = 2\pi r$ [6]

1.5 Podobné křivky

Další křivky, které vznikají podobným způsobem jako cykloida, patří do kategorie *trochoid* nebo-li cyklických křivek. Všechny tyto křivky vznikají, když se kotálí kružnice po pevné křivce nebo přímce a sledujeme pohyb pevně spojeného bodu s kružnicí. Takto vzniklé množiny bodů se také označují jako *kotálnice*.

Tyto křivky můžeme rozdělit do následujících skupin:

- Cykloidy - kružnice se kotálí po přímce
- Epicykloidy - kružnice se kotálí po vnější straně pevné kružnice svojí vnější hranou
- Hypocykloidy - kružnice se kotálí po vnitřní straně pevné kružnice svojí vnější hranou

1.5.1 Cykloidy

V předchozí kapitole jsme si ukázali jak vzniká *prostá cykloida*. Při posunutí bodu, který se otáčel na obvodu kotálející se kružnice blíže nebo dále od středu této kružnice, můžeme získat *zkrácenou* nebo *prodlouženou cykloidu*.

Po úpravě parametrických rovnic do tvaru:

$$x = rt - a \sin t$$

$$y = r - a \cos t$$

kde parametr r je poloměr kotálející kružnice, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je úhel, o který se odvalila kružnice a a je vzdálenost sledovaného bodu od středu kotálející se kružnice získáme následující možnosti:

$$a = r$$

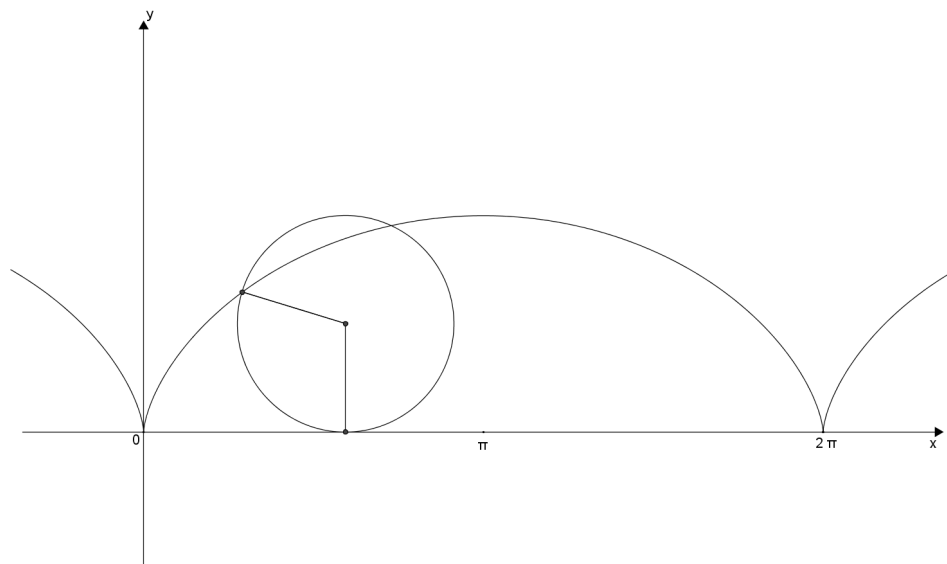
sledovaný bod opíše *prostou cykloidu*,

$$a > r$$

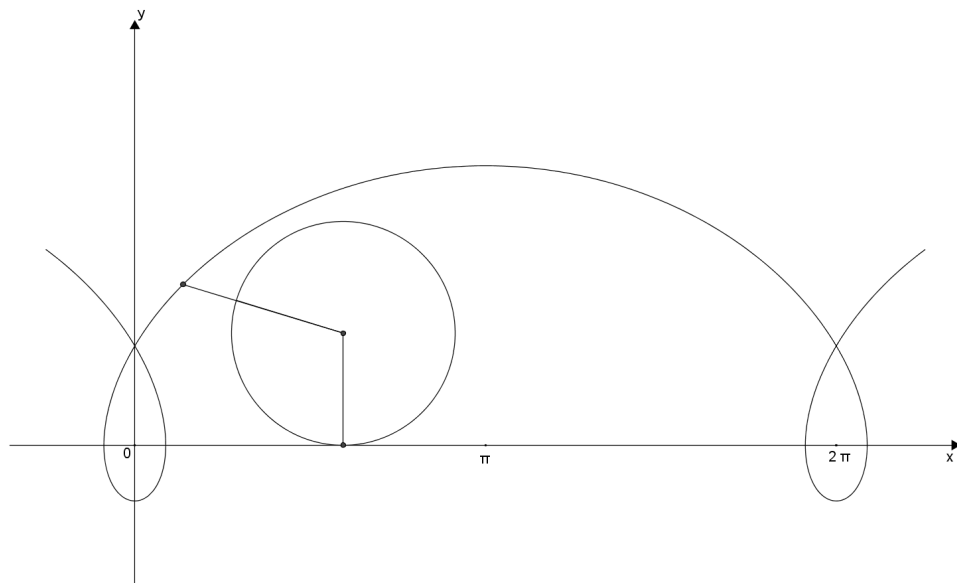
sledovaný bod opíše *prodlouženou cykloidu*,

$$a < r$$

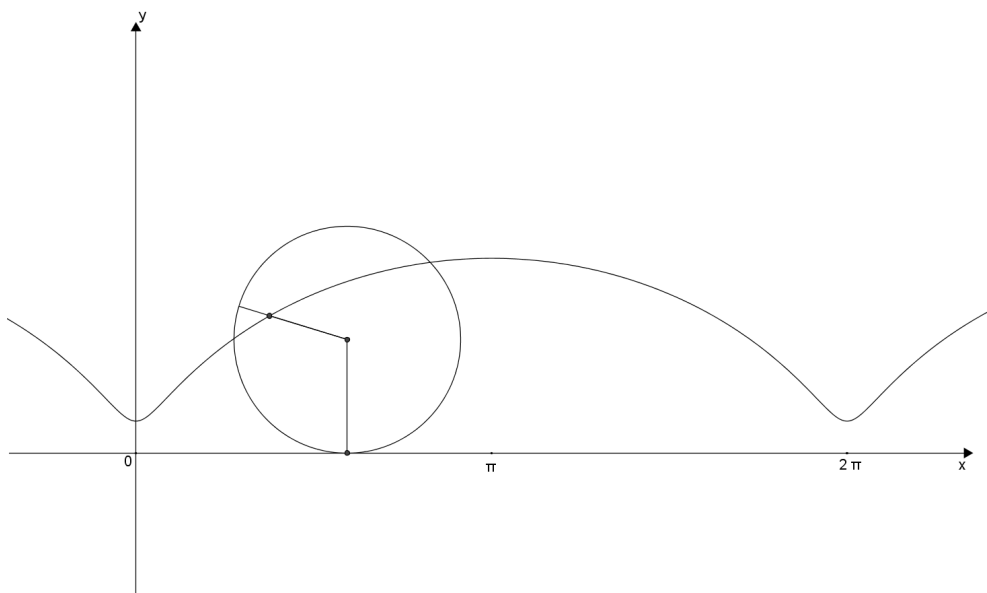
sledovaný bod opíše *zkrácenou cykloidu*.



Obrázek 1.13: Prostá cykloida



Obrázek 1.14: Prodloužená cykloida



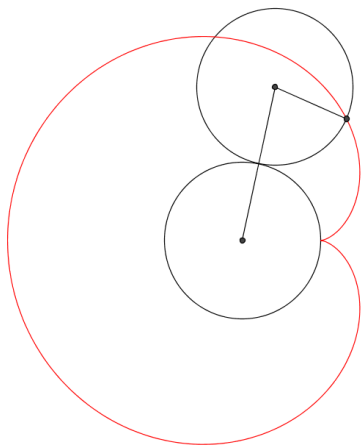
Obrázek 1.15: Zkrácená cykloida

1.5.2 Epicykloidy

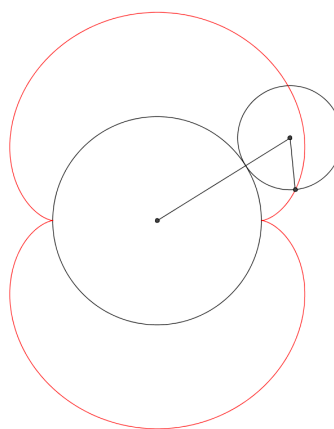
V tomto případě vznikají křivky jako trajektorie bodu při odvalování kružnice z venku po jiné kružnici bez smýkání. [4]

Pro různé poloměry těchto kružnic vycházejí různé křivky. Nejznámější z této skupiny je *kardioida* (Obr. 1.16) [8] a *nefroida* (Obr. 1.17), případně jiná epicykloida v zá-

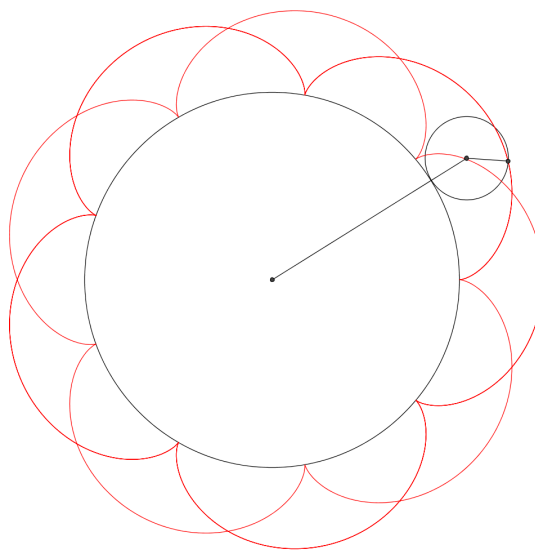
vislosti na poloměrech kružnic (Obr.1.18).



Obrázek 1.16: Kardioida



Obrázek 1.17: Nefroida



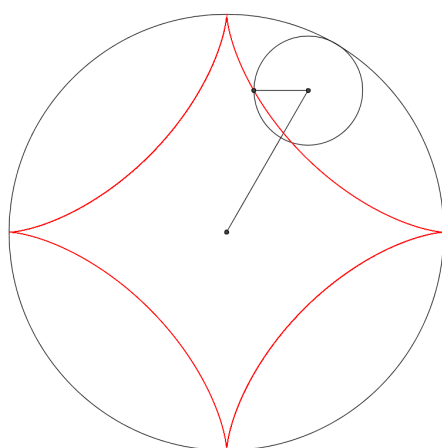
Obrázek 1.18: Epicykloida

1.5.3 Hypocykloidy

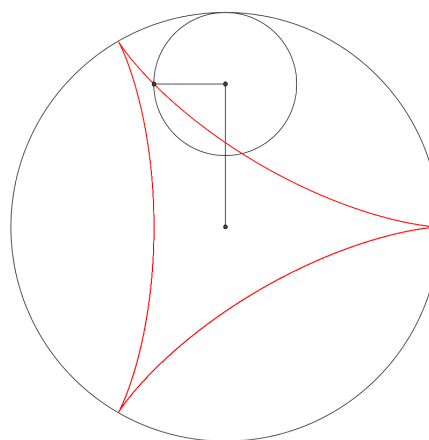
Hypocykloidy vznikají jako množiny bodů, které leží na kružnici, která se kotálí zevnitř po větší kružnici.

Neznámější z těchto křivek je *asteroida* (Obr. 1.19), která má poměr poloměrů kružnic roven $\frac{1}{4}$. V případě rovnosti poměru poloměrů $\frac{1}{3}$ získáme *deltoid* (Obr. 1.20) a pro poměr rovný $\frac{1}{2}$ získáme úsečku (Obr. 1.21).

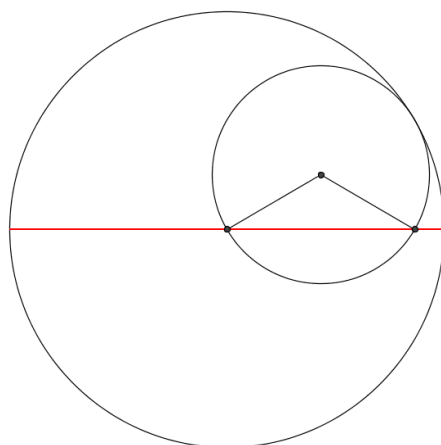
Případně v závislosti na poměru velikostí poloměrů kružnic vzniká obecná hypocykloida (Obr. 1.22).



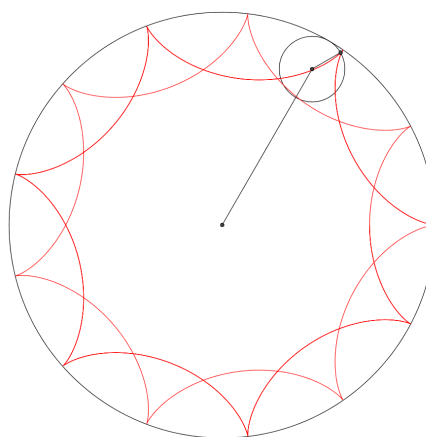
Obrázek 1.19: Asteroida



Obrázek 1.20: Deltoid



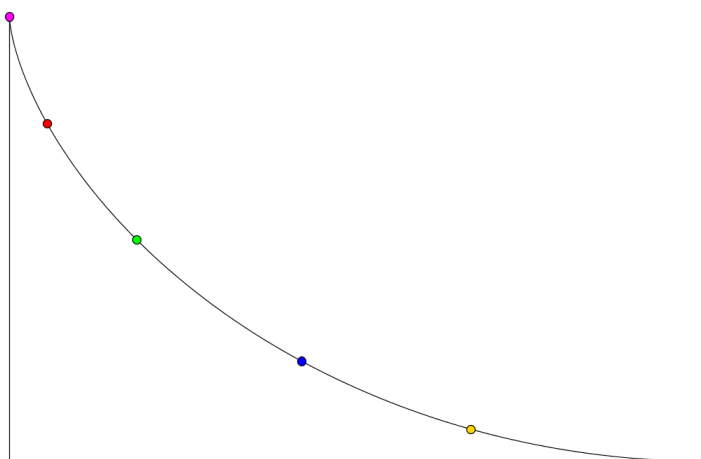
Obrázek 1.21: Úsečka



Obrázek 1.22: Hypocykloida

1.6 Izochronnost cykloidy

Cykloida je křivka, pro kterou platí, že pokud necháme kuličku volně se pohybovat po jejím oblouku do nejnižší polohy, dostane se do něj z libovolného bodu za stejný čas. Podle této vlastnosti je cykloida označována jako *izochronna* nebo *tautochronna*. Na následujícím obrázku se všechny kuličky spuštěné z různých bodů na křivce dostanou do nejnižšího bodu ve stejný čas.



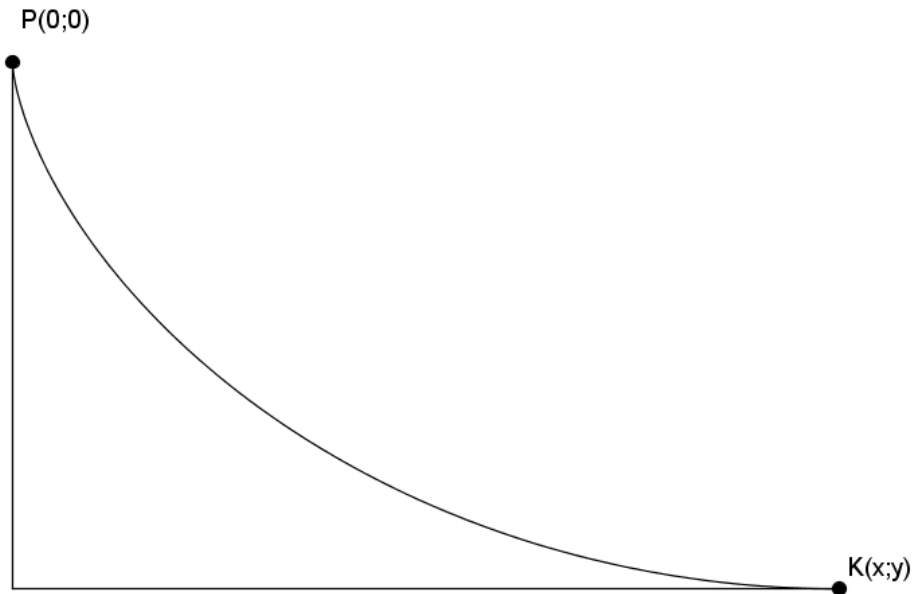
Obrázek 1.23: Izochronnost cykloidy

Při pohybu kuličky z počátečního bodu $P(0; 0)$ se mění kinetická energie kuličky z nulové hodnoty, protože rychlost v kuličky je také nulová. (Obr. 1.24)

Při pohybu z bodu $P(0; 0)$ do bodu $K(x; y)$ gravitační síla vykoná práci W , která se musí rovnat změně kinetické energie ΔE_k . To tedy znamená:

$$\begin{aligned}W &= \Delta E_k \\F_g y &= E_k - E_{k_0} \\mgy &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2\end{aligned}$$

Z této rovnosti vyplývá, že kulička dosáhne v bodě $K(x; y)$ rychlosti:



Obrázek 1.24: Pohyb bodu po cykloidě

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

kde ds je délka křivky, po které se pohybovala kulička a dále vyplývá, že:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

Pokud označíme T čas, po který se pohybovala kulička z bodu $P(0; 0)$ do bodu $K(a\pi; 2a)$, platí:

$$T = \int_0^{a\pi} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx$$

Čas T pohybu kuličky po cykloidě určíme z předcházející rovnice:

$$\begin{aligned}
T_{Cycl} &= \int_0^{a\pi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} dx \\
&= \int_0^{a\pi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} \left(\begin{array}{l} \text{z rovnic [1.4.1]} \\ dx = a(1 - \cos t)dt \\ dy = a \sin t dt \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right) \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos t)^2 dt^2 + a^2 \sin^2 t dt^2}{2ga(1 - \cos t)}} \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2 dt^2 ((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t)}{2ga(1 - \cos t)}} \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{2ga(1 - \cos t)}} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}} dt = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos t)}{2ga(1 - \cos t)}} dt \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a}{g}} dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\pi dt = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}$$

Výsledný čas $T_{Cycl} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ je čas pohybu kuličky po cykloidě.

Pokud pustíme kuličku z jiného bodu $P(x_0; y_0)$, který leží na cykloidě, tzn. $t_0 > 0$, získá kulička v bodě $P(x; y)$ rychlost:

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}$$

Podobně jako v předchozím případě můžeme určit čas, za který se kulička dostane do bodu $K(a\pi; 2a)$:

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2 \cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}} dt \\
&\left(\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\ \text{přepsané do tvaru:} \\ \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \end{array} \right) \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left[2 \cos^2\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1\right] - \left[2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right]}} dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{t_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} dt
\end{aligned}$$

Využijeme substituce:

$$\left(\begin{array}{l} u = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} \\ du = -\frac{\sin \frac{t}{2} dt}{2 \cos \frac{t_0}{2}} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{-2 \cos\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{t_0}{2}\right) - u^2 \cos^2\left(\frac{t_0}{2}\right)}} du \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{-2 \cos\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{t_0}{2}\right) (1 - u^2)}} du \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{-2 \cos\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t_0}{2}\right) \sqrt{(1 - u^2)}} du \\
&= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)}} du \\
&= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} [\arcsin u]_{t_0}^{\pi} \\
&= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\arcsin \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} \right]_{t_0}^{\pi} \\
&= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\arcsin \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} - \arcsin \frac{\cos \frac{t_0}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} \right] \\
&= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[0 - \frac{\pi}{2} \right] = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}$$

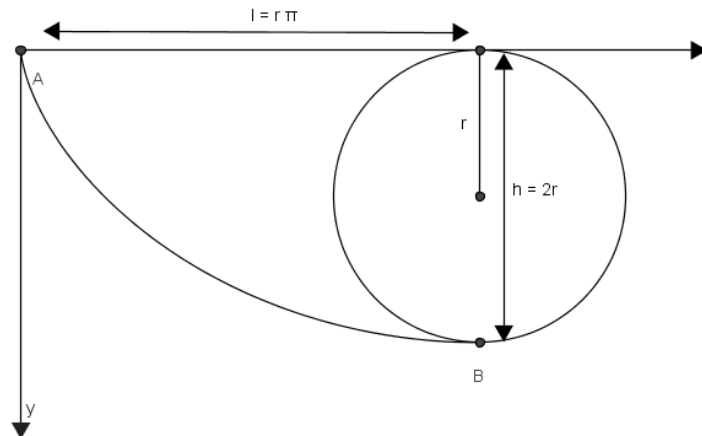
Časy T_{Cycl} a T nám vyšly stejné, proto je čas kuličky spuštěné z libovolného místa cykloidy stejný jako čas, který potřebuje kulička pro uražení celého oblouku cykloidy do bodu $K(a\pi; 2a)$. Tohoto jevu se využívá u matematického kyvadla. [11]

1.7 Porovnání cykloidy s jinými křivkami

V této kapitole si pomocí matematických výpočtů ověříme, že cykloida je křivkou nejkratšího času, tedy *brachistochronou*. Budeme porovnávat pohyb kuličky po cykloidě, přímce a parabole z počátečního bodu $A(0,0)$ do koncového bodu $B(l,h)$ daného cykloidou. Podle vlastností cykloidy je bod $B(r\pi, 2r)$ a při poloměru kotálející kruž-

nice $r = 1$ je tedy $B(\pi, 2)$. Budou nás zajímat časy, ve kterých kulička dosáhne tohoto koncového bodu.

1.7.1 Pohyb po cykloidě



Obrázek 1.25: Pohyb po cykloidě

Určíme čas T_C , ve kterém kulička dosáhne bodu $B(\pi, 2)$ viz [1.6]:

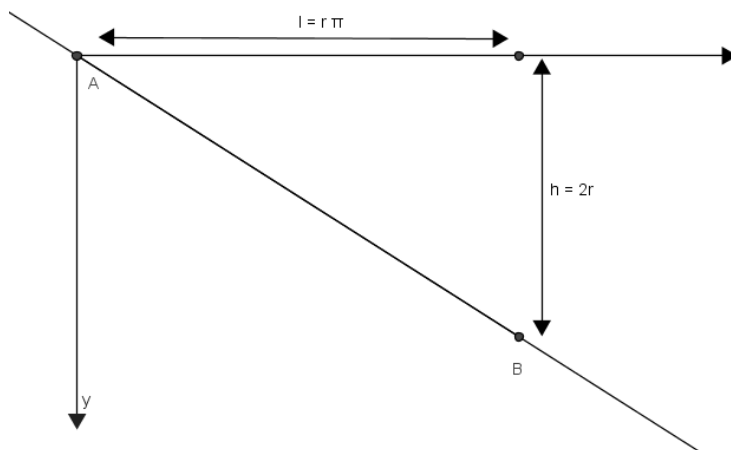
$$\begin{aligned}
 T_{Cykl} &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} \\
 &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{2gr(1 - \cos t)}} dt \\
 &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2r^2(1 - \cos t)}{2gr(1 - \cos t)}} dt \\
 &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{r}{g}} dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi dt = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}
 \end{aligned}$$

Získali jsme obecné řešení pro cykloidu, která vzniká z kotálející kružnice o polooměru r . My jsme si zvolili poloměr kružnice $r = 1$ [m], dosadíme známou gravitační konstantu $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Řešení tedy upravíme pro náš problém a získáme čas pohybu po cykloidě:

$$T_{Cykl} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \pi \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 1,0030 \text{ [s]}$$

1.7.2 Pohyb po přímce

Opět budeme hledat čas pohybu kuličky z bodu $A(0,0)$ do koncového bodu daného cykloidou $B(l,h)$ po přímce.



Obrázek 1.26: Pohyb po přímce

Zobrazenou přímku můžeme popsat pomocí parametrických rovnic:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{h}{l}t, \quad t \in \langle 0, l \rangle \end{aligned}$$

Čas pohybu určíme obdobně jako v kapitole [1.7.1] následně ve tvaru:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} \\ T_U &= \int_0^l \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} \begin{pmatrix} dx = dt \\ dy = \frac{h}{l}dt \\ y = \frac{h}{l}t \end{pmatrix} \\ &= \int_0^l \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2}{2g\frac{h}{l}t}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{2ghl}} dt \\
&= \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{2ghl}} \int_0^l \sqrt{\frac{1}{t}} dt \\
&= \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{2ghl}} \left[2\sqrt{t} \right]_0^l \\
&= \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{2ghl}} \left[2\sqrt{l} - 2\sqrt{0} \right] \\
&= \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{2ghl}} \sqrt{4l} \\
&= \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{h}}
\end{aligned}$$

Získali jsme čas pro obecnou nakloněnou přímkou, v dalším postupu tento vztah upravíme pro srovnání s cykloidou:

$$\begin{aligned}
T_U &= \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{l^2 + h^2}{h}} \left(\begin{array}{l} h = 2r \\ l = \pi r, r = 1 \end{array} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{g}}
\end{aligned}$$

Dále dosadíme gravitační konstantu a získáme čas pohybu kuličky po přímce mezi body $A(0,0)$ a $B(\pi,2)$.

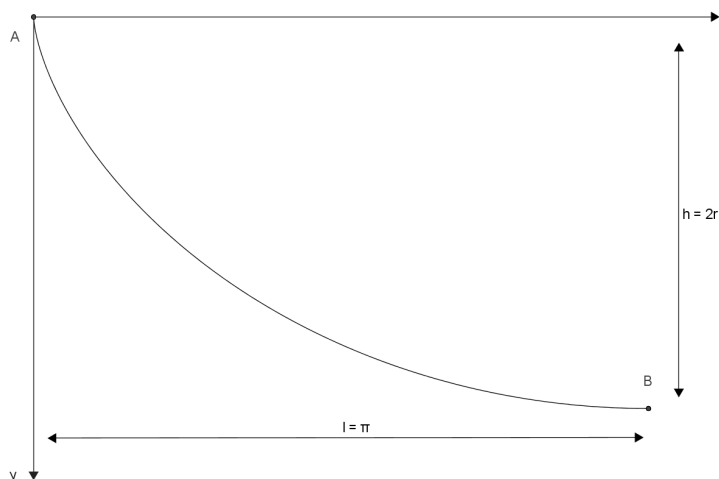
$$T_U = \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{9,81}} = 1,1890 [s]$$

1.7.3 Pohyb po parabole

Další křivkou, která může splňovat podmínky, že prochází ve vertikálním prostoru dvěma body, je parabola. Obecná rovnice paraboly, která vyhovuje našemu problému, je:

$$y^2 = 2px$$

Tato parabola má svůj vrchol v bodě $A(0,0)$ a prochází bodem $B(\pi,2)$.



Obrázek 1.27: Pohyb po parabole

Pokud tento bod $B(\pi,2)$ dosadíme do obecné rovnice paraboly získáme parametr p .

$$4 = 2p\pi$$

$$p = \frac{2}{\pi}$$

Parabola, která prochází body $A(0,0)$ a $B(\pi,2)$, má tedy rovnici:

$$y^2 = \frac{4}{\pi}x$$

Pro řešení našeho problému potřebujeme parametrické rovnice, které jsou:

$$x = \frac{1}{\pi}t^2$$

$$y = \frac{2}{\pi}t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

Obdobně jako v předcházejících případech využijeme výpočtu času pohybu kuličky po parabole:

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} \\
 T_P &= \int_0^l \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} \begin{pmatrix} dx = \frac{2t}{\pi} dt \\ dy = \frac{\pi}{2} dt \\ y = \frac{2}{\pi} t \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^l \sqrt{\frac{\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2g \frac{2}{\pi} t}} dt \\
 &= \int_0^l \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (t^2 + 1)}{\frac{2}{\pi} 2gt}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\pi g}} \int_0^l \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t}} dt
 \end{aligned}$$

Tento integrál bohužel neumíme symbolicky určit. Ale za pomoci výpočetní techniky dokážeme určit numericky jeho hodnotu, kterou můžeme použít k výpočtu.

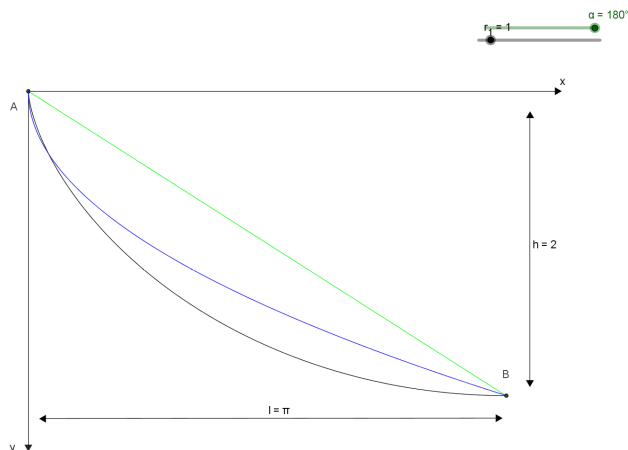
Při dosazení mezí integrálu podle souřadnic bodu $B(\pi, 2)$ získáme určitý integrál pro výpočet času pohybu kuličky po parabole T_P :

$$\begin{aligned}
 T_P &= \sqrt{\frac{1}{\pi g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\pi 9,18}} 2\sqrt{\pi} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\pi^2\right) \approx 1,0129[s][13]
 \end{aligned}$$

Tato parabola byla velmi dlouhou dobu považována za správné řešení problému brachistochrony, ale v roce 1646 Christian Huygens tuto myšlenku vyvrátil.

1.7.4 Srovnání

Všechny trajektorie, u kterých jsme zjišťovali čas sestupu kuličky v gravitačním poli, nyní porovnáme. Ve všech případech se bod pohyboval ze stejného počátečního bodu $A(0,0)$ do koncového bodu $B(\pi,2)$, který jsme určili jako vrchol cykloidy, která vznikla při kotálení kružnice s poloměrem $r = 1m$.



Obrázek 1.28: Srovnání možností pohybu

V případě cykloidy byl výsledný čas pohybu roven $1,0030s$.

U přímky jsme získali výsledný čas pohybu $1,1890s$. Tento čas sestupu je v porovnání s cykloidou o $0,1860s$ delší.

Čas, po který by se pohybovala kulička po parabole, je $1,0129s$. Tento čas je větší o $0,099s$ než čas pohybu po cykloidě.

Nejrychlejší trajektorie pohybu je po cykloidě.

Časy, které jsme získali pomocí matematických výpočtů, jsou pouze teoretické. V reálném prostředí by byly ovlivněny odporem prostředí a třením mezi pohybující se kuličkou a materiálem, ze kterého je vyrobena dráha.

2 Witch of Agnesi

V matematice je pojem „*Witch of Agnesi*“, občas nazývaný jako „*Witch of Maria Agnesi*“, znám jako křivka.

2.1 Historie křivky

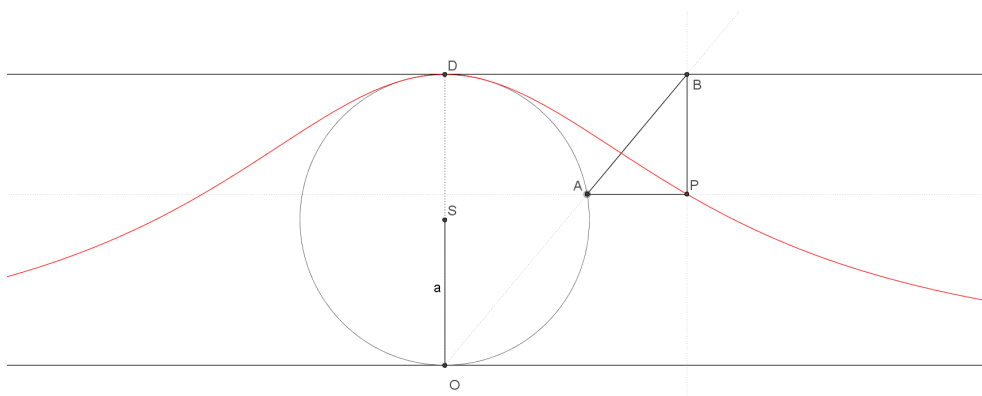
Křivku „*Witch of Agnesi*“ studoval již v roce 1630 Pierre de Fermat a v roce 1703 získal Guido Grandi možnost, jak tuto křivku zkonstruovat. Později Grandi ve své práci navrhl pro tuto křivku jméno „*versoira*“ latinský název pro list nebo lano, který se v italštině zapisoval jako „*versiera*“.

Další, kdo se ve své práci zabýval touto křivkou, byla Marie Gaetana Agnesi, velmi nadaná dívka, která se narodila roku 1718 v Miláně a v roce 1748 vydala publikaci „*Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*“. To je první dochovaná matematická publikace, kterou napsala žena. Na její počest byla křivka pojmenována „*la versiera di Agnesi*“. [10]

Název „*witch*“ pochází z chyby anglického překladu z roku 1801, kde si překladatel University v Cambridge Jonh Colson zaměnil slova „*la versiera*“ - křivka se slovem „*l'aversiera*“ - čarodějnice. [12]

2.2 Konstrukce křivky

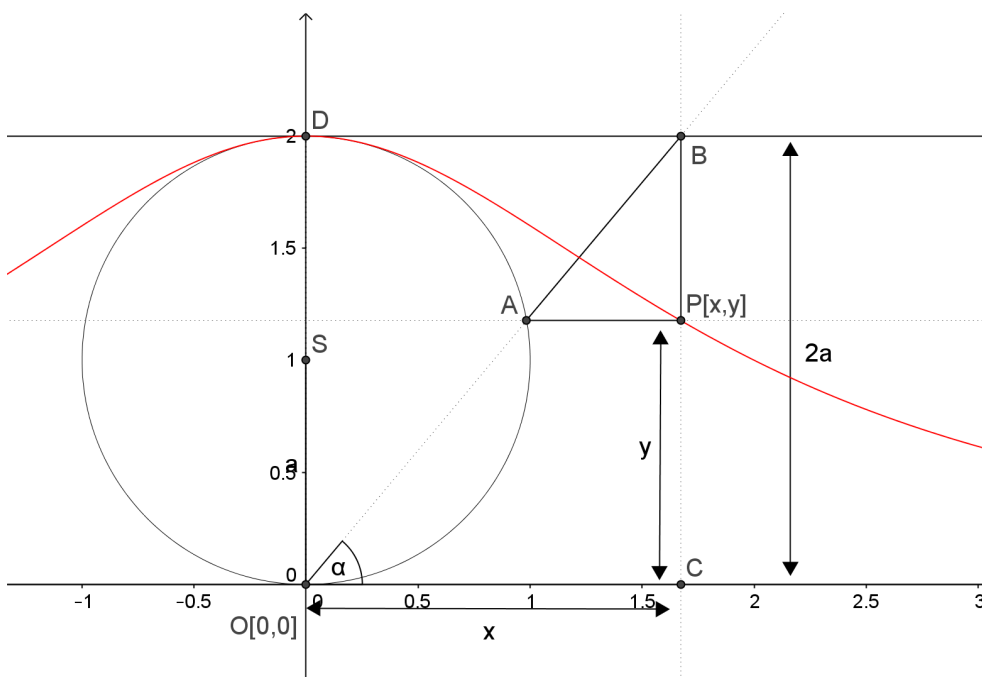
Křivka vzniká, pokud je dána pevná kružnice k s poloměrem a a s pevným bodem O na svém obvodu a pohyblivým bodem A , který obíhá po obvodu kružnice a prochází jím polopřímka OA . Bod D tvoří s bodem O průměr kružnice. Tečna vedoucí bodem D protíná polopřímku OA v bodě B . Rovnoběžka s tečnou procházející bodem A a kolmice na tečnu procházející bodem B vytváří společný průsečík P . Při pohybu bodu A po kružnici k bod P vykresluje křivku, která se v českém překladu nazývá „Čarodějnice Agnesi“.



Obrázek 2.1: Křivka „Witch of Agnesi“

2.3 Parametrické rovnice křivky

Pokud chceme získat parametrické rovnice křivky, musíme si ji vhodně umístit do souřadnicového systému a zvolit si parametr, na kterém bude záviset pozice bodu P , který tvoří množinu bodů křivky.



Obrázek 2.2: Závislost bodu P

Jako parametr volíme úhel α , který svírá polopřímka OA s kladným směrem osy x .
(Obr. 2.2) Dále určíme jednotlivé souřadnice bodu $P(x,y)$:

$$\cot \alpha = \frac{|OC|}{|BC|}$$

kde $|OC|$ je hledaná souřadnice x a $|BC|$ je rovna průměru kružnice, tedy $2a$.

$$\begin{aligned}\cot \alpha &= \frac{x}{2a} \\ x &= 2a \cot \alpha\end{aligned}$$

Druhá souřadnice bodu $P(x,y)$ závisí na vzdálenosti bodu od tečny procházející bodem D

$$\begin{aligned}y &= 2a - |BP| \\ y &= 2a - |AB| \sin \alpha\end{aligned}$$

Podle Euklidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku platí:

$$|DB|^2 = |OB| \cdot |AB|$$

kde

$$\begin{aligned}|DB| &= |OC| = x \\ |OB| &= |OC| \cdot \cos \alpha = x / \cos \alpha\end{aligned}$$

Po dosazení do Euklidovy věty získáme:

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{x}{\cos \alpha} \cdot |AB| \\ x &= \frac{|AB|}{\cos \alpha}\end{aligned}$$

po dosazení závislosti souřadnice $x = 2a \cot \alpha$ získáme:

$$\begin{aligned}2a \cot \alpha &= \frac{|AB|}{\cos \alpha} \\ |AB| &= 2a \cot \alpha \cdot \cos \alpha \\ |AB| &= 2a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \\ |AB| &= 2a \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

Pokud tuto rovnost dosadíme do první rovnice, získáme:

$$y = 2a - \sin \alpha \cdot 2a \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$y = 2a (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$y = 2a \sin^2 \alpha$$

Parametrické rovnice křivky tedy jsou:

$$x = 2a \cot \alpha$$

$$y = 2a \sin^2 \alpha$$

2.4 Kartézské rovnice

Pokud vzorce, které jsme získali při řešení parametrických rovnic

$$x = 2a \cot \alpha$$

$$y = 2a \sin^2 \alpha$$

upravíme a budeme se snažit vyloučit zvolený parametr α , postupně získáme:

$$x = 2a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = 2a \frac{\cos \alpha}{x}$$

Vyjádřenou závislost pro funkci *sinus* dosadíme do parametrické rovnice y-ové souřadnice a pokračujeme v úpravách

$$y = 2a \left(2a \frac{\cos \alpha}{x} \right)^2$$

$$y = \frac{8a^3 \cdot \cos^2 \alpha}{x^2}$$

Pokud využijeme vztah, který vychází z obrázku (Obr. 2.2) pro libovolný úhel α získáme:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (2a)^2}}$$

$$y = \frac{8a^3 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (2a)^2}} \right)^2}{x^2}$$

$$y = \frac{8a^3}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + (2a)^2}$$

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Získaná rovnice je kartézskou rovnicí naší křivky a parametr a udává poloměr kružnice, díky které nám křivka vznikla.

2.5 Vlastnosti křivky

Tato křivka má pozoruhodné vlastnosti, které můžeme objevit při jejím dalším studiu.

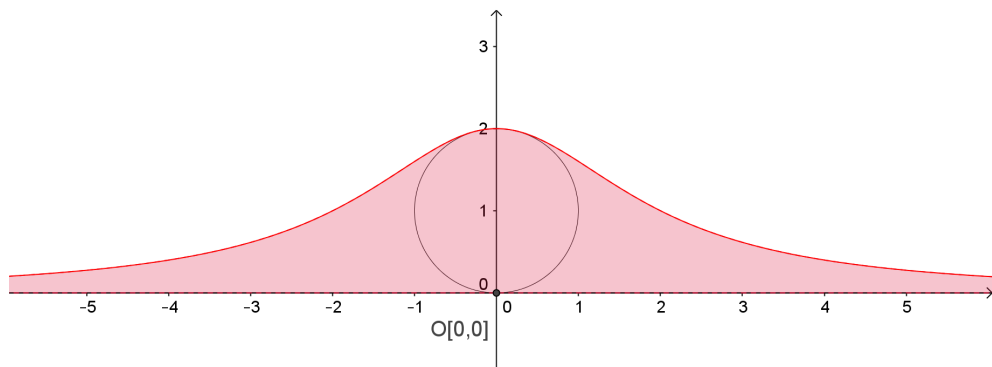
Pokud bychom poloměr kružnice, díky níž tato křivka vznikla, zvolili $r = a = \frac{1}{2}$, získáme jednoduchou rovnici:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Tento výraz je roven první derivaci funkce $y = \arctan x$.

Plochu mezi touto křivkou a její asymptotou $y = 0$ (Obr. 2.3) získáme jako

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx \\
 &= 8a^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + 1} dx \\
 &= 8a^3 \left[\frac{\arctan \frac{x}{2a}}{2a} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= 8a^3 \left[\frac{\arctan \frac{\infty}{2a}}{2a} - \frac{\arctan \frac{-\infty}{2a}}{2a} \right] \\
 &= 8a^3 \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{2a} - \frac{\frac{-\pi}{2}}{2a} \right] \\
 &= 8a^3 \left[\frac{\pi}{2a} \right] \\
 S &= 4\pi a^2
 \end{aligned}$$



Obrázek 2.3: Plocha pod křivkou

Plocha mezi křivkou a její asymptotou je rovna čtyřnásobku obsahu kružnice, která je její součástí.

3 Pascalova závitnice - Limaçon

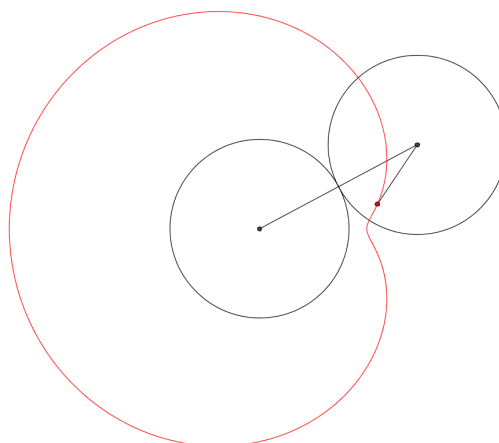
3.1 Historie křivky

Křivka byla poprvé popsána již v roce 1525 německým umělcem Albrechtem Dürerem. Kolem roku 1630 se tímto problémem dále zabýval amatérský matematik Étienne Pascal, otec slavného Blaise Pascala, který je znám především díky poznatkům z fyziky. Křivku pojmenoval až v roce 1650 francouzský matematik Gilles Personne de Roberval jako *limaçon*. To v překladu do češtiny znamená *kochlea*, což je latinský výraz používaný pro část sluchového ústrojí nazývanou hlemýžď. Původ slova *limaçon* je v latinském *limax* v překladu *plž*. [1]

3.2 Konstrukce křivky

3.2.1 Limaçon jako epicykloida

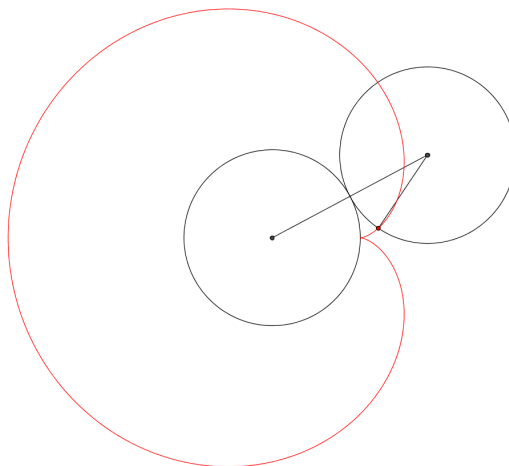
Popisovaná křivka patří mezi trochoidy. Jedna z mnoha možných konstrukcí je jako epicykloida. Vzniká tedy při odvalování kružnice po jiné kružnici, ovšem v tomto případě neleží bod opisující křivku na kružnici, ale na přímce procházející středem odvalované kružnice. (Obr. 3.1)



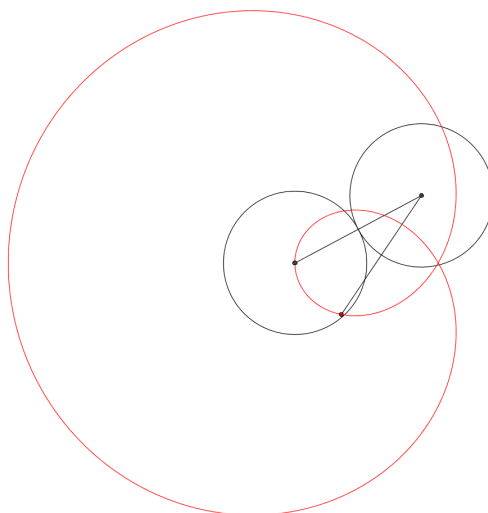
Obrázek 3.1: Limaçon

V závislosti na poloze bodu na zmíněné přímce vzniká několik různých křivek.

Pokud je vzdálenost bodu od středu kružnice rovna poloměru odvalující se kružnice, získáme křivku zvanou *kardioida*. (Obr. 3.2)



Obrázek 3.2: Kardioida



Obrázek 3.3: Limaçon trisectrix

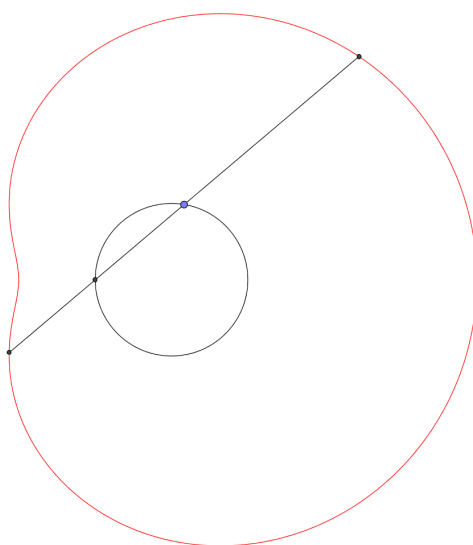
Při vzdálenosti bodu od středu větším než průměr kotálející se kružnice, získáme křivku *limaçon trisectrix*, zkráceně jako *trisectrix*. (Obr. 3.3) [9]

3.2.2 Limaçon jako množina bodů

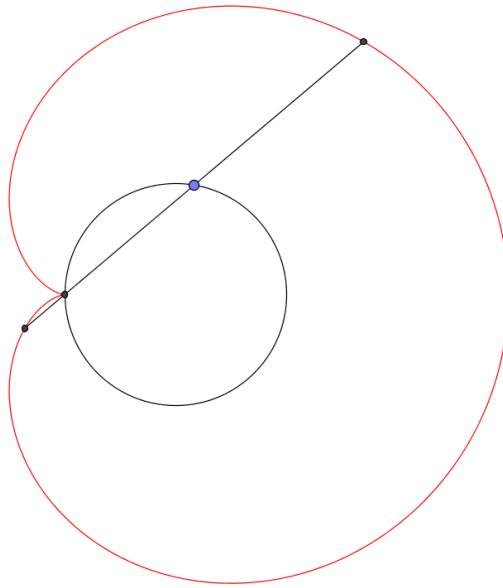
Další možností, jak sestrojít *limaçon*, je využít úsečky pevné délky, kde její střed obíhá po kružnici a úsečka prochází pevným bodem, který leží na dané kružnici, nebo do něj směřuje, pokud je její polovina menší než průměr kružnice. [5]

Opět v závislosti poměrů velikostí úsečky a a poloměru kružnice r získáme křivky jako v předchozím případě.

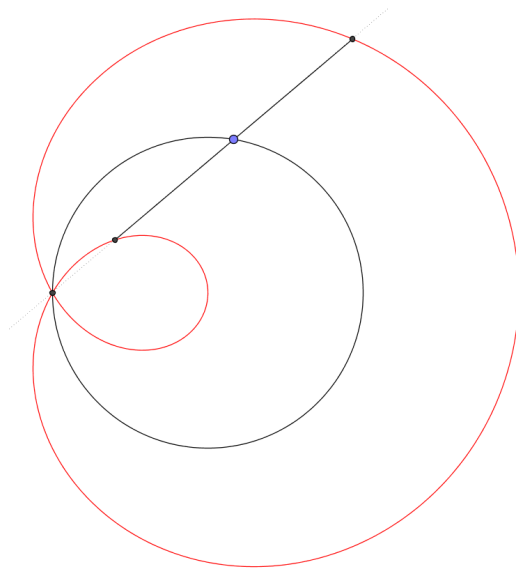
Pro $a = 3$ a $r = 1$ je křivkou *limaçon* (Obr. 3.4), v případě $a = 2$ a $r = 1$ vznikne *kardioida* (Obr. 3.5) a pokud $a = 1$ a $r = 1$ dostaneme *trisectrix* (Obr. 3.6).



Obrázek 3.4: Limaçon



Obrázek 3.5: Kardioida

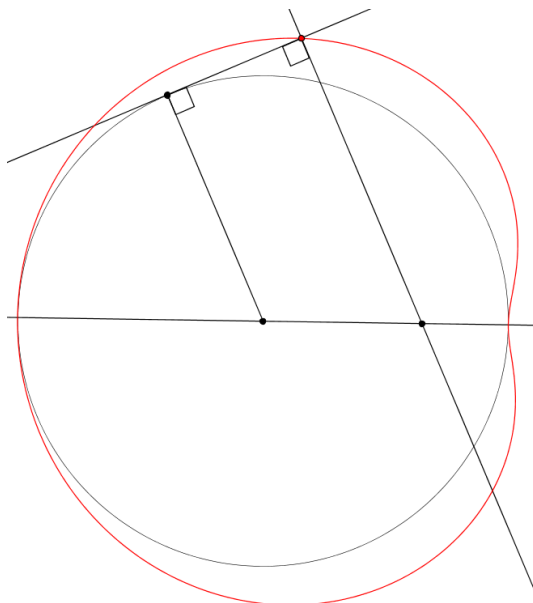


Obrázek 3.6: Trisectrix

3.2.3 Limaçon jako množina pat kolmic

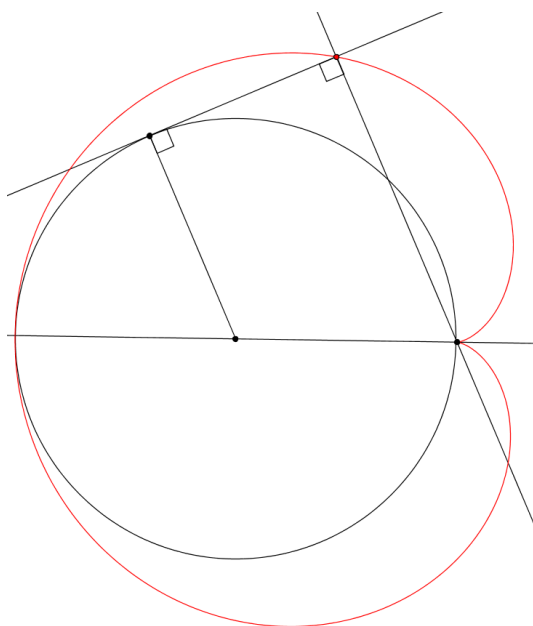
Další možností, jak získat *limaçon*, je sestrojít množinu bodů dané vlastností. Touto vlastností je průsečík tečny ke kružnici a kolmice na tuto tečnu vedenou pevně daným bodem. (Obr. 3.7)[1]

Pokud budeme posouvat zvoleným bodem po přímce procházející středem kruž-

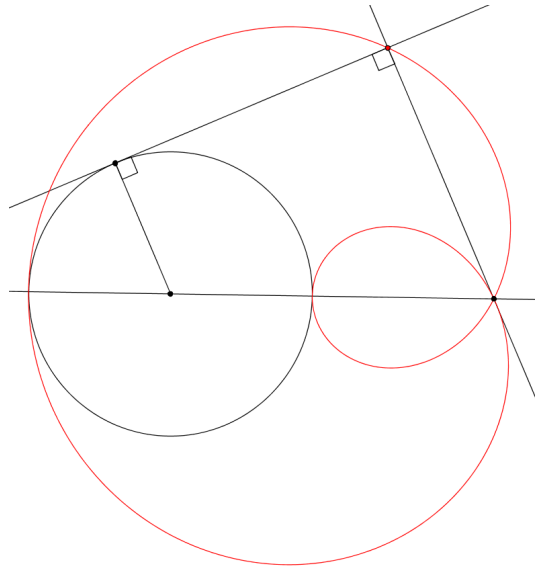


Obrázek 3.7: Limaçon jako množina pat kolmic

nice, získáme opět křivky jako v předchozí kapitole. (Obr. 3.8 a 3.9)



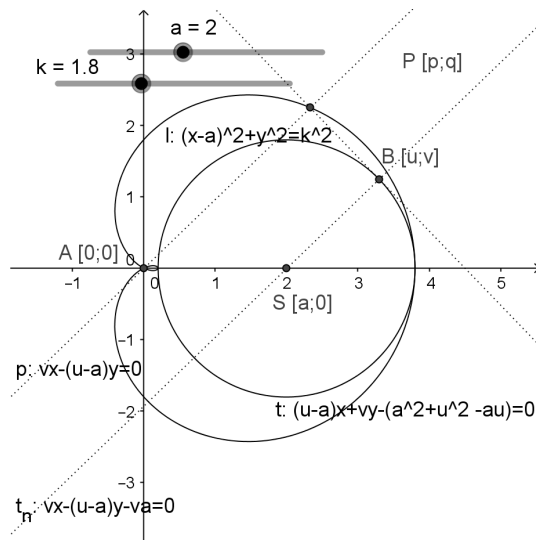
Obrázek 3.8: Kardioida jako množina pat kolmic



Obrázek 3.9: Trisectrix jako množina pat kolmic

3.3 Rovnice křivky

Pro odvození rovnic této křivky je třeba popsat danou situaci pomocí soustavy rovnic. A zároveň je potřeba umístit si obrázek do soustavy souřadnic tak, že $S[a; 0]$ a bod $A[0; 0]$. [8]



Obrázek 3.10: Limaçon v soustavě souřadné

Poté postupně získáme hledané rovnice.

Rovnice kružnice k s poloměrem k , po které se pohybuje bod $B[u; v]$:

$$k : (x - a)^2 + y^2 = k^2$$

Bod B leží na této kružnici a splňuje tedy rovnici:

$$B \in k : (u - a)^2 + v^2 = k^2$$

Bodem B prochází přímka, která má rovnici:

$$B \in t_n : vx - (u - a)y - va = 0$$

Tečna t ke kružnici k , která prochází bodem B je kolmá na přímkou t_n :

$$t : (u - a)x + vy - (a^2 + u^2 - au) = 0$$

Přímka p prochází bodem $A[0; 0]$ a je kolmá na tečnu t :

$$p : vx - (a - u)y = 0$$

Bod $P[p; q]$ leží na přímkách p a t a splňuje rovnice:

$$C \in t : (u - a)x + vy - C = 0$$

$$C \in p : vx - (a - u)y = 0$$

Získáváme tedy soustavu tří rovnic:

$$(u - a)^2 + v^2 = k^2$$

$$(u - a)p + vq - (a^2 + u^2 - au) = 0$$

$$vq - (a - u)q = 0$$

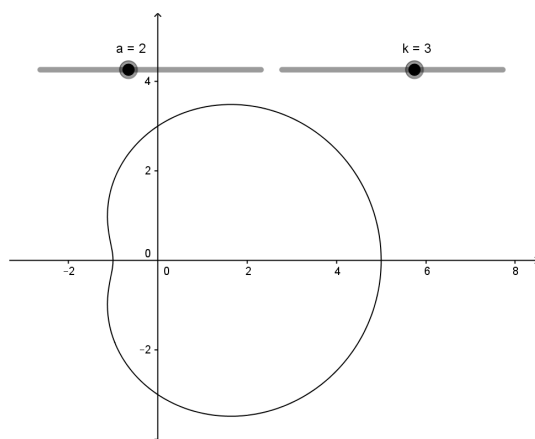
Eliminací proměnných u, v z rovnic, za pomoci programu CoCoA, získáme rovnici křivky v závislosti na parametrech a a k .

$$(p^2 + q^2 + ap)^2 = k^2 (p^2 + q^2)$$

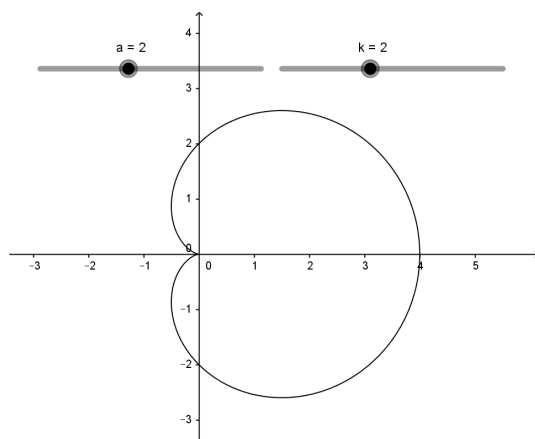
Po nahrazení proměnných p, q za x, y získáme rovnici:

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = k^2 (x^2 + y^2)$$

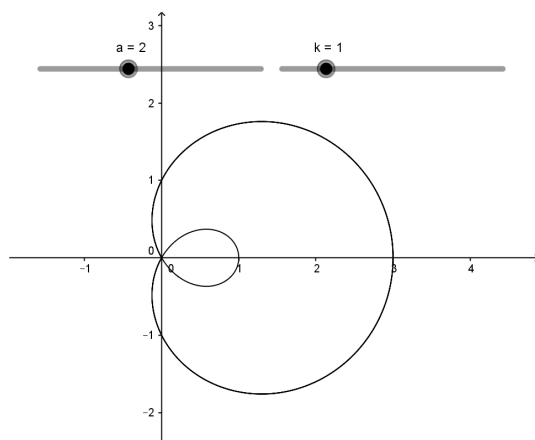
Opět pro různé hodnoty parametru získáváme tři známé křivky.



Obrázek 3.11: Limaçon



Obrázek 3.12: Kardioida



Obrázek 3.13: Trisectrix

Závěr

V této diplomové práci jsem spojil historické matematické problémy se současnými možnostmi konstrukcí křivek a způsoby řešení pomocí moderních metod a technologií.

V první kapitole jsem ověřil, že křivka nazývaná brachistochrona je nejrychlejší spojnici dvou bodů ve vertikálním gravitačním poli.

Ve druhé kapitole jsem se zabýval křivkou „Čarodějnice Agnesi“. V jejím názvu se vyskytují dvě zajímavosti. První je její pojmenování po italské matematické a druhou je chyba v překladu, která jí přinesla označení čarodějnice.

Ve třetí kapitole jsem prozkoumal křivku Limaçon a to z různých konstrukčních možností.

Při práci v dnešních podmínkách jsem obdivoval schopnosti a znalosti autorů matematického řešení problému, kteří pracovali v jednoduchých podmínkách.

Práce mě zaujala, přinesla mi nové pohledy na matematiku a nové poznatky z dějin matematiky.

Seznam použité literatury

- [1] FERRÉOL, R.: Limacon Pascal. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <<http://www.mathcurve.com/courbes2d/limacon/limacon.shtml>>
- [2] I.R.E.M.: *History of Mathematics: Histories of Problems*. Paris: Ellipses-Marketing, 1997, ISBN 2-7298-4730-8.
- [3] LAWRENCE, J.: *A catalog of special plane curves*. New York: Dover publications, 1972, ISBN 04-866-0288-5.
- [4] LEE, X.: Epicykloid and Hypocycloid. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/EpiHypocycloid_dir/epiHypocycloid.html>
- [5] LEE, X.: Limacon Of Pascal. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/LimaconOfPascal_dir/limaconOfPascal.html>
- [6] LOCKWOOD, E. H.: *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [7] SHIKIN, E.: *Handbook and atlas of curves*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995, ISBN 08-493-8963-1.
- [8] VÁŇA, J.: *Vyšetřování množin bodů daných vlastností s užitím software dynamické geometrie*. České Budějovice: JČU PF, 23.5.2016.
- [9] WASSENAAR, J.: Limacon. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <<http://www.2dcurves.com/roulette/roulettel.html>>
- [10] WIKIPEDIA: Maria Gaetana Agnesi. Wikipedia the free encyclopedia. [online], [cit. 10.04.2018].
URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi>

- [11] WISSTEIN, E. W.: „Tautochrone Problem.“ From MathWorld A Wolfram Web Resource. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <<http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>>
- [12] WISSTEIN, E. W.: „Whitch of Agnesi.“ From MathWorld A Wolfram Web Resource. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <<http://mathworld.wolfram.com/WitchofAgnesi.html>>
- [13] WOLFRAM|ALPHA: Wolfram Alpha computational knowledge engine. [online], [cit. 24.03.2018].
URL <<http://www.wolframalpha.com/>>

Seznam obrázků

1.1	Pozice bodů v prostoru	9
1.2	Galileovy padající tělesa	11
1.3	Galileův postup řešení	12
1.4	Galileovo řešení	12
1.5	Úhel odrazu	13
1.6	Úhel lomu	14
1.7	Pohyb přes segmenty	15
1.8	Závislost úhlu u	16
1.9	Odvození rovnice cykloidy	17
1.10	Cykloida	18
1.11	Newtonova konstrukce	19
1.12	Cykloida	22
1.13	Prostá cykloida	24
1.14	Prodloužená cykloida	25
1.15	Zkrácená cykloida	25
1.16	Kardioida	26
1.17	Nefroida	26
1.18	Epicykloida	26
1.19	Asteroida	27
1.20	Deltoid	27
1.21	Úsečka	27
1.22	Hypocykloida	27
1.23	Izochronnost cykloidy	28
1.24	Pohyb bodu po cykloidě	29
1.25	Pohyb po cykloidě	33
1.26	Pohyb po přímce	34
1.27	Pohyb po parabole	36
1.28	Srovnání možností pohybu	38

2.1	Křivka „Witch of Agnesi“	40
2.2	Závislost bodu P	40
2.3	Plocha pod křivkou	44
3.1	Limaçon	45
3.2	Kardioida	46
3.3	Limaçon trisectrix	46
3.4	Limaçon	47
3.5	Kardioida	48
3.6	Trisectrix	48
3.7	Limaçon jako množina pat kolmic	49
3.8	Kardioida jako množina pat kolmic	49
3.9	Trisectrix jako množina pat kolmic	50
3.10	Limaçon v soustavě souřadné	50
3.11	Limaçon	52
3.12	Kardioida	52
3.13	Trisectrix	52