Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Historické početní postupy a jejich aplikace ve výuce

Vypracovala: Bc. Michaela Divíšková
Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.

České Budějovice 2018

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Heleně Koldové, Ph.D. za odbornou pomoc a cenné rady při zpracovávání mé diplomové práce. Dále děkuji vedení a učitelskému sboru ZŠ a MŠ Mirovice za pomoc při ověřování pracovních listů.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Historické početní postupy a jejich aplikace ve výuce jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 2. 1. 2018

....

Bc. Michaela Divíšková

Anotace

Ve své diplomové práci se zabývám historickými početními postupy a jejich aplikací ve výuce.

V celkem osmi kapitolách popisuji početní techniky z historie, jako jsou magické čtverce, zajímavé počtářské algoritmy, netradiční kritéria dělitelnosti, starověké početní postupy, zlatý řez, figurální čísla a grafické papíry. V závěrečné kapitole se věnuji využití historických početních postupů ve výuce. Tato kapitola obsahuje osm pracovních listů a návrhů aktivit s metodickým komentářem.

Annotation

In my diploma thesis I deal with historical numerical procedures and their application in teaching.

In a total of eight chapters, I describe counting techniques from history, such as magic squares, interesting counting algorithms, unconventional divisibility criteria, ancient numeration techniques, golden ratio, figurate numbers, and graphic papers. I deal with the use of historical numerical methods in teaching in the final chapter. This chapter contains eight worksheets and activity suggestions with methodical commentary.

Obsah

1 Úvod

Při studiu matematiky často narážíme na historické souvislosti spjaté s jejím rozvojem. Když se začneme zabývat historií jednotlivých matematických vědomostí a znalostí, mnohdy zjišťujeme, že ne všechny matematické zákonitosti jsou pojmenovány po svém původním objeviteli. Mají pouze jméno svého popularizátora nebo člověka, který danou zákonitost rozšířil o další vědomosti. Problém spočívá asi v tom, že si v minulosti nedokázaly jednotlivé civilizace předávat své poznatky. Některé ze znalostí byly dokonce zapomenuty jen díky času a nebyly poskytnuty dalším generacím.

Historickým vývojem početních postupů a výpočetních technik jsem se zabývala už ve své bakalářské práci. Věnovala jsem se zejména vznikem a vývojem poziční desítkové soustavy, základních početních postupů a algoritmů. Dále jsem popisovala některé historické pomůcky pro usnadnění výpočtů.

Tato práce má dvě části. Cílem první části bylo rozšíření bakalářské práce o další témata z historie matematiky. V jednotlivých kapitolách jsem se věnovala magickým čtvercům, některým zajímavým počtářským algoritmům, netradiční dělitelnosti, zlatému řezu, figurálním číslům a grafickým papírům.

Ve druhé části práce uvádím několik příkladů využití historických početních postupů ve výuce matematiky na dnešních základních školách v podobě pracovních listů.

2 Magické čtverce

2.1 Vymezení pojmů

Magickým čtvercem n-tého řádu rozumíme uspořádání přirozených čísel 1 až n^2 do čtvercové tabulky o n řádcích a n sloupcích tak, že součet čísel na každé řádce, na každém sloupci i na obou úhlopříčkách je stejný a nazývá se **konstantou** k **magického čtverce**. Protože čísla jsou do řad i sloupců rozdělena rovnoměrně, je zřejmé, že číslo k se rovná jedné n-tině součtu všech čísel od 1 do n^2. Konstanta k je tedy rovna

$$k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2} \cdot (1 + n^2) = 0,5 \cdot n \cdot (1 + n^2),$$

kde $\frac{n^2}{2} \cdot (1 + n^2)$ je součet všech použitých čísel.

Magické čtverce existují pro každé $n \geq 3$. Hodnoty konstant k pro magické čtverce řádu 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... tvoří posloupnost čísel 15, 34, 65, 111, 175, 260, ...

2.2 Historie magických čtverců

První magický čtverec vznikl již v 7. století př. n. l. v Číně. Nazýval se Lo Shu a byl 3. řádu. ([9], str. 27). Viz obrázek 2.1.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 2.1: Magický čtverec Lo Shu

Ukázalo se, že magický čtverec 3. řádu existuje jen jeden, pokud nebereme v úvahu jeho transformace vzniklé pomocí shodných zobrazení. Francouzský matematik Bernard Frénicle de Bessy v 17. stol. našel všech 880 různých čtverců 4. řádu. Teprve matematikům moderní doby se podařilo zjistit, že magických čtverců 5. řádu existuje 275 305 224. ([9], str. 19)

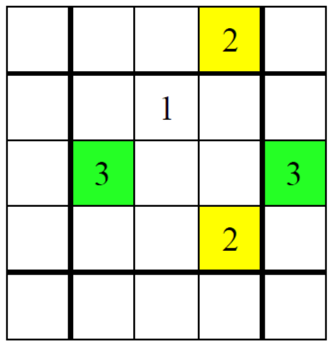
Magické čtverce 4., 5. a 6. řádu se objevily již také v Persii a Indii v 1. tisíciletí n. l.

Vytváření magických čtverců ve starověku bylo spojováno s mystickými představami, s numerologií a astrologií. Sestavení magických čtverců nebylo pro laika jednoduché, a proto byly často považovány za amulety. Výrobci a trhovci měli z pověrčivých lidí veliké zisky až do doby, kdy byl prozrazen návod na jejich sestavení.

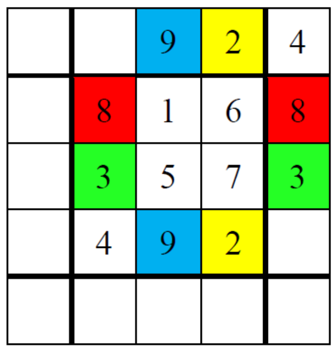
Konstrukcí magických čtverců se vážně začali zabývat matematici, kteří postupně objevovali algoritmy pro jejich sestavení. Popravdě řečeno ani dnes ještě neznáme obecný algoritmus pro sestavení magického čtverce libovolného řádu. Dovedeme sestavit magický čtverec pro libovolné liché n a pro sudé n, které je čtyřnásobkem nebo šestinásobkem přirozeného čísla.

2.3 Konstrukce magických čtverců lichého řádu

Magické čtverce lichých řádů se sestavují podle různých algoritmů. Budeme se zde zabývat jen dvěma z nich, které se liší jen formálně. Oba vycházejí z myšlenky, že vytvářený čtverec je „dlaždice", která se stále opakuje při zachované orientaci ve vydlážděné ploše. Ukážeme si první konstrukci na magickém čtverci 3. řádu. ([9], str. 108)



Obr. 2.2: Postup konstrukce magického čtverce



Obr. 2.3: Postup konstrukce magického čtverce

Číslo 1 umístíme do středního pole horního řádku (obr. 2.2) a pokračujeme šikmo vpravo nahoru. Číslo 2 je tak až na další „dlaždici". Přepíšeme je proto na stejné místo naší „dlaždice" a pokračujeme. Po zapsání čísla 3 už nemůžeme pokračovat, protože potřebné pole je už obsazeno číslem 1. Proto číslo 4 zapíšeme pod číslo 3 (obr. 2.3) a doplníme čísla 5 a 6. Číslo 7 nemůžeme napsat do levého dolního rohu, ten je obsazen číslem 4, takže je napíšeme pod číslo 6. Ještě doplníme číslo 8 a 9. Získáme tak magický čtverec, který má $k = 3$ a středové číslo 5.

Analogicky můžeme sestavit magické čtverce 5. a 7. řádu (obr. 2.4 a 2.5), popřípadě čtverce dalších lichých řádů. ([9], str. 127)

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

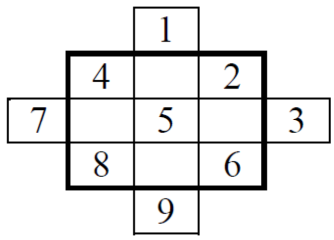
Obr. 2.4: Magický čtverec 5. řádu

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

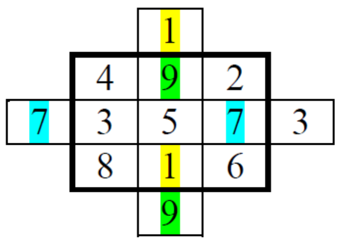
Obr. 2.5: Magický čtverec 7. řádu

Magický čtverec 5. řádu má $k = 65$ a středové číslo 13. Magický čtverec 7. řádu má $k = 175$ a středové číslo 25.

Nyní si ukážeme druhou zmíněnou konstrukci magického čtverce 3. řádu. Na obrázku 2.6 je znázorněno výchozí schéma a na obrázku 2.7 pak hotový magický čtverec. ([9], str. 99)



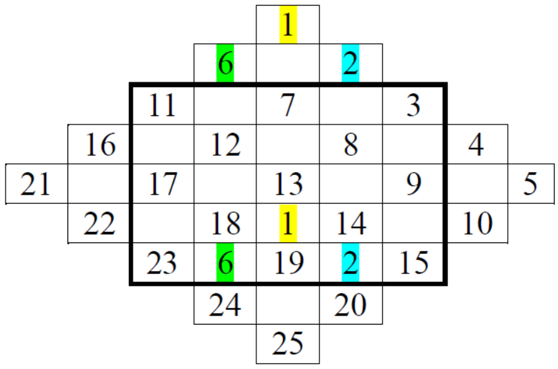
Obr. 2.6: Výchozí schéma konstrukce magického čtverce 3. řádu



Obr. 2.7: Výsledný magický čtverec 3. řádu

Porovnáme-li oba magické čtverce získané různou konstrukcí (obr. 2.3 a obr. 2.7), je zřejmé, že se liší pouze výměnou 1. a 3. řádku.

Podobně lze sestrojit i magický čtverec 5. řádu. ([9], str. 100)



Obr. 2.8: Postup konstrukce magického čtverce 5. řádu

11	24	7	20	3
4	12	35	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

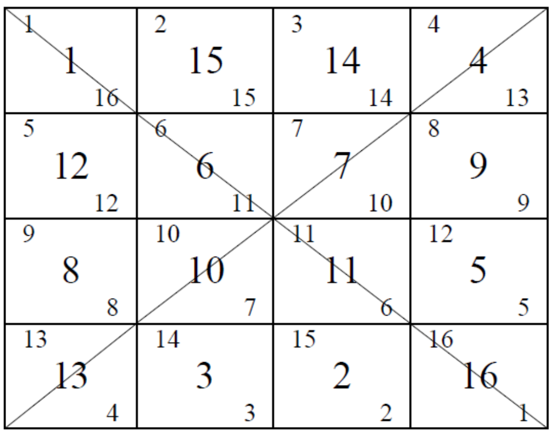
Obr. 2.9: Výsledný magický čtverec 5. řádu

Transformace magického čtverce z obr. 2.4 na čtverec na obr. 2.9 je mnohem složitější a nebudeme se jí podrobně zabývat. Postup je naznačen na obr. 2.8.

2.4 Konstrukce magických čtverců sudého řádu

Jak už bylo uvedeno v úvodu, neexistuje obecná metoda konstrukce magických čtverců sudého řádu, ale existují konstrukce čtverců, jejichž řád n je násobek čísla 4 nebo 6. Nejprve vytvoříme magický čtverec 4. řádu. ([9], str. 94)

Pole v připravené tabulce 4 x 4 očíslujeme tak, že nejprve vyjdeme z levého horního rohu, a poté znovu vyjdeme z pravého dolního rohu. V tabulce vyznačíme obě diagonály tak, jak je naznačeno na obr. 2.10.



Obr. 2.10: Postup konstrukce magického čtverce 4. řádu

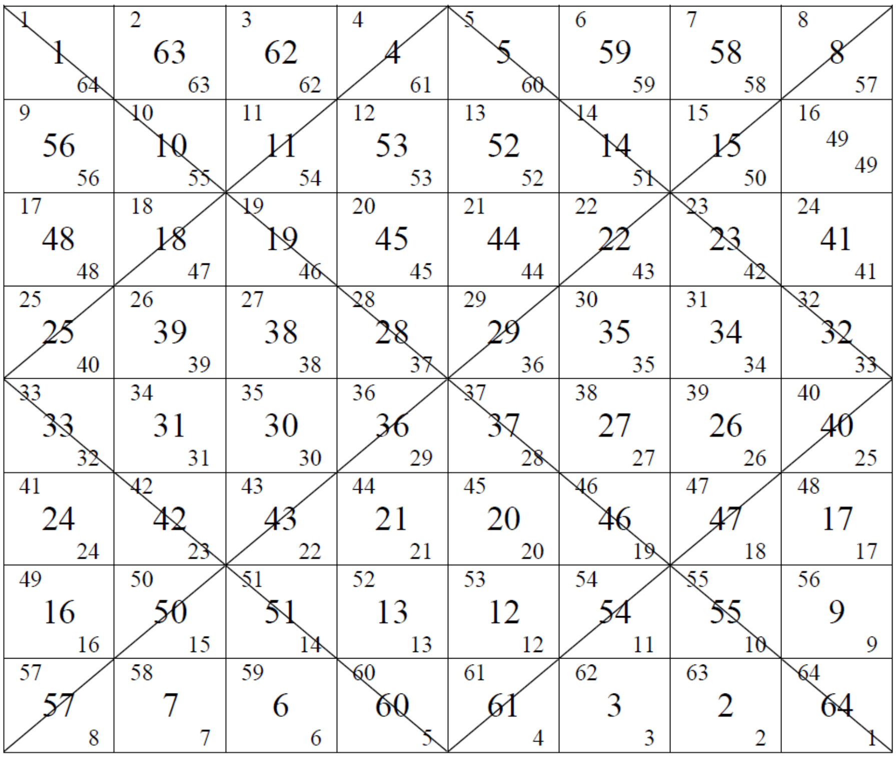
Pak do polí, která jsou přeškrtnuta, zapíšeme levé horní číslo. Pravé dolní číslo pak zapíšeme do polí nepřeškrtnutých.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Obr. 2.11: Výsledný magický čtverec 4. řádu

Výsledný magický čtverec (obr. 2.11) má všechny požadované vlastnosti a konstanta čtverce je $k = 34$. Magické čtverce sudého řádu středové číslo nemají.

Tento postup můžeme použít i pro konstrukci magických čtverců řádu 8, 12, 16, ... Ukážeme si ještě konstrukci magického čtverce 8. řádu, viz obrázek 2.12. ([9], str. 102)



Obr. 2.12: Konstrukce magického čtverce 8. řádu

Konstanta tohoto čtverce je $k = 260$. Uvedená konstrukce je sice složitější než u konstrukce magických čtverců lichého řádu, ale ještě není příliš složitá. Mnohem složitější je konstrukce magického čtverce 6. řádu nebo dokonce řádu n, který je násobek šesti.

Magický čtverec 6. řádu pravděpodobně sestrojili Peršané a později jeho konstrukci popsal indický matematik Nárájana. ([9], str. 134). Vychází z čtvercové tabulky

6 x 6 přirozeně uspořádaných čísel, přičemž v každé řadě mění směr (tzv. tkalcovský systém). Ponechají se pouze čísla na diagonálách a ve dvou středních řadách. Volná místa se poté doplní čísly tak, že počítáme od dolního levého rohu a v každé následující řadě se změní směr počítání. Tak vznikne tabulka uvedená na obr. 2.13.

1	35	34	33	32	**6**
25	**11**	27	28	**8**	30
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
24	**23**	**22**	**21**	**20**	**19**
12	**26**	10	9	**29**	7
36	2	3	4	5	**31**

Obr. 2.13: Postup konstrukce magického čtverce 6. řádu

Až sem je postup zcela obecný a snadno pochopitelný. Pak však následuje nahrazení čísel ve 12 polích, které je již těžké obecně přesně popsat:

$\boxed{4}\rightarrow 34$, $\boxed{9}\rightarrow 27$, $\boxed{24}\rightarrow 13$, $\boxed{22}\rightarrow 18$, $\boxed{18}\rightarrow 15$, $\boxed{13}\rightarrow 24$, $\boxed{19}\rightarrow 22$, $\boxed{15}\rightarrow 19$, $\boxed{27}\rightarrow 10$, $\boxed{10}\rightarrow 9$, $\boxed{34}\rightarrow 3$, $\boxed{3}\rightarrow 4$

Tak vznikne magický čtverec 6. řádu, který má konstantu $k = 111$:

1	35	4	33	32	6
25	11	9	28	8	30
24	14	18	16	17	22
13	23	19	21	20	15
12	26	27	10	29	7
36	2	34	3	5	31

Obr. 2.14: Výsledný magický čtverec 6. řádu

Vzhledem k složitosti právě popsané konstrukce magického čtverce 6. řádu si ukážeme ještě jinou konstrukci ve zjednodušeném postupu na tabulce se 36 políčky, kterou doplníme následujícím způsobem:

Políčka očíslujeme čísly 1 až 36

1. od levého horního rohu,
2. od levého dolního rohu,
3. od pravého horního rohu,
4. od pravého dolního rohu.

Potom políčka doplníme značkami $\star$, $\triangle$, $\circ$ a $\bullet$, jak je uvedeno v tabulce na obr. 2.15.

1 6 ★ 31 32	2 5 ● 32 35	3 4 ● 33 34	4 3 ○ 34 33	5 2 ● 35 32	6 1 ★ 36 31
7 12 ● 25 30	8 11 ★ 26 29	9 10 ● 27 28	10 9 ● 28 27	11 8 ★ 29 26	12 7 ○ 30 25
13 18 ● 19 24	14 17 ● 20 23	15 16 ★ 21 22	16 15 ★ 22 21	17 14 ○ 23 20	18 13 ● 24 19
19 24 △ 13 18	20 23 ● 14 17	21 22 ★ 15 16	22 21 ★ 16 15	23 20 ○ 17 14	24 19 △ 18 13
25 30 ● 7 12	26 29 ★ 8 11	27 28 △ 9 10	28 27 △ 10 9	29 26 ★ 11 8	30 25 ○ 12 7
31 36 ★ 1 6	32 35 △ 2 5	33 34 ● 3 4	34 33 ○ 4 3	35 32 △ 5 2	36 31 ★ 6 1

Obr. 2.15: Postup konstrukce magického čtverce 6. řádu

Políčka označená značkou $\star$ doplníme číslem uvedeném v levém horním rohu.

Políčka označená značkou $\triangle$ doplníme číslem uvedeném v levém dolním rohu.

Políčka označená značkou $\circ$ doplníme číslem uvedeném v pravém horním rohu.

Políčka označená značkou $\bullet$ doplníme číslem uvedeném v pravém dolním rohu.

Tak vznikne magický čtverec 6. řádu uvedený na obr. 2.16.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Obr. 2.16: Výsledný magický čtverec 6. řádu

Analogicky, jako u magického čtverce 4. řádu, i zde si ukážeme, jak je možné použít sestrojený magický čtverec 6. řádu pro konstrukci čtverce 12. řádu, viz obrázek

2.17. V zájmu jednoduchosti si ukážeme jen konstrukci prvních dvou řádků:

1 12 ★ 133 144	2 11 ● 134 143	3 10 ● 135 142	4 9 ○ 136 141	5 8 ● 137 140	6 7 ★ 138 139	7 6 ★ 139 138	8 5 ● 140 137	9 4 ● 141 136	10 3 ○ 142 135	11 2 ● 143 134	12 1 ★ 144 133
13 24 ● 121 132	14 23 ★ 122 131	15 22 ● 123 130	16 21 ● 124 129	17 20 ★ 125 128	18 19 ○ 126 127	19 18 ● 127 126	20 17 ★ 128 125	21 16 ● 129 124	22 15 ● 130 123	23 14 ★ 131 122	24 13 ○ 132 121

1	143	142	9	140	6	7	137	136	3	134	12
132	14	130	129	17	19	126	20	124	123	23	13

Obr. 2.17: Konstrukce prvních dvou řádků magického čtverce 12. řádu

Magický čtverec 12. řádu má konstantu $k = 870$.

Číňané objevili konstrukci magického čtverce 6. řádu, která je považována za jedinečnou. Východiskem je tabulka 4 sloupců a 9 řádek, do které jsou zapsána čísla od 1 do 36, jak ukazuje tabulka 2.1. ([9] str. 58)

28	19	10	1
29	20	11	2
30	21	12	3
31	22	13	4
32	23	14	5
33	24	15	6
34	25	16	7
35	26	17	8
36	27	18	9

Tab. 2.1: Pomocná tabulka ke konstrukci magického čtverce 6. řádu

Čtveřice čísel z každého řádku tabulky uspořádáme do devíti malých čtvercových tabulek, jak ukazuje obr. 2.18. Tato sestava se řídí pravidlem Lo Shu (obr. 2.1), takže barevně vyznačená pole vytvářejí čínský magický čtverec 3. řádu. Odtud vznikla domněnka, že v Číně znali ze všech magických čtverců sudého řádu nejprve čtverec 6. řádu.

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	32	5	34	7
17	26	10	19	15	24
35	8	28	1	33	6

Obr. 2.18: Čtvercové tabulky

Sesazením těchto čtvercových tabulek vznikne již téměř hotový magický čtverec 6. řádu, jen je třeba provést 3 výměny čísel vyznačených barevně na obr. 2.19. Vznikne tak magický čtverec 6. řádu, jak ukazuje obr. 2.20.

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	32	5	34	7
17	26	10	19	15	24
35	8	28	1	33	6

Obr. 2.19: Výměny čísel ve čtvercových tabulkách

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

Obr. 2.20: Sesazení výsledného magického čtverce 6. řádu

Z uvedeného vyplývá, že z magických čtverců pro $2 < n < 22$ dovedeme sestrojit uvedenými konstrukcemi všechny kromě dvou, a to pro $n = 10$ a $n = 14$.

2.5 Dürerův magický čtverec

Albrecht Dürer (1471 – 1528) vytvořil v roce 1514, snad pod vlivem úmrtí své matky, světově známou rytinu Melencolia (Melancholie), v jejímž horním pravém rohu je magický čtverec 4. řádu, tzv. Dürerův magický čtverec:

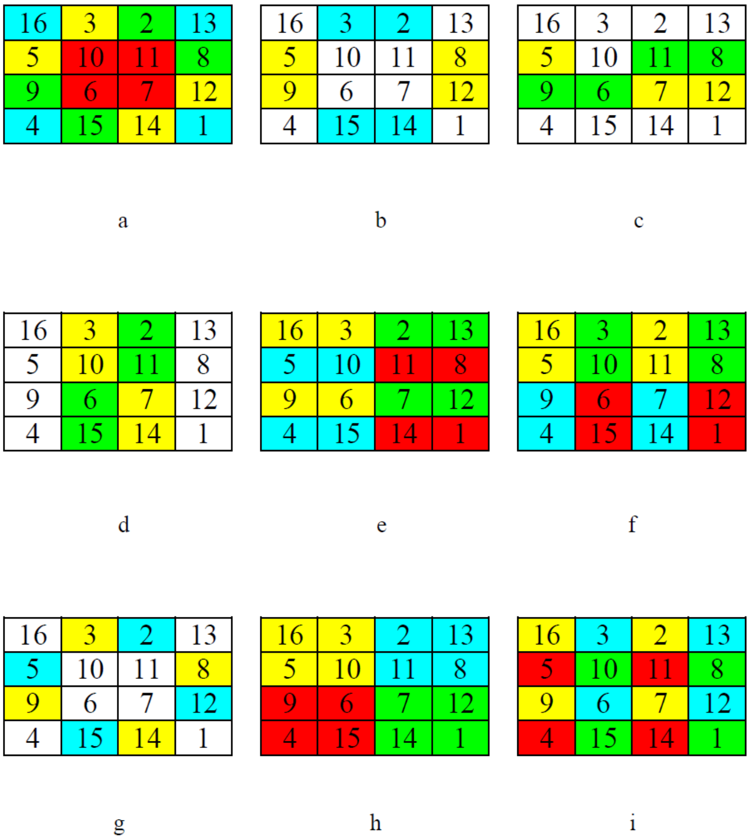
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 2.21: Dürerův magický čtverec

Od magického čtverce uvedeného v článku 2.4 na obr. 2.11 se liší dvěma úpravami: záměnou 2. a 3. sloupce a otočením o 180^o.

V Dürerovu magickém čtverci je v posledním řádku ještě zakódován letopočet 1514 a čísla v rozích tabulky jsou kódy iniciál autorova jména. Číslo 1 představuje 1. písmeno abecedy a číslo 4 pak 4. písmeno abecedy. Tedy D |15| 14| A. ([6] str. 61)

Dürerovu magickému čtverci, který má všechny požadované vlastnosti (konstantní součet čísel na jednotlivých řadách, sloupcích i diagonálách $k = 34$), jsou připisovány ještě další vlastnosti znázorněné na obr. 2.22, kde součet stejně barevných čísel dává konstantu $k = 34$ ([10]).



Obr. 2.22: Znázornění vlastností Dürerova magického čtverce

Můžeme se však přesvědčit, že tyto pozoruhodné vlastnosti má i náš „obyčejný“ magický čtverec z obr. 2.11.

Na závěr kapitoly uvedeme ještě jeden zajímavý magický čtverec. Antonio Gaudí (1852 – 1926) umístil na katedrálu La Sagrada Família v Barceloně, jejíž stavba byla zahájena v roce 1884, „magický čtverec“ 4. řádu (obr. 2.23),

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Obr. 2.23: Magický čtverec Antonia Gaudího

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Obr. 2.24: Standartní magický čtverec 4. řádu

který však na rozdíl od standardního čtverce (obr. 2.24) neobsahuje čísla 12 a 16, ale obsahuje dvakrát čísla 10 a 14. Splňuje však podmínku konstantního součtu čísel na všech řadách, sloupcích i diagonálách a jeho konstanta $k = 33$ (tzv. Kristova léta). ([6], str. 62)

3 Počtářské algoritmy a praktiky

3.1 Součiny čísel končících číslicí 0, 1, 5 a 6

I když v dnešní době se někteří lidé domnívají, že je zbytečné, aby člověk uměl počítat zpaměti nebo pomocí různých počtářských praktik, je třeba si uvědomit, že právě pohotový odhad výsledků, tak důležitý pro rozhodování, je založen na těchto dovednostech. Proto zde uvádíme některé příklady starých algoritmů a praktik.

Ze školy všichni známe pravidlo pro výpočet druhé mocniny dvojciferného čísla končícího číslicí 5:

Vezmi počet desítek, vynásob je číslem o jedničku větším a za výsledek připiš 25.

Například $65^2 = (6 \cdot 7) \cdot 100 + 25 = 4\,225$. Odůvodnění tohoto pravidla je následující:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25$$

Toto pravidlo lze samozřejmě použít i pro čísla $6,5^2 = 42{,}25$, nebo $650^2 = 422\,500$. To platí pro druhou mocninu. Ale podívejme se na součin různých čísel končících číslicí 5:

$$(10a + 5) \cdot (10b + 5) = 100ab + 50a + 50b + 25 = 10 \cdot (10ab + 5a + 5b + 2) + 5$$

Z toho vyplývá, že součin několika čísel, která všechna končí číslicí 5, bude také končit číslicí 5. To není nijak překvapivé, protože je to i důsledek kritéria dělitelnosti číslem 5.

Tuto vlastnost však má i číslice 6.

$$(10a + 6) \cdot (10b + 6) = 100ab + 60a + 60b + 36 = 10 \cdot (10ab + 6a + 6b + 3) + 6$$

Není snad třeba odůvodňovat, že stejnou vlastnost mají i číslice 0 a 1 a žádné jiné číslice. Vyplývá to z množiny druhých mocnin všech číslic.

Skutečnost, že $25^2 = 625$ nás přivádí na myšlenku, jestli zmíněná vlastnost neplatí i pro čísla, která končí dvojčíslím 25. Pokusme se to ověřit:

$$(100a+25)\cdot(100b+25) = 10000ab+2500a+2500b+625 = 100\cdot(100ab+25a+25b+6)+25$$

Součin několika čísel, která všechna končí dvojčíslím 25, bude také končit dvojčíslím 25.

Pokusme se nyní zjistit, která další dvojčíslí mají také tuto vlastnost. Z tabulky druhých mocnin zjistíme, že jsou to pouze dvojčíslí 00, 01 a 76. Uveďme tedy ještě odůvodnění pro dvojčíslí 76 (případ 00 a 01 je triviální):

$$(100a+76)\cdot(100b+76) = 10000ab+7600a+7600b+5776 = 100\cdot(100ab+76a+76b+57)+76$$

Závěr: Součin několika čísel, která všechna končí dvojčíslím 25 (76), bude také končit dvojčíslím 25 (76).

<u>Příklad 3.1</u>

356^{1327} končí číslicí 6 $\quad$ 2015^{654} končí číslicí 5 $\quad$ 781^{2317} končí číslicí 1

7325^{1083} končí dvojčíslím 25 $\quad$ 1976^{598} končí dvojčíslím 76

Síla matematiky spočívá v tom, že o těchto výrocích se těžko můžeme přesvědčit výpočtem, ale přesvědčil nás výše uvedený důkaz.

3.2 Nekonečná čísla

Předchozí článek samozřejmě přináší otázku, jestli taková vlastnost platí i pro trojčíslí, čtyřčíslí atd. Tak jako při hledání dvojčíslí jsme vycházeli z číslic 0, 1, 5 a 6, musíme zde vycházet z dvojčíslí 00, 01, 25 a 76. ([17] str. 71)

Vyjděme z dvojčíslí 76 a hledejme číslici k tak, aby platilo $(100k+76)^2$ končí trojčíslím $k76$. Pro zjednodušení postupu volíme druhou mocninu a nikoli součin různých čísel.

$$(100k + 76)^2 = 10000k^2 + (15200k + 5776)$$

$10000k^2$ je dělitelné číslem 1 000 a neovlivňuje poslední trojčíslí a z úvahy ho vynecháme. Je potřeba, aby rozdíl $(15200k + 5776) - (100k + 76)$, kde $(100k + 76)$ je poslední trojčíslí, byl dělitelný číslem tisíc a již neměl vliv na hodnotu posledního trojčíslí.

$$15200k + 5776 - 100k - 76 = 15100k + 5700 = 15000k + 5000 + 100 \cdot (k + 7)$$

Pro $k = 3$ bude tedy výraz dělitelný číslem 1 000 a my jsme našli hledané trojčíslí 376.

Jednodušší je postup vycházející z dvojčíslí 25:

$$(100k + 256)^2 = 10000k^2 + 5000k + 625 = 1000k \cdot (10 \cdot k + 5) + 625$$

Protože 1. sčítanec je dělitelný číslem 1 000, je hledané trojčíslí 625.

Zbývající dvojčíslí 00 a 01 generují trojčíslí 000 a 001.

Pokud bychom postupovali dál a hledali příslušná čtyřčíslí, pětičíslí atd., dostali bychom tzv. nekonečná čísla

$\ldots 2\ 890\ 625 \qquad \ldots 7\ 109\ 376 \qquad \ldots 0\ 000\ 000 \qquad \ldots 0\ 000\ 001$

Čísla 0 a 1 jsou kořeny rovnice $x^2 - x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 1)$, ale ukazuje se, že i první dvě nekonečná čísla jsou kořeny této rovnice. Další řešení rovnice nemá. ([17] str.74)

Odůvodnění: Umocníme-li
číslo končící dvojčíslím 25 (76), dostaneme číslo končící dvojčíslím 25 (76),
číslo končící trojčíslím 625 (376), dostaneme číslo končící trojčíslím 625 (376),
číslo končící čtyřčíslím 0625 (9376), dostaneme číslo končící čtyřčíslím 0625 (9376).

Jinak řečeno: při výpočtu posledního n-číslí čísla x, dostaneme stejné n-číslí jako u čísla x^2.

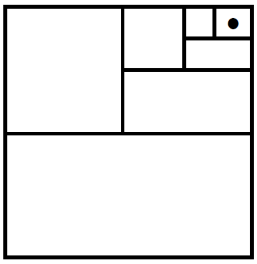
Dá se dokázat ([16] str. 73), že nekonečné číslo ... 2 890 625 lze získat „jednodušším“ způsobem výpočtem $(((5^2)^2)^2)^2 \dots$

$$5^2 = \mathbf{25} \qquad 5^4 = \mathbf{625} \qquad 5^8 = 152\ 587\ \mathbf{890\ 625}$$

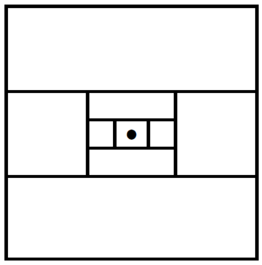
Ovšem pro vyšší mocniny je to také obtížné. Pro nekonečné číslo ... 7 109 376 podobné řešení neexistuje.

3.3 Chytré důkazy a výpočty

Příklad 3.2 ([17] str. 4)



Obr. 3.1: Rozdělení čtverce



Obr. 3.2: Rozdělení čtverce

$\boxed{\bullet}$ představuje políčko, které se dál dělí stejným způsobem

Čtverec o straně $a = 1$ je rozdělen
na čtyřúhelníky o obsahu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$
Takže: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$

Čtverec o straně $a = 1$ je rozdělen
na čtyřúhelníky o obsahu $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots$
Takže: $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} \dots = 1$

Příklad 3.3 ([14] str. 198)

Obr. 3.3: Schéma důkazu obsahu trojúhelníka

$S = n^2 : 2$

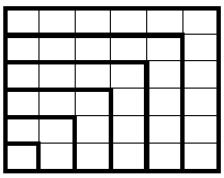
$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots + n$
$= (n^2 : 2) + (n : 2) = \frac{1}{2} n \cdot (n + 1)$

Příklad 3.4 ([13] str.170)

Ruský matematik A. N. Kolmogorov již v pěti letech objevil zákonitost

$$1 = 1 \cdot 1$$
$$1 + 3 = 2 \cdot 2$$
$$1 + 3 + 5 = 3 \cdot 3$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4 \text{ atd.}$$

Jako důkaz uvedl obrázek 3.4:



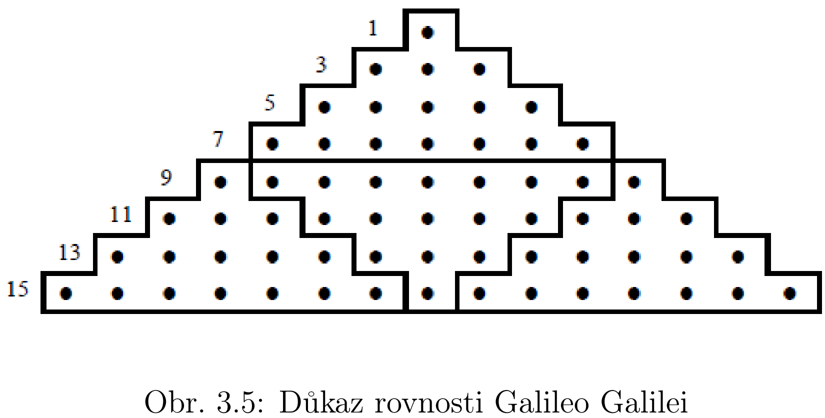
Obr. 3.4: Kolmogorův důkaz

Příklad 3.5

Galileo Galilei (1564 - 1642) v roce 1615 předvedl důkaz rovnosti

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \ldots$$

následujícím obrázkem 3.5 ([3] str. 41):



Obr. 3.5: Důkaz rovnosti Galileo Galilei

Obecně:

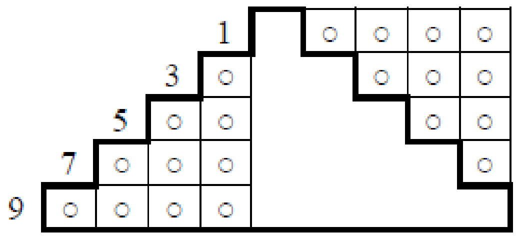
$$\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}=\frac{1}{3}$$

Příklad 3.6

Máme dokázat, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1+3+5+7+9+\ldots+n\cdot(2n-1)=n^2$$

Důkaz provedeme analogicky jako v předchozím příkladu ([15] str. 150):



Obr. 3.6: Schéma důkazu rovnosti

$$\begin{aligned}1+3+5+7+9&=5^2\\1+3+5+7&=4^2\\1+3+5&=3^2\\1+3&=2^2\\1&=1^2\end{aligned}$$

Druhý krok důkazu matematickou indukcí:

$$\begin{aligned}1+3+5+7+9+(2n-1)+(2n+1)&=(n+1)^2\\n^2+(2n+1)&=(n+1)^2\end{aligned}$$

Příklad 3.7

Zápisy někdy klamou ([14] str. 51).

Rozhodněte, zda číslo $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ je racionální, nebo iracionální.

Upravíme výraz $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=(2+\sqrt{3})^2$

Číslo $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$

Příklad 3.8

Překvapivé výsledky ([19] str. 61)

$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{24+3}{8}}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{9\cdot3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$

$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{60+4}{15}}=\sqrt{\frac{64}{15}}=\sqrt{\frac{16\cdot4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$

$\sqrt[3]{2+\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{14+2}{7}}=\sqrt[3]{\frac{16}{7}}=\sqrt[3]{\frac{8\cdot2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[4]{2+\frac{2}{15}}=2\sqrt[4]{\frac{2}{15}}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{\frac{30+2}{15}}=\sqrt[4]{\frac{32}{15}}=\sqrt[4]{\frac{16\cdot2}{15}}=2\sqrt[4]{\frac{2}{15}}$

$\sqrt[5]{2+\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{\frac{62+2}{31}}=\sqrt[5]{\frac{64}{31}}=\sqrt[5]{\frac{32\cdot2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$

Příklad 3.9

Bez umocňování napište výsledek posledního řádku ([15] str. 150)

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$

$$9^2 = (10-1)^2 = 100 - 20 + 1 = 81$$
$$99^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$
$$999^2 = (1000-1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$
$$9999^2 = (10000-1)^2 = 100000000 - 20000 + 1 = 99980001$$

Obecně: $$(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = (10^n - 2) \cdot 10^n + 1$$

Příklad 3.10

„Těžká úloha“ profesora Račinského ([17] str. 123):

Vypočítejte zpaměti hodnotu výrazu $(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365$

Řešení: $$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$$

$$(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365 = 2$$

3.4 Pythagorejská čísla

Již staří Egypťané používali pravoúhlý trojúhelník o stranách v poměru $3 : 4 : 5$ k sestrojování pravého úhlu při stavbách. Pythagorovi je ale připisován objev vztahu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

jako tzv. Pythagorova věta. Často bylo třeba sestrojit i jiné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené přirozenými čísly, a tak začali lidé vyhledávat další trojice přirozených čísel, které by splňovaly výše uvedený vztah. Takovým trojicím čísel říkáme **pythagorejská čísla** ([15] str. 29). Kromě již uvedené trojice (3, 4, 5) se objevily další např.

5	12	13	8	15	17	11	60	61
7	24	25	9	40	41	13	84	85

Vyhledávání těchto trojic nebylo jednoduché, ale postupně se objevovaly obecné vlastnosti těchto trojic, které přece trochu usnadnily hledání.

Předně bylo zřejmé, že vynásobením určité trojice přirozeným číslem n nevznikne nová pythagorejská trojice, neboť původní a nový trojúhelník budou podobné. Proto byla stanovena podmínka, že <u>čísla pythagorejské trojice musí být nesoudělná.</u>

Z této podmínky vyplývá, že <u>čísla v trojici nemohou být vesměs sudá.</u>

<u>Nemohou však být ani vesměs lichá.</u> Umocňování čísel zachovává jejich paritu a součet i rozdíl dvou lichých čísel je sudý.

<u>V trojici nemohou být ani dvě sudá čísla</u>, protože by muselo být sudé i třetí číslo a trojice by byla dělitelná dvěma a tedy soudělná.

Závěr: V pythagorejské trojici musí být jedno číslo sudé a dvě lichá.

Pozorováním objevených pythagorejských trojic čísel se ukázalo, že

- jedna „odvěsna“ je vždy sudá a druhá lichá,
- „přepona“ je vždy lichá,
- jedna „odvěsna“ je vždy dělitelná třemi,
- jedna „odvěsna“ je vždy dělitelná čtyřmi (může to být i ta, která je dělitelná třemi),
- jedno z čísel trojice je vždy dělitelné pěti.

Přesto všechno bylo hledání nových pythagorejských čísel až do 16. stol. velmi obtížné.

Když v 16. stol. objevili italští matematikové komplexní čísla, našla se cesta k snazšímu sestavení dalších pythagorejských trojic ([11] str. 292).

Libovolné komplexní číslo $a + bi$, kde čísla a, b jsou různá přirozená čísla a $i^2 = -1$, generuje pythagorejskou trojici čísel x, y, z. Ze vztahu

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

určíme $\qquad x = |a^2 - b^2| \qquad y = 2.ab \qquad z = a^2 + b^2$

Příklad 3.11

$$(3 + 2i)^2 = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i \qquad x = 5, y = 12, z = 13$$

To je jedna z trojic již v úvodu článku uvedených.

Příklad 3.12

$$(7+5i)^2 = 49 - 25 + 70i = 24 + 70i \qquad x = 24, y = 70, z = 74$$

Nalezená trojice je ale soudělná a musíme ji krátit dvěma: $x = 12, y = 35, z = 37$

Přesvědčíme se, že trojice vyhovuje podmínkám: $144 + 1225 = 1369$

Jedno číslo je sudé, dvě jsou lichá, největší číslo je liché, 144 je dělitelné třemi i čtyřmi, 1 225 je dělitelné pěti.

Příklad 3.13

V obou předchozích příkladech platilo $a > b$. Zvolme proto příklad, kdy $a < b$.

$$(2+5i)^2 = 4 - 25 + 20i = -21 + 20i \qquad x = 21, y = 20, z = 29$$

Nyní je zřejmé, proč je číslo $x = |a^2 - b^2|$. Přesvědčíme se, že trojice vyhovuje podmínkám:

$$441 + 400 = 841$$

Jedno číslo je sudé, dvě jsou lichá, největší číslo je liché, 441 je dělitelné třemi a 400 je dělitelné čtyřmi a pěti.

4 Netradiční kritéria dělitelnosti přirozených čísel

4.1 Netradiční kritéria dělitelnosti přirozených čísel

Kritéria dělitelnosti přirozených čísel vycházejí z následujících tří poznatků:

$$a = n \cdot b + z \tag{1}$$

Rozložíme-li číslo a na součet násobku čísla b a čísla z, pak čísla a i z dávají při dělení číslem b stejný zbytek.

Pro každá dvě nesoudělná čísla a a b platí

$$\text{jestliže } a \mid z \text{ a současně } b \mid z, \text{ pak také } a \cdot b \mid z \tag{2}$$

Pro každá dvě čísla a a b platí

$$\text{jestliže } a \cdot b \mid z, \text{ pak také } a \mid z \text{ a } b \mid z \tag{3}$$

Na základě poznatku (1) se žáci základní i střední školy seznamují s kritérii dělitelnosti čísly 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25 a 125 a podle poznatku (2) pak s čísly 6, 12 a dalšími složenými čísly.

4.2 Základní tři skupiny kritérií dělitelnosti

4.2.1 Kritéria dělitelnosti pro dělitele čísla 10^n

Rozvinutý zápis přirozeného čísla a

$$a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$$

můžeme například upravit na tvar

$$a = 10^2 \cdot (c_n \cdot 10^{n-2} + c_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + c_2 \cdot 10) + (c_1 \cdot 10 + c_0)$$

a podle poznatků (1) a (3) tak vidíme, že o dělitelnosti čísla a číslem 100 a všemi jeho děliteli (2, 4, 5, 10, 20, 25 a 50) rozhoduje jen dělitelnost posledního dvojčíslí čísla a.

Analogicky lze odvodit i kritéria dělitelů mocniny 10^n pro libovolné n. V praxi mají význam jen kritéria dělitelů 10, 10^2 a 10^3. ([2] str. 49 – 56).

4.2.2 Kritéria dělitelnosti pro dělitele čísla $10^n - 1$

Z důvodu přehlednosti výkladu nebudeme vycházet z obecného zápisu čísla a a zvolíme číslo $a = 756\ 381$. Jeho rozvinutý zápis upravíme

$$a = 7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 1 \tag{4}$$

$$a = 7 \cdot (99999 + 1) + 5 \cdot (9999 + 1) + 6 \cdot (999 + 1) + 3 \cdot (99 + 1) + 8 \cdot (9 + 1) + 1$$

$$a = 7 \cdot 99999 + 5 \cdot 9999 + 6 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + 8 \cdot 9 + (7 + 5 + 6 + 3 + 8 + 1)$$

$$a = 9 \cdot (7 \cdot 11111 + 5 \cdot 1111 + 6 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 8) + \underbrace{(7 + 5 + 6 + 3 + 8 + 1)}_{\text{ciferný součet čísla } 756\ 381}$$

$$a = 9 \cdot b + 30$$

Podle poznatku (1) je zřejmé, že číslo $a = 756\ 381$ není dělitelné číslem 9, neboť číslo $z = 30$ není dělitelné číslem 9 (dává zbytek 3), ale je dělitelné číslem 3 pole poznatku (3). ([2] str. 56-57)

Podívejme se nyní, jestli by se dalo toto kritérium rozšířit podobně jako v článku 4.2.1, tzn. zkoumat dělitele čísel $(100^n - 1)$, resp. $(1000^n - 1)$. Pro další postup opět zvolme $a = 56\ 381$. Rozvinutý zápis čísla a (4) upravíme nyní na tvar

$$a = 75 \cdot 10^4 + 63 \cdot 10^2 + 81$$

$$a = 75 \cdot (9999 + 1) + 63 \cdot (99 + 1) + 81$$

$$a = 99 \cdot (75 \cdot 1111 + 63 \cdot 11) + \underbrace{(75 + 63 + 81)}_{\text{součet ciferných dvojčíslí čísla } 756\ 381}$$

$$a = 99 \cdot b + 219$$

Kanonický rozklad čísla $99 = 3^2 \cdot 11$ ukazuje, že můžeme podle poznatků (1) a (3) rozhodnout o dělitelnosti čísly 3, 9, 11 a 33. Protože číslo $219 = 3 \cdot 73$ je z uvedených čísel dělitelné pouze třemi, je i číslo a dělitelné také třemi.

Nalezli jsme tak nové kritérium dělitelnosti číslem 11:

Libovolné přirozené číslo je dělitelné číslem 11 právě tehdy, když je číslem 11 dělitelný součet ciferných dvojčíslí počítaných zprava doleva.

Poznámka: Zvolené číslo 756 381 má kanonický rozvoj $3 \cdot 17 \cdot 14831$. Rozhodnutí o tom, že číslo 14 831 je prvočíslo, nelze podle tabulek. Vypočítáme $\sqrt{14831} \doteq 121,8$ a ověříme, že dané číslo je prvočíslem, jestliže není dělitelné žádným prvočíslem p, pro které platí $17 < p < 127$.

4.2.3 Kritéria dělitelnosti pro dělitele čísla $10^n + 1$

Vyjdeme opět ze zvoleného čísla $a = 756\ 381$ a rozvinutý zápis (4) upravíme pro dělitele $10^1 + 1 = 11$:

$$a = 7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 1 \tag{4}$$

$$a = 7 \cdot (11-1)^5 + 5 \cdot (11-1)^4 + 6 \cdot (11-1)^3 + 3 \cdot (11-1)^2 + 8 \cdot (11-1) + 1$$

Podle binomické věty je výraz $(11-1)^n$ roven součtu $n+1$ sčítanců, z nichž prvních n sčítanců je násobkem čísla 11 a poslední sčítanec má hodnotu 1 (pro n sudé) nebo –1 (pro n liché).

Takže náš zápis můžeme upravit na tvar:

$$a = 11 \cdot b + (-7 + 5 - 6 + 3 - 8 + 1)$$

$$a = 11 \cdot b + \underbrace{(5 + 3 + 1)}_{\substack{\text{součet číslic}\\ \text{stojících na}\\ \text{řádech sudých}}} - \underbrace{(7 + 6 + 8)}_{\substack{\text{součet číslic}\\ \text{stojících na}\\ \text{řádech lichých}}}$$

$$a = 11 \cdot b + 9 - 21$$

$$a = 11 \cdot b - 12$$

Zápis upravíme tak, aby číslo z podle poznatku (1) bylo kladné:

$$a = 11 \cdot (b - 2) + 10$$

Tak jsme dospěli k známému kritériu dělitelnosti číslem 11 ([2] str. 57-58):

Libovolné přirozené číslo je dělitelné číslem 11 právě tehdy, když je číslem 11 dělitelný součet číslic stojících na řádech sudých zmenšený o součet číslic stojících na řádech lichých.

Upravíme-li rozvinutý zápis (4) pro dělitele $10^2 + 1 = 101$ získáme analogickým postupem pouze prakticky nepotřebné kritérium dělitelnosti číslem 101, a protože to je prvočíslo, tak už žádným jiným.

Upravme proto rozvinutý zápis rovnou pro dělitele $10^3 + 1 = 1001$, jehož kanonický rozklad je $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, získáme zřejmě již třetí kritérium dělitelnosti číslem 11 a dále kritéria dělitelnosti čísly 7 a 13. Jako výchozí číslo a si však musíme zvolit číslo aspoň deseticiferné. Budeme již postupovat stručněji ([2] str. 58-59):

Zvolme $a = 4\ 231\ 756\ 381$ a jeho rozvinutý zápis

$a = 4 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 1$

upravíme na tvar

$$a = 4 \cdot (1001 - 1)^9 + 231 \cdot (1001 - 1)^6 + 756 \cdot (1001 - 1)^3 + 381$$

Podle binomické věty je výraz $(1001 - 1)^n$ roven součtu $n + 1$ sčítanců, z nichž prvních n sčítanců je násobkem čísla 11, a poslední sčítanec má hodnotu 1 (pro n sudé) nebo –1 (pro n liché). Takže náš zápis můžeme upravit na tvar:

$$a = 1001 \cdot b + (-4 + 231 - 756381)$$

$$a = 1001 \cdot b + \underbrace{(231 + 381)}_{\substack{\text{součet trojčíslí}\\ \text{stojících na}\\ \text{řádech sudých}}} - \underbrace{(4 + 756)}_{\substack{\text{součet trojčíslí}\\ \text{stojících na}\\ \text{řádech lichých}}}$$

$$a = 1001 \cdot b - 148$$

Zápis upravíme tak, aby číslo z podle poznatku (1) bylo kladné:

$$a = 1001 \cdot (b - 1) + 853$$

Protože číslo 853 není dělitelné sedmi (dává zbytek 6), ani jedenácti (dává zbytek 6), ani třinácti (dává zbytek 8), není těmito čísly ani dělitelné číslo 4 231 756 381.

Takže číslo 4 231 752 375 bude dělitelné sedmi i jedenácti a číslo 4 231 756 373 bude dělitelné třinácti. Našli jsme tak již třetí kritérium dělitelnosti jedenácti a kritérium dělitelnosti číslem 7 a 13.

Libovolné přirozené číslo je dělitelné čísly 7, 11 a 13 právě tehdy, když těmito čísly je dělitelný součet ciferných trojčíslí stojících na řádech sudých zmenšený o součet ciferných trojčíslí stojících na řádech lichých.

Uvedené kritérium je sice zajímavé, ale v praxi jen těžko použitelné, protože jeho efekt se objeví až u velkých čísel.

4.3 Méně známá kritéria dělitelnosti

4.3.1 Kritérium dělitelnosti číslem 7

Ze vztahu (1) vyplývá, že odečteme-li od libovolného čísla a násobek sedmi $7n$, dostaneme číslo z, které dává při dělení sedmi stejný zbytek jako číslo a. Toho jsme již využili v předchozím článku.

Ze vztahu (2) vyplývá, že při zjišťování dělitelnosti sedmi u čísla $10a$ stačí posuzovat jen dělitelnost čísla a, protože čísla 7 a 10 jsou nesoudělná.

Jestliže napíšeme prvních deset násobků sedmi (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63), všimneme si, že na místě jednotek se postupně vystřídají všechny číslice.

Z těchto tří poznatků vychází zajímavé kritérium dělitelnosti číslem 7, které lze popsat následujícím algoritmem o třech krocích ([5] str.161-162):

- Od daného čísla a odečteme násobek sedmi, který má na místě jednotek tutéž číslici jako číslo a
- V zápise čísla, které jsme dostali, vynecháme nulu na místě jednotek
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme číslo, o kterém již bez výpočtu můžeme rozhodnout o jeho dělitelnosti sedmi.

<u>Příklad 4.1</u>

Zvolme číslo $a = 26\ 586$

$26\ 586 - 56 = 26\ 530$ (vynecháme nulu)

$2\ 653 - 63 = 2\ 590$

$259 - 49 = 210$

21 je dělitelné sedmi, proto i číslo 26 586 ($= 7 \cdot 3798$) je dělitelné sedmi

Příklad 4.2

Někdy můžeme zjišťování urychlit:

Zvolme číslo $a = 286\ 357$

Od čísla a odečteme čísla 280 000 a 7, která jsou násobky čísla 7

6 350 vynecháme 0

635 odečteme 630

5 není dělitelné sedmi, proto ani číslo 286 357 není dělitelné sedmi

4.3.2 Kritérium dělitelnosti číslem 19

Každé přirozené číslo n se dá vyjádřit jako $n = 10x + y$, kde x je počet všech desítek v daném čísle n (nikoli číslice řádu desítek) a y je číslice řádu jednotek. Například

$$7365 = 10 \cdot 736 + 5$$

Nyní dokážeme kritérium dělitelnosti číslem 19 ([16] str.78-79):

Číslo $n = 10x + y$ je dělitelné číslem 19 právě tehdy, když je číslem 19 dělitelné číslo $n' = x + 2y$

Vypočteme rozdíl

$$10n' - n = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y$$

$$10n' = 19y + n \qquad (5)$$

Z uvedeného vztahu (5) vyplývá: Bude-li číslo n' dělitelné číslem 19, bude číslem 19 dělitelné i číslo n a naopak, je-li n dělitelné číslem 19, je jím dělitelné i číslo n'. Dokázané kritérium lze formulovat i takto:

Přirozené číslo n je dělitelné devatenácti právě tehdy, když součet počtu jeho všech desítek a dvojnásobného počtu jednotek je dělitelný devatenácti.

Podobně jako v článku 4.3.1 můžeme odvodit algoritmus, který si ukážeme na příkladu.

Příklad 4.3

Rozhodněte o tom, jestli číslo 47 045 881 je dělitelné číslem 19.

Postup: Podle výše uvedeného kritéria dělitelnosti číslem 19 vypracujeme tabulku 4.1. Sestavíme ji tak, že z čísla 47 045 881 oddělíme číslici 1 na pozici jednotek. Následně ke zbylému číslu (4 704 588) přičteme dvojnásobek oddělené číslice, tedy číslo 2. Od vzniklého čísla opět oddělíme číslici na pozici jednotek a takto v postupu pokračujeme dále dokud nedojdeme k výslednému číslu.

4704588|1 + 2	471|2 + 4
470459|0 + 0	47|5 + 10
47045|9 + 18	5|7 + 14
4706|3 + 6	19

Tab. 4.1: Postup ověření dělitelnosti číslem 19

Protože číslo 19 je samozřejmě dělitelné číslem 19, je i číslo 47 045 881 dělitelné číslem 19.

$$47045881 = 19 \cdot 2476099$$

4.4 Dělitelnost čísel zapsaných v nedesítkových číselných soustavách

Kritéria dělitelnosti přirozených čísel můžeme zkoumat i v nedesítkových číselných soustavách. Přitom je třeba si uvědomit:

- Vlastnost být číslem složeným nebo prvočíslem je vlastnost čísla a nezávisí na numerační soustavě, ve které je zapsáno ([8] str. 100-104).
- Kritérium dělitelnosti je vlastností numerační soustavy a ne vlastností čísla.
- Číslo je dělitelné základem soustavy, ve které je zapsáno, pokud číslice řádu jednotek je nula.
- Pokud zápis čísla v soustavě o základu z končí k nulami, je toto číslo dělitelné číslem z^k ([21] str. 55)

Příklad 4.5

Číslo	$(110)_3$	je dělitelné třemi
	$(420)_5$	je dělitelné pěti
	$(600)_7$	je dělitelné sedmi a čtyřiceti devíti
	$(2000)_4$	je dělitelné čtyřmi, šestnácti a šedesáti čtyřmi

Příklad 4.6

Převodem do sedmičkové soustavy zjistěte, zda číslo 76 324 je dělitelné sedmi.

76 324	:7	zbytek
10 903	:7	3
1 557	:7	4
222	:7	3
31	:7	5
4	:7	3
0		4

Tab. 4.2: Postup převodu do sedmičkové soustavy

Číslo $76324 = (435343)_7$ není dělitelné sedmi a dává zbytek 3.

5 Starověké početní postupy

5.1 Egyptské kmenové zlomky a počítání s nimi

O egyptské početní kultuře se nejvíc dovídáme ze dvou papyrů – Moskevského (asi 1 700 před n.l.) a Rhindova (asi 1 890 před n.l.) Oba papyry obsahují mimo jiné i několik desítek úloh, ze kterých můžeme usoudit na tehdejší početní postupy se zlomky.

Egypťané pracovali pouze s přirozenými čísly, která však ještě nebyla abstrahována jako čísla v dnešním způsobu chápání, ale jen jako počet určitých předmětů. Podobně i základní početní operace se opíraly o předmětnou představu, takže jedno z čísel představovalo množství předmětů (číslo pojmenované) a druhé číslo bylo operátorem. ([23] str. 17)

Vzhledem k omezeným početním znalostem vznikaly potíže hlavně při dělení. Pokud dělení nevycházelo beze zbytku, musely nastoupit zlomky. Egypťané neznali zlomky v našem slova smyslu, ale jen tzv. zlomky kmenové, které mají čitatel rovný číslu 1. Proto jejich hieroglyfické zápisy zlomků vůbec čitatel nemají. Každý jiný zlomek, přesněji řečeno podíl dvou přirozených čísel, bylo nutné zapsat jako součet vesměs různých kmenových zlomků. Jediná výjimka z tohoto pravidla byl „zlomek“ 2 : 3. Není zřejmé, proč byla tato výjimka zavedena. Je sice jisté, že tento zlomek nebylo možné zapsat jako

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \text{ ale bylo možné ho zapsat jako } \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

Vzhledem k tomu, že hieroglyfické zápisy bychom neuměli napsat a možná ani přečíst, budeme v dalším textu již používat náš způsob zápisu zlomků, tak jako jsme to udělali již v předchozím zápisu „zlomku“ 2 : 3.

V Egyptě existovaly „početnice“ s předpokládanou různou úrovní znalostí aritmetiky a odpovídající i různému společenskému postavení. Existuje dokonce názor, že nejvyšší kasta učenců (kněží) tajila své objevy před veřejností a dávala k dispozici jen potřebné formální postupy a tabulky.

Elementární pravidla pro počítání se zlomky zahrnovala těchto 5 rovností ([23] str. 18):

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ (2) $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ (3)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{6}$ (5)

Pro nás se zdá, že všem těmto rovnostem není třeba se učit, protože jedna vyplývá z druhé. Jenže tehdy počtáři neznali žádná algebraická pravidla ani vlastnosti početních operací (komutativnost apod.). Určitým pokrokem byl poznatek, že zlomky ve tvaru $\frac{2}{3k}$, kde k je libovolné přirozené číslo, lze zapsat jako součet kmenových zlomků $\frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$

Při tvorbě tabulek pro počítání se zlomky Egypťané objevili identitu $2 \cdot \frac{1}{n} = 2 : n$, která se nám zdá být samozřejmostí, ale byla východiskem pro vytvoření tabulek podílů $2 : n$ pro všechna lichá čísla n od 3 do 101. Výňatek z této tabulky ([23] str. 18) uvádíme:

$2 : 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$2 : 13 = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$	$2 : 21 = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$
$2 : 7 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	$2 : 15 = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$2 : 23 = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$
$2 : 9 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$2 : 17 = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$2 : 25 = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$
$2 : 11 = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$2 : 19 = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$	$2 : 27 = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$

Tab. 5.1: Výňatek z egyptské tabulky podílů 2:n

Existovala řada dalších tabulek a popisů početních postupů, ale zde uvedeme jen 8 úloh, které jsou uvedeny i s výsledkem v Rhindově papyru ([23] str. 19):

1.	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	Násobení zlomků bylo řešeno pomocí operátoru „z“
		$\frac{2}{3} z \frac{1}{11} = 2 : 33$ a podle pokračování tabulky 5.1 platí
		$2 : 33 = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$
2.	$6 : 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$	Pravděpodobný postup: $(5 + 1) : 10 = (5 : 10) + \frac{1}{10}$
		„Krácením“ podílu (5 : 10) na (1 : 2) dostaneme $\frac{1}{2}$
3.	$7 : 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{30}$	$21 : 30 = (20 + 1) : 30 = (20 : 30) + \frac{1}{30} = \frac{2}{3} + \frac{1}{30}$
		Zde kromě „krácení“ bylo použito i „rozšiřování“
4.	$8 : 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$24 : 30 = (20 + 3 + 1) : 30 = (20 : 30) + (3 : 30) + \frac{1}{30}$
5.	$9 : 10 = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$	$27 : 30 = (20 + 6 + 1) : 30 = (20 : 30) + (6 : 30) + \frac{1}{30}$
6.	$4 : 15 = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$	$4 : 15 = (3 + 1) : 15 = (3 : 15) + \frac{1}{15}$
7.	$16 : 3 = 5 + \frac{1}{3}$	$16 : 3 = (15 + 1) : 3 = (15 : 3) + \frac{1}{3}$
8.	$19 : 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$19 : 8 = (16 + 2 + 1) : 8 = (16 : 8) + (2 : 8) + \frac{1}{8}$

Z uvedených příkladů je zřejmé, že v Egyptě používali „krácení“ a „rozšiřování“ podílů (nikoli zlomků) k vyjádření zbytku pomocí součtu různých kmenových zlomků.

Podívejme se ještě na jednu úlohu ze zmíněného papyru:

9.	$1 : (3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$	Zde zřejmě došlo k „rozšíření“ podílu číslem 18
		$18 : (54 + 6 + 3 + 1) = 18 : 64 = 9 : 32 =$
		$= (8 + 1) : 32 = (8 : 32) + (1 : 32) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$

Předchozí úlohy lze řešit i jinak a získat jiný ekvivalentní výsledek. Například:

3. $7 : 10 = (5 + 2) : 10 = 5 : 10 + 2 : 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

4. $8 : 10 = (5 + 2 + 1) : 10 = 5 : 10 + 2 : 10 + 1 : 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$

5. $9 : 10 = 18 : 20 = (10 + 5 + 2 + 1) : 20 =$

$$= (10 : 20) + (5 : 20) + (2 : 20) + (1 : 20) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$$

V 19. a 20. stol. došlo k výraznému zvýšení zájmu o egyptské kmenové zlomky a řada matematiků v mnoha zemích začala zkoumat a luštit postupy, které měli k dispozici egyptologové. Jeden z hlavních směrů výzkumu sledoval objevení obecného algoritmu pro rozklad pravých zlomků na zlomky kmenové.

Uvedeme zde dva jednoduché postupy, které se hodí pro zlomky s nepříliš velkým jmenovatelem a jeden obecně použitelný postup ([4] str. 30).

a) Rozklad pravého zlomku na zlomky kmenové, jestliže jmenovatel je složené číslo.
   Najdeme množinu všech dělitelů jmenovatele, které jsou menší než čitatel, a čitatel rozložíme na součet vhodných nalezených dělitelů. Vzniklý zlomek rozdělíme na součet zlomků, které po zkrácení již budou kmenové.

$\frac{8}{15} = \frac{5+3}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

1, 3, 5

$\frac{4}{9} = \frac{3+1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

1, 3

$\frac{7}{12} = \frac{6+1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$

1, 2, 3, 4, 6

$\frac{10}{21} = \frac{7+3}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$

1, 3, 7

b) Rozklad pravého zlomku na zlomky kmenové, jestliže jmenovatel je prvočíslo.

Vhodným rozšířením zlomku převedeme úlohu a postup a). Obvykle musíme rozšíření zlomku opakovat, dokud se nepodaří najít vhodné číslo k rozšíření. Postup předvedeme na jednoduché úloze:

$$\frac{2}{5} = \underset{1,\,2}{\frac{4}{10}} = \underset{1,\,3,\,5}{\frac{6}{15}} = \frac{5+1}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{2}{5} = \underset{1,\,2,\,3,\,4,\,5}{\frac{8}{20}} = \frac{5+2+1}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$$

Je zřejmé, že úloha může mít více řešení. Ukážeme si ještě dvě úlohy ve zkráceném postupu:

$$\frac{5}{13} = \underset{1,\,2,\,4,\,13}{\frac{20}{52}} = \frac{13+4+2+1}{52} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$$

$$\frac{5}{17} = \underset{1,\,2,\,4,\,17}{\frac{20}{68}} = \frac{17+2+1}{68} = \frac{1}{4} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68}$$

Tento postup se zdá být jednoduchý, ale nehodí se pro rozklad zlomků s větším jmenovatelem (prvočíslem). Například zlomek $\frac{13}{31}$ se nám nepodaří ani po 12 pokusech o rozšíření rozložit.

c) Sylvesterova obecná metoda rozkladu pravého zlomku na zlomky kmenové

Anglický matematik J. J. Sylvester našel v roce 1880 obecný postup, který se dá použít v každém případě. Ukážeme si ho na úloze, kterou jsme již řešili v odstavci b) se zlomkem $\frac{5}{17}$.

Nejprve najdeme největší kmenový zlomek, který lze ještě odečíst od daného zlomku. Ten se sestrojí tak, že do čitatele opíšeme číslo z čitatele daného zlomku, a do jmenovatele napíšeme násobek čitatele, který je nejblíže větší k číslu ve jmenovateli daného zlomku. Bude to zlomek $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Nalezený zlomek $\frac{1}{4}$ (1. kmenový zlomek rozkladu) nyní odečteme od daného zlomku:

$$\frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{20-17}{68} = \frac{3}{68}$$

Postup nyní opakujeme pro zlomek $\frac{3}{68}$. Sestrojíme nyní zlomek $\frac{3}{69} = \frac{1}{23}$ (2. kmenový zlomek rozkladu) a odečteme

$$\frac{3}{68} - \frac{1}{23} = \frac{2 \cdot 22 + 68}{68 \cdot 23} = \frac{1}{1564}$$

Tím postup končí, protože poslední získaný zlomek je již kmenový (třetí). Zapíšeme rozklad:

$$\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{1}{23} + \frac{1}{1564}$$

Postup bychom urychlili rozkladem zlomku $\frac{3}{68} = \frac{2+1}{68} = \frac{1}{34} + \frac{1}{68}$, takže bychom dostali rozklad, který známe již z odstavce b) :

$$\frac{5}{17} = \frac{20}{68} = \frac{17+2+1}{68} = \frac{1}{4} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68}$$

Sylvesterova obecná metoda, jak jsme právě poznali, není vhodná pro zlomky s malými jmenovateli. Vraťme se ale ještě ke zmíněnému zlomku $\frac{13}{31}$ a aplikujme Sylvesterovu metodu.

$$\frac{13}{31} \to \frac{13}{3 \cdot 13} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{13}{31} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 13 - 31}{13 \cdot 31} = \frac{39-31}{93} = \frac{8}{93}$$

$$\frac{8}{93} \to \frac{8}{8 \cdot 12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{8}{93} - \frac{1}{12} = \frac{8 \cdot 4 - 31}{31 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{372}$$

$$\frac{13}{31} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{372}$$

Výše uvedené egyptské početní postupy je možné je chápat jako zajímavou hru pro žáky, kdy by mohli objevovat rozklad libovolného zlomku na zlomky kmenové. Například

$$\frac{6}{7} = \frac{24}{28} = \frac{14+7+3}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2+1}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$$

5.2 Sumerská převrácená čísla

Sumerové používali šedesátkovou numerační soustavu, ale neměli k dispozici potřebných 60 číslic. Používali pouze číslici 1 a číslici pro hodnotu 10. Ostatní „číslice“ vyjadřovali jejich kombinací. Číslici 0 – tedy prázdné řádové místo – nahrazovali zvláštním znakem. Dalším problémem bylo, že skupiny znaků vyjadřující některou „číslici“ od sebe výrazně neoddělovali, takže zápis neudával znázorněnou číselnou hodnotu jednoznačně. Rovněž neužívali řádovou čárku, která by oddělovala celky od zlomků.

Předpokládalo se, že zápis se správně pochopí z kontextu, protože v běžné praxi tato čísla vždy vyjadřovala nějaké množství. Učenci v pozdější době numerační soustavu zdokonalili, takže bylo možné zápisy čísel už chápat jednoznačně. ([8] str. 28 - 31)

Dohodněme se, že v dalším textu budeme používat zkráceného rozvinutého zápisu v šedesátkové soustavě v následující podobě:

$$42 \cdot 60^1 + 12 \cdot 60^0 + 8 \cdot 60^{-1} + 0 \cdot 60^{-2} + 25 \cdot 60^{-3} = (42, 12; 8, 0, 25)_{60}$$

Řádová čárka je vyznačena středníkem, hranice mezi řádovými místy čárkou.

Sumerové a později Babyloňané dovedli provádět základní výpočty, ale problém vznikal při dělení. Po té, co objevili, že dělení lze nahradit násobením převráceným číslem, začali vytvářet tabulky převrácených čísel k „jednociferným“ číslům (1 až 59). Protože zmíněné tabulky nemáme k dispozici, vypočítáme si převrácená čísla k číslům $(5)_{60}$ a $(25)_{60}$, která budeme v dalším textu potřebovat.

$\mathbf{(5)_{60} = 5}$ převrácené číslo k 5 je $\frac{1}{5} = 0,2$

Hledejme x, pro které platí $2 \cdot 10^{-1} = x \cdot 60^{-1}$ nebo $\frac{2}{10} = \frac{x}{60}$
odtud plyne $x = 12$

Takže převrácené číslo k číslu $(5)_{60}$ je $(0;12)_{60}$

$\mathbf{(25)_{60} = 25}$ převrácené číslo k 25 je $\frac{1}{25} = 0,04$

Hledejme x, pro které platí $4 \cdot 10^{-2} = x \cdot 60^{-2}$ nebo $\frac{4}{100} = \frac{x}{3600}$
odtud plyne $x = 144 = 120 + 24$

Takže převrácené číslo k číslu $(25)_{60}$ je $(0;2,24)_{60}$

Sledujeme-li řešení úloh na dělení „dvojciferným“ dělitelem v šedesátkové soustavě ([7]), pozorujeme, že Babyloňané a snad již i Sumerové používali zajímavý algebraický postup k výpočtu převráceného „dvojciferného“ čísla:

Rozložme dané přirozené „dvojciferné“ číslo n na součet $a + b$, kde čísla a a b jsou „číslice“ v šedesátkové soustavě. Pak můžeme převrácené číslo k číslu n vypočítat takto:

$$(n = a + b) \rightarrow (\tfrac{1}{b}) \rightarrow (\tfrac{1}{b} \cdot a = \tfrac{a}{b}) \rightarrow (\tfrac{a}{b} + 1 = \tfrac{a+b}{b}) \rightarrow (\tfrac{b}{a+b}) \rightarrow (\tfrac{b}{a+b} \cdot \tfrac{1}{b} = \tfrac{1}{a+b} = \tfrac{1}{n})$$

Postup si ukážeme na dvou příkladech.

Příklad 5.1

Vypočítejte převrácené číslo k číslu $n(2,5)_{60} = 125$

Postup	v šedesátkové soustavě	v desítkové soustavě
$n = a + b$	$(2,5)_{60} = (2,0)_{60} + (5)_{60}$	$125 = 120 + 5$
$\frac{1}{b}$	$(0;12)_{60}$	0,2
$\frac{1}{b} \cdot a$	$(0;12)_{60} \cdot (2,0)_{60} = (24)_{60}$	$0,2 \cdot 120 = 24$
$\frac{a}{b} + 1$	$(25)_{60}$	25
$\frac{b}{a+b}$	$(0;2,24)_{60}$	0,04
$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{b}$	$(0;2,24)_{60} \cdot (0;12)_{60} = (0;0,28,48)_{60}$	$0,04 \cdot 0,2 = 0,008$
$\frac{1}{n}$	$(0;0,28,48)_{60}$	0,008

Příklad 5.2

Vypočítejte převrácené číslo k číslu $n(10,25)_{60} = 625$

Postup	v šedesátkové soustavě	v desítkové soustavě
$n = a + b$	$(10,25)_{60} = (10,0)_{60} + (25)_{60}$	$625 = 600 + 25$
$\frac{1}{b}$	$(0;2,24)_{60}$	0,04
$\frac{1}{b} \cdot a$	$(0;2,24)_{60} \cdot (10,0)_{60} = (24)_{60}$	$0,04 \cdot 600 = 24$
$\frac{a}{b} + 1$	$(25)_{60}$	25
$\frac{b}{a+b}$	$(0;2,24)_{60}$	0,04
$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{b}$	$(0;2,24)_{60} \cdot (0;2,24)_{60} = (0;0,5,45,36)_{60}$	$0,04 \cdot 0,04 = 0,0016$
$\frac{1}{n}$	$(0;0,5,45,36)_{60}$	0,0016

Poznámka: Násobení čísel zapsaných v šedesátkové soustavě bylo prováděno pomocí jejich rozvinutého zápisu, např. $(0;12)_{60} \cdot (2,0)_{60} = (1 \cdot 60^{-1} + 2 \cdot 60^{-2}) \cdot (2 \cdot 60^{1}) =$

$$= (2 \cdot 60^{0} + 4 \cdot 60^{-1}).$$

Šedesátková soustava má oproti soustavě desítkové jednu výhodu při dělení. Je známo, že při dělení přirozených čísel v soustavě desítkové vyjde konečný výsledek jen když dělitel má v kanonickém rozkladu pouze prvočinitele 2 a 5 (pokud ostatní prvočinitele lze proti dělenci krátit). Číslo 60 má však 8 netriviálních dělitelů (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20 a 30) a proto je pravděpodobnost, že dělení v šedesátkové soustavě vyjde s konečným výsledkem mnohem větší. Snad i proto volili Sumerové tento základ své numerační soustavy. Ukážeme si situaci na příkladu.

Příklad 5.3

Porovnejte dělení 8 : 15 a $(8)_{60} : (15)_{60}$

8 : 15 = 0,533 333...

$(8)_{60} : (15)_{60} = (8)_{60} \cdot (0;4)_{60} = (0;32)_{60} = 32 \cdot 60^{-1} = 0,533333\ldots$

Pro dělení číslem 9, které není dělitelem šedesáti, bylo třeba znát $\frac{1}{9} = 0,111111\ldots$ v šedesátkové numerační soustavě. Převod periodického rozvoje do šedesátkové soustavy však není jednoduchý. Nelze totiž pracovat s celým nekonečným rozvojem a získávat tak potřebné zbytky při dělení šedesáti. Budeme pracovat jen s jednotlivými členy rozvinutého zápisu a podle vztahu

$$1 \cdot 10^{-n} = x \cdot 60^{-n} \rightarrow x = 6^n.$$

Pro nalezení hodnoty 0,111 ... v šedesátkové soustavě zvolíme osmimístnou aproximaci 0,111 111 11. Budeme-li nyní postupně převádět hodnoty $1 \cdot 10^{-1}, 1 \cdot 10^{-2}, \ldots 1 \cdot 10^{-8}$ do soustavy šedesátkové, zjistíme, že získané „číslice“ nejsou definitívní, ale jsou upravovány ještě o příspěvky z nižších řádů.

$1 \cdot 10^{-n}$	$x = 6^n$	$(x)_{60}$	příspěvky	korekce	$(c_n)_{60}$
$1 \cdot 10^{-1}$	6	6			$6 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-2}$	36	36	3	39	$39 \cdot 60^{-2}$
$1 \cdot 10^{-3}$	216	$3 \cdot 60^1 + 36$	21+2	59	$59 \cdot 60^{-3}$
$1 \cdot 10^{-4}$	1296	$21 \cdot 60^1 + 36$	9+12 + 2	59	$59 \cdot 60^{-4}$
$1 \cdot 10^{-5}$	7776	$2 \cdot 60^2 + 9 \cdot 60^1 + 36$	57+77+7+2	179=$2 \cdot 60$+59	$59 \cdot 60^{-5}$
$1 \cdot 10^{-6}$	46 656	$12 \cdot 60^2 + 57 \cdot 60^1 + 36$	45+46+1	128=$2 \cdot 60$+8	?
$1 \cdot 10^{-7}$	279 936	$77 \cdot 60^2 + 45 \cdot 60^1 + 36$	33	69=$1 \cdot 60$+9	?
$1 \cdot 10^{-8}$	1 679 616	$7 \cdot 60^3 + 46 \cdot 60^2 + 33 \cdot 60^1 + 36$	?	?	?

Získali jsme neúplný pětimístný rozvoj $(0; 6, 39, 59, 59, 59, ...)_{60}$, jehož převodem do desítkové soustavy již získáme aproximaci 0,111 111 11, a dá se předpokládat, že i tento rozvoj v šedesátkové soustavě bude periodický, takže

$$0, \bar{1} = (0; 6, 39, \bar{59})_{60}$$

6 Zlatý řez

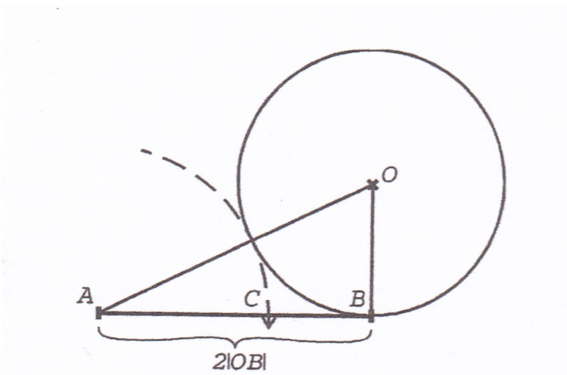
6.1 Zlatý řez a jeho konstrukce

Zlatý řez (sectio aurea) představuje základní poměr délek, který se objevuje v přírodě. Již od antiky člověka vždy tato dokonalost fascinovala a inspirovala. Proto jej použil při stavbách některých architektonických skvostů. Zlatý řez můžeme najít na athénském Pantheonu, na pařížské katedrále Notre Dame, ale i na budově OSN v New Yorku.

Z hlediska matematiky je třeba připomenout dílo „De divina proportione", jehož autor Fra Luca Pacioli v roce 1509 definoval zlatý řez takto ([1] str. 308):

Zlatý řez vznikne rozdělením úsečky AB na dvě části (viz obr. 6.1) tak, že poměr velikosti větší části $|AC|$ k velikosti menší části $|CB|$ se rovná poměru velikosti celé úsečky $|AB|$ k velikosti větší části $|AC|$.

$$|AC| : |CB| = |AB| : |AC|, \text{ přičemž } |AC| + |CB| = |AB|$$



Obr. 6.1: Konstrukce zlatého řezu

Z obrázku 6.1 je patrná i konstrukce rozdělení úsečky, kterou lze aplikovat pomocí podobnosti na libovolnou jinou úsečku. Bylo by vhodné dokázat, že uvedená konstrukce na obrázku skutečně odpovídá výše uvedenému poměru:

Zvolme $|OB| = 1$, pak $|AB| = 2$ a $|AO| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$$|AC| = |AO| - |OB| = \sqrt{5} - 1 \qquad |CB| = |AB| - |AC| = 2 - \sqrt{5} + 1 = 3 - \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5} - 1) : (3 - \sqrt{5}) = 2 : (\sqrt{5} - 1) \rightarrow 6 - \sqrt{5} = 6 - \sqrt{5}$$

Pokusme se nyní vyjádřit výše uvedený poměr početně:

Označme: $|AB| = x$, $|AC| = 1$, $|CB| = x - 1$

Pak náš poměr dostane tvar $1 : (x - 1) = x : 1$, odtud plyne $x^2 - x - 1 = 0$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (záporný kořen nevyhovuje)

Můžeme tedy napsat $|AC| : |CB| = |AB| : |AC| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,033\,988\,74\ldots$ je iracionální a pro technickou potřebu (rozměry oken apod.) se více hodí používat zlomky, které jsou vhodné racionální aproximace tohoto čísla. ([17] str. 42) Jednou z cest byla tzv. Fibonacciho posloupnost (Leonardo Pisano, jinak také zvaný Fibonacci 1170 - 1250):

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\ldots\}$$

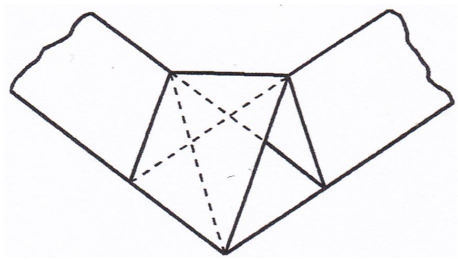
daná rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = 0, a_1 = 1$

Potřebnou aproximaci čísla $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ najdeme podílem dvou sousedních členů posloupnosti

$a_{n+1} : a_n$ $\qquad \frac{8}{5} = \mathbf{1{,}6}$ $\qquad \frac{13}{8} = \mathbf{1{,}6}25$ $\qquad \frac{89}{55} = \mathbf{1{,}618}1818...$

V období renesance, kdy zlatý řez byl používán jako jeden z hlavních estetických prvků při projektování staveb, nebylo při výrobě okenních tabulek nebo vytváření sgrafitového vzoru „psaníček“ na fasádách domů nutné používat příliš přesnou aproximaci, stačil jen poměr 8:5.

Existoval však ještě jeden zajímavý způsob vytvoření potřebného poměru. Je známo, že úhlopříčka a strana pravidelného pětiúhelníka jsou v poměru zlatého řezu. Tak bylo možné vyrobit potřebné šablony zlatých obdélníků. Model pravidelného pětiúhelníka se dá snadno vyrobit z proužku papíru. Uvážeme na něm uzel, jak je uvedeno na obr. 6.2. ([1] str. 309).



Obr. 6.2: Model pravidelného pětiúhelníka

6.2 Zajímavé vlastnosti poměru zlatý řez

Dohodněme se, že poměr zlatého řezu budeme v této práci zapisovat ve tvaru $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Jsou k tomu praktické důvody.

a) Převrácené číslo k číslu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Převrácené číslo k číslu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ je číslo $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Rozdíl čísel $\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$

Z uvedeného vyplývá, že obě čísla mají identický desetinný rozvoj a liší se jen v řádu jednotek:

$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ 033\ 988\ 74\ ...$ a $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ 033\ 988\ 74\ ...$

I když neznáme číslici stojící na tisícím desetinném čísle, víme, že u obou čísel bude stejná.

b) Mocnina čísla $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Povýšíme-li číslo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ na vysoký řád, pak se vzniklé číslo velmi blíží číslu celému ([1] str. 314):

$$(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2})^{99} = 489\ 526\ 700\ 523\ 968\ 661\ 124{,}\underbrace{000...0...}_{\text{20 nul}}$$

$$(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2})^{100} = 729\ 070\ 839\ 848\ 372\ 253\ 126{,}\underbrace{999...9...}_{\text{20 devítek}}$$

c) **„Kouzlo“ s kalkulačkou** ([18] str. 65)

Existence kalkulaček značně usnadnila jednu dětskou hru mnohokrát opakovaného sčítání s překvapivých výsledkem:

Z číslic 1, 6, 8 si sestavte dvě libovolná trojmístná čísla, např. 816 a 168. Napište je pod sebe a sečtěte. Dostanete 1. součet 984, který napište pod oba sčítance. Nyní sečtěte čísla 168 a 984, dostanete 2. součet 1 152.
I ten napište pod číslo 984: 816
168
984
1 152 a tak pokračujte

Po získání nejméně dvanáctého součtu ho vydělte předchozím součtem a uvidíte, že za desetinnou čárkou se objeví opět číslice 1, 6, 8 v pořadí 618. Pro laika je to překvapivé zjištění. Získaný podíl 1,618 . . . nám ale nápadně připomíná aproximaci čísla $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ a postup výpočtu Fibonacciho posloupnost zadanou rekurentně:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, a_0 = 0, a_1 = 1, \text{ jen první dva členy byly zvoleny jinak.}$$

$$a_0 = 816 \text{ a } a_1 = 168$$

Tabulka 6.1 uvádí protokol řešení až do 20. součtu.

č. součtu	součet	dělení součtů	podíl	použitelná aproximace
1.	984			
2.	1 152	2. : 1.	1,170 731 7	
3.	2 136	3. : 2.	1,854 166 7	
4.	3 288	4. : 3.	1,539 325 8	
5.	5 424	5. : 4.	1,649 635	1,6
6.	8 712	6. : 5.	1,606 194 7	1,61
7.	14 136	7. : 6.	1,622 589 5	1,62
8.	22 848	8. : 7.	1,616 298 8	1,62
9.	36 984	9. : 8.	1,618 697 5	1,62
10.	59 832	10. : 9.	1,617 780 7	1,618
11.	96 816	11. : 10.	1,618 130 8	1,618
12.	156 648	12. : 11.	1,617 997	1,618
13.	253 464	13. : 12.	1,618 048 1	1,618 0
14.	410 112	14. : 13.	1,618 028 6	1,618 03
15.	663 576	15. : 14.	1,618 036 1	1,618 0
16.	1 073 688	16. : 15.	1,618 033 2	1,618 03
17.	1 737 264	17. : 16.	1,618 034 3	1,618 03
18.	2 810 952	18. : 17.	1,618 033 9	1,618 03
19.	4 548 216	19. : 18.	1,618 034	1,618 03
20.	7 359 168	20. : 19.	1,618 034	1,618 03

Tab. 6.1: Protokol řešení pro sčítance 816 a 168

Připomenutí Fibonacciho posloupnosti nás nutně přivádí na myšlenku, že zvolená trojciferná čísla vůbec nemusí obsahovat číslice 1, 6, 8 a „kouzlo" musí také fungovat. Zvolme proto sčítance 289 + 457 = 746.
Tabulka 6.2 uvádí protokol.

č. součtu	součet	dělení součtů	podíl	použitelná aproximace
1.	746			
2.	1 203	2. : 1.	1,612 600 5	1,61
3.	1 949	3. : 2.	1,620 116 4	1,6
4.	3 152	4. : 3.	1,617 239 6	1,6
5.	5 101	5. : 4.	1,618 337 6	1,618
6.	8 253	6. : 5.	1,617 918 1	1,618
7.	13 354	7. : 6.	1,618 078 3	1,618
8.	21 607	8. : 7.	1,618 017 1	1,618 0
9.	34 961	9. : 8.	1,618 040 5	1,618 0
10.	56 568	10. : 9.	1,618 031 5	1,618 03
11.	91 529	11. : 10.	1,618 034 9	1,618 03
12.	148 097	12. : 11.	1,618 033 6	1,618 034
13.	239 626	13. : 12.	1,618 034 1	1,618 034
14.	387 723	14. : 13.	1,618 033 9	1,618 034
15.	627 349	15. : 14.	1,618 034	1,618 034
16.	1 015 072	16. : 15.	1,618 034	1,618 034
17.	1 642 421	17. : 16.	1,618 034	1,618 034
18.	2 657 493	18. : 17.	1,618 034	1,618 034
19.	4 299 914	19. : 18.	1,618 034	1,618 034
20.	6 957 407	20. : 19.	1,618 034	1,618 034

Tab. 6.2: Protokol řešení pro sčítance 289 a 457

Dokonce zvolená čísla nemusí být ani trojciferná. V tabulce 6.3 je uveden zkrácený protokol pro sčítance 19 + 35 = 54 a v tabulce 6.4 pro sčítance 23 + 312 = 335.

č. součtu	součet	dělení součtů	podíl	použitelná aproximace
1.	54			
2.	89	2. : 1.	1,648 148 2	1,6
9.	2 571	9. : 8.	1 617 998 7	1,6
10.	4 160	10. : 9.	1 618 047 5	1,618 0
14.	28 513	14. : 13.	1,618 034 3	1,618 034
15.	46 135	15. : 14.	1,618 033 9	1,618 034
19.	316 214	19. : 18.	1,618 034	1,618 034
20.	511 645	20. : 19.	1,618 034	1,618 034

Tab. 6.3: Protokol pro sčítance 19 a 35

č. součtu	součet	dělení součtů	podíl	použitelná aproximace
1.	335			
2.	647	2. : 1.	1,931 443 3	
9.	17 942	9. : 8.	1 617 708 1	1,6
10.	29 033	10. : 9.	1 617 151 8	1,618 0
14.	198 991	14. : 13.	1,618 036 6	1,618 034
15.	321 974	15. : 14.	1,618 033	1,618 03
19.	2 206 843	19. : 18.	1,618 034	1,618 034
20.	3 570 747	20. : 19.	1,618 034	1,618 034

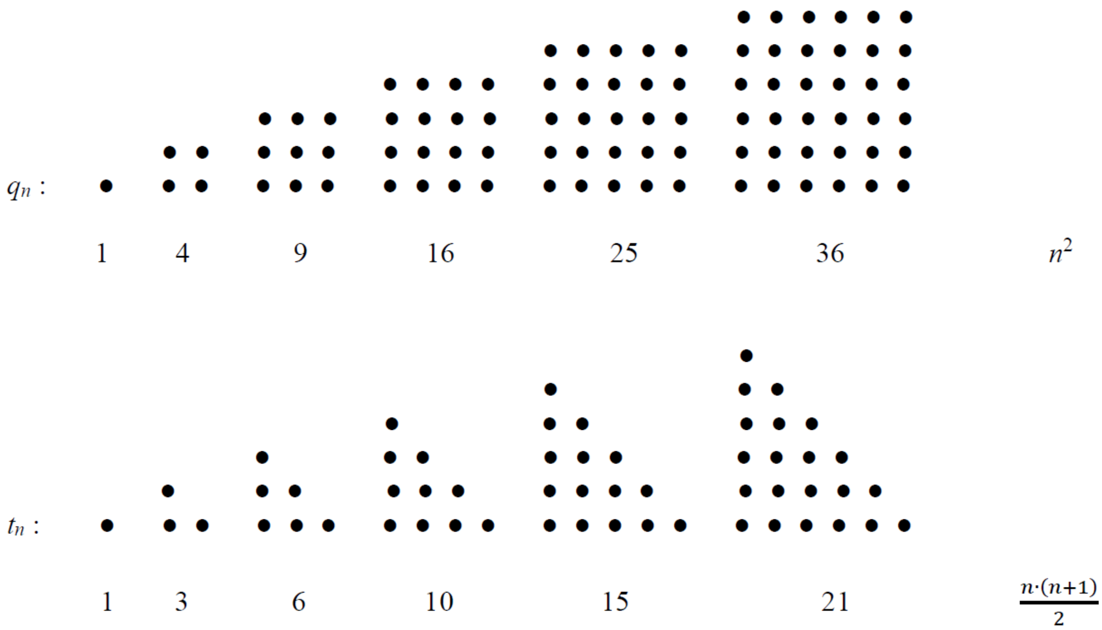
Tab. 6.4: Protokol pro sčítance 23 a 312

7 Figurální čísla

7.1 Základní pojmy

Pythagorejské období matematiky se vyznačuje silnou geometrizací, kdy řada zákonitostí a vztahů mezi čísly se interpretuje geometricky a tímto způsobem se provádějí i důkazy. Tato interpretace přinesla do množiny přirozených čísel zcela novou strukturu a objevila posloupnosti „příbuzných čísel“. Protože členy těchto posloupností se znázorňovaly pomocí konfigurací různých předmětů (např. oblázků), začalo se mluvit o **figurálních** nebo také **obrazcových číslech**.

Zpočátku to byly čtverce a trojúhelníky, a tak se hovořilo o číslech čtvercových nebo trojúhelníkových ([23] str. 33). Posloupnost čtvercových čísel budeme značit $\{q_n\}$ a posloupnost trojúhelníkových čísel budeme značit $\{t_n\}$.



Obr. 7.1: Příklady čtvercových a trojúhelníkových čísel

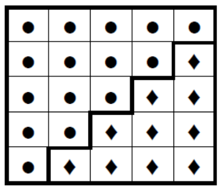
7.2 Některé vlastnosti trojúhelníkových a čtvercových čísel

a) Všimněme si, že v posloupnosti $\{q_n\}$ se střídají čísla lichá a sudá, zatímco v posloupnosti $\{t_n\}$ se střídají dvojice čísel lichých a sudých.

b) Posloupnost $\{t_n\}$ je možné najít na 3. diagonále Pascalova trojúhelníku a můžeme tedy její obecný člen $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ zapsat také jako kombinační číslo $\binom{n+1}{2}$

c) Na obrázku 7.2 je vidět, že součet dvou sousedních trojúhelníkových čísel dává číslo čtvercové:

$$10 + 15 = 25, \text{ tj. } \binom{4+1}{2} + \binom{5+1}{2} = 52, \text{ obecně } \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = (n+1)^2$$



Obr. 7.2: Součet sousedních trojúhelníkových čísel

d) Porovnáme-li posloupnosti

$$\{t_n\} = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \mathbf{36}, 45, \ldots$$
$$\{q_n\} = = 1, 4, 9, 16, 25, \mathbf{36}, 49, 64, 81, \ldots,$$

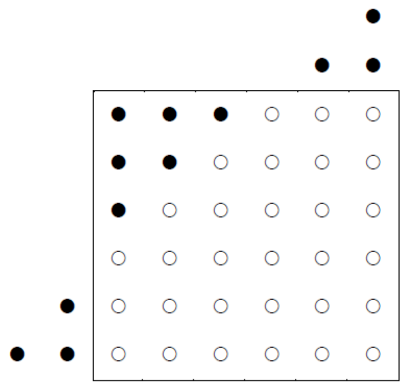
vidíme, že existuje nejmenší číslo **36**, které je zároveň trojúhelníkové i čtvercové. Tedy platí

$$t_8 = q_6$$

Zřejmě takových čísel bude víc. Pokusíme se je hledat ([23] str. 39). Hledejme tedy čísla, pro která platí

$$t_n = q_m$$

Znázorníme si úlohu pro nalezené číslo **36**:



Obr. 7.3: Znázornění čísel q_6 a t_8

Na obrázku 7.3 je znázorněné čtvercové číslo q_6 a trojúhelníkové číslo t_8, které je složeno ze dvou trojúhelníkových čísel t_2 (ležících vně čtverce) a útvaru vyznačených uvnitř čtverce značkou $\circ$. Pokud bude trojúhelníkové číslo t_3, které leží uvnitř čtverce rovno dvěma trojúhelníkovým čtvercům t_2, které leží vně čtverce (a to skutečně platí), bude splněna rovnost

$$t_8 = q_6$$

Laika ihned napadne, že další takové číslo získáme např. zvětšením obrázku 7.3 dvakrát, takže předpokládá, že t_{16} bude mít stejnou hodnotu jako q_{12}. Ovšem není tomu tak. $t_{16} = 136$ a $q_{12} = 144$.

Při hledání dalších takových čísel musíme vyjít z poznatku, že $\mathbf{t_3 = 2 \cdot t_2}$, obecně $\mathbf{t_a = 2 \cdot t_b}$. Hledejme tedy taková dvě trojúhelníková čísla, pro která platí, že jedno je dvojnásobkem druhého. Jestliže podle obrázku 7.3 je $a = 3$ a $b = 2$, pak

$$t_{a+2b+1} = t_8 \text{ a } q_{a+b+1} = q_6$$

obecně

$$t_a = 2 \cdot t_b \to t_{a+2b+1} = q_{a+b+1}$$

Abychom našli další řešení vztahu $t_a = 2 \cdot t_b$, vyjádříme hledaná trojúhelníková čísla ve tvaru

$$\frac{a(a+1)}{2} = 2\frac{b(b+1)}{2} \qquad \text{a odtud} \qquad a \cdot (a+1) = 2b \cdot (b+1)$$

To znamená najít součin dvou sousedních přirozených čísel, který je dvojnásobkem součinu jiných dvou sousedních přirozených čísel. Obecné řešení takové úlohy je nad rámec této diplomové práce, a proto uvedeme pouze další dvě řešení z posloupnosti všech řešení tohoto problému ([23] str. 41).

Dalším řešeními jsou až

$$t_{20} = 2 \cdot t_{14} \qquad t_{20} = \binom{20+1}{2} = 210,\ t_{14} = \binom{14+1}{2} = 105$$

$$t_{20+28+1} = t_{49} = \binom{49+1}{2} = 1225 \qquad q_{20+14+1} = q_{35} = 35^2 = 1225$$

a

$$t_{119} = 2 \cdot t_{84} \qquad t_{119} = \binom{119+1}{2} = 7140, t_{84} = \binom{84+1}{2} = 3570$$

$$t_{119+168+1} = t_{288} = \binom{288+1}{2} = 41616 \qquad q_{119+84+1} = q_{204} = 204^2 = 41616$$

e) Ukážeme si ještě, že žádné trojúhelníkové číslo nemůže mít na místě nultého řádu číslici 2, 4, 7 a 9 ([15] str. 190).

Jestliže $t_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$, pak $n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8t_n}}{2}$. Číslo $(1 + 8t_n)$ musí být druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Druhá mocnina přirozeného čísla může končit pouze číslicí 0, 1, 4, 5, 6 a 9 a nemůže končit číslicí 2, 3, 7, 8.

<table>
<tr><td>Kdyby t_n končilo číslicí,</td><td>výraz $1 + 8t_n$ by končil číslicí</td><td rowspan="5">a nemohl by být druhou mocninou přirozeného čísla</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td></tr>
<tr><td>9</td><td>3</td></tr>
</table>

Tab. 7.1: Přehled posledních číslic neexistujících trojúhelníkových čísel

7.3 Figurální čísla druhého stupně

Vyjdeme-li z posloupnosti všech přirozených čísel (jinak lineárních figurálních čísel nebo také figurálních čísel 1. stupně)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...n, ... \tag{2}$$

což je aritmetická posloupnost s diferencí $d = 1$, a sestavíme posloupnost částečných součtů

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...\frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), ... \tag{3}$$

dostaneme posloupnost trojúhelníkových čísel (jinak obrazcových figurálních čísel nebo také figurálních čísel 2. stupně) ([11] str. 286). Zatímco posloupnost (1) obsahuje čísla, která leží na 2. diagonále Pascalova trojúhelníku, posloupnost (2) obsahuje čísla, která leží na 3. diagonále.

Vyjdeme-li z aritmetické posloupnosti přirozených čísel s diferencí $d = 2$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...2 \cdot n - 1, ... \tag{4}$$

a sestavíme posloupnost částečných součtů

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...n^2, ... \tag{5}$$

dostaneme posloupnost čtvercových čísel.

Vyjdeme-li z aritmetické posloupnosti přirozených čísel s diferenci $d = 3$

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...(3 \cdot n - 2), ... \qquad (6)$$

a sestavíme posloupnost částečných součtů

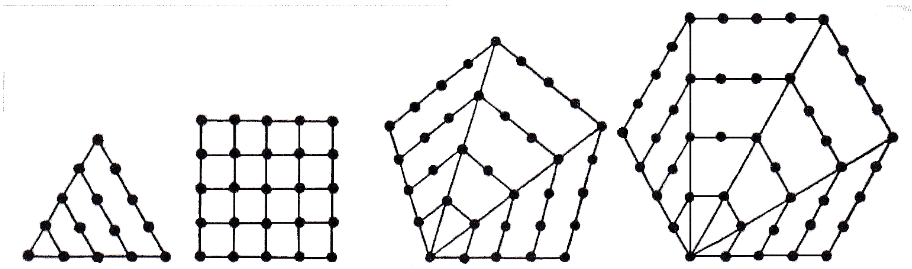
$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ... \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}, ... \qquad (7)$$

dostaneme posloupnost tzv. pětiúhelníkových čísel.

Podobně můžeme získat čísla šestiúhelníková, sedmiúhelníková, obecně n-úhelníková. Uvedeme jen posloupnost šestiúhelníkových čísel:

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, ...n \cdot (2 \cdot n - 1), ... \qquad (8)$$

Názvy členů těchto posloupností pocházejí z jejich geometrické interpretace (viz obr. 7.4).



Obr. 7.4:

Sestrojíme trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník atd. a k nim n-úhelníky stejnolehlé se středem stejnolehlosti v jednom z jejich vrcholů.

7.4 Figurální čísla druhého stupně

Jestliže figurální čísla 1. stupně byla lineární, 2. stupně obrazcová, dá se předpokládat, že figurální čísla 3. stupně budou tělesová.

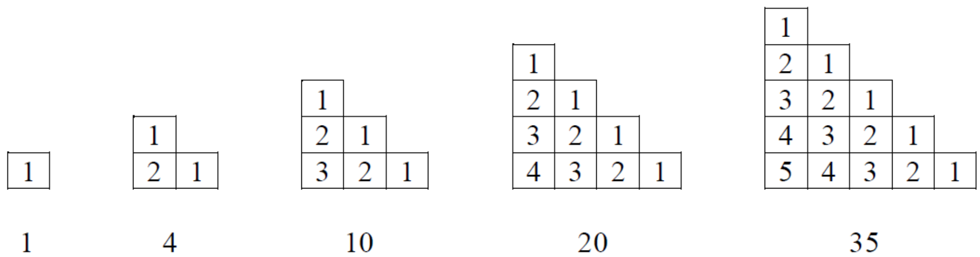
Vyjděme z posloupnosti trojúhelníkových čísel (3. diagonála Pascalova trojúhelníka)

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \ldots \tag{2}$$

a utvořme posloupnost částečných součtů

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \ldots \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2), \ldots \tag{8}$$

dostaneme tak posloupnost tzv. jehlanových čísel, která najdeme na 4. diagonále Pascalova trojúhelníku. Znázornění tělesových figurálních čísel budeme provádět na „kótovaném půdorysu“ ve čtvercové síti (obr. 7.5).



Obr. 7.5: Znázornění tělesových figurálních čísel

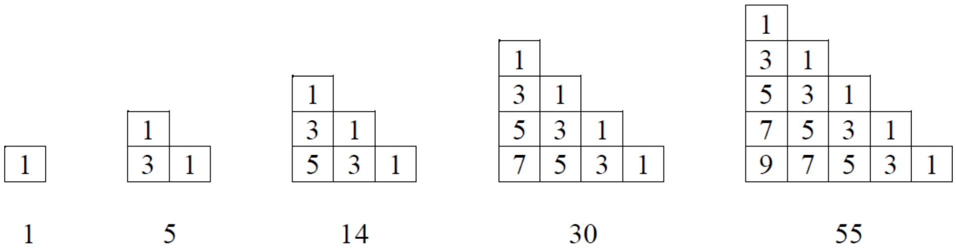
Vyjděme nyní z posloupnosti

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots n^2, \ldots \tag{4}$$

a utvořme posloupnost částečných součtů

$$1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1), \ldots \tag{9}$$

dostaneme opět čísla jehlanová. (obr. 7.6)



Obr. 7.6: Znázornění jehlanových čísel

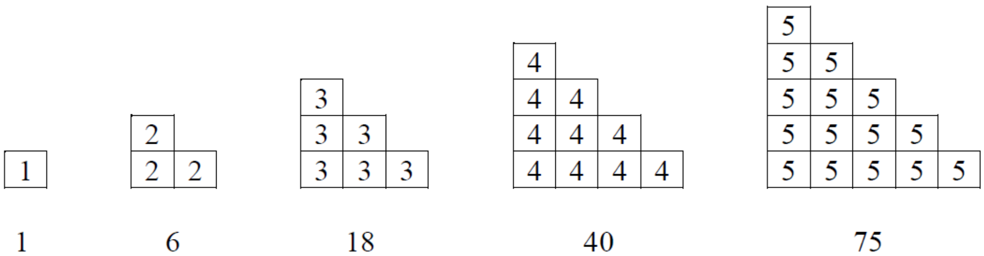
Vyjdeme-li z posloupnosti

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \ldots \frac{n \cdot (3n-1)}{2}, \ldots \tag{6}$$

a utvořme posloupnost částečných součtů

$$1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, \ldots \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot (n+1), \ldots \tag{10}$$

dostaneme čísla hranolová (obr. 7.7).



Obr. 7.7: Znázornění hranolových čísel

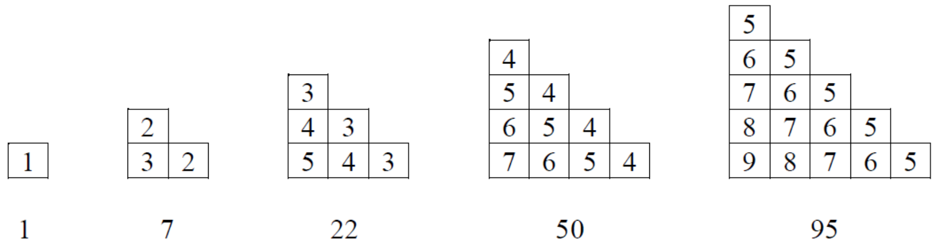
Vyjdeme-li z posloupnosti

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \ldots . n \cdot (2n-1), \ldots \tag{7}$$

a utvořme posloupnost částečných součtů

$$1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, \ldots \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (4n-1), \ldots \tag{11}$$

dostaneme opět čísla jehlanová (obr. 7.8).



Obr. 7.8: Znázornění jehlanových čísel

Je zřejmé, že analogickým způsobem bychom mohli pokračovat a sestrojovat figurální čísla 4. resp. 5. stupně, ale ta již nelze názorně geometricky interpretovat.

8 Neúplná čísla

8.1 Základní pojmy

V praxi se setkáváme s řadou situací, kdy nemůžeme pracovat s přesnými čísly. Například při počítání s desetinnými čísly, která mají nekonečný rozvoj, se musíme spokojit jen s omezeným počtem desetinných míst. Také při měření nemůžeme zjistit přesnou hodnotu. Každé měření je zatíženo jednak chybou osobní nebo chybou technickou (nedokonalostí měřicího zařízení), ale i tím, že výsledek měření je fakticky reálné číslo z množiny uspořádané spojitě. Proto přesnou hodnotu veličiny A nahrazujeme přibližnou hodnotou a. Pak rozdíl $|A - a|$ nazýváme **skutečnou chybou**. Protože přesnou hodnotu A obvykle neznáme, nemůžeme ani stanovit skutečnou chybu. Musíme se spokojit s tím, že A leží mezi jistými hodnotami a_1 a a_2, takže

$$a_1 \leq A \leq a_2 \tag{1}$$

kde a_1 se nazývá **dolní mez** a a_2 **horní mez aproximace** hodnoty A. Interval $< a_1, a_2 >$ se pak nazývá neúplné číslo A. ([22] str. 8)

Nahradíme-li číslo A číslem $\overline{a} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2)$, tzv. **střední aproximací** hodnoty A, pak skutečná chyba bude určena odhadem $|\overline{a} - a| \leq \frac{1}{2} \cdot (a_2 - a_1)$. Výraz $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (a_2 - a_1)$ se nazývá **absolutní chyba střední aproximace** a píšeme

$$A = \overline{a} \pm \alpha \tag{2}$$

Pro přehlednost budeme vztahy v této kapitole číslovat. Vztahy (1) a (2) jsou rovnocenné. Známe-li $\overline{a}$ a α, snadno pak určíme čísla a_1 a a_2 ze soustavy rovnic

$$\overline{a} = \tfrac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2)$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot (a_2 - a_1)$$

$$a_1 = \overline{a} - \alpha \qquad a_2 = \overline{a} + \alpha$$

Absolutní chyba není spolehlivou charakteristikou přesnosti aproximace neúplného čísla. Problém vidíme například, když měříme délku zápalky s přesností na 0,5 cm a délku místnosti s přesností na 5 cm.

Zavádíme proto ještě pojem **relativní chyba střední aproximace ϑ.**

$$\vartheta_A = \frac{\alpha}{|\overline{a}|} \quad \text{popřípadě} \quad \vartheta_A = \frac{\alpha}{|\overline{a}|} \cdot 100\%$$

Praktický význam mají pouze neúplná čísla, která mají relativní chybu menší než 10 %.

<u>Příklad 8.1</u>

Jsou dána dvě neúplná čísla. Které z nich je přesnější?

A = 1 000 ± 1,2; B = 23,5 ± 0,1

Absolutní chyba čísla A je 12krát větší než absolutní chyba čísla B. Porovnejme chyby relativní,

$$\frac{1{,}2}{1000} < \frac{0{,}1}{23{,}5} \qquad 0,0012 < 0,0043$$

Číslo A je tedy přesnější.

8.2 Sčítání a odčítání neúplných čísel

Pro objasněné **sčítání neúplných čísel** zvolíme dvě neúplná čísla A a B, jejichž střední aproximace jsou $\overline{a}$ a $\overline{b}$, a absolutní chyby α a β. Určíme jejich součet.

$$a_1 \leq A \leq a_2 \qquad A = \overline{a} \pm \alpha$$

$$b_1 \leq B \leq b_2 \qquad B = \overline{b} \pm \beta$$

$$a_1 + b_1 \leq A + B \leq a_2 + b_2 \qquad A + B = (\overline{a} + \overline{b}) \pm (\alpha + \beta) \tag{3}$$

Je zřejmé, že neúplné číslo $A+B$ je dáno intervalem $< a_1 + b_1, a_2 + b_2 >$ a absolutní chyba je rovna součtu $\alpha + \beta$. Dále platí $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$. Relativní chyba součtu $A+B$ je $\vartheta_{A+B} = \frac{\alpha+\beta}{|\overline{a+b}|}$.

Odčítání neúplných čísel $A - B$ budeme řešit jako sčítání $A + (-B)$. Číslo $-B$ je určeno intervalem $< -b_2, -b_1 >$. Určíme rozdíl $A - B$.

$$a_1 \leq A \leq a_2 \qquad\qquad A = \overline{a} \pm \alpha$$

$$-b_2 \leq B \leq -b_1 \qquad\qquad -B = -\overline{b} \pm \beta$$

$$a_1 - b_2 \leq A - B \leq a_2 - b_1 \qquad\qquad A - B = (\overline{a} - \overline{b}) \pm (\alpha + \beta) \tag{4}$$

Neúplné číslo $A - B$ je určeno intervalem $< a_1 - b_2, a_2 - b_1 >$ a absolutní chyba je opět $\alpha + \beta$. Dále platí $\overline{a - b} = \overline{a} - \overline{b}$. Relativní chyba $A - B$ je $\vartheta_{A-B} = \frac{\alpha+\beta}{\lvert \overline{a-b} \rvert}$.

Příklad 8.2

Vypočítejte součet a rozdíl neúplných čísel $A = 12 \pm 0{,}5$ a $B = 7 \pm 0{,}2$.

Podle (3): $A + B = 19 \pm 0{,}7$

Podle (4): $A - B = 5 \pm 0{,}7$

Relativní chyba $\vartheta_{A+B} = \frac{0{,}5+0{,}2}{\lvert 12+7 \rvert} = \frac{0{,}7}{19} \doteq 0,04 \rightarrow 4\%$

Relativní chyba $\vartheta_{A-B} = \frac{0{,}5+0{,}2}{\lvert 12-7 \rvert} = \frac{0{,}7}{5} \doteq 0,14 \rightarrow 14\%$

Z toho vyplývá, že relativní chyba rozdílu může při malých relativních chybách čísel A a B být velmi veliká ([22] str. 11).

8.3 Násobení a dělení neúplných čísel

Pro odvození postupu **násobení neúplných čísel** budeme z praktických důvodů předpokládat, že zvolená neúplná čísla jsou kladná a uvedeme je ve tvaru (2).

$$A = \overline{a} + \alpha = \overline{a} \cdot (1 \pm \tfrac{\alpha}{\overline{a}}) = \overline{a} \cdot (1 \pm \vartheta_A)$$

$$B = \overline{b} + \beta = \overline{b} \cdot (1 \pm \tfrac{\beta}{\overline{b}}) = \overline{b} \cdot (1 \pm \vartheta_B)$$

$$\overline{a} \cdot (1 - \vartheta_A) \leq A \leq \overline{a} \cdot (1 + \vartheta_A)$$

$$\overline{b} \cdot (1 - \vartheta_B) \leq B \leq \overline{b} \cdot (1 + \vartheta_B)$$

Protože předpokládáme, že všechna čísla v uvedených nerovnicích jsou kladná, můžeme je vynásobit a dostaneme

$$\overline{a} \cdot \overline{b}(1 - \vartheta_A)(1 - \vartheta_B) \leq A \cdot B \leq \overline{a} \cdot \overline{b}(1 + \vartheta_A)(1 + \vartheta_B)$$

Při roznásobení můžeme součin malých kladných čísel $\vartheta_A \cdot \vartheta_B$ zanedbat a podle (1) dostaneme

$$\overline{a} \cdot \overline{b}[1 - (\vartheta_A + \vartheta_B)] \leq A \cdot B \leq \overline{a} \cdot \overline{b}[1 + (\vartheta_A + \vartheta_B)]$$

a úpravou podle (2) pak

$$A \cdot B = \overline{a} \cdot \overline{b}[1 \pm (\vartheta_A + \vartheta_B)] \rightarrow A \cdot B = \overline{a} \cdot \overline{b} \pm \overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B)$$

Neúplné číslo $A \cdot B$ je určeno intervalem $< \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B), \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B) >$ a jeho absolutní chyba je $\overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B)$. Přitom platí $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. Relativní chyba součinu $A \cdot B$ je $\vartheta_{A \cdot B} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B)}{\overline{a} \cdot \overline{b}} = \vartheta_A + \vartheta_B$.

Absolutní chybu $\overline{a} \cdot \overline{b}(\vartheta_A + \vartheta_B)$ můžeme ještě upravit na

$$\overline{a} \cdot \overline{b}(\tfrac{\alpha}{\overline{a}} + \tfrac{\beta}{\overline{b}}) = \alpha \cdot \overline{b} + \beta \cdot \overline{a} \tag{5}$$

Příklad 8.3

Určete součin neúplných čísel $A = 12 \pm 0{,}5$ a $B = 7 \pm 0{,}2$

$$\overline{a} = 12 \qquad \alpha = 0,5 \qquad \vartheta_A = \tfrac{0,5}{12} \doteq 0,04$$

$$\overline{b} = 7 \qquad \beta = 0,2 \qquad \vartheta_B = \tfrac{0,2}{7} \doteq 0,03$$

$$A \cdot B = 84 \pm 84(0,04 + 0,03) = 84 \pm 5,9$$

$$78,1 \leq A \cdot B \leq 89,9$$

Dělení neúplných čísel převedeme na násobení převrácenou hodnotou. Označme $B^{-1} = C$ a najděme relativní chybu čísla C.

$$\overline{c} - \gamma \leq C \leq \overline{c} + \gamma$$

$$\overline{c} - \gamma = \tfrac{1}{\overline{b}+\beta} \qquad \overline{c} + \gamma = \tfrac{1}{\overline{b}-\beta}$$

$$(\overline{c} - \gamma) \cdot (\overline{b} + \beta) = (\overline{c} + \gamma) \cdot (\overline{b} - \beta)$$

$$\overline{c} \cdot \overline{b} + \overline{c} \cdot \beta - \overline{b} \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = \overline{c} \cdot \overline{b} - \overline{c} \cdot \beta + \overline{b} \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma$$

$$2 \cdot \overline{c} \cdot \beta = 2 \cdot \overline{b} \cdot \gamma$$

$$\tfrac{\beta}{\overline{b}} = \tfrac{\gamma}{\overline{c}}$$

Protože relativní chyba čísla B se rovná relativní chybě čísla $C = B^{-1}$ a relativní chyba součinů $A \cdot B$ a $A \cdot C$ i podílu $A : B$ je stejná, platí $\vartheta_{A:B} = \vartheta_A + \vartheta_B$

Příklad 8.4

Určete podíl neúplných čísel $A = 2{,}8 \pm 0{,}3$ a $B = 25{,}8 \pm 0{,}05$

$C = B^{-1}$ $\quad \overline{c} = \frac{1}{25{,}8} \doteq 0,039$

$\vartheta_C = \vartheta_B = \frac{0{,}05}{25{,}8} \doteq 0,002$

$\gamma = \overline{c} \cdot \vartheta_C \doteq 0,00008$

$A : B = A \cdot C = \overline{a} \cdot \overline{c} \pm (\alpha \cdot \overline{c} + \gamma \cdot \overline{a})$ podle (5)

$A : B = 0,109 \pm (0,3 \cdot 0,039 + 0,00008 \cdot 2,8)$

$A : B = 0,109 \pm 0,012$

Příklad 8.5

Určete podíl $5 : 7$ s relativní chybou 0,3%

Protože $\vartheta = 0,003$, stačí podíl vyjádřit na 3 desetinná místa. $5 : 7 \doteq 0,714$

Absolutní chyba $\alpha = \overline{a} \cdot \vartheta = 0,713 \cdot 0,003 \doteq 0,002139 \to \alpha = 0,003$

Chybu zaokrouhlujeme vždy nahoru.

$$0,711 \leq 5 : 7 \leq 0,717$$

8.4 Platné číslice

Abychom mohli zapsat neúplné číslo, potřebujeme znát buď dolní a horní mez a_1 a a_2 , nebo střední aproximaci a absolutní chybu $\overline{a}$ a α. Neúplné číslo lze však zapsat i jediným údajem a k tomu právě slouží **platné číslice** ([22] str. 8).

Číslici určité aproximace neúplného čísla nazveme platnou číslicí, jestliže absolutní chyba střední aproximace není větší než jednotka řádu uvažované číslice.

Tato definice se nevztahuje na nuly stojící nalevo od první nenulové číslice.

Příklad 8.6

$A = 42{,}89 \pm 0{,}07$ má tři platné číslice 4, 2, 8

Číslice 9 již není platná, protože $0{,}07 > 0{,}01$

$B = 4{,}289 \pm 0{,}07$ má jen dvě platné číslice 4, 2

Číslice 8 a 9 již nejsou platné, protože $0{,}07 > 0{,}01 > 0{,}001$

$C = 0{,}002\ 139\ 03 \pm 0{,}000\ 03$ má dvě platné číslice 2, 1

Číslice 3, 9, 0, 3 již nejsou platné, protože $0{,}000\ 03 > 0{,}000\ 01$ atd.

Zapíšeme-li neúplné číslo jen pomocí platných číslic, snadno stanovíme absolutní chybu, není totiž větší než jednotka řádu poslední napsané číslice. V případě, že poslední platná číslice vznikla zaokrouhlením, pak absolutní chyba je pouze 0,5 jednotky řádu poslední číslice.

Pokud pracujeme s neúplnými čísly a neznáme jejich absolutní chybu, pak považujeme tato čísla za zaokrouhlená, a absolutní chybu stanovíme na 0,5 jednotky řádu poslední číslice, například $\pi = 3,14 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$. ([22] str. 9)

Příklad 8.7

Zaokrouhlete číslo 2 766 782 na čtyři platné číslice.

$2766782 \doteq 2767 \cdot 10^3$

Odůvodnění: Skutečná chyba zaokrouhlení je $2767 \cdot 10^3 - 2766782 = 218$

Absolutní chyba čísla $2767 \cdot 10^3$ je $0,5 \cdot 10^3 + 218 = 718 < 1 \cdot 10^3$

Příklad 8.8

Zaokrouhlete číslo $A = 3{,}762\ 2 \pm 0{,}012\ 1$ na co největší možný počet platných číslic.

$\alpha = 0{,}012\ 1$ ovlivňuje už číslici 6. Musíme tedy číslo A zaokrouhlit na dvě platné číslice 3,8.

Odůvodnění: Skutečná chyba zaokrouhlení je 3,8 – 3,762 2 = 0,037 8

Absolutní chyba čísla 3,8 je $0,5 \cdot 10^{-1} + 0,0121 = 0,0621 < 1 \cdot 10^{-1}$

Pokud bychom zaokrouhlili na 3,76, bude skutečná chyba

|3,76 - 3,762 2| = 0,002 2

Absolutní chyba 0,012 1 + 0,002 2 = 0,014 3 a to je větší než $1 \cdot 10^{-2}$

9 Grafické papíry

9.1 Úvodní slovo

Tak jako logaritmické pravítko, tak také grafické papíry jsou už více jak dvacet let jen historickou rekvizitou. Byly však nezbytnými pomůckami všech techniků při výpočtech. I dnes však na ně pohlížíme jako na geniální objevy své doby a obdivujeme jejich jednoduchost a eleganci řešení. Proto v závěru své diplomové práce uvádím aspoň zlomek celého odvětví matematiky – nomografie. Z důvodu čerpání obrázků ze starších knih je jejich kvalita nižší, proto je uvedeme v příloze.

9.2 Funkční stupnice

Reálná čísla obvykle zobrazujeme na přímce zvané číselná osa. Na ní zvolíme počátek P, který je obrazem čísla 0. Ten ji rozdělí na část kladnou (vpravo od P) a část zápornou. Dále zvolíme jednotkovou úsečku μ. Obraz reálného čísla $x \neq 0$ je takový bod X, že velikost úsečky $|PX| = \mu \cdot |x|$. Volba čísla μ může být různá, obvykle to bývá 1 mm nebo 1cm. Číslo x připisujeme k bodu, který je zobrazuje a nazýváme je **kótou**. Naproti tomu **souřadnici** ξ bodu s kótou x (dále jen bodu x) vypočteme s tzv. **zobrazovací rovnice**

$$\xi = \mu \cdot x \tag{5}$$

Pro odlišení pojmů kóta a souřadnice se dohodněme, že souřadnicovou číselnou osu budeme označovat ξ. Vztah (1) přiřaďuje každému reálnému číslu x jediný bod X na přímce ξ a naopak každému bodu X jediné reálné číslo x. Např. při volbě μ= 2 cm bude bod označený kótou 4 vzdálen od počátku 8 cm, tedy souřadnici 8. ([12] str. 190)

Tento způsob zobrazení reálných čísel na množinu bodů osy ξ můžeme zobecnit. Zvolme funkci $f(x)$ definovanou pro všechna x intervalu $I_1 =< a, b >$ a předpokládejme, že funkce $f(x)$ je v celém intervalu I_1 ryze monotónní a její hodnoty tvoří číselný interval I_2. Vypočtěme nyní několik hodnot $f(x)$ a vyznačme je na ose ξ při zvoleném μ. K vyznačeným bodům připíšeme čísla x jako kóty. Tak dostaneme soustavu kótovaných bodů, jejichž souřadnice vypočteme ze zobrazovací rovnice

$$\xi = \mu \cdot f(x) \tag{6}$$

Příklad 9.1

Funkční hodnoty funkce $f(x) = x^2$ v číselném intervalu $I_1 = <2, 10>$ tvoří číselný interval $I_2 = <4, 100>$. Volíme-li $\mu = 1$ mm , mají podle vztahu (2) body s kótami $x = 2, 3, 4, 5$ atd. souřadnice $\xi = 4, 9, 16, 25$ atd, (mm). Viz obrázek 9.1.(Funkční stupnice)

Soustava kótovaných bodů, jejichž souřadnice ξ vyhovují vztahu (2), se nazývá **stupnice funkce** $f(x)$ nebo jen **funkční stupnice**. Přímka, na které stupnici sestrojujeme, se nazývá **nositelka stupnice** a číslo μ je **modul stupnice**.

Nejvíce používaná stupnice je **lineární** pro funkci $f(x) = ax + b$ (pro $a \neq 0$), **kvadratická** pro funkci $f(x) = a \cdot x^2$ (pro $a \neq 0$, $x \geq 0$) a **logaritmická** pro funkci $f(x) = \log x$ (pro $x > 0$).

9.3 Funkční sítě

Funkce $y = f(x)$ se znázorňuje vynášením dvojic čísel (x, y) do pravoúhlé sítě s osami ξ a η. Na obrázku 9.2 je sestrojen graf funkce $y = \frac{x^2}{2}$ (pro $x \geq 0$) se stejnými moduly na obou osách. (Obr. 9.2: Funkční síť $y = \frac{x^2}{2}$)

Požadujeme-li, aby z grafu bylo možné hodnoty jedné proměnné, známe-li hodnotu druhé proměnné, je vidět, že tento graf není dobře čitelný v okolí počátku a pro velká x. ([12] str. 202).

Pro zlepšení čitelnosti tohoto grafu použijeme opět pravoúhlé sítě s osami ξ a η, ale moduly na nich zvolíme různé – v našem případě na ose ξ modul α a na ose η modul β tak, že $\alpha = 5\beta$. Vyznačenými body s kótou x na ose ξ vedeme rovnoběžky s osou η a každým vyznačeným bodem s kótou y na ose η vedeme rovnoběžku s osou ξ. Získáme tak **pravoúhlou síť kótovaných přímek**. Zobrazovací rovnice této rovnoměrné sítě mají tvar

$$\xi = \alpha \cdot x \qquad\qquad \eta = \beta \cdot y \tag{7}$$

Nová podoba grafu funkce $y = 0,5x^2$ (pro $x \geq 0$) je na obrázku 9.3.(Obr. 9.3 : Funkční síť $y = \frac{x^2}{2}$(s úpravou os))

Čitelnost grafu funkce se zlepšila pro velká x, ale v okolí počátku stále nevyhovuje. Čitelnost grafu v okolí počátku se pokusíme zlepšit tzv. **anamorfózou** neboli „napřímením“ grafu. Na osy ξ a η vyneseme stupnice, jejichž zobrazovací rovnice jsou

$$\xi = \alpha \cdot \varphi(x) \qquad\qquad \eta = \beta \cdot \psi(y) \tag{8}$$

tedy **zobrazovací rovnice funkční sítě**, kde $\varphi(x)$ a $\psi(y)$) jsou vhodné **zobrazovací funkce**. ([12] str. 205)

Příklad 9.2

Nakreslete graf funkce $y = 0,5x^2$ pro $x \geq 0$ ve funkční síti, jejíž zobrazovací rovnice jsou

$$\xi = \alpha \cdot x^2 \qquad\qquad \eta = \beta \cdot y \qquad\qquad 2\alpha = \beta$$

Vypracování viz obr. 9.4: Znázornění příkladu 9.2.

Příklad 9.3

Nakreslete graf funkce $y = 0,5x^2$ pro $x \geq 0$ ve funkční síti, jejíž zobrazovací rovnice jsou

$$\xi = \alpha \cdot x \qquad\qquad \eta = \beta \cdot \sqrt{y} \qquad\qquad 1,5\alpha = \beta$$

Vypracování viz obr. 9.5: Znázornění příkladu 9.3.

V obou případech je grafem funkce $y = 0,5x^2$ pro $x \geq 0$ přímka a graf je dobře čitelný i v okolí počátku.

9.4 Logaritmický papír

Funkční síť daná zobrazovacími rovnicemi

$$\xi = \alpha\cdot\ \log\ (x) \qquad\qquad \eta = \beta\cdot\ \log(y)$$

se nazývá **logaritmická**. Protože kreslení této sítě je dost obtížné a dříve nebyly k dispozici žádné dnes běžné technické prostředky, vyráběl se podobně jako milimetrový papír i **papír logaritmický**. Protože u logaritmické stupnice jsou úseky s kótami $10^n \leq x < 10^{n+1}$ pro každé celé n shodné a délka každého z nich se rovná modulu, je arch logaritmického papíru tvořen stejnými čtverci o straně $\alpha = \beta$. Počátek souřadnic má kóty P (1, 1). ([12] str. 205)

Zjistěme nyní, jakou funkci převádí logaritmická síť na přímku. Rovnici přímky $\eta = n \cdot \xi + q$ upravíme pomocí zobrazovacích rovnic

$$\alpha\cdot\ \log\ (y) = n \cdot \alpha\cdot\ \log\ (x) + q$$

$$\log(y) = n\cdot\ \log\ (x) + \tfrac{q}{\alpha}$$

položme $\frac{q}{\alpha} = m$ a dostaneme

$$\log\ (y) = n\cdot\ \log\ (x) + \log\ (m)$$

$$y = m \cdot x^n$$

Závěr: Funkce $f(x) = m\cdot x^n$ pro $x > 0$ a $m > 0$ se na logaritmickém papíru zobrazuje jako přímka. Pro $x = 1$ je $y = m$. Číslo m je tedy kóta průsečíku grafu s osou η. Na obrázku 9.6 (Obr. 9.6: Logaritmický papír) je ukázka použití logaritmického papíru.

Graf funkce $y = m \cdot x^n$ (přímku) sestrojíme nejrychleji a nejpřesněji jako přímku určenou body M a N se známými kótami. Jedním z nich je $M(1, m)$ a druhý bod N určíme tak, aby jeho kóty se daly z funkčního předpisu snadno vypočítat.

Příklad 9.4

Určete kóty bodů M a N pro funkce znázorněné na obrázku 9.6:

$y = \sqrt{x^3}$ pro $x > 0$

$x = 1 \to y = 1$ $\quad M\ (1; 1)$

$x = 4 \to y = 8$ $\quad N\ (4; 8)$

$y = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$ pro $x > 0$

$x = 1 \to y = 3$ $\quad M\ (1; 3)$

$x = 8 \to y = 6$ $\quad N\ (8; 6)$

$y = \frac{4}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$

$x = 1 \to y = 4$ $\quad M\ (1; 4)$

$x = 4 \to y = 2$ $\quad N\ (4; 2)$

9.5 Semilogaritmický papír

Funkční síť daná zobrazovacími rovnicemi

$$\xi = \alpha \cdot x \qquad \eta = \beta \cdot \log(y)$$

se nazývá **semilogaritmická**. I pro její užívání se vyráběl **semilogaritmický papír**. Na ose ξ je stupnice rovnoměrná, na ose η logaritmická. Počátek souřadnic má kóty $P\ (0; 1)$. ([12] str. 208). Opět zjistíme, jakou funkci převádí semilogaritmická síť na přímku. Rovnici přímky $\eta = k \cdot \xi + q$ upravíme pomocí zobrazovacích rovnic na tvar

$$\beta \cdot \log(y) = k \cdot \alpha \cdot x + q$$

$$\log\ (y) = \frac{k \cdot \alpha}{\beta} \cdot x + \frac{q}{\beta}$$

označme: $\frac{k \cdot \alpha}{\beta} = \log\ (a)$ a $\frac{q}{\beta} = \log\ (m)$

$$\log\ (y) = \log\ (a) \cdot x + \log\ (m)$$

$$y = m \cdot a^x$$

Závěr: Funkce $y = m \cdot a^x$ pro $a > 0$ a $x > 0$ se na semilogaritmickém papíru zobrazuje jako přímka. Podobným způsobem jako na logaritmickém papíru můžeme sestrojit přímku zobrazující exponenciální funkci $y = m \cdot a^x$ pro $a > 0$ a $x > 0$ i na papíru semilogaritmickém. Viz obrázek 9.7: Semilogaritmický papír.

Na obrázku 9.7 jsou v semilogaritmické síti znázorněny čtyři exponenciální funkce. Věnujme pozornost nejprve dvěma z nich:

a) $y = 100 \cdot 2^{-x}$ tj. $y = 100 : 2^x$

$x = 0 \rightarrow y = 100$ M (0; 100)

$x = 1 \rightarrow y = 50$ N_1 (1; 50)

$x = 2 \rightarrow y = 25$ N_2 (2; 25)

$x = 3 \rightarrow y = 12,5$ N_3 (3; 12,5)

Čím větší bude vzdálenost bodů M a N, tím přesnější bude sestrojení grafu funkce.

b) $y = 4 \cdot 5^{0,6x}$

$x = 0 \rightarrow y = 4$ M (0; 4)

$x = 5 \rightarrow y = 500$ N_1 (5; 500)

Bod N_1 se však na obr. 9.7 nedá vyznačit.

Zde se nabízejí dvě řešení problému:

1) Prodloužit grafickou síť o jeden modul β nahoru, abychom zachytili kótu 500.

2) Najít výpočtem kótu průsečíku grafu s kótovanou rovnoběžkou s osou ξ označenou kótou 100:

$100 = 4 \cdot 5^{0,6x} \rightarrow 5^2 = 5^{0,6x} \rightarrow x = \frac{2}{0,6} = 3,\overline{3}$

Bod N_2 $(3,\overline{3}; 100)$ ale nelze vyznačit přesně.

Složitější je situace u dalších dvou na obrázku 9.7 vyznačených funkcí.

c) $y = e^{\frac{x}{2}}$

$x = 0 \rightarrow y = 1$ M (0; 1)

Musíme si uvědomit, že pro každé $x \neq 0$ bude y iracionální číslo a jeho kótu na stupnici η nenajdeme a musíme se spokojit jen s přibližným řešením. Jestliže se podíváme na graf funkce na obrázku 9.7, vidíme, že graf protíná velmi přibližně bod o kótách N (2,5; 3,5). Zkusme tedy volit

$x = 2,5 \rightarrow y = e^{1,25} \doteq 3,49$

Chceme-li najít graf této funkce, použijeme metodu č. 2 z předchozího případu b).

Použijeme kótovanou rovnoběžku s osou ξ označenou kótou 10:

$10 = e^{\frac{x}{2}} \rightarrow ln10 = \frac{x}{2} \rightarrow 2 \cdot ln10 = x \rightarrow x = ln100 \doteq 4,61$

$x \doteq 4,61 \rightarrow y = 10$ $\qquad$ N (4,61; 10)

d) $y = 50 \cdot e^{\frac{x}{4}}$

$x = 0 \rightarrow y = 50$ $\qquad$ M (0; 50)

Analogicky jako v předchozím příkladu postupuje i zde:

$100 = 50 \cdot e^{\frac{x}{4}} \rightarrow 2 = e^{\frac{x}{4}} \rightarrow ln2 = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4 \cdot ln2 \rightarrow x = ln2^4 \doteq 2,77$

$x \doteq 2,77 \rightarrow y = 100$ $\qquad$ N (2,77; 100)

Na obrázku 9.7 je zároveň ukázáno, že při kreslení grafu této funkce není nutné grafickou síť prodlužovat, ale za pokračování grafu můžeme považovat posunutou rovnoběžku jeden modul dolů.

Otočíme-li semilogaritmický papír o 900 vpravo tak, že vzájemně vyměníme osy ξ a η, dostaneme opět semilogaritmickou síť, ale se znázorňovacími rovnicemi

$$\xi = \alpha \cdot \log(x) \qquad\qquad \eta = \beta \cdot x$$

zobrazuje logaritmickou funkci jako přímku. Vyplývá to z toho, funkce logaritmická je inverzní k funkci exponenciální.

9.6 Jiné grafické papíry

Funkční síť určená zobrazovacími rovnicemi

$$\xi = \alpha \cdot sin(x) \qquad\qquad \eta = \beta \cdot y$$

je použita na tzv. **sinusovém papíru**. Protože funkce $sin(x)$ nabývá svých hodnot jen v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, zaujímá tato síť pouze pás široký 2α souměrný podle osy η. Sinusová síť umožňuje zobrazit funkci $y = a \cdot sin(x) + b$ jako přímku (fakticky jako úsečku). Na obr. 9.8 (Obr. 9.8: Sinusový papír) ([20] str. 70) jsou zobrazeny tři vztahy $y = a \cdot sin(x) + b$.

Přímka na sinusové síti má rovnici

$$\eta = \tfrac{\beta}{\alpha} \cdot a \cdot \xi + \beta \cdot b \qquad \text{pro } \xi \in < -\alpha, \alpha >$$

a je určena body $M(0^0; b)$ a $N(90^0; a + b)$.

Naopak, jestliže je např. na obrázku 9.8 vyznačena přímka, která prochází bodem M (0; 7) a bodem N $(45^0; -4)$, zjistíme dosazením do $y = a \cdot sin(x) + b$, že tato přímka je grafem funkce $y = -15,56sin(x) + 7$.

Funkční síť určená zobrazovacími rovnicemi

$$\xi = \alpha \cdot x^2 \qquad\qquad \eta = \beta \cdot y^2$$

je použita na tzv. **mocninovém papíru**. Ten umožňuje zobrazit závislost $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ pro $x \geq 0$ a $y \geq 0$ jako úsečku, resp. polopřímku. Uvedený vztah ve tvaru středové rovnice vyjadřuje část elipsy, resp. hyperboly, která leží v 1. kvadrantu. ([12] str. 71). Úsečka, která znázorňuje část elipsy, má krajní body $M(a, 0)$ a $N(0, b)$. Polopřímka, která znázorňuje část hyperboly, má počátek $P(a, 0)$ a další bod např. $Q(\frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + 9}; 3)$.

Funkční síť určená zobrazovacími rovnicemi

$$\varphi = \alpha \cdot x \qquad\qquad r = \beta \cdot y$$

v soustavě polárních souřadnic, kde φ je amplituda a r je průvodič.

Polární síť se skládá ze dvou soustav kótovaných čar a je základem tzv. **polárního papíru**. (Obr. 9.9: Polární papír)

Jednu soustavu tvoří polopřímky kótované hodnotou x se společným počátkem O (tzv. pólem) a druhou soustavu tvoří soustředné kružnice kótované hodnotou y se středem O. grafem rovnice $y = k \cdot x$ v polární síti je spirála $r = k \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi$.

10 Využití historických početních postupů ve výuce

I v dnešní přetechnizované době, kdy většinu matematických problémů řeší kalkulačky a počítače, je důležité, aby si děti uvědomily, že to tak nebylo vždy. Je potřebné jim ukázat různé, mnohdy skoro zapomenuté, způsoby výpočtů a matematických technik, které jim pomohou v získání odhadu výsledku a lepšímu pochopení výpočtů. Proto je součástí této práce několik ukázek pracovních listů na toto téma.

10.1 Záhady starověkého Egypta I.

Cíl aktivity:

Žáci se seznámí s odlišnostmi egyptské matematiky.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených, celých a desetinných čísel

rovinné útvary, vzorce pro výpočet obsahů rovinných útvarů

Pythagorova věta

lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů

Věk žáka: 8. - 9. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, operace s čísly, numerační soustava, geometrie v rovině a v prostoru

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	Očekávané výstupy žáka
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel
		určuje a charakterizuje základní rovinné útvary, analyzuje jejich vlastnosti
Člověk a společnost	Dějepis	orientuje se na časové ose a v historické mapě, řadí hlavní historické epochy v chronologickém sledu

Průřezová témata:

- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Osobnostní a sociální výchova

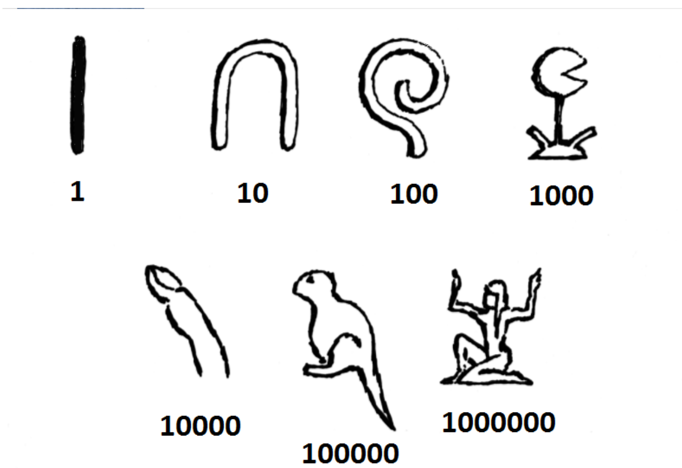
Potřebný materiál:

- Pracovní listy (možné pro jednotlivce i pro každou skupinu)

Metodický komentář:

Učitel by měl mít základní poznatky o egyptské numerační soustavě. Proto uvádím základní popis této soustavy.

V Egyptě asi 3000 let před n. l. již používali soustavu desítkovou pro zápis poměrně velkých čísel. Pro čísla od 1 do 9 neměli žádné číslice a zapisovali je pomocí svislých čárek. Využívali však poznatek, že člověk je schopen jediným pohledem určit počet předmětů, pokud nepřesahuje čtyři vedle sebe. Větší množství předmětů už musí být rozděleno na více maximálně čtyřčlenných skupin.
Přehled používaných znaků:



Pro každou mocninu čísla 10 měli Egypťané zvláštní hieroglyfický znak, který se v potřebném množství od 1 do 9 opakoval, ale už nikoli v konfiguracích uvedených u jednotek. Tato numerační soustava, i když byla desítková, neumožňovala zápis libovolně velkého čísla, protože poslední hieroglyf – symbol boha Slunce Ra – vyjadřoval hodnotu 10^6.

Zdroje použité literatury:

Koval V.: *Kamarádi čísla*, Praha: SPN 1968

Dívíšková M.: *Historický vývoj početních postupů a výpočetních technik*, Č. Budějovice: PF JCU (bakalářská práce), 2014

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

Zdroje použitých obrázků:

http://www.aldebaran.cz/galerie/matematika.php - pozměněno

https://www.sciencenewsforstudents.org/sites/default/files - pozměněno

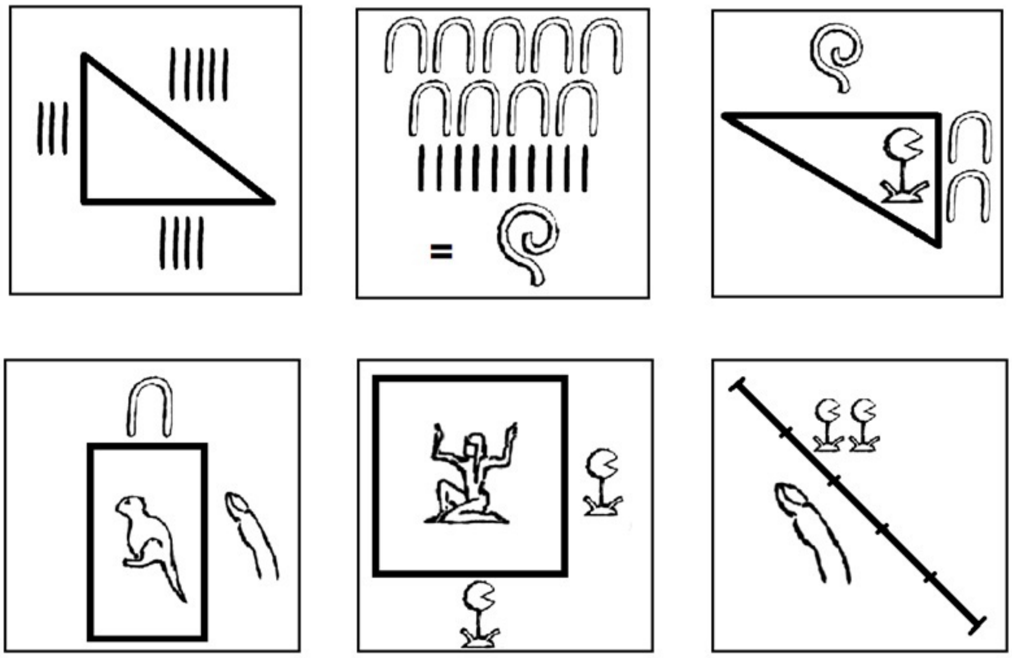
10.1.1 Záhady starověkého Egypta I. - pracovní list

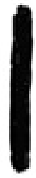
Úvod:

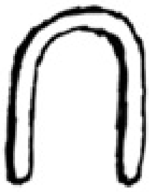
Pyramidy – hrobky panovníků – postavené v Egyptě v období Staré říše (3600-2700 př.n.l.) potvrzují, že matematické znalosti Egypťanů musely být už tehdy na vysoké úrovni. Nejen stavby takovýchto pyramid, ale i různých chrámů, přehrad, vodních nádrží i běžných obydlí vyžadovaly velkou zručnost v počítání s velkými čísly a dobrou orientaci v geometrických útvarech a měřeních. Dobré matematické znalosti byly potřebné i při pravidelném sčítání lidu, pozemků, dobytka a zlata nebo při obchodování mezi kupci. Všechny tyto matematické výpočty bylo třeba nějak zaznamenat na papyrus, proto si Egypťané vytvořili, jako jedni z prvních, své číslovky.

Úkol 1: Největší egyptskou pyramidou je Velká Cheopsova pyramida. Historikové se domnívají, že původně byla obložena bílými deskami z vápence. Kolik m^2 bylo potřeba na toto obložení, když má pyramida čtvercový půdorys o straně 230 m a její výška je 140 m?

Úkol 2: Zjisti hodnoty egyptských znaků ze zašifrovaných obrázků.



 =

 =

 =

 =

 =

 =

 =

10.1.2 Záhady starověkého Egypta I. - vyhodnocení

Pracovní list Záhady starověkého Egypta I. jsem vyzkoušela v jedné třídě 9. ročníku základní školy. Do vypracovávání se zapojilo 10 dvojic (20 žáků). Ve třídě byla přítomna i vyučující matematiky dané třídy.

V úvodu hodiny jsem za pomoci motivačního textu a krátké diskuze seznámila žáky s matematickými problémy ve starověkém Egyptě. První úkol - slovní úloha byla volena jako opakování znalostí Pythagorovy věty a výpočtu obsahu trojúhelníku. Protože šlo o opakování, zvolila jsem samostatnou práci, při které jsme já i přítomná vyučující drobnými radami posouvaly žáky k výsledku. Žákům se zpočátku úloha zdála obtížná, ale po několika radách ohledně vzorců se všichni žáci bez výjimek dobrali výsledku.

Druhý úkol byl také samostatnou prací dvojic. Když si žáci prohlédli zadaná schémata, dokázali někteří z nich určit hodnotu symbolu čárky. Následně tito žáci již snadno určili i další hieroglyfické znaky. Zbytku třídy jsem poskytla nápovědu, že čárka má stejnou hodnotu jako čárka v římské soustavě. Pak už rovněž pracovali samostatně a bez problémů.

Počet úkolů na jednu vyučovací hodinu byl vhodně zvolen. Někteří žáci pojali vypracovávání pracovního listu jako soutěž a dvojice se vzájemně porovnávaly v rychlosti i když toto nebylo cílem hodiny.

Uvádím několik fotografií práce v hodině a vyplněný pracovní list jedné z dvojic.

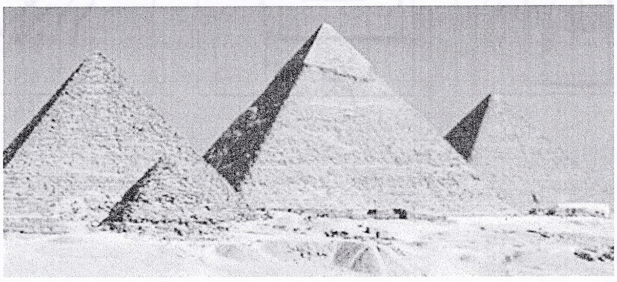


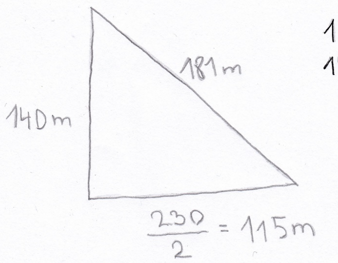
PRACOVNÍ LIST

Úvod:

Pyramidy – hrobky panovníků – postavené v Egyptě v období Staré říše (3600-2700 př.n.l.) potvrzují, že matematické znalosti Egypťanů musely být už tehdy na vysoké úrovni. Nejen stavby takovýchto pyramid, ale i různých chrámů, přehrad, vodních nádrží i běžných obydlí vyžadovaly velkou zručnost v počítání s velkými čísly a dobrou orientaci v geometrických útvarech a měřeních. Dobré matematické znalosti byly potřebné i při pravidelném sčítání lidu, pozemků, dobytka a zlata nebo při obchodování mezi kupci. Všechny tyto matematické výpočty bylo třeba nějak zaznamenat na papyrus, proto si Egypťané vytvořili, jako jedni z prvních, své číslovky.

Úkol 1: Největší egyptskou pyramidou je Velká Cheopsova pyramida. Historikové se domnívají, že původně byla obložena bílými deskami z vápence. Kolik m^2 bylo potřeba na toto obložení, když má pyramida čtvercový půdorys o straně 230m a její výška je 140m?





$140^2 + 115^2 = c^2$

$19600 + 13225 = c^2$

$32\,825 = c^2$

$c = \sqrt{32\,825}$

$c = 181$ m

$S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2}$

$S_\Delta = \frac{230 \cdot 181}{2}$

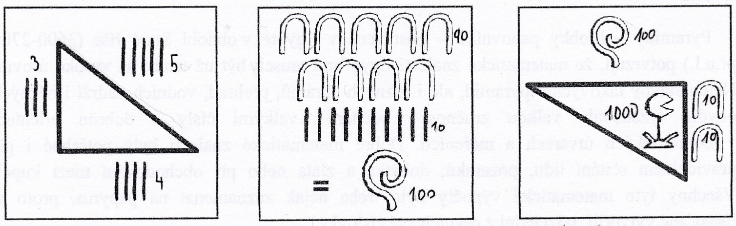
$S_\Delta = \frac{41630}{2}$

$S = 20\,815\ m^2 \cdot 4$

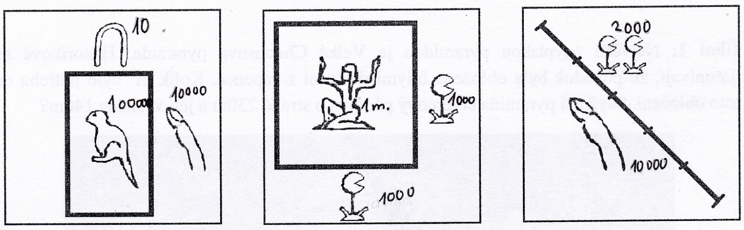
$S = 83\,260\ m^2$

K obložení všech stran pyramidy bude potřeba 83 260 m^2 vápence.

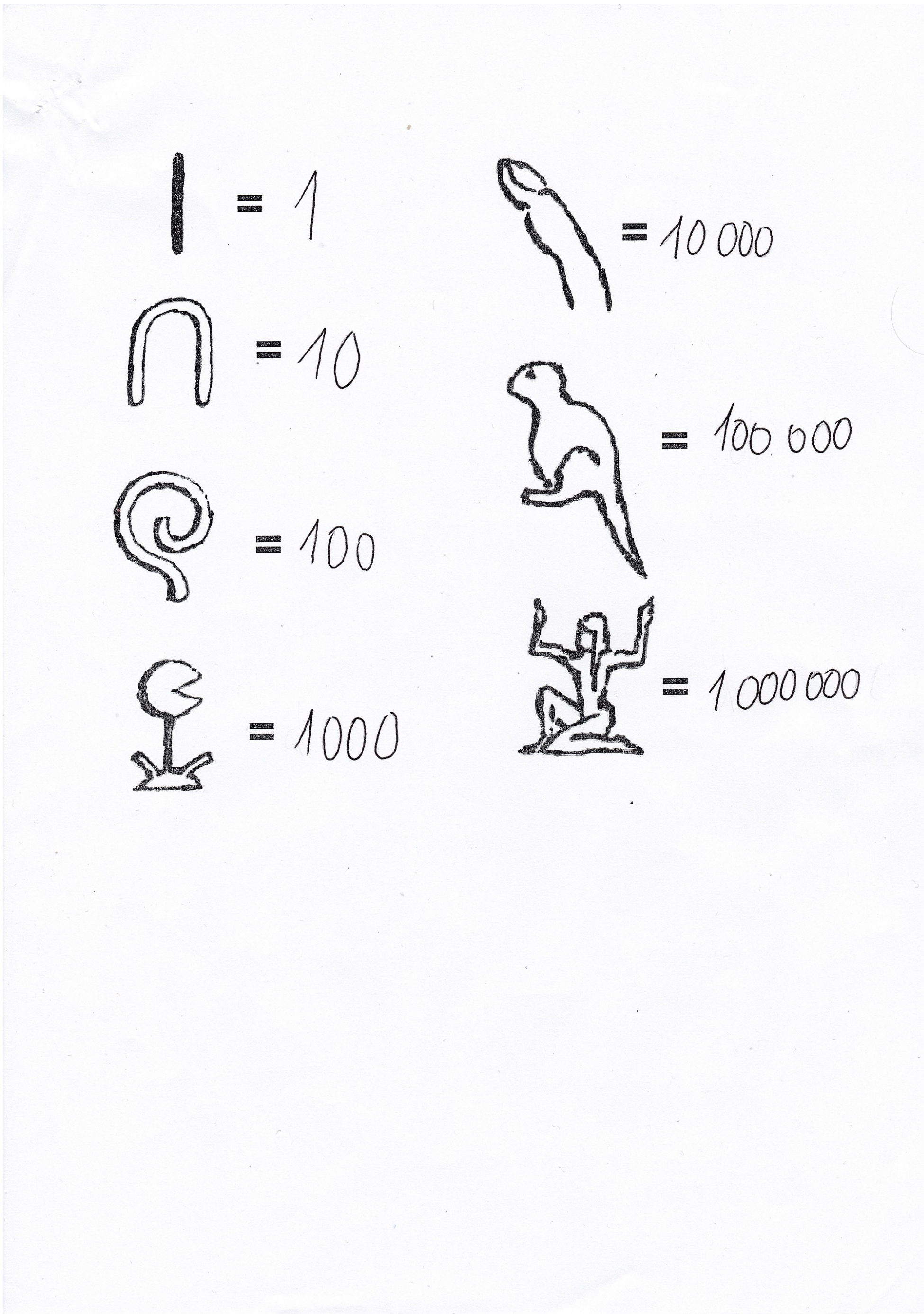
Úkol 2: Zjisti hodnoty egyptských znaků ze zašifrovaných obrázků.



$\frac{100 \cdot 20}{2} = 1000$



$10 \cdot 10000 = 100\,000$


= 1
= 10
= 100
= 1000
= 10 000
= 100 000
= 1 000 000

10.2 Záhady starověkého Egypta II.

Cíl aktivity:

Žáci se seznámí s odlišnostmi egyptské matematiky.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených, celých a desetinných čísel

rovinné útvary, vzorce pro výpočet obsahů rovinných útvarů (čtverec, obdélník)

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů

Věk žáka: 6. - 7. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, operace s čísly, numerační soustava, geometrie v rovině

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	Očekávané výstupy žáka
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel
		určuje a charakterizuje základní rovinné útvary, analyzuje jejich vlastnosti
Člověk a společnost	Dějepis	orientuje se na časové ose a v historické mapě, řadí hlavní historické epochy v chronologickém sledu

Průřezová témata:

- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Osobnostní a sociální výchova

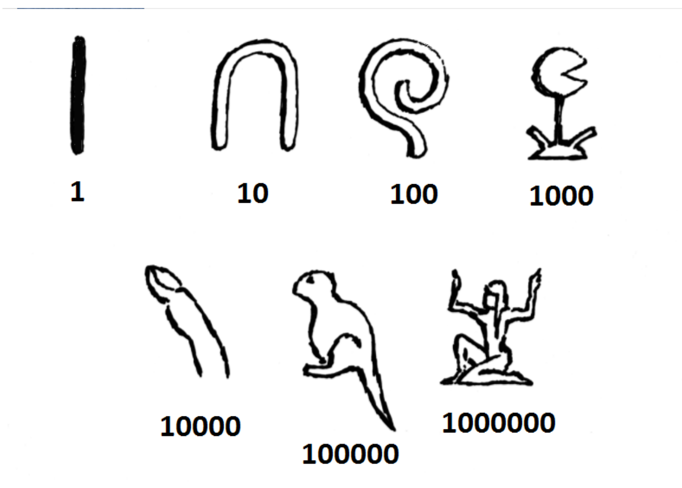
Potřebný materiál:

- Pracovní listy (možné pro jednotlivce i pro každou skupinu)

Metodický komentář:

Učitel by měl mít základní poznatky o egyptské numerační soustavě. Proto uvádím základní popis této soustavy.

V Egyptě asi 3000 let před n. l. již používali soustavu desítkovou pro zápis poměrně velkých čísel. Pro čísla od 1 do 9 neměli žádné číslice a zapisovali je pomocí svislých čárek. Využívali však poznatek, že člověk je schopen jediným pohledem určit počet předmětů, pokud nepřesahuje čtyři vedle sebe. Větší množství předmětů už musí být rozděleno na více maximálně čtyřčlenných skupin.
Přehled používaných znaků:



Pro každou mocninu čísla 10 měli Egypťané zvláštní hieroglyfický znak, který se v potřebném množství od 1 do 9 opakoval, ale už nikoli v konfiguracích uvedených u jednotek. Tato numerační soustava, i když byla desítková, neumožňovala zápis libovolně velkého čísla, protože poslední hieroglyf – symbol boha Slunce Ra – vyjadřoval hodnotu 10^6.

Zdroje použité literatury:

Koval V.: *Kamarádi čísla*, Praha: SPN 1968

Divíšková M.: *Historický vývoj početních postupů a výpočetních technik*, Č. Budějovice: PF JCU (bakalářská práce), 2014

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

Zdroje použitých obrázků:

http://www.aldebaran.cz/galerie/matematika.php - pozměněno

https://www.sciencenewsforstudents.org/sites/default/files - pozměněno

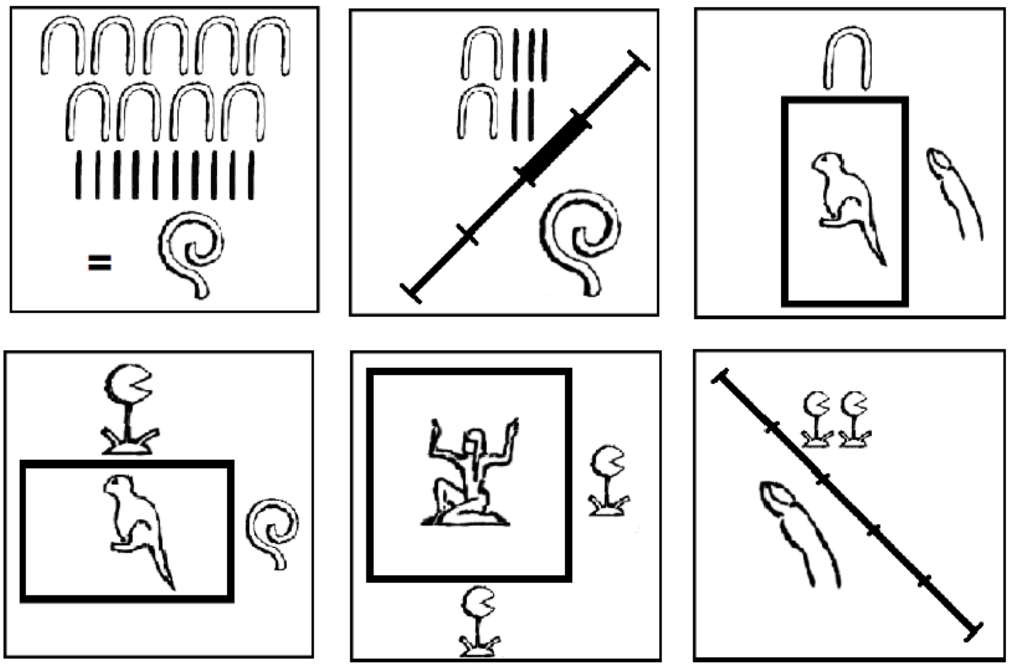
10.2.1 Záhady starověkého Egypta II. - pracovní list

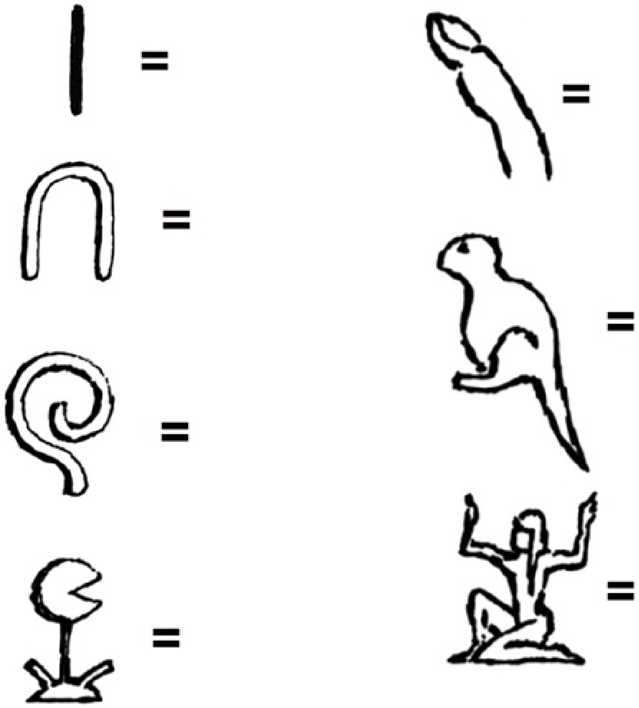
Úvod:

Skupina archeologů objevila v hrobce faraona Amenhotepa I. novou, ještě neprobádanou, chodbu. Stěny této chodby jsou krásně vyzdobeny a pomalovány spoustou hieroglyfických znaků. Archeologové si chtějí přečíst, co je na stěnách napsáno, ale některé znaky nedokáží rozluštit. Pomůžeš jim?

Úkol 1:

Na jedné ze stěn jsou napsány neznámé znaky. Jejich uspořádání vypadá jako matematické příklady. Rozlušti hodnoty jednotlivých znaků.





Úkol 2: Na protější stěně je napsán nějaký příběh, který je podobný dnešní slovní úloze. Archeologové jej s tvou pomocí přeložili a ty ho máš vypočítat.

Rolník má obdélníkové pole o stranách délky 58 m a 125 m. Kolik kilogramů pšenice rolník sklidí, jestliže průměrná úroda na $1m^2$ je 1,5 kg?

Výsledky pracovního listu

Úkol 1: viz. Metodický komentář (str. 104)

Úkol 2: 10 875 kg

10.3 Historické způsoby násobení I.

Cíl aktivity:

Žáci se díky vypracování pracovního listu seznámí s historickými početními postupy, které se používaly k násobení přirozených čísel.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, celá čísla, násobení přirozených čísel používané v dnešní výuce, dělitelnost přirozených čísel

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 6. - 7. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, Operace s čísly

Dějepis

Návaznost na RVP ZV:

<table>
<tr><th>Vzdělávací oblast</th><th>Vzdělávací obor</th><th>Očekávané výstupy žáka</th></tr>
<tr><td>Matematika a její aplikace</td><td>Matematika</td><td>žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Člověk a společnost</td><td rowspan="2">Dějepis</td><td>orientuje se na časové ose a v historické mapě</td></tr>
<tr><td>řadí hlavní historické epochy v chronologickém sledu</td></tr>
</table>

Průřezová témata:

- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Papírový model Napierových tyčinek - jeden do skupiny (viz. příloha)
- Pracovní list

Metodický komentář:

Učitel by měl mít alespoň základní znalosti o historickém násobení pomocí Napierových tyčinek.

Chceme-li například násobit číslo **1 572**, vybereme ze soupravy tyčinek ty, které mají v záhlaví čísla 1, 5, 7, 2 a sestavíme z nich pravoúhelníkovou tabulku podle následujícího obrázku.

0/1	0/5	0/7	0/2
0/2	1/0	1/4	0/4
0/3	1/5	2/1	0/6
0/4	2/0	2/8	0/8
0/5	2/5	3/5	1/0
0/6	3/0	4/2	1/2
0/7	3/5	4/9	1/4
0/8	4/0	5/6	1/6
0/9	4/5	6/3	1/8

Chceme-li dané číslo **1 572** násobit číslem **3**, přečteme ve třetím řádku systémem gelosia výsledek **4 716**. Podobně při násobení číslem **8** přečteme v osmém řádku výsledek **12 576**.

0/3	1/5	2/1	0/6		0/8	4/0	5/6	1/6
4	**7**	**1**	**6**		**12**	**5**	**7**	**6**

Zdroje použité literatury:

Beazley Mitchell: *Svět čísel, atomů a molekul*, Praha: Albatros, 1986

Folta Jaroslav: *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech*, Praha: JČSMF, 1982-1990

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

Zdroje použitých obrázků:

Beazley Mitchell: *Svět čísel, atomů a molekul*, Praha: Albatros, 1986 - upraveno autorem

Příloha:

Papírový model Napierových tyčinek

0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

10.3.1 Historické způsoby násobení I. - pracovní list

Úkol 1:

Vypočítej následující příklady klasicky pod sebe.

2689	3986	78942	34475
$\cdot$ 54	$\cdot$ 256	$\cdot$ 135	$\cdot$ 86

Úvod

V 16. a 17. stol. se již značně zvýšila potřeba řešit složitější úlohy hlavně kvůli velkému rozvoji dalších věd (např. kartografie, astronomie a techniky) Lidé si chtěli urychlit a zjednodušit práci. Samozřejmě v této době ještě neexistovaly žádné kalkulačky nebo jiné počítací stroje. Proto se lidé snažili přijít na pomůcky, které by jim v jejich práci pomohly.

Text k úkolu 2

John Napier (1550 – 1617) vymyslel metodu, která při násobení nahradila pomocné výpočty. Ve své knize „O rabdologii neboli o počítání s tyčinkami" z roku 1617, ukázal, jak použít tabulku malé násobilky k snadnému násobení čísel. Původně navrhl zmíněnou tabulku rozřezat na svislé proužky papíru, ale později byly tyto proužky nahrazeny tyčinkami čtvercového průřezu. Z tabulky násobilky byly vynechány násobky deseti, takže vzniklo jen devět tyčinek s devíti políčky.

Úkol 2: Vypočítej příklady s pomocí Napierových tyčinek.

$59 \cdot 4 =$

$126 \cdot 7 =$

$2346 \cdot 3 =$

$93827 \cdot 5 =$

Text k úkolu 3

Matematika je opravdu magická věda, protože některé zákonitosti nebo početní postupy se na první pohled jeví, jako by byly kouzly. Jedno takové matematické kouzlo si nyní ukážeme.

Úkol 3: Pomocí čínského čárového schématu vyřeš následující příklady.

$121 \cdot 14 =$

$321 \cdot 123 =$

10.3.2 Historické způsoby násobení I. - vyhodnocení

Pracovní list Historické způsoby násobení I. jsem vyzkoušela v jedné třídě 7. ročníku základní školy. Do vypracovávání se zapojilo 18 žáků. Ve třídě byla přítomna i vyučující matematiky dané třídy.

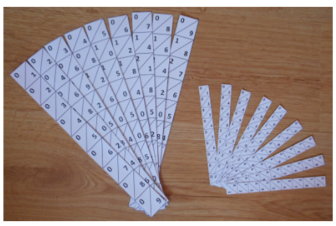
Na úvod hodiny si žáci zopakovali tradiční, na českých školách vyučovaný, způsob násobení pod sebe. Vypočítání čtyř příkladů se ukázalo pro žáky velmi časově náročné, proto jsem omezila příklady vypočítané ve škole jen na tři. Rychlejší žáci stihli všechny čtyři, pomalejší čtvrtý dopočítali jako domácí úkol. Nakonec proběhla kontrola výsledků.

Pomocí motivačního textu a krátké diskuze o problémech matematiky v 16. a 17. století jsme se přesunuli do doby Johna Napiera. Na jednoduchém příkladu jsem na zvětšeném modelu Napierových tyčinek vysvětlila dětem, jak tuto pomůcku používat. Poté si mohly samy na úkolu 2 vyzkoušet práci s předem připraveným modelem Napierových tyčinek, které byly přílohou každého pracovního listu. Žákům, kteří princip práce s tyčinkami nepochopili, jsem znovu individuálně vysvětlila, jak je používat.

Jako doplňkový zajímavý úkol jsem zvolila násobení pomocí čínského čárového schématu. Oba vysvětlené historické způsoby násobení žáky zaujaly. Nadšení bylo vidět hlavně u dětí, které v matematice často chybují nebo pro ty, kteří jsou nejistí v násobilce.

Pro ilustraci práce v hodině uvádím několik fotografií a vyplněný pracovní list jedné ze žákyň.





PRACOVNÍ LIST

Opakování:

Vypočítej následující příklady.

2 689	**3 986**	**78 942**	**34 475**
. 54	**. 256**	**. 135**	**. 86**
10756	23916	394710	206850
13445	19930	236826	275800
145206	7972	78942	2964850
	1020416	10657170	

Úvod:

V 16. a 17. stol. se již značně zvýšila potřeba řešit složitější úlohy hlavně kvůli velkému rozvoji dalších věd (např. kartografie, astronomie a techniky). Lidé si chtěli urychlit a zjednodušit práci. Samozřejmě v této době ještě neexistovaly žádné kalkulačky nebo jiné počítací stroje. Proto se lidé snažili přijít na pomůcky, které by jim v jejich práci pomohly.

text k úkolu 2

John Napier (1550 – 1617) vymyslel metodu, která při násobení nahradila pomocné výpočty. Ve své knize „O rabdologii neboli o počítání s tyčinkami“ z roku 1617, ukázal, jak použít tabulku malé násobilky k snadnému násobení čísel. Původně navrhl zmíněnou tabulku rozřezat na svislé proužky papíru, ale později byly tyto proužky nahrazeny tyčinkami čtvercového průřezu. Z tabulky násobilky byly vynechány násobky deseti, takže vzniklo jen devět tyčinek s devíti políčky.

Úkol 2:

Vypočítej příklady s pomocí Napierových tyčinek.

59 . 4 = 236

126 . 7 = 882

2 346 . 3 = 7038

93 827 . 5 = 469 135

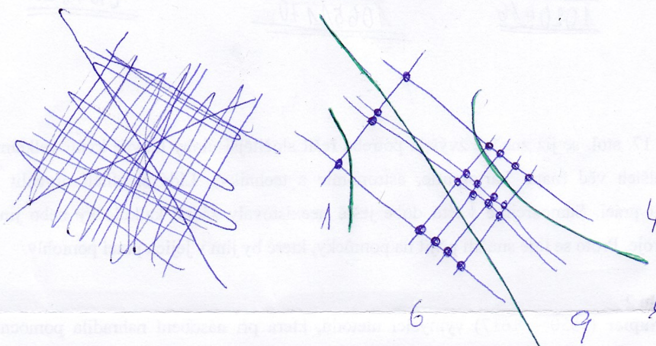
text k úkolu 3

Matematika je opravdu magická věda, protože některé zákonitosti nebo početní postupy se na první pohled jeví, jako by byly kouzly. Jedno takové matematické kouzlo si nyní ukážeme.

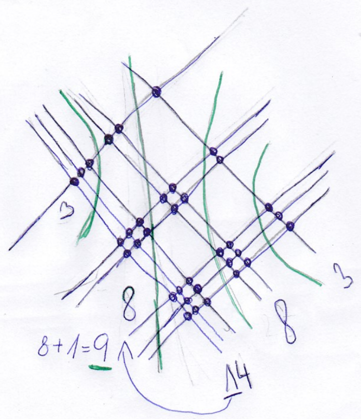
Úkol 3:

Pomocí čínského čárového schématu vyřeš následující příklady.

121 . 14 = 1694



321 . 123 = 39 483



10.4 Historické způsoby násobení II.

Cíl aktivity:

Žáci se díky vypracování pracovního listu seznámí s historickými početními postupy, které se používaly k násobení přirozených čísel.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, celá čísla, násobení přirozených čísel používané v dnešní výuce, dělitelnost přirozených čísel

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 8. - 9. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, Operace s čísly

Dějepis

Návaznost na RVP ZV:

<table>
<tr><th>Vzdělávací oblast</th><th>Vzdělávací obor</th><th>Očekávané výstupy žáka</th></tr>
<tr><td>Matematika a její aplikace</td><td>Matematika</td><td>žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Člověk a společnost</td><td rowspan="2">Dějepis</td><td>orientuje se na časové ose a v historické mapě</td></tr>
<tr><td>řadí hlavní historické epochy v chronologickém sledu</td></tr>
</table>

Průřezová témata:

- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech
- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Papírový model Napierových tyčinek - jeden do skupiny (viz. příloha)
- Pracovní list

Metodický komentář:

Učitel by měl mít alespoň základní znalosti o historickém násobení pomocí Napierových tyčinek.

Úkol 2: Napierovy tyčinky

Chceme-li například násobit číslo **1 572**, vybereme ze soupravy tyčinek ty, které mají v záhlaví čísla 1, 5, 7, 2 a sestavíme z nich pravoúhelníkovou tabulku podle následujícího obrázku.

0/1	0/5	0/7	0/2
0/2	1/0	1/4	0/4
0/3	1/5	2/1	0/6
0/4	2/0	2/8	0/8
0/5	2/5	3/5	1/0
0/6	3/0	4/2	1/2
0/7	3/5	4/9	1/4
0/8	4/0	5/6	1/6
0/9	4/5	6/3	1/8

Chceme-li dané číslo **1 572** násobit číslem **3**, přečteme ve třetím řádku systémem gelosia výsledek **4 716**. Podobně při násobení číslem **8** přečteme v osmém řádku výsledek **12 576**.

0/3	1/5	2/1	0/6
4	7	1	6

0/8	4/0	5/6	1/6
12	5	7	6

Úkol 3: Devítková zkouška

Kontrolu výsledků násobení můžeme provést podobně jako u sčítání prostým opakováním výpočtu nebo výpočtem se záměnou činitelů. Pro hrubou kontrolu můžeme použít odhad.

Ukážeme si ještě použití **devítkové zkoušky** pro ověření správnosti výpočtu u násobení:

235	$2 + 3 + 5 = 10$	$1 + 0 = 1$
418	$4 + 1 + 8 = 13$	$1 + 3 = 4$
98 230	$9 + 8 + 2 + 3 + 0 = 22$	$2 + 2 = 4$

Zdá se, že výpočet je správný, protože $1 \cdot 4 = 4$.

Zdroje použité literatury:

Beazley Mitchell: *Svět čísel, atomů a molekul*, Praha: Albatros, 1986

Folta Jaroslav: *Dějiny matematiky a fyziky v obrazech*, Praha: JČSMF, 1982-1990

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

Zdroje použitých obrázků:

Beazley Mitchell: *Svět čísel, atomů a molekul*, Praha: Albatros, 1986 - upraveno

Příloha:

Papírový model Napierových tyčinek

0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

10.4.1 Historické způsoby násobení II. - pracovní list

Úkol 1:

Vypočítej následující příklady klasicky pod sebe.

3589	7936	58902	94378
$\cdot\ 62$	$\cdot\ 158$	$\cdot\ 347$	$\cdot\ 68$

Úvod

V 16. a 17. stol. se již značně zvýšila potřeba řešit složitější úlohy hlavně kvůli velkému rozvoji dalších věd (např. kartografie, astronomie a techniky) Lidé si chtěli urychlit a zjednodušit práci. Samozřejmě v této době ještě neexistovaly žádné kalkulačky nebo jiné počítací stroje. Proto se lidé snažili přijít na pomůcky, které by jim v jejich práci pomohly.

Text k úkolu 2

Skotský matematik, fyzik, astronom, astrolog a vynálezce **John Napier** (1550 – 1617) vymyslel metodu, která při násobení nahradila pomocné výpočty. Ve své knize „O rabdologii neboli o počítání s tyčinkami" z roku 1617 ukázal, jak použít tabulku malé násobilky k snadnému násobení čísel. Původně navrhl zmíněnou tabulku rozřezat na svislé proužky papíru, ale později byly tyto proužky nahrazeny tyčinkami čtvercového průřezu. Z tabulky násobilky byly vynechány násobky deseti, takže vzniklo jen devět tyčinek s devíti políčky.

Úkol 2: Vypočítej příklady s pomocí Napierových tyčinek.

$86 \cdot 7 =$ $\qquad$ $3927 \cdot 8 =$

$642 \cdot 53 =$ $\qquad$ $93821 \cdot 82 =$

Text k úkolu 3

Matematika je opravdu velmi záludná věda a každý z nás v ní občas udělá nějakou chybu. Na tento problém ale měli již staří matematici lék, kterému říkali **devítková zkouška**. Používali ho nejen na ověření správnosti výsledku při násobení, ale i dělení, sčítání a odčítání.

Úkol 3: Pomocí devítkové zkoušky ověř správnost výsledků.

$121 \cdot 14 = 1694$

$498 \cdot 28 = 13844$

$5794 \cdot 32 = 185408$

Výsledky pracovního listu

Úkol 1: 222 518; 1 253 888; 20 438 994; 6 417 704

Úkol 2: 602; 31 416; 34 026; 7 693 322

Úkol 3: správně; špatně (13 944); správně

10.5 Devítková zkouška aneb hledání chybných výpočtů

Cíl aktivity:

Žáci se díky vypracování pracovního listu seznámí s historickými početními postupy, které se používaly ke kontrole správnosti výpočtů.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, celá čísla, operace s přirozenými čísly

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 6. - 9. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, Operace s čísly

Dějepis

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	Očekávané výstupy žáka
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel
Člověk a společnost	Dějepis	orientuje se na časové ose a v historické mapě

Průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Pracovní list

Metodický komentář:

Učitel nejprve seznámí žáky s principem devítkové zkoušky.

Devítková zkouška pro sčítání

Devítková zkouška je zajímavou metodou kontroly výpočtů. Opírá se o práci se zbytkovými třídami modulu 9. Ukážeme si to na příkladu sčítání:

4 386	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 3
517	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 4
4 903	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 7

Zdá se, že výpočet je správný, protože $3 + 4 = 7$.

POZOR! Nevýhodou této zkoušky je, že sice odhalí chybný výpočet, jestliže výše uvedená rovnost neplatí, ale nepotvrdí správnost výpočtu, jestliže zmíněná rovnost platí. Viz následující příklad chybného výpočtu:

4 386	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 3
517	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 4
4 507	toto číslo dává při dělení číslem 9 zbytek 7

Zdá se, že výpočet je správný, protože $3 + 4 = 7$, ale není.

Analogicky lze aplikovat na odčítání.

Devítková zkouška pro násobení

Před seznámením žáků s tímto způsobem kontroly výsledků by měl učitel žákům vysvětlit pojem ciferný součet.

I pro násobení můžeme použít **devítkovou zkoušku**.

$235 \cdot 418 = 98230$

235	$2 + 3 + 5 = 10$	$1 + 0 = 1$
418	$4 + 1 + 8 = 13$	$1 + 3 = 4$
98 230	$9 + 8 + 2 + 3 + 0 = 22$	$2 + 2 = 4$

Zdá se, že výpočet je správný, protože $1 \cdot 4 = 4$.

Zdroje použité literatury:

Genau A.: *Dějiny počtářství*, Nakladatelství Emil Šolc, Telč, 1912

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

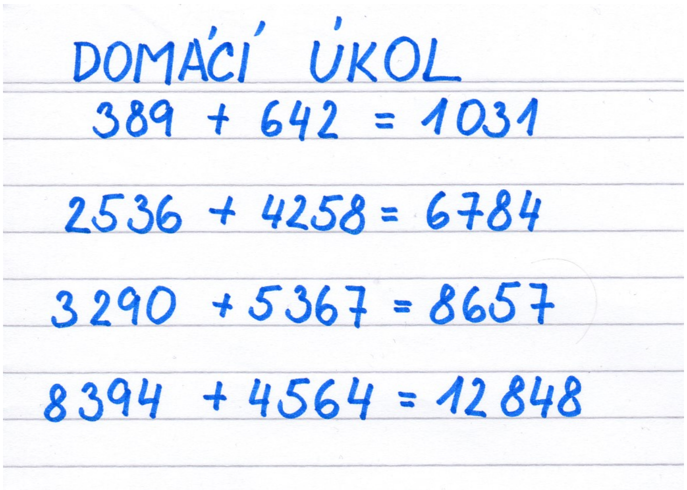
10.5.1 Devítková zkouška aneb hledání chybných výpočtů - pracovní list

Úvod:

Každý z nás v matematických výpočtech udělá občas nějakou chybu. Závažnější chybu lze odhalit odhadem výsledku, na některé chyby musíme použít zkoušku. Staří matematici měli na kontrolu správnosti svých výpočtů významnou, dnes již skoro zapomenutou, pomůcku - devítkovou zkoušku.

Úkol 1:

Martin počítal domácí úkol z matematiky. Devítkovou zkouškou ověř správnosti výpočtů a oprav nesprávné výsledky.



Úkol 2: Pomocí devítkové zkoušky ověř správnost výsledků.

$124 \cdot 12 = 1488$

$579 \cdot 48 = 27792$

$6325 \cdot 63 = 398275$

10.5.2 Devítková zkouška aneb hledání chybných výpočtů - vyhodnocení

Pracovní list Devítková zkouška aneb hledání chybných výpočtů jsem vyzkoušela v jedné třídě 7. ročníku základní školy. Do vypracovávání se zapojilo 18 žáků. Ve třídě byla přítomna i vyučující matematiky dané třídy.

V úvodu hodiny jsem na několika příkladech na sčítání, odčítání, násobení a dělení žákům připomněla, jak provádíme zkoušku. Poté jsem na jednoduchých příkladech na sčítání a násobení ukázala princip devítkové zkoušky. Následovala samostatná práce s pomocí pracovního listu, při které jsem žáky obcházela a odpovídala na jejich dotazy.

Devítková zkouška má na rozdíl od klasického způsobu zkoušky vyučovaného na dnešních školách výhodu, že nesvádí žáky ke zpětnému dosazení výsledku zkoušky bez výpočtu.

Pro ilustraci práce v hodině uvádím vyplněný pracovní list jednoho z žáků.

PRACOVNÍ LIST

Úvod:

Každý z nás v matematických výpočtech udělá občas nějakou chybu. Závažnější chybu lze odhalit odhadem výsledku, na některé chyby musíme použít zkoušku. Staří matematici měli na kontrolu správnosti svých výpočtů významnou, dnes již skoro zapomenutou, pomůcku - devítkovou zkoušku.

Úkol 1: Martin počítal domácí úkol z matematiky. Devítkovou zkouškou ověř správnosti výpočtů a oprav nesprávné výsledky.

DOMÁCÍ ÚKOL

389 + 642 = 1031 ✓

2536 + 4258 = 6784 × 6794

3290 + 5367 = 8657 ✓

8394 + 4564 = 12 848 ×
= 12 958

2536
4258
6794

8394
4564
12958

389 : 9 = 43 zb. 2
29
2

642 : 9 = 71 zb. 3
12
3

1031 : 9 = 114 zb. 5
13
41
5

2 + 3 = 5

2536 : 9 = 281 zb. 7
73
16
7

4258 : 9 = 473 zb. 1
65
28
1

6784 : 9 = 753 zb. 7
48
34
7

7 + 1 ≠ 7

3290 : 9 = 365 zb. 5
59
50
5

5367 : 9 = 596 zb. 3
86
57
3

8657 : 9 = 961 zb. 8
55
17
8

5 + 3 = 8

394 : 9 = 932 zb. 6
29
24
6

4564 : 9 = 507 zb. 1
06
64
1

12848 : 9 = 1427 zb. 5
38
24
68
5

6 + 1 ≠ 5

Úkol 2: Pomocí devítkové zkoušky ověř správnost výsledků.

124 . 12 = 1488

$1+2+4=7$ $7\cdot 3=21$ $2+1=3$

$1+2=3$

$1+4+8+8=21$ $2+1=3$

$7\cdot 3=\underline{\underline{21}}$ správně

579 . 48 = 27792

$5+7+9=21$ $2+1=3$

$4+8=12$ $1+2=3$

$2+7+7+9+2=27$ $2+7=9$

$3\cdot 3=\underline{\underline{9}}$ správně

6 325 . 63 = 398 275

$6+3+2+5=16$ $1+6=7$

$6+3=9$

$3+9+8+2+7+5=34$ $3+4=7$

$7\cdot 9\neq 7$ špatně

$$\begin{array}{r} 6325 \\ \cdot\ 63 \\ \hline 18975 \\ 37950 \\ \hline 398475 \end{array}$$

10.6 Zajímavá dělitelnost I.

Cíl aktivity:

Žáci se díky vypracování pracovního listu seznámí se zajímavými kritérii dělitelnosti. Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, celá čísla, operace s přirozenými čísly, dělitelnost přirozených čísel

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 6. - 7. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Dělitelnost přirozených čísel

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	Očekávané výstupy žáka
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel
		modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

Průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Pracovní list

Metodický komentář:

Kritérium dělitelnosti číslem 11

Číslo je dělitelné jedenácti, jestliže od součtu číslic na lichých místech odečteme součet číslic na sudých místech a vzniklé číslo je rovno 0 nebo dělitelné 11. Místa číslujeme zprava (od řádu jednotek k vyšším řádům).

Příklad: Zvolme číslo $a = 3\,921\,401$

Číslo 3 921 401 je dělitelné jedenácti, protože (1+4+2+3) - (0+1+9) = 10 - 10 = 0

Kritérium dělitelnosti číslem 7 (viz kapitola 4.3.1 této práce)

Pokud si vypíšeme prvních deset násobků sedmi (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63), všimneme si, že na místě jednotek se postupně vystřídají všechny číslice. Jestliže vezmeme v úvahu ještě kritéria dělitelnosti uvedená v kapitole 4. Netradiční kritéria dělitelnosti přirozených čísel můžeme dále postupovat takto:

- Od daného čísla a odečteme násobek sedmi, který má na místě jednotek tutéž číslici jako číslo a.
- V zápise čísla, které jsme dostali, vynecháme nulu na místě jednotek
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme číslo, o kterém již bez výpočtu můžeme rozhodnout o jeho dělitelnosti sedmi.

Příklad: Zvolme číslo $a = 26\,586$

26 586 − 56 = 26 530 (vynecháme nulu)

2 653 − 63 = 2 590

259 − 49 = 210

21 je dělitelné sedmi, proto i číslo 26 586 ($= 7 \cdot 3798$) je dělitelné sedmi

Zdroje použité literatury:

Fidesová Ľudmila: *„Delitelnosť číslom sedem"*, Matematika a fyzika ve škole č.20, 1989/90

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

10.6.1 Zajímavá dělitelnost I. - pracovní list

Úkol 1: Opakování

Vypiš čísla, která jsou dělitelná 2, 3, 4, 5, 6, 9 a 10.

45 100 111 156 193 222 234 432 620 724 1200 2343 4675

dělitelná 2:...

dělitelná 3:...

dělitelná 4:...

dělitelná 5:...

dělitelná 6:...

dělitelná 9:...

dělitelná 10:...

Úkol 2: Zjisti, zda jsou čísla **9372, 423695** a **720379** dělitelná **11**.

Úkol 3: Zjisti, zda jsou čísla **6622, 8548** dělitelná **7**.

10.6.2 Zajímavá dělitelnost I. - vyhodnocení

Pracovní list Zajímavá dělitelnost I. jsem vyzkoušela v jedné třídě 6. ročníku základní školy. Do vypracovávání se zapojilo 22 žáků. Ve třídě byla přítomna i vyučující matematiky dané třídy.

Na úvod si žáci v úkolu 1 zopakovali dělitelnost čísly 2, 3, 4, 5, 6, 9 a 10. Pro některé žáky byla tato úloha časově náročnější.
V druhém úkolu jsem žáky seznámila s dělitelností jedenácti na jednodušším příkladu. Následně pracovali žáci samostatně. Některé z nich poukazovali na určitou podobnost s ciferným součtem, který používají na dělitelnost třemi a devíti.

Jako třetí úkol jsem zvolila zjišťování dělitelnosti sedmi. Při vysvětlování principu dělitelnosti sedmi jsme spolu se žáky vypracovali na tabuli pomůcku - násobky sedmi. Upozornila jsem žáky, aby si všimli, že každý násobek sedmi má na místě jednotek jinou číslici. Na lehkém příkladu jsem ukázala, jak ověřujeme dělitelnost sedmi. Poté žáci pracovali samostatně.

Ani jeden ze znaků dělitelnosti (sedmi a jedenácti) žáci neznali a způsob jednoduchého řešení je zaujal.

Pro ilustraci práce v hodině uvádím vyplněný pracovní list jedné ze žákyň.

PRACOVNÍ LIST

Úkol 1: Opakování.

Vypiš čísla, která jsou dělitelná 2, 3, 4, 5, 6, 9 a 10.

45 100 111 156 193 222 234 432 620 724 1200 2343 4675

dělitelná 2: 100, 156, 222, 234, 432, 620, 724, 1200

dělitelná 3: 45, 111, 156, 222, 234, 432, 1200, 2343,

dělitelná 4: 100, 156, 432, 620, 724, 1200,

dělitelná 5: 45, 100, 620, 1200, 4675

dělitelná 6: 156, 222, 234, 432, 1200

dělitelná 9: 45, 234, 432

dělitelná 10: 100, 620, 1200

Úkol 2: Zjisti, zda jsou čísla **9372, 423695** a **720379** dělitelná **11**.

9372 $2+3=5$ $7+9=16$ $16-5=11$ ano

423695 $5+6+2=13$ $9+3+4=16$ $16-13=3$ ne

720379 $9+3+2=14$ $7+0+7=14$ $14-14=0$ ~~ne~~ ano

Úkol 3: Zjisti, zda jsou čísla **6622, 8548** dělitelná **7**.

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56
63, 70

6622 − 42 = 6580
658 − 28 = 630
63 − ano

8548 − 28 = 8520
852 − 42 = 810
81 − 21 = 60
6 − ne

10.7 Zajímavá dělitelnost II.

Cíl aktivity:

Žáci se díky vypracování pracovního listu seznámí se zajímavými kritérii dělitelnosti. Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, celá čísla, operace s přirozenými čísly, dělitelnost přirozených čísel

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 8. - 9. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Dělitelnost přirozených čísel

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	Vzdělávací obor	Očekávané výstupy žáka
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel
		modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

Průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Pracovní list

Metodický komentář:

Kritérium dělitelnosti číslem 7

Pokud si vypíšeme prvních deset násobků sedmi (0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63), všimneme si, že na místě jednotek se postupně vystřídají všechny číslice. Jestliže vezmeme v úvahu ještě kritéria dělitelnosti uvedená v kapitole 4. Netradiční kritéria dělitelnosti přirozených čísel můžeme dále postupovat takto:

- Od daného čísla a odečteme násobek sedmi, který má na místě jednotek tutéž číslici jako číslo a
- V zápise čísla, které jsme dostali, vynecháme nulu na místě jednotek
- Postup opakujeme, dokud nedostaneme číslo, o kterém již bez výpočtu můžeme rozhodnout o jeho dělitelnosti sedmi.

Příklad: Zvolme číslo $a = 26\ 586$

$26\ 586 - 56 = 26\ 530$ (vynecháme nulu)

$2\ 653 - 63 = 2\ 590$

$259 - 49 = 210$

21 je dělitelné sedmi, proto i číslo 26 586 ($=7 \cdot 3798$) je dělitelné sedmi

Kritérium dělitelnosti číslem 19

Každé přirozené číslo n se dá vyjádřit jako $n = 10x + y$, kde x je počet všech desítek v daném čísle n (nikoli číslice řádu desítek) a y je číslice řádu jednotek. Například

$7\ 365 = 10 \cdot 736 + 5$

Přirozené číslo n je dělitelné devatenácti právě tehdy, když součet počtu jeho všech desítek a dvojnásobného počtu jednotek je dělitelný devatenácti. Podobně jako u dělitelnosti sedmi můžeme odvodit algoritmus, který si ukážeme na příkladu.

Příklad:

Rozhodněte o tom, jestli číslo 47 045 881 je dělitelné číslem 19.

Postup: Podle výše uvedeného kritéria dělitelnosti číslem 19 vypracujeme tabulku. Sestavíme ji tak, že z čísla 47 045 881 oddělíme číslici 1 na pozici jednotek. Následně ke zbylému číslu (4 704 588) přičteme dvojnásobek oddělené číslice, tedy číslo 2. Od vzniklého čísla opět oddělíme číslici na pozici jednotek a takto v postupu pokračujeme dále, dokud nedojdeme k výslednému číslu.

$4704588\|1$ $+\ 2$	$471\|2$ $+\ 4$
$470459\|0$ $+\ 0$	$47\|5$ $+\ 10$
$47045\|9$ $+\ 18$	$5\|7$ $+\ 14$
$4706\|3$ $+\ 6$	19

Protože číslo 19 je samozřejmě dělitelné číslem 19, je i číslo 47 045 881 dělitelné číslem 19.

$47045881 = 19 \cdot 2476099$

Zdroje použité literatury:

Fidesová Ľudmila: *„Delitelnosť číslom sedem"*, Matematika a fyzika ve škole č.20, 1989/90

Pereĺman Jakov I.: *„Zajímavá algebra"*, SNTL Praha 1985

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

10.7.1 Zajímavá dělitelnost II. - pracovní list

Úkol 1: Opakování

Vypiš čísla, která jsou dělitelná 2, 3, 4, 5, 6, 9 a 10.

45 100 111 156 193 222 234 432 620 724 1200 2343 4675

dělitelná 2:...

dělitelná 3:...

dělitelná 4:...

dělitelná 5:...

dělitelná 6:...

dělitelná 9:...

dělitelná 10:...

Úkol 2: Zjisti, zda jsou čísla **48 391, 59 824** dělitelná **7**.

Úkol 3: Zjisti, zda je číslo **14 337 799** dělitelné **19**.

Výsledky pracovního listu

Úkol 1: dělitelná 2: 100, 156, 222, 234, 432, 620, 724, 1200

dělitelná 3: 45, 111, 156, 222, 234, 432, 1200, 2343

dělitelná 4: 100, 156, 432, 620, 724, 1200

dělitelná 5: 45, 100, 620, 1200, 4675

dělitelná 6: 156, 222, 234, 432, 1200

dělitelná 9: 45, 234, 432

dělitelná 10: 100, 620, 1200

Úkol 2: ano; ne

Úkol 3: ano

10.8 Figurální čísla

Cíl aktivity:

Žáci se díky modelování figurálních čísel seznámí s jejich zákonitostmi.

Aktivitu lze využít i ke skupinové výuce.

Předpokládané znalosti:

obor přirozených čísel, operace s přirozenými čísly

Klíčové kompetence:

- kompetence k učení
- kompetence k řešení problémů
- kompetence pracovní

Věk žáka: 6. - 9. třída

Časová dotace: 45 minut

Tematické zařazení:

Matematika - Číslo a proměnná, Operace s čísly

Návaznost na RVP ZV:

Vzdělávací oblast	**Vzdělávací obor**	**Očekávané výstupy žáka**
Matematika a její aplikace	Matematika	žák provádí početní operace v oboru přirozených čísel

Průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova

Potřebný materiál:

- Kamínky, čočka nebo papírová kolečka z děrovačky

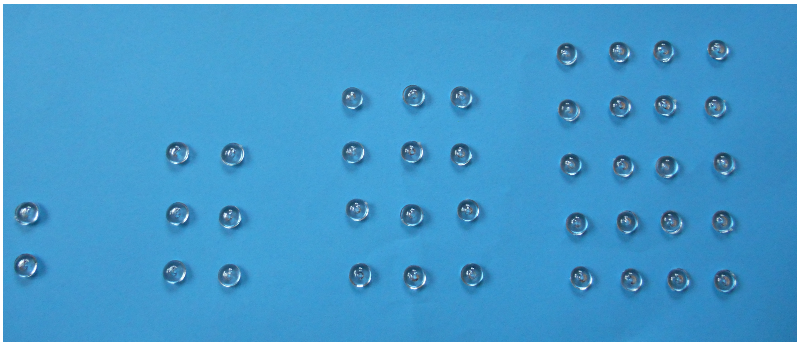
Metodický komentář:

Učitel nejprve seznámí žáky s pojmem figurální číslo - geometrické znázorňování přirozených čísel.

Pythagorejské období matematiky se vyznačuje silnou geometrizací, kdy se většina zákonitostí a vztahů mezi čísly interpretuje geometricky a tímto způsobem se provádějí i důkazy. K tomuto znázorňování byly původně používány kamínky, které byly rovnány do geometrických obrazců.

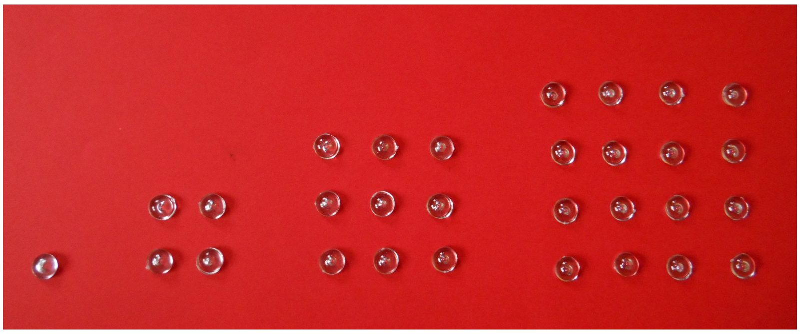
Společně se žáky se pokusíme znázornit některá čtvercová, trojúhelníková, pětiúhelníková a šestiúhelníková figurální čísla.

Princip znázorňování můžeme vysvětlit na jednoduchém příkladu obdélníkových čísel, kdy si žáci sestaví obdélníkové číslo 1x2. Následně k němu přidávají kamínky tak, aby vždy zvětšili každou ze stran o 1 kamínek. Pokračují tedy čísly 2x3, 3x4, 4x5, … U každého obdélníku si zapíší počet potřebných kamínků.



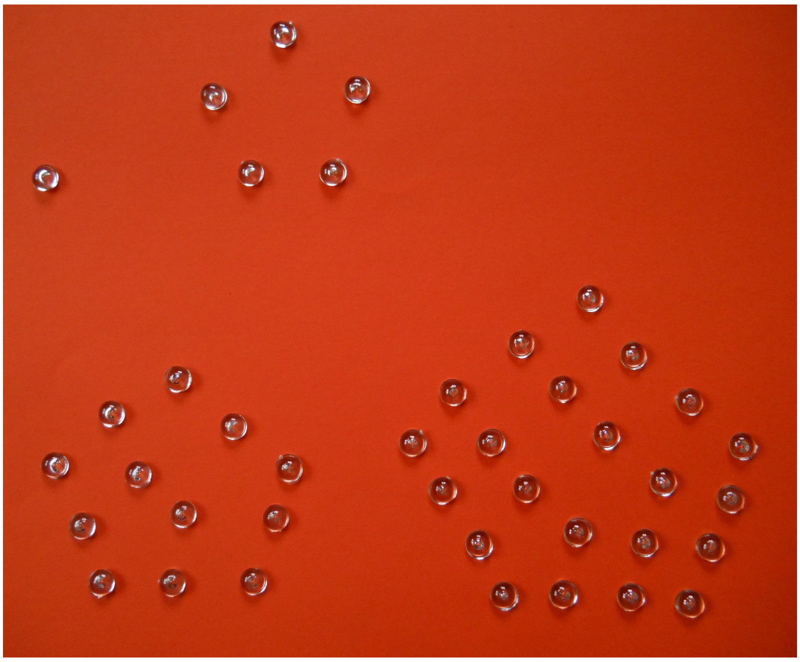
obdélníková čísla 2, 6, 12, 20

Obdobně postupujeme u čtvercových, trojúhelníkových, pětiúhelníkových a šestiúhelníkových čísel.

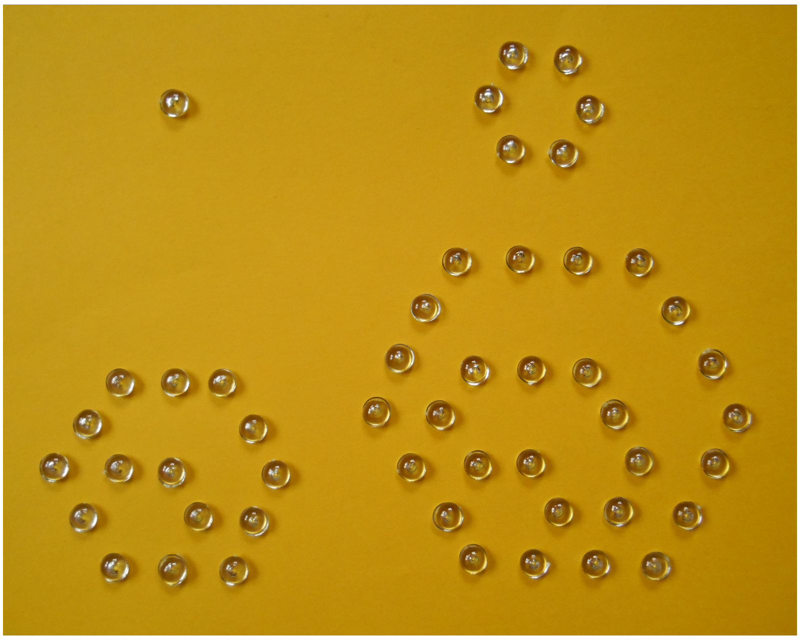


čtvercová čísla 1, 4, 9, 16

trojúhelníková čísla 1, 3, 6, 10



pětiúhelníková čísla 1, 5, 12, 22



šestiúhelníková čísla 1, 6, 15, 28

Zdroje použité literatury:

Znám Štefan a kol.: *Pohľad do dejin matematiky*, ALFA a SNTL Bratislava a Praha 1986

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT. [online]. Dostupné z http://www.msmt.cz/file/37052

11 Závěr

Moje práce nemá působit jako encyklopedie historie matematiky. Cílem bylo rozšířit mou bakalářskou práci o další matematické techniky, jako jsou magické čtverce, starověké početní postupy a jiné zajímavé počtářské algoritmy, zlatý řez a figurální čísla.

Rovněž jsem se zabývala i praktickým využitím některých, mnou popisovaných, matematických technik. Ze zajímavých úloh z historie matematiky jsem sestavila osm pracovních listů. Čtyři z nich jsem měla možnost vyzkoušet přímo ve výuce s cílem přiblížit žákům některé matematické postupy, které nejsou obsaženy v Rámcově vzdělávacím programu.

Myslím si, že je vhodné do hodin matematiky, jako doplňující učivo, zařadit úkoly z historie. Ověřila jsem si, že práce žáky velice bavila a s nadšením přivítali zpestření výuky. Hodiny měly kladnou odezvu u dětí i v mimoškolní přípravě, kdy se sami nebo ve spolupráci se sourozenci či rodiči těmito tématy zabývaly.

12 Literatura

[1] *Andres Jan a Fišer Jiří:* **Řez zlatý, stříbrný a bronzový,**
In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 40 (1995), č. 6

[2] *Bialas Aleksander:* **O dělitelnosti celých čísel,** SPN Praha 1966

[3] *Drake S.:* **Galileo Studies,** In: Mathematical Magazine, Vol.68, No.1,
The University of Michigan Press, February 1995

[4] *Dušek František:* **Matematické zájmové kroužky,** SPN Praha 1971

[5] *Fidesová Ludmila:* **Delitelnost' číslom sedem,**
Matematika a fyzika ve škole č. 20, 1989/90

[6] *Fuchs Eduard:* **Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti,** In: Matematika, fyzika a vzdělávání, Brno VUTIUM 2004

[7] *Chabert J.L.:* **A History of Algorithms,** Springer Berlin, 1999

[8] *Jelínek Miloš:* **Numerační soustavy,** SPN Praha 1974

[9] *Karpenko Vladimír:* **Tajemství magických čtverců,** Půdorys, Praha 1997

[10] *Koman Milan:* **Dürerův magický čtverec,**
materiál z didaktického semináře Pedagogické fakulty UK Praha, 2002

[11] *Korděmskij B. A.:* **Matematické prostocviky,** MF Praha 1957

[12] *Kotík Jan a kol.:* **Matematika pro průmyslové školy II. díl,**
SPN Praha 1958

[13] *Kuřina František:* **Matematika a porozumění světu,** Academia Praha 2009

[14] *Kuřina František:* **Podivuhodný svět elementární matematiky,**
Academia Praha 2006

[15] *Novoveský Štefan a kol.:* **Zábavná matematika,** SPN Praha 1974

[16] *Perel'man Jakov I.:* **Zajímavá algebra,** SNTL Praha 1985

[17] *Polster Burkard:* **Q.E.D, Krása matematického důkazu,** Dokořán Praha 2014

[18] *Room Adrian:* **Guinnessova kniha o číslech,** MF Praha 1993

[19] *Sedláček Jiří:* **Nebojte se matematiky,** SNTL Praha 1960

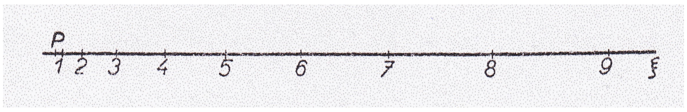
[20] *Štěpánský Václav:* **Nomogramy,** SNTL Praha 1966

[21] *Veselý František:* **O dělitelnosti celých čísel,** Mladá fronta Praha 1966

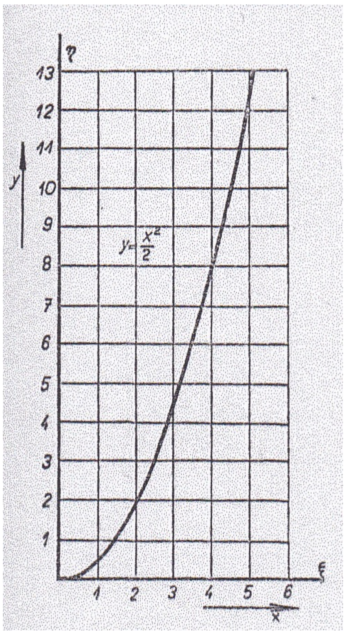
[22] *Vlach Milan, Kyncl Zdeněk:* **Numerické výpočty,** SPN Praha 1966

[23] *Znám Štefan:* **Pohl'ad do dejin matematiky,** ALFA Bratislava + SNTL Praha 1986

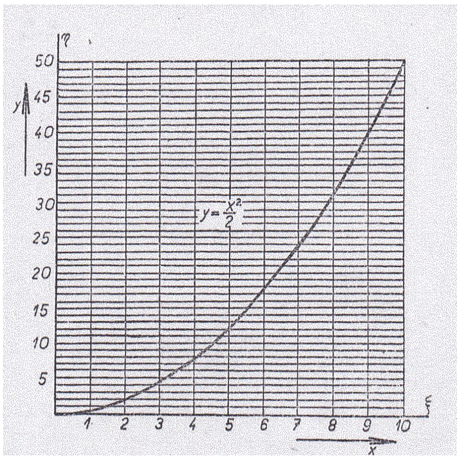
13 Přílohy



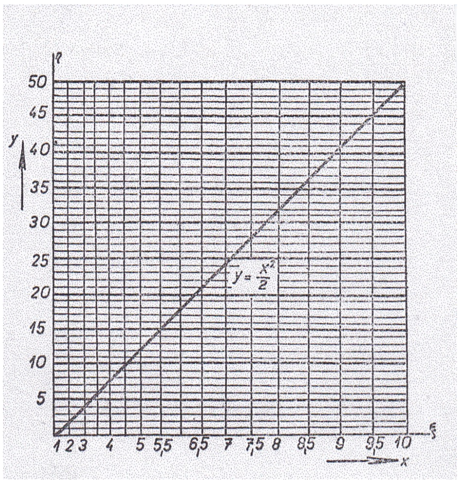
Obr. 9.1: Funkční stupnice



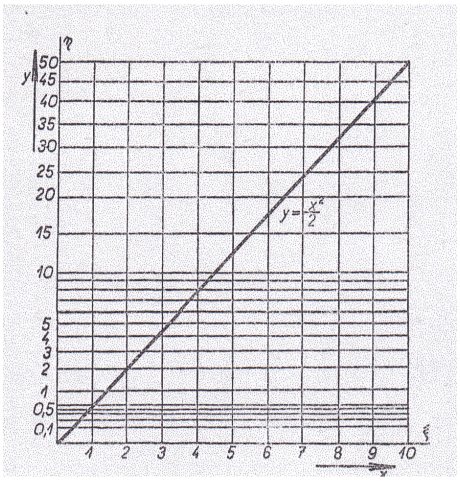
Obr. 9.2: Funkční síť $y = \frac{x^2}{2}$



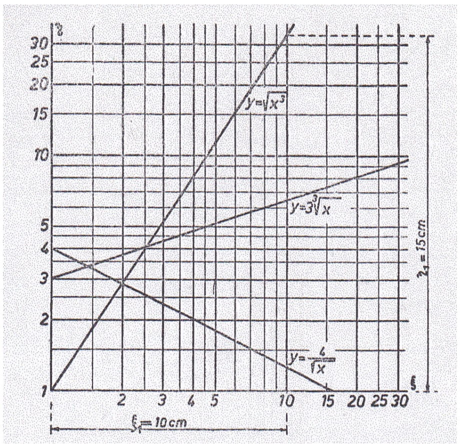
Obr. 9.3: Funkční síť $y = \frac{x^2}{2}$ (s úpravou os)



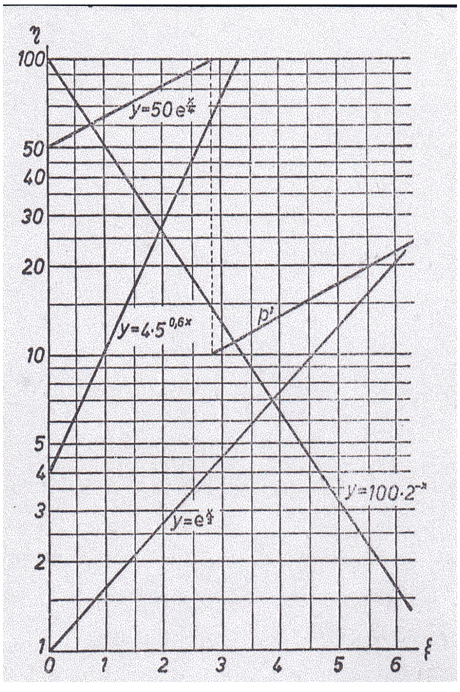
Obr. 9.4: Znázornění příkladu 9.2



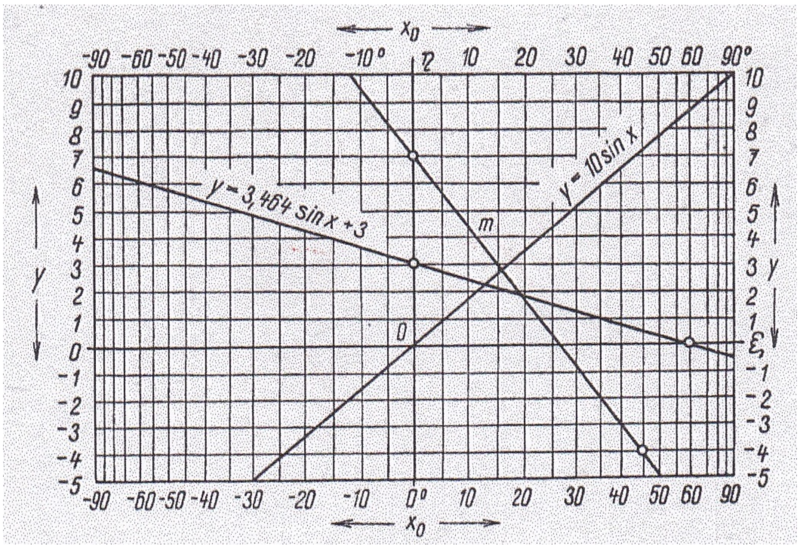
Obr. 9.5: Znázornění příkladu 9.3



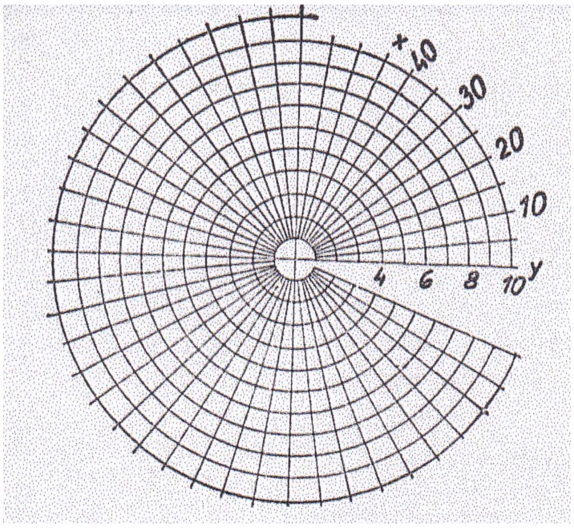
Obr. 9.6: Logaritmický papír



Obr. 9.7: Semilogaritmický papír



Obr. 9.8: Sinusový papír



Obr. 9.9: Polární papír