

**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích**  
**Přírodovědecká fakulta**

**Nerovnosti Friedrichsova a Poincarého typu a  
jejich výpočet**

Bakalářská práce

**Alexej Moskovka**

Vedoucí práce: doc. Dr. rer. nat. Ing. Jan Valdman

České Budějovice 2018

## Bibliografické údaje

Moskovka, A., 2018: Nerovnosti Friedrichsova a Poincarého typu a jejich výpočet. [Friedrichs' and Poincaré inequalities and their computation. Bc. Thesis, in Czech.] – 76 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

## Anotace

Tato bakalářská práce se zabývá teorií Friedrichsových a Poincarého nerovností a konstant v nich vystupujících, které mají široké využití v matematické analýze, zejména ve funkcionální analýze a v teorii parciálních diferenciálních rovnic. Základní myšlenkou nerovností je omezení L-norem funkcí vzhledem k L-normám jejich gradientů. Výpočet konstant se dá provést analyticky pro jednoduché geometrické oblasti nebo přibližně numericky. Zde detailně provádíme explicitní výpočet konstant pro interval, obdélník a kvádr. Dále realizujeme numerický výpočet pro interval, obdélník a také pro mezikružší, pro které přesnou hodnotu konstant neznáme.

## Annotation

This thesis deals with the theory of Friedrichs' and Poincaré inequalities and their constants. They are important in mathematical analysis, functional analysis and theory of partial differential equations. The key property of them is the boundness of L-norms of functions by L-norms of gradients of functions. Constants can be derived analytically for simple geometries or approximated numerically. We provide an explicit derivation for an interval, a rectangle and a rectangular cuboid. We also perform a numerical computation for the interval and the rectangle as well as for an annulus, for which constants are unknown.

## Klíčová slova

MATLAB, WOLFRAM MATHEMATICA, Friedrichsova nerovnost, Poincarého nerovnost, konstanty v nerovnostech, Fourierovy řady, Laplaceův operátor, metoda konečných prvků.

## Key words

MATLAB, WOLFRAM MATHEMATICA, Friedrichs's inequality, Poincaré inequality, constants in inequalities, Fourier series, Laplace operator, finite elements.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V ..... dne ..... podpis studenta

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat především svému školiteli doc. Janu Valdmanovi za vedení mé bakalářské práce, a také za všechny rady a veškerou pomoc z odborné stránky. Dále mé poděkování patří panu Dr. Janu Eisnerovi za všechny rady a připomínky, kterými pro napsání této bakalářské práce přispěl. Nakonec bych chtěl poděkovat všem ostatním členům Ústavu matematiky a biomatematiky PřF JU za cenné připomínky a ochotu poradit v případě potřeby.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>Cíle práce</b>	<b>2</b>
<b>1 Wirtingerovy a Poincarého nerovnosti. Odvození konstant pomocí Fourierových řad.</b>	<b>5</b>
1.1 Homogenní funkce . . . . .	5
1.1.1 1D případ . . . . .	5
1.1.2 2D případ . . . . .	16
1.1.3 3D případ . . . . .	23
1.1.4 Vícedimenzionální případy . . . . .	25
1.2 Funkce s nulovým průměrem . . . . .	26
1.2.1 1D případ . . . . .	26
1.2.2 Vícedimenzionální případy . . . . .	31
<b>2 Aplikace nerovností</b>	<b>35</b>
2.1 Zobecnění Wirtingerových a Poincarého nerovností. Friedrichsova nerovnost . . . . .	35
2.2 Důkaz pozitivní definitnosti diferenciálních operátorů . . . . .	38
2.3 Souvislosti s Laplaceovým operátorem, diskretizace Laplaceova operátoru, aproximace konstant pomocí vlastních čísel . . . . .	43
2.3.1 1D případ . . . . .	44
2.3.2 2D případ . . . . .	50
<b>3 Numerický výpočet konstant metodou konečných prvků</b>	<b>59</b>
3.1 1D případ . . . . .	62
3.2 2D případ . . . . .	68
<b>Závěr</b>	<b>75</b>

# Úvod

Teorie Friedrichsových a Poincarého konstant a nerovností se vyvíjela na přelomu 19. a 20. století. Jejími zakladateli byli německý matematik Kurt Otto Friedrichs (1901 - 1982) a francouzský matematik Henri Poincaré (1854 - 1912). Časem tato teorie získala široké uplatnění v matematice, zejména v teorii parciálních diferenciálních rovnic a v numerické analýze. S vývojem počítačů se začaly prosazovat různé numerické metody pro výpočet konstant, s některými z nich se v této práci seznámíme.

Základní myšlenou těchto nerovností je souvislost mezi normou (v určitém prostoru) funkcí a normou jejich gradientů. Nejjednodušší variantu lze formulovat jako

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

kteřá platí pro určitou třídu funkcí  $u \in U$ . Existují potom i další nerovnosti, které kromě norem funkcí a jejich gradientů uvažují další vlastnosti (např. funkční hodnoty na hranici).

# Cíle práce

Cílem této práce je seznámit se s teorií Friedrichsových a Poincarého nerovností a jejich konstant, ukázat různé metody pro jejich odvození a uvést základní aplikace v matematice. Odvození konstant můžeme rozdělit na dvě kategorie: explicitní (teoretické) a numerické. Při explicitním odvození, kterému je věnována první kapitola této práce, využijeme teorii Fourierových řad, kde výpočet norem funkcí a jejich gradientů (derivací v případě funkcí jedné proměnné) provedeme pomocí rozvoje funkcí do Fourierových řad, zatímco při numerickém výpočtu konstant (třetí kapitola) využijeme numerické metody konečných prvků, kterou následně implementujeme ve výpočetním softwaru (Matlab, Wolfram Mathematica). Jedné z numerických metod je věnována také část druhé kapitoly, kde se uvádí souvislosti s Laplaceovým operátorem. V závěru této práce shrneme výsledky, ke kterým v tomto textu postupně dospějeme, porovnáme explicitní a numerické odvození konstant z hlediska náročnosti a přesnosti a uvedeme výhody a nevýhody každé z metod.

# Úmluva

Pojmy Friedrichsova nerovnost resp. Poincarého nerovnost nejsou v literatuře jednoznačné.

V různých zdrojích, které se danou problematikou zabývají, často můžeme narazit na dva nebo více odlišných tvarů nerovností, které mohou vystupovat pod stejným názvem, a naopak, jedna a ta samá nerovnost se v různých zdrojích může vystupovat pod odlišnými názvy. Uvedeme pro začátek některé verze nerovností, se kterými se v různých informačních zdrojích můžeme setkat.

**Lemma 1.** Poincarého nerovnost. *Necht'  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  je otevřená omezená souvislá množina v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Potom existuje konstanta  $c$  závislá pouze na  $p$  a  $\Omega$  taková, že platí*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Lemma 2.** Poincarého-Wirtingerova nerovnost. *Necht'  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  je otevřená omezená souvislá množina v  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Potom existuje konstanta  $c$  závislá pouze na  $p$  a  $\Omega$  taková, že platí*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

kde  $u_\Omega$  je průměr  $u$  přes  $\Omega$ , který je dán vztahem

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx,$$

a  $|\Omega|$  je Lebesgueova míra  $\Omega$ .

**Lemma 3.** Friedrichsova nerovnost. *Necht'  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  je otevřená omezená souvislá množina v  $\mathbb{R}^n$  s diametrem  $d$ . Potom platí*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d^k \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad \forall u \in W_0^{k,p}(\Omega),$$

kde

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$



a  $D^\alpha u$  je smíšená parciální derivace

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Lemma 4.** *Poincarého nerovnost.* Necht'  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  je souvislá omezená otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$ . Potom existují konstanty  $c_1$  a  $c_2$  takové, že platí

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_1 \int_{\Omega} (\nabla u(x))^2 dx + c_2 \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2, \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega).$$

**Lemma 5.** *Friedrichsova nerovnost.* Necht'  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  je souvislá omezená otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$ . Potom existují konstanty  $c_1$  a  $c_2$  takové, že platí

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_1 \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + c_2 \int_{\partial G} u^2(S) dS$$

Někdy se na oblast  $\Omega$  kladou obecnější požadavky, jindy je požadována tzv. Lipschitzovská hranice  $\Omega$  (to znamená že v každém bodě ji lze lokálně popsat Lipschitzovskou spojitou funkcí). Může se stát, že v různých zdrojích jedna a ta samá verze nerovnosti se objeví pod jiným názvem (Poincarého x Friedrichsova).

V dalším textu vždy budeme specifikovat, se kterou nerovností přesně pracujeme.

**Poznámka 1.** V této práci se omezíme na funkce z Hilbertova prostoru  $L^2$  a všechny odvozené nerovnosti budou platné pro určitou třídu funkcí z nějakého prostoru  $L^2$ .

# Kapitola 1

## Wirtingerovy a Poincarého nerovnosti. Odvození konstant pomocí Fourierových řad.

V této kapitole si explicitně odvodíme hodnoty Poincarého konstant v některých konkrétních případech pomocí rozvoje funkce do Fourierovy řady a uvedeme některé důsledky, které z toho plynou.

### 1.1 Homogenní funkce

#### 1.1.1 1D případ

**Definice 1.** Pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  definujme prostor funkcí

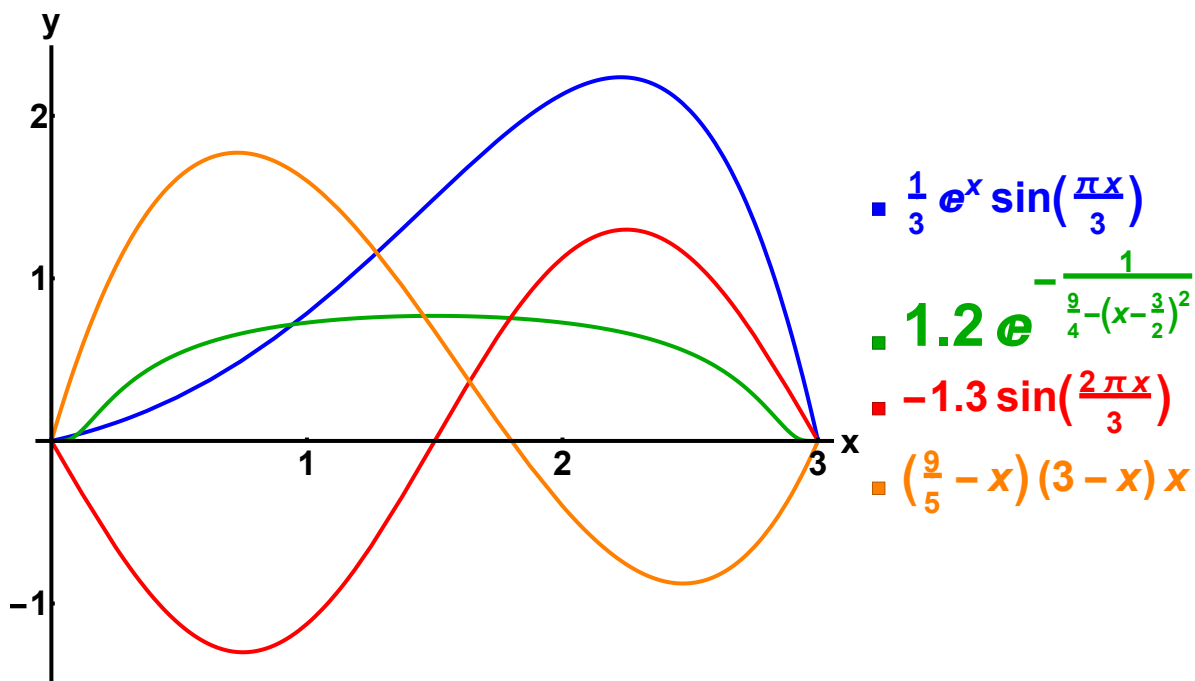
$$U_0^1((a, b)) := \{u, u \in C^1([a, b]), u(a) = u(b) = 0\}. \quad (1.1)$$

Funkcím, které jsou nulové na hranici svého definičního oboru, budeme v dalším textu říkat "homogenní funkce".

Mějme funkci  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in U_0^1((a, b))$ , a bude nás zajímat, jestli je  $L^2$  norma této funkce nějak omezena  $L^2$  normou své derivace, tedy jestli existuje nějaká konstanta  $c_1$  závislá pouze na hodnotách  $a, b$ , pro kterou by platilo

$$\|u\|_{L^2((a, b))} \leq c_1 \|u'\|_{L^2((a, b))}, \quad \forall u \in U_0^1((a, b)). \quad (1.2)$$

Této nerovnosti pro funkce jedné proměnné se občas říká Wirtingerova nerovnost.



Obrázek 1.1: Příklady některých homogenních funkcí na intervalu  $[0, 3]$ . Hodnoty podílů norm pro každou funkci udává Tabulka 1.1 .

**Poznámka 2.** *Písmeno  $c$  budeme v dalším textu potřebovat při označení intervalů v dimenzích vyšších než 1. Např. ve 2D budeme uvažovat interval  $J = (a, b) \times (c, d)$ . Aby nedocházelo ke kolizi s odvozovanými konstantami, které se v literatuře obvykle označují pouhým písmenem  $c$ , budeme v případě těchto konstant používat dolní index, který bude označovat dimenzi, ve které zrovna pracujeme.*

**Poznámka 3.** *Z předpokladu  $u \in C^1([a, b])$  plyne, že  $u, u' \in L^2((a, b))$ .*

funkce	podíl norem
$-1.3 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$	0.477465
$\left(\frac{9}{5} - x\right)(3 - x)x$	0.507093
$\frac{1}{3} e^x \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$	0.690621
$1.2 e^{-\frac{1}{4 - (x - \frac{3}{2})^2}}$	0.834823

Tabulka 1.1: Příklady pro některé funkce (viz Obr. 1.1) na intervalu  $[0, 3]$ . Podílem norem rozumíme hodnotu výrazu  $\|u\|_{L^2((a,b))} / \|u'\|_{L^2((a,b))}$  .

Před tím než si ukážeme, že taková konstanta existuje, provedeme s původní funkcí  $u$  několik úprav. Nejprve ji posuneme tak, aby se bod  $a$  přesunul do počátku. Posunutím funkce se její

norma, ani norma její derivace, nezmění. Položme

$$u^*(x) := u(x+a), \quad a^* = 0, \quad b^* = b-a, \quad x \in [a^*, b^*].$$

Zřejmě bude platit

$$\|u^*\|_{L^2((0,b^*))} = \|u\|_{L^2((a,b))}, \quad \|(u^*)'\|_{L^2((0,b^*))} = \|u'\|_{L^2((a,b))}.$$

Dále si rozšíříme funkci  $u^*(x)$  na lichou funkci na intervalu  $[-b^*, b^*]$ . Položme

$$f(x) = \begin{cases} u^*(x), & x \in (0, b^*) \\ -u^*(-x), & x \in (-b^*, 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Ze spojitosti funkce  $u^*$  na  $(0, b^*]$  plyne, že  $f$  je spojitá na  $[-b^*, 0) \cup (0, b^*]$ . Navíc platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u^*(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -u^*(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0),$$

tedy  $f$  je spojitá v nule a z toho plyne, že  $f$  je spojitá na celém  $[-b^*, b^*]$ . Podobně dostáváme pro derivaci  $f$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -u^{*'}(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (u^*(-x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} u^{*'}(x) = f'_+(0),$$

a  $f$  je v nule spojitá. Z toho plyne, že  $f$  má derivaci v nule, která je rovna derivaci v nule zprava funkce  $u^*$ , a ze spojitosti  $u^{*'}$  na celém  $[0, b^*]$  plyne, že  $f'$  je spojitá na celém  $[-b^*, b^*]$ . Podobně jako pro původní funkci  $u$  bude pro  $f$  platit, že  $f, f' \in L^2(-b^*, b^*)$ .

Položme  $L = b^*$ ,  $I = (-L, L)$ . Platí následující vztah mezi normami  $u$  a  $f$

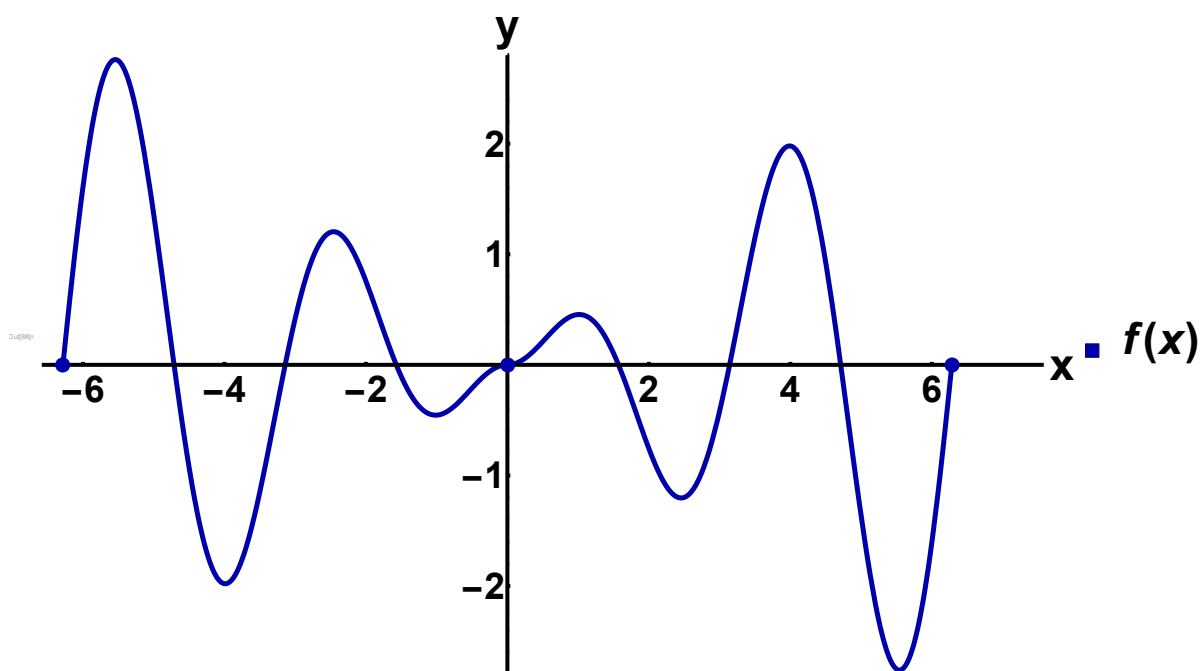
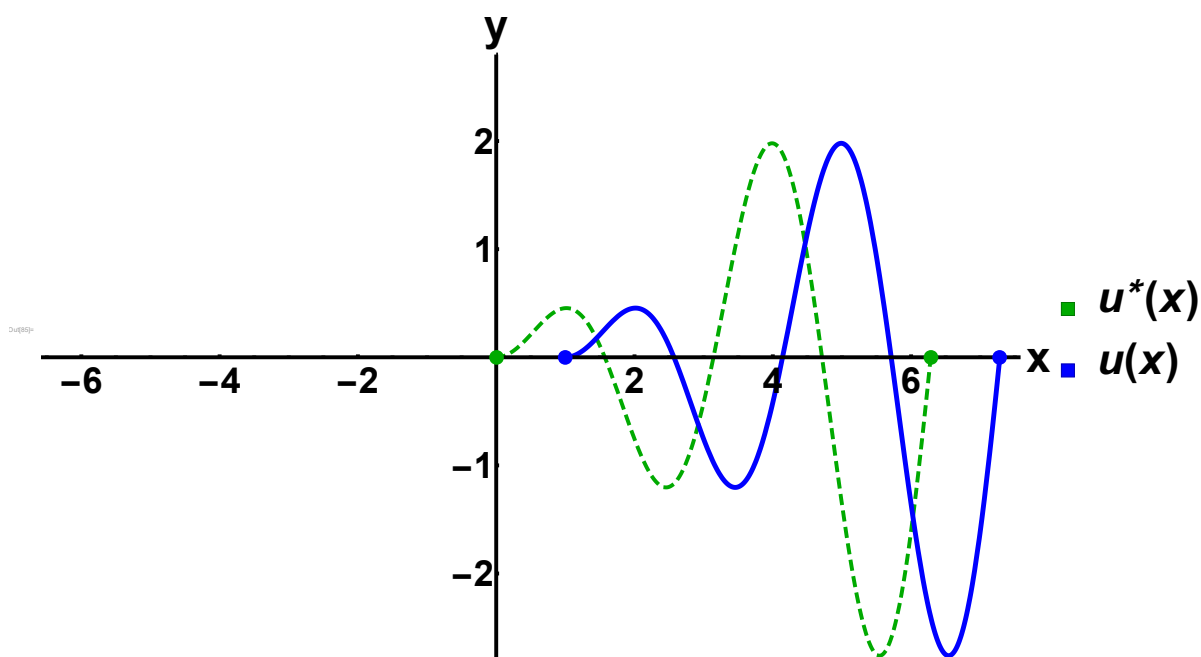
$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(I)}^2 &= \int_{-L}^L f^2(x) dx = \int_{-L}^0 f^2(x) dx + \int_0^L f^2(x) dx = \\ &= \int_{-L}^0 (-u^*)^2(-x) dx + \int_0^L (u^*)^2(x) dx. \end{aligned}$$

První integrál spočteme první substituční metodou

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 (-u^*)^2(-x) dx &= \{t = -x; dt = -dx\} = - \int_L^0 (-u^*)^2(t) dt = \\ &= \int_0^L (u^*)^2(t) dt = \int_0^L (u^*)^2(x) dx, \end{aligned}$$

a dostáváme

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \int_0^L (u^*)^2(x) dx + \int_0^L (u^*)^2(x) dx = 2\|u^*\|_{L^2((0,L))}^2 = 2\|u\|_{L^2((a,b))}^2.$$



Obrázek 1.2: Horní část: funkce  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (plná modrá čára), její posunutí do počátku definuje funkci  $u^* : [0, b - a] \rightarrow \mathbb{R}$ , (čárkovaná zelená čára). Dolní část: lichá funkce  $f : [a - b, b - a] \rightarrow \mathbb{R}$ , která vznikla rozšířením funkce  $u^*$ . Příklad pro funkci  $u(x) = \sin(2x - 2) / (2x - 2)$ .

Analogicky pro normu  $f'$  dostáváme

$$\begin{aligned}\|f'\|_{L^2(I)}^2 &= \int_{-L}^L (f')^2(x) dx = \int_{-L}^0 (f')^2(x) dx + \int_0^L (f')^2(x) dx = \\ &= \int_{-L}^0 (-u^{*'})^2(-x) dx + \int_0^L (u^{*'})^2(x) dx = \\ &= \int_0^L (u^{*'})^2(x) dx + \int_0^L (u^{*'})^2(x) dx = 2\|u'\|_{L^2((a,b))}^2.\end{aligned}$$

Z výše provedených výpočtů plyne, že stejně jako  $u$  má i funkce  $f$  spojitou první derivaci na svém definičním oboru a je nulová v krajních bodech. Původní úlohu nalezení konstanty  $c_1$  tak, aby platila nerovnost (1.2), ekvivalentně převedeme na úlohu nalezení konstanty  $c_1$ , pro kterou bude platit

$$\|f\|_{L^2(I)} \leq c_1 \|f'\|_{L^2(I)}.$$

Nyní provedeme výpočet  $L^2$  norem pro  $f$  a  $f'$  pomocí Fourierových řad těchto funkcí vzhledem k úplnému ortonormálnímu systému na intervalu  $I = (-L, L)$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{2\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}. \quad (1.4)$$

Pro Fourierovy koeficienty funkce  $f$  budou platit následující vztahy

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \\ f(x) \sim F(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{2L}} + \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).\end{aligned}$$

**Poznámka 4.** Symbol " $\sim$ " znamená to, že zatím jsme pouze přiřadili funkci  $f$  její Fourierovu řadu  $F$ , aniž bychom znali, zda tato řada konverguje k  $f$ . V našem případě tomu tak je, protože  $f \in C^1(I)$ . Navíc díky tomu, že  $f(-b^*) = f(b^*)$ , konverguje  $F$  k  $f$  dokonce stejnoměrně. Na druhou stranu pro funkci  $f'$  máme pouze tu vlastnost, že je spojitá na  $I$ . V dalším výpočtu si ukážeme, že stačí nám pro výpočet  $L^2$  norem funkcí  $f, f'$ , aby jejich Fourierovy řady konvergovaly v normě  $L^2$ .

Připomeneme si, že naše funkce  $f$  je lichá na  $I$ , a z toho plyne

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Fourierova řada příslušná funkci  $f$  se nám zjednoduší na tvar

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Je třeba si uvědomit, že dokonce každý částečný součet

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

splňuje homogenní podmínku v krajních bodech intervalu  $I$ . Plyne to z toho, že každý člen řady je nulový v bodech  $x = -L, x = L$ , a navíc i v bodě  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} \sin \frac{k\pi(-L)}{L} &= \sin(-k\pi) = 0, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ \sin \frac{k\pi L}{L} &= \sin(k\pi) = 0, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ \sin \frac{0k\pi}{L} &= \sin(0) = 0, & \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

proto

$$f_n(-L) = f_n(L) = f_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme si, že konverguje-li posloupnost funkcí  $f_n$  k  $f$  v normě  $L^2$  (což v našem případě platí, protože soustava (1.4) je úplná v  $L^2(I)$ ), můžeme  $L^2$  normu funkce  $f$  spočítat jako limitu  $L^2$  normem funkcí  $f_n$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(I)} = \|f\|_{L^2(I)} &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(I)}^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 \iff \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f_n^2(x) dx = \int_{-L}^L f^2 dx &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L (f_n^2(x) - f^2(x)) dx = 0, \end{aligned}$$

použitím Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (f_n^2(x) - f^2(x)) dx &= \int_{-L}^L (f_n(x) - f(x))(f_n(x) + f(x)) dx \leq \\ &\leq \left( \int_{-L}^L (f_n(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-L}^L (f_n(x) + f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

a proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L (f_n^2(x) - f^2(x)) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-L}^L (f_n(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-L}^L (f_n(x) + f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Výraz

$$\left( \int_{-L}^L (f_n(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

není nic jiného než

$$\|f_n - f\|_{L^2(I)}$$

a hodnota tohoto výrazu jde v limitě pro  $n \rightarrow \infty$  k nule. Navíc hodnota výrazu

$$\left( \int_{-L}^L (f_n(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

je konečné číslo a dostáváme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L (f_n^2(x) - f^2(x)) dx = 0,$$

a z toho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(I)} = \|f\|_{L^2(I)}.$$

□

A nyní můžeme  $L^2$  normu funkce  $f$  spočítat jako limitu  $L^2$  normou částečných součtů  $f_n$  příslušné Fourierovy řady  $F$ . Dostáváme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(I)}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(I)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left( \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left( \frac{1}{L} \sum_{i,j=1}^n b_i b_j \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} \right) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i,j=1}^n \left( b_i b_j \int_{-L}^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Dále platí, že funkce

$$\left\{ \sin \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{3\pi x}{L}, \dots \right\}$$

tvorí ortogonální posloupnost na intervalu  $I = (-L, L)$ . Tím se nám suma v poslední limitě zjednoduší a použitím vzorce pro výpočet druhé mocniny sínu dostáváme

$$\sum_{i,j=1}^n \left( b_i b_j \int_{-L}^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx \right) = \sum_{k=1}^n \left( b_k^2 \int_{-L}^L \sin^2 \frac{k\pi x}{L} dx \right) = L \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Výraz, který jsme dostali, můžeme dosadit do poslední limity ve výpočtu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i,j=1}^n \left( b_i b_j \int_{-L}^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{L} L \sum_{k=1}^n b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Výsledný vztah, který jsme dostali

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \tag{1.5}$$

je v literatuře označován jako Parsevalova rovnost.



**Poznámka 5.** Chceme-li  $L^2$  normu nějaké funkce vyjádřit podle Parsevalovy rovnosti jako sumu kvadrátů jejích Fourierových koeficientů, je důležité, aby soustava, podle které funkci rozvíjíme do Fourierovy řady, byla ortonormální (např. soustava (1.4)).

Dále budeme potřebovat spočítat  $L^2$  normu  $f'$ . Platí následující věta (viz [3])

**Věta 6.** Budiž  $f(x)$  spojitá na  $[-\pi, \pi]$  a necht' tam má derivaci, která je integrovatelná v  $(-\pi, \pi)$ . Pak je

$$f'(x) \sim \frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((kb_k + (-1)^k c) \cos kx - ka_k \sin kx),$$

kde

$$c = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)).$$

Tuto větu použijeme pro interval  $I = [-L, L]$ . Navíc v našem případě je  $c = 0$  a tato věta nám říká, že Fourierovu řadu funkce  $f$  můžeme derivovat člen po členu a  $L^2$  normu  $f'$  spočítat jako limitu norem částečných součtů zderivované Fourierovy řady  $F(x)$ . Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \|f'\|_{L^2(I)}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f'_n\|_{L^2(I)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left( \frac{\pi}{L\sqrt{L}} \sum_{k=1}^n kb_k \cos \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left( \frac{\pi^2}{L^3} \sum_{i,j=1}^n ijb_i b_j \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} \right) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{L^3} \sum_{i,j=1}^n \left( ijb_i b_j \int_{-L}^L \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi x}{L} dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{L^3} L \sum_{k=1}^n k^2 b_k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2. \end{aligned}$$

Připomeneme si, že platí

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2((a,b))}^2 &= \|u^*\|_{L^2((0,b^*))}^2 = \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(I)}^2, \\ \|u'\|_{L^2((a,b))}^2 &= \|u^{*'}\|_{L^2((0,b^*))}^2 = \frac{1}{2} \|f'\|_{L^2(I)}^2, \end{aligned}$$

a postupným dosazováním do původní nerovnosti (1.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2((a,b))} &\leq c_1 \|u'\|_{L^2((a,b))}, \\ \|u^*\|_{L^2((0,b^*))} &\leq c_1 \|u^{*'}\|_{L^2((0,b^*))}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L^2(I)} &\leq c_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \|f'\|_{L^2(I)}, \\ \|f\|_{L^2(I)} &\leq c_1 \|f'\|_{L^2(I)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 &\leq c_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2. \end{aligned}$$

Pokud je  $u$  identicky rovna nule na  $[a, b]$ , pak i  $f$  bude identicky rovna nule na  $I$  a poslední nerovnost platí triviálně. Předpokládáme-li, že funkce  $u$  není identicky rovna nule na intervalu  $[a, b]$ , potom ani  $f$  nebude nulová na  $I$ , a z toho plyne, že norma  $f'$  nebude nulová (jinak by  $f$  musela být konstantní na  $I$ , a tedy nulová, neboť musí být nulová v krajních bodech). Díky tomu  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 \neq 0$ , a můžeme psát

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2} \leq c_1^2 \frac{\pi^2}{L^2}. \quad (1.6)$$

Hledaná konstanta  $c_1$  musí danou nerovnost splňovat pro každou posloupnost  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Zřejmě platí  $b_k^2 \leq k^2 b_k^2$  pro všechna  $k \in \mathbb{N}$  a proto  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$ . Z toho plyne

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2} \leq 1.$$

Proto výše uvedená nerovnost (1.6) bude platit v případě, že

$$1 \leq c_1^2 \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Dostáváme se k závěru, že nejmenší možná hodnota pro konstantu  $c_1$  je

$$c_1 = \frac{L}{\pi}.$$

Přičemž rovnost

$$\|f\|_{L^2(I)} = c_1 \|f'\|_{L^2(I)} = \frac{L}{\pi} \|f'\|_{L^2(I)}$$

bude platit právě když

$$b_k = 0, \quad \forall k \geq 2, \quad b_1 \neq 0$$

a funkce  $f$  bude mít tvar

$$f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Nyní můžeme zformulovat následující větu

**Věta 7.** Wirtingerova nerovnost pro homogenní funkce jedné proměnné. Pro každou funkci  $u \in U_0^1((a, b))$  na intervalu  $[a, b]$  (viz (1.1)) je splněna nerovnost

$$\|u\|_{L^2((a, b))} \leq c_1 \|u'\|_{L^2((a, b))}$$

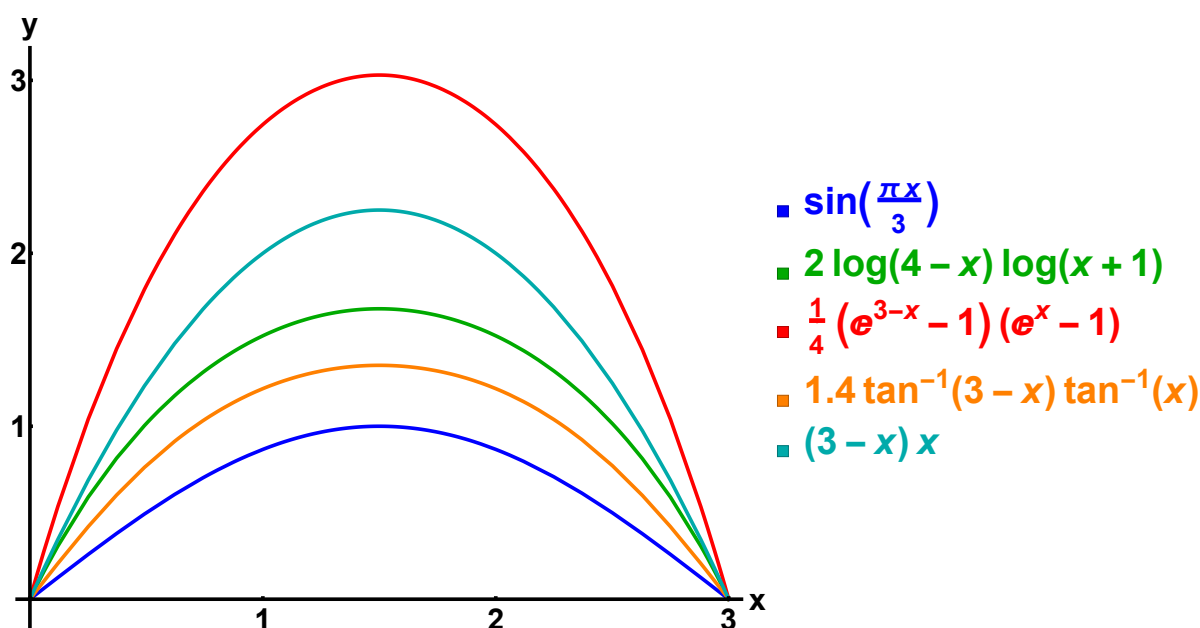
a rovnost platí, právě když

$$u(x) = k \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hodnota této konstanty je

$$c_1 = \frac{b-a}{\pi}.$$

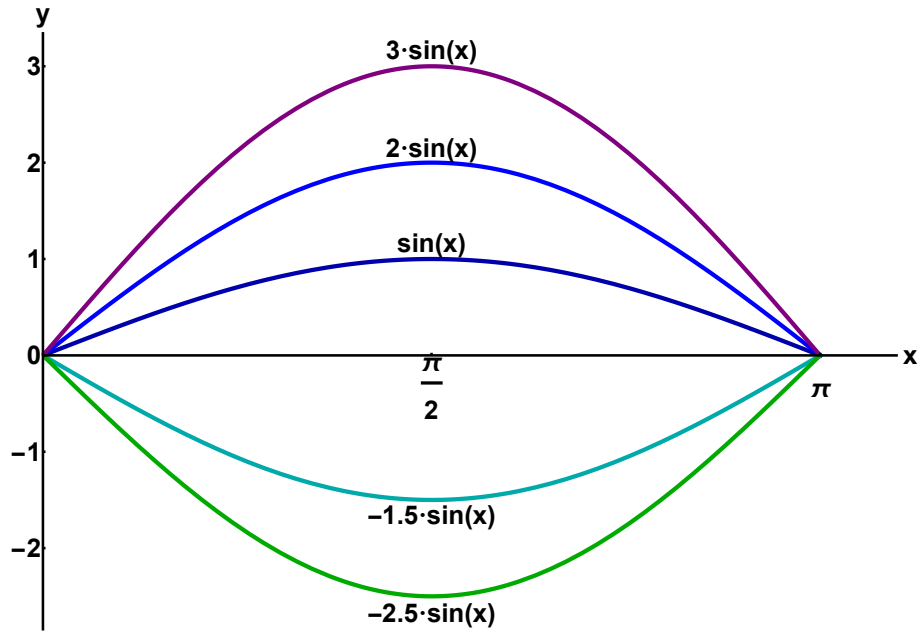
**Poznámka 6.** Extrémní funkce (pro které v (1.2) platí rovnost) (viz Obr. 1.4) představují sínové půlperiody násobené konstantou.



Obrázek 1.3: Příklady některých homogenních funkcí na intervalu  $[0, 3]$ , které jsou blízké extrémním funkcím (včetně extrémní funkce  $\sin(\frac{\pi x}{3})$ ). Hodnoty podílů norem pro každou funkci udává Tabulka 1.2. Funkcí  $\tan^{-1}$  se rozumí arkustangens.

funkce	podíl norem
$\sin(\frac{\pi x}{3})$	0.954930
$-x^2 + 3x$	0.948683
$\arctan(x) \arctan(3-x)$	0.946716
$(e^{3-x} - 1)(e^x - 1)$	0.936078
$\ln(4-x) \ln(x+1)$	0.932580

Tabulka 1.2: Příklady pro některé funkce blízké extrémním funkcím (viz Obr. 1.3) na intervalu  $[0, 3]$ , včetně extrémní funkce. Podílem norem rozumíme hodnotu výrazu  $\|u\|_{L^2((a,b))} / \|u'\|_{L^2((a,b))}$ .



Obrázek 1.4: Příklady extrémních funkcí na intervalu  $[0, \pi]$ .

**Poznámka 7.** Vynásobením funkce nenulovou konstantou se podíl norem nezmění. V grafu (Obr. 1.3) jsou některé funkce z Tabulky 1.2 pro přehlednost násobené konstantou.

**Důsledek 1.**

$$\forall u \in C_0^n((a, b)) \quad \|u\|_{L^2((a, b))} \leq \frac{(b-a)^k}{\pi^k} \left\| \frac{D^k u}{Dx^k} \right\|_{L^2((a, b))} \quad \forall k \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\forall u \in C_0^\infty((a, b)) \quad \|u\|_{L^2((a, b))} \leq \frac{(b-a)^k}{\pi^k} \left\| \frac{D^k u}{Dx^k} \right\|_{L^2((a, b))} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

kde  $C_0^n((a, b))$  a  $C_0^\infty((a, b))$  chápeme jako

$$C_0^n((a, b)) = \{u, u \in C^n((a, b)), u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = \dots = u^{(n)}(a) = u^{(n)}(b) = 0\},$$

$$C_0^\infty((a, b)) = \{u, u \in C^\infty((a, b)), u^{(n)}(a) = u^{(n)}(b) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

**Poznámka 8.** V dalším textu budeme vždy předpokládat, že  $u$  není identicky rovna nule na svém definičním oboru.

## 1.1.2 2D případ

Nyní se přesuneme do 2D a stejný problém budeme řešit pro obdélníkovou oblast

$$J = (a, b) \times (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad c < d.$$

**Definice 2.** *Definujme prostor funkcí*

$$U_0^2(J) := \{u, u \in C^1(\bar{J}), u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial J\}. \quad (1.7)$$

Opět budeme hledat konstantu (tentokrát označme  $c_2$ ) takovou, aby platila Poincarého nerovnost pro funkce dvou proměnných

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq c_2 \|\nabla u\|_{L^2(J)}, \quad \forall u \in U_0^2(J), \quad (1.8)$$

kde  $\nabla u$  je gradient funkce  $u$  a pro jeho  $L^2$  normu platí vztah

$$\|\nabla u\|_{L^2(J)} = \sqrt{\iint_J \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy}.$$

Opět jako v případě 1D provedeme několik úprav. Nejprve původní funkci  $u$  posuneme tak, aby se bod  $[a, c]$  přesunul do počátku. Položme

$$u^*(x, y) := u(x + a, y + c).$$

$D_u = [a, b] \times [c, d]$  se ztransformuje na  $D_{u^*} = [0, (b - a)] \times [0, d - c]$  a označme  $L = b - a$ ,  $M = d - c$ ,  $J^* = (0, L) \times (0, M)$ . Dále si rozšíříme funkci  $u^*$  na lichou funkci  $f$  na intervalu  $[-L, L] \times [-M, M]$  tak, aby platilo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= u^*(x, y), & (x, y) &\in (0, L) \times (0, M), \\ f(x, y) &= -u^*(-x, y), & (x, y) &\in (-L, 0) \times (0, M), \\ f(x, y) &= -u^*(x, -y), & (x, y) &\in (0, L) \times (-M, 0), \\ f(x, y) &= u^*(-x, -y), & (x, y) &\in (-L, 0) \times (-M, 0), \end{aligned}$$

a jinde je  $f$  nulová. Podobně jako u funkcí jedné proměnné se nechá ověřit, že takto definovaná funkce  $f$  je spojitá a má spojitě parciální derivace na  $[-L, L] \times [-M, M]$ . Např. pro  $f'_x$  na úsečce  $\{0\} \times (0, M)$  (tedy mezi prvním a druhým kvadrantem) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'_x(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(u^*)_x'(-x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\partial u^*}{\partial x}(-x, y) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (u^*)_x'(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'_x(x, y) \end{aligned}$$

pro každé  $y \in (0, M]$ . Limity zleva i zprava jsou konečné a rovnají se. Dále pro libovolné  $y_0 \in (0, M)$  rovnost

$$\lim_{y \rightarrow y_0^-} f'_x(0, y) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f'_x(0, y)$$

plyne triviálně z toho, že  $u^* \in C^1(\overline{J^*})$ , a díky tomu existuje také konečná  $\lim_{y \rightarrow M^-} f'_x(0, y)$ . Protože  $f$  je nulová na  $\{0\} \times (0, M)$  a tedy konstantní, je  $f'_y$  také nulová a tedy spojitá na této úsečce vzhledem k  $y$ . Spojitost vzhledem k  $x$  plyne triviálně z toho, že  $u^*$  je  $C^1$ . Stejný postup provedeme pro úsečky  $[-L, 0) \times \{0\}$ ,  $\{0\} \times [-M, 0)$ ,  $(0, L] \times \{0\}$  a limitním přechodem ověříme, že  $f$  má spojitě parciální derivace v počátku a má v něm nulový totální diferenciál.

Položme  $I = (-L, L) \times (-M, M)$ . Pro normy  $u$  a  $f$  bude platit

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(I)}^2 &= \iint_I f^2(x, y) dx dy = \int_0^M \int_0^L f^2(x, y) dx dy + \int_0^M \int_{-L}^0 f^2(x, y) dx dy + \\ &\quad + \int_{-M}^0 \int_0^L f^2(x, y) dx dy + \int_{-M}^0 \int_{-L}^0 f^2(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy + \int_0^M \int_{-L}^0 (-u^*)^2(-x, y) dx dy + \\ &\quad + \int_{-M}^0 \int_0^L (-u^*)^2(x, -y) dx dy + \int_{-M}^0 \int_{-L}^0 (u^*)^2(-x, -y) dx dy = \end{aligned}$$

analogicky jako v 1D použitím první substituční metody pro jednotlivé integrály

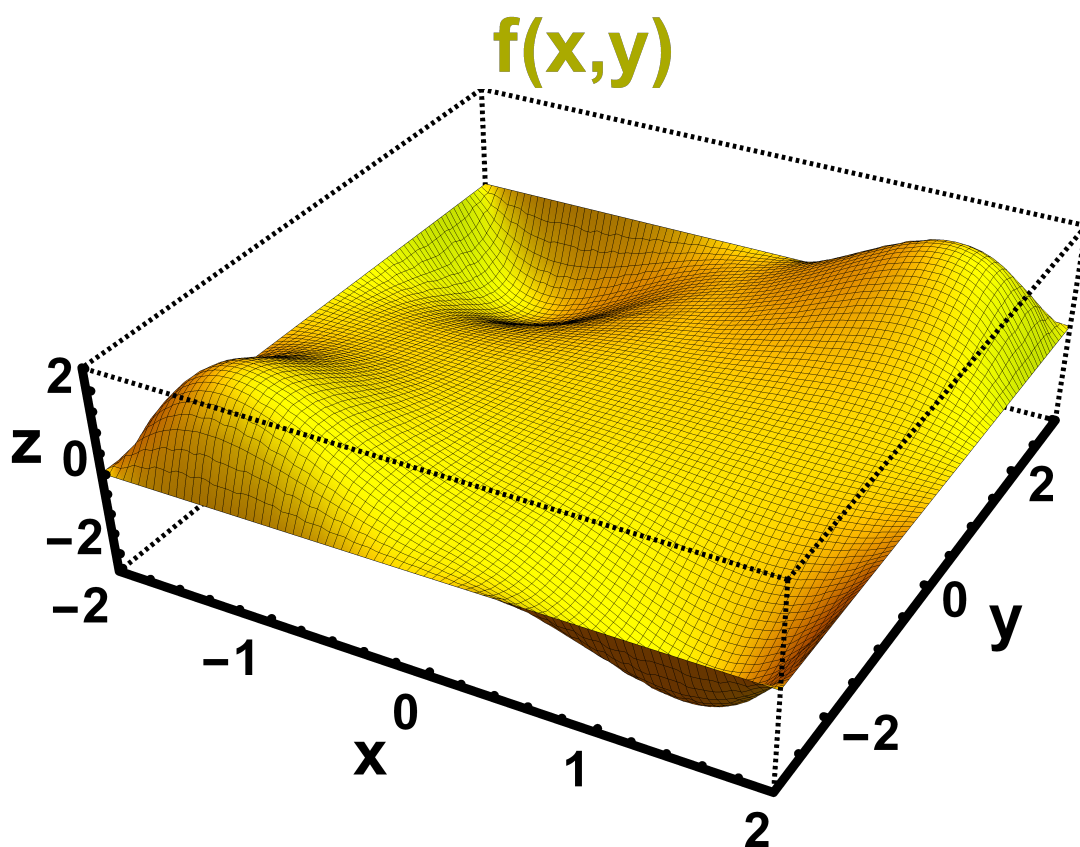
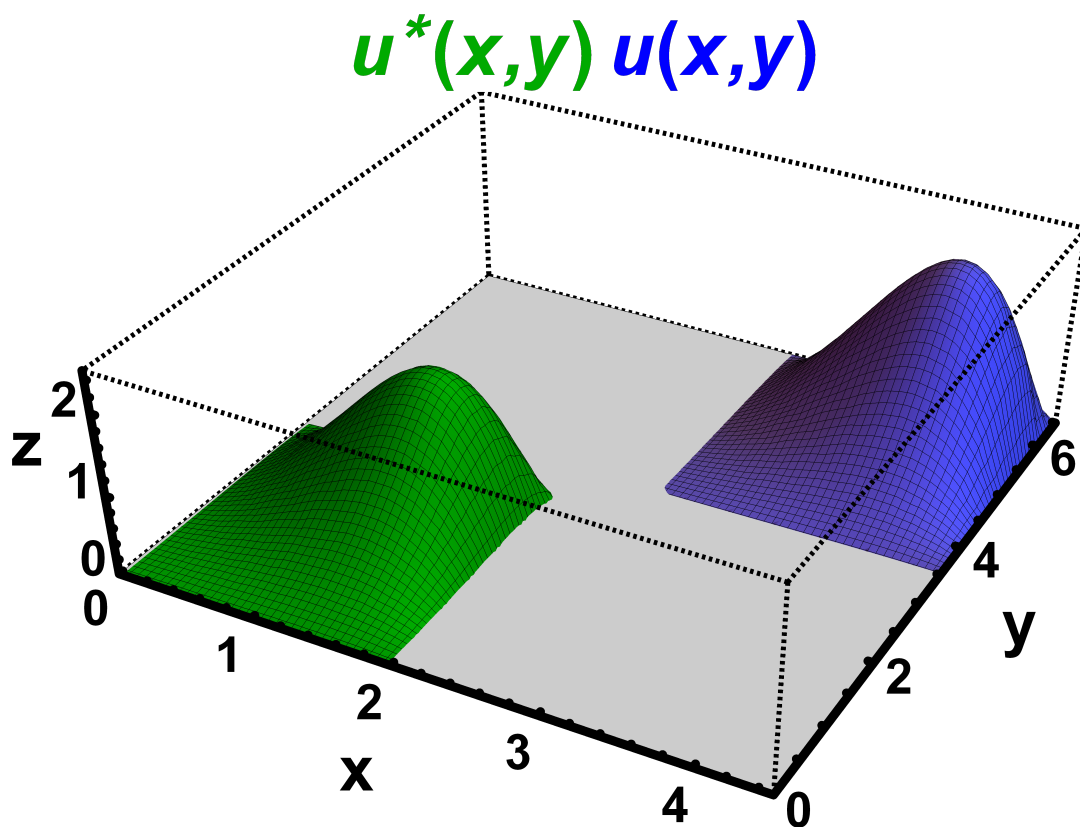
$$\begin{aligned} &= \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy + \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy + \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy + \\ &\quad + \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy = 4 \int_0^M \int_0^L (u^*)^2(x, y) dx dy = 4 \|u^*\|_{L^2(J^*)}^2 = 4 \|u\|_{L^2(J)}^2. \end{aligned}$$

Stejným způsobem dospějeme k analogickému vztahu pro normy derivací  $u$  a  $f$

$$\|f'\|_{L^2(I)}^2 = 4 \|u'\|_{L^2(J)}^2.$$

2D Fourierův rozvoj pro funkci  $f$  vypadá obecně následovně

$$\begin{aligned} f(x, y) \sim \sum_{i, j=0}^{\infty} \left( \alpha_{i, j} \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} + \beta_{i, j} \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} + \right. \\ \left. + \gamma_{i, j} \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} + \delta_{i, j} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \right), \end{aligned}$$



Obrázek 1.5: Horní část: původní funkce  $u : [2.5, 4.5] \times [3.5, 6.5] \rightarrow \mathbb{R}$  (modrá barva) a funkce  $u^* : [0, 2] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  (zelená barva) vzniklá posunutím funkce  $u$ . V dolní části je pak výsledná funkce  $f : [-2, 2] \times [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  vzniklá rozšířením funkce  $u^*$ . Příklad pro původní funkci  $u(x,y) = (2(x-2) - (x-2)^2)(3(y-3) - (y-3)^2)$ .

kde pro koeficienty  $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}, \delta_{i,j}$  platí vztahy

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= \frac{K}{LM} \iint_I f(x,y) \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} dx dy, \\ \beta_{i,j} &= \frac{K}{LM} \iint_I f(x,y) \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} dx dy, \\ \gamma_{i,j} &= \frac{K}{LM} \iint_I f(x,y) \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} dx dy, \\ \delta_{i,j} &= \frac{K}{LM} \iint_I f(x,y) \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} dx dy,\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$K = 1/4, \quad i = 0 \wedge j = 0,$$

$$K = 1/2, \quad (i = 0 \wedge j \neq 0) \vee (i \neq 0 \wedge j = 0),$$

$$K = 1, \quad i \neq 0 \wedge j \neq 0.$$

Vzhledem k tomu, jak jsme si definovali funkci  $f$ , dospějeme snadno výpočtem k tomu, že platí

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i,j} = \gamma_{i,j} = 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Plyne to z toho, že  $f$  je lichá na  $I$ , a proto

$$\int_{-L}^L f(x,y) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0, \quad \int_{-M}^M f(x,y) \cos \frac{k\pi y}{M} dy = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Nenulové tedy mohou být pouze koeficienty  $\delta_{i,j}$ , kde v příslušném dvojném integrálu jsou pouze síně. Položíme-li  $b_{i,j} = \delta_{i,j}$ , výsledná Fourierova řada funkce  $f$  se nám zjednoduší na tvar

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M}.$$

Pro parciální derivace  $f$  platí (použitím Věty 6 můžeme derivovat člen po členu, neboť  $f$  je v krajních bodech nulová, a příslušná Fourierova řada tedy konverguje stejnoměrně)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\pi}{L} \sum_{i,j=1}^{\infty} i b_{i,j} \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\pi}{M} \sum_{i,j=1}^{\infty} j b_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M}.\end{aligned}$$

A nyní můžeme spočítat normy  $f$  a  $f'$  jako limitu posloupnosti částečných součtů Fourierových řad těchto funkcí. Použitím stejných metod pro integrální počet a trigonometrických vztahů jako v 1D, postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(I)}^2 &= \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \right)^2 dx dy = \\ &= \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} b_{i,j} b_{k,l} \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{l\pi y}{M} \right) dx dy =\end{aligned}$$



prohození sumy a integrálu

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left( b_{i,j} b_{k,l} \iint_I \left( \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{l\pi y}{M} \right) dx dy \right) =$$

ortogonalita sínů na příslušném intervalu  $I$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left( b_{i,j}^2 \iint_I \left( \sin^2 \frac{i\pi x}{L} \sin^2 \frac{j\pi y}{M} \right) dx dy \right).$$

Na závěr použitím trigonometrického vzorce pro výpočet druhé mocniny sínu dostáváme

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2 LM = LM \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2.$$

Analogicky spočteme normu gradientu  $f$

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2(I)}^2 &= \iint_I \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \frac{\pi^2}{L^2} \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} i b_{i,j} \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \right)^2 dx dy + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{M^2} \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} j b_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{\pi^2}{L^2} \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} i k b_{i,j} b_{k,l} \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{l\pi y}{M} \right) dx dy + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{M^2} \iint_I \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} j l b_{i,j} b_{k,l} \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{l\pi y}{M} \right) dx dy = \end{aligned}$$

prohození sum a integrálů

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left( i k b_{i,j} b_{k,l} \iint_I \cos \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi y}{M} \cos \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{l\pi y}{M} dx dy \right) + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{M^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left( j l b_{i,j} b_{k,l} \iint_I \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{M} \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{l\pi y}{M} dx dy \right) = \end{aligned}$$

ortogonalita sínů a cosínů

$$= \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left( i^2 b_{i,j}^2 \iint_I \cos^2 \frac{i\pi x}{L} \sin^2 \frac{j\pi y}{M} dx dy \right) + \frac{\pi^2}{M^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left( j^2 b_{i,j}^2 \iint_I \sin^2 \frac{i\pi x}{L} \cos^2 \frac{j\pi y}{M} dx dy \right) =$$

použijeme vztah pro výpočet druhých mocnin sínu a cosínu

$$= \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (i^2 b_{i,j}^2 LM) + \frac{\pi^2}{M^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (j^2 b_{i,j}^2 LM) = \pi^2 \left( \frac{M}{L} \sum_{i,j=1}^{\infty} i^2 b_{i,j}^2 + \frac{L}{M} \sum_{i,j=1}^{\infty} j^2 b_{i,j}^2 \right).$$

Protože platí

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(J)}^2 &= \|u^*\|_{L^2(J^*)}^2 = \frac{1}{4}\|f\|_{L^2(I)}^2, \\ \|\nabla u\|_{L^2(J)}^2 &= \|\nabla u^*\|_{L^2(J^*)}^2 = \frac{1}{4}\|\nabla f\|_{L^2(I)}^2,\end{aligned}$$

můžeme stejně jako v 1D nerovnost

$$\iint_I f^2(x,y) dx dy \leq c_2^2 \iint_I \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

prevést postupnými úpravami na tvar

$$LM \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2 \leq c_2^2 \pi^2 \left( \frac{M}{L} \sum_{i,j=1}^{\infty} i^2 b_{i,j}^2 + \frac{L}{M} \sum_{i,j=1}^{\infty} j^2 b_{i,j}^2 \right).$$

Protože předpokládáme, že  $u$  není identicky rovna nule na  $J$ , plyne z toho, že i  $f$  není identicky rovna nule na  $I$ , všechny sumy jsou tedy kladné a lze poslední nerovnost upravit na tvar

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2}{\frac{1}{L^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} i^2 b_{i,j}^2 + \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} j^2 b_{i,j}^2} \leq c_2^2 \pi^2. \quad (1.10)$$

Zajímá nás největší možná hodnota zlomku na levé straně nerovnosti (1.10). Pro přehlednost výpočtu položme následující substituce

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2, & B &= \sum_{i,j=1}^{\infty} i^2 b_{i,j}^2, & C &= \sum_{i,j=1}^{\infty} j^2 b_{i,j}^2, \\ x &= B - A, & y &= C - A, & k &= \frac{1}{L^2}, & l &= \frac{1}{M^2}.\end{aligned} \quad (1.11)$$

Nerovnost (1.10) se zjednoduší na tvar

$$\frac{A}{k(A+x) + l(A+y)} \leq c_2^2 \pi^2. \quad (1.12)$$

Zřejmě bude platit, že

$$A, B, C > 0, \quad x, y \geq 0, \quad k, l > 0. \quad (1.13)$$

Čitatel i jmenovatel zlomku na levé straně (1.12) jsou proto kladné a plyne z toho

$$\frac{A}{k(A+x) + l(A+y)} \leq \frac{A}{kA + lA} = \frac{1}{k+l} = \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2}.$$

Zlomek v (1.12) tedy nabývá maximální hodnoty v případě, kdy  $x = 0 \wedge y = 0$ , což znamená, že  $A = B \wedge A = C$ , a tedy

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} i^2 b_{i,j}^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} j^2 b_{i,j}^2. \quad (1.14)$$

Jelikož platí

$$b_{i,j}^2 \neq 0 \implies b_{i,j}^2 < i^2 b_{i,j}^2 \wedge b_{i,j}^2 < j^2 b_{i,j}^2, \quad \forall i, j \geq 2,$$

plyne z toho, že rovnost (1.14), a zároveň největší hodnota zlomku v (1.12) nastává právě tehdy, když

$$b_{1,1} \neq 0, \quad b_{i,j} = 0, \quad \forall (i, j) \neq (1, 1).$$

Po dosazení do (1.12) dostáváme

$$\frac{b_{1,1}}{\frac{b_{1,1}}{L^2} + \frac{b_{1,1}}{M^2}} = \frac{1}{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}} = \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2} = c_2^2 \pi^2,$$

a z toho pro konstantu  $c_2$  dostáváme

$$c_2^2 = \frac{L^2 M^2}{\pi^2 (L^2 + M^2)}.$$

Nyní můžeme zformulovat následující větu

**Věta 8.** Poincarého nerovnost pro homogenní funkce dvou proměnných. Pro každou funkci  $u \in U_0^2(J)$ ,  $J = (a, b) \times (c, d)$  (viz (1.7)) je splněna nerovnost

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq c_2 \|\nabla u\|_{L^2(J)}$$

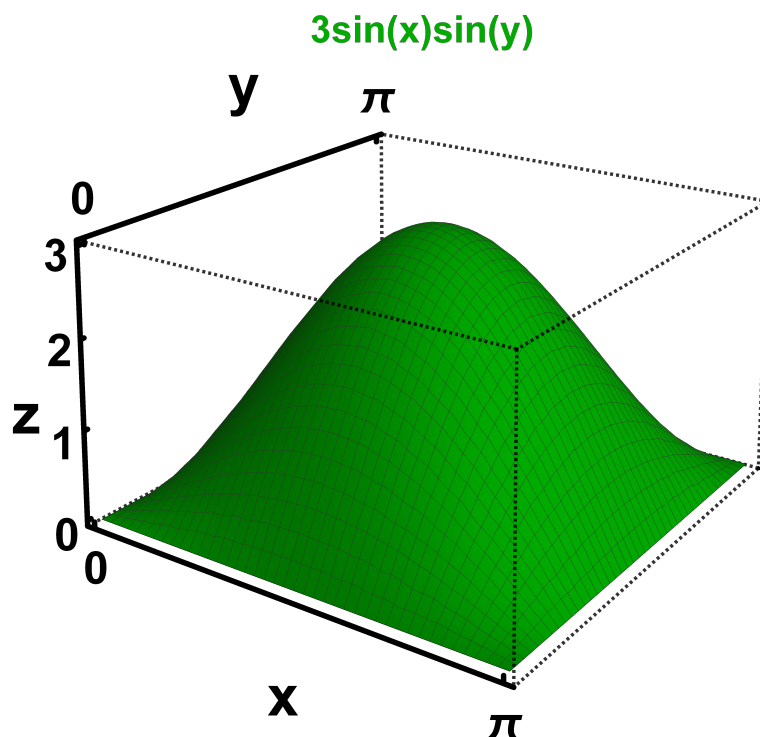
a rovnost platí, právě když

$$u(x, y) = k \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a} \sin \frac{\pi(y-c)}{d-c}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hodnota konstanty je

$$c_2 = \frac{(b-a)(d-c)}{\pi \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}}.$$

**Poznámka 9.** Extrémní funkce představují sínové půlperiody vzhledem k proměnným  $x$  a  $y$  (viz Obr. 1.6).



Obrázek 1.6: Příklad extrémní funkce na 2D intervalu  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ .

### 1.1.3 3D případ

**Definice 3.** Necht'  $J = (a, b) \times (c, d) \times (e, f)$ ,  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $c < d$ ,  $e < f$ .

Definujeme prostor funkcí

$$U_0^3(J) := \{u, u \in C^1(\bar{J}), u(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \partial J\} \quad (1.15)$$

Vzhledem k náročnosti výpočtu pro vyšší dimenze, stručně si ukážeme situaci ve 3D, jelikož postup je naprosto analogický jako pro funkce v 1D a 2D. Mějme funkci  $u \in U_0^3$  na 3D intervalu  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ . Norma gradientu  $u$  ve 3D bude mít tvar

$$\|\nabla u\|_{L^2(J)} = \sqrt{\iiint_J \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right) dx dy dz}.$$

Zajímá nás, pro jakou hodnotu  $c_3$  bude platit

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq c_3 \|\nabla u\|_{L^2(J)}, \quad \forall u \in U_0^3(J). \quad (1.16)$$

Funkci  $u$  posuneme tak, aby se bod  $[a, c, e]$  přesunul do počátku souřadnic, dále si novou funkci  $u^*$  dodefinujeme na příslušném 3D intervalu

$[-K, K] \times [-L, L] \times [-M, M]$ ,  $K = b - a$ ,  $L = d - c$ ,  $M = f - e$  (jeho vnitřek označme  $I$ )

tak, aby pro novou funkci  $f$  platilo

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= u^*(x,y,z), \quad (x,y,z) \in (0,K) \times (0,L) \times (0,M), \\
f(x,y,z) &= -u^*(-x,y,z), \quad (x,y,z) \in (-K,0) \times (0,L) \times (0,M), \\
f(x,y,z) &= -u^*(x,-y,z), \quad (x,y,z) \in (0,K) \times (-L,0) \times (0,M), \\
f(x,y,z) &= -u^*(x,y,-z), \quad (x,y,z) \in (0,K) \times (0,L) \times (-M,0), \\
f(x,y,z) &= u^*(-x,-y,z), \quad (x,y,z) \in (-K,0) \times (-L,0) \times (0,M), \\
f(x,y,z) &= u^*(-x,y,-z), \quad (x,y,z) \in (-K,0) \times (0,L) \times (-M,0), \\
f(x,y,z) &= u^*(x,-y,-z), \quad (x,y,z) \in (0,K) \times (-L,0) \times (-M,0), \\
f(x,y,z) &= -u^*(-x,-y,-z), \quad (x,y,z) \in (-K,0) \times (-L,0) \times (-M,0),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

a jinde je  $f$  nulová. Platí analogie jako pro 1D, 2D (spojitost  $f, f'_x, f'_y, f'_z$  na  $\bar{I}$ ), tedy tato definice je korektní. Pro normy funkcí  $u, f$  a jejich gradientů budou platit vztahy

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(I)}^2 &= 8\|u\|_{L^2(J)}^2, \\
\|\nabla f\|_{L^2(I)}^2 &= 8\|\nabla u\|_{L^2(J)}^2.
\end{aligned}$$

Obecný Fourierův rozvoj pro 3D funkce je poněkud komplikovaný, řada má 8 členů, nicméně vzhledem k tomu, jak je definována funkce  $f$  (viz (1.17)), příslušná Fourierova řada se zjednoduší na tvar

$$f(x,y,z) \sim \sum_{i,j,k=1}^{\infty} b_{i,j,k} \sin \frac{i\pi x}{K} \sin \frac{j\pi y}{L} \sin \frac{k\pi z}{M}.$$

Pro parciální derivace  $f$  platí vztahy (opět podle Věty 6)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\pi}{K} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} (i b_{i,j,k} \cos \frac{i\pi x}{K} \sin \frac{j\pi y}{L} \sin \frac{k\pi z}{M}), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\pi}{L} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} (j b_{i,j,k} \sin \frac{i\pi x}{K} \cos \frac{j\pi y}{L} \sin \frac{k\pi z}{M}), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\pi}{M} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} (k b_{i,j,k} \sin \frac{i\pi x}{K} \sin \frac{j\pi y}{L} \cos \frac{k\pi z}{M}).
\end{aligned}$$

Dosazením za  $f, f'$  příslušných Fourierových řad a použitím stejných metod jako v 1D, 2D postupnými úpravami dospějeme ke vztahům

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(I)}^2 &= KLM \sum_{i,j,k=1}^{\infty} b_{i,j,k}^2, \\
\|f'\|_{L^2(I)}^2 &= \pi^2 \left( \frac{LM}{K} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} i^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{KM}{L} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} j^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{KL}{M} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} k^2 b_{i,j,k}^2 \right).
\end{aligned}$$

Původní nerovnost se převede na tvar

$$KLM \sum_{i,j,k=1}^{\infty} b_{i,j,k}^2 \leq c_3^2 \pi^2 \left( \frac{LM}{K} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} i^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{KM}{L} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} j^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{KL}{M} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} k^2 b_{i,j,k}^2 \right).$$

Všechny sumy jsou kladné, lze tedy psát

$$\frac{\sum_{i,j,k=1}^{\infty} b_{i,j,k}^2}{\frac{1}{K^2} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} i^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{1}{L^2} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} j^2 b_{i,j,k}^2 + \frac{1}{M^2} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} k^2 b_{i,j,k}^2} \leq c_3^2 \pi^2.$$

Hodnota zlomku bude největší právě tehdy, když bude platit

$$b_{i,j,k} = 0, \quad (i,j,k) \neq (1,1,1), \quad b_{1,1,1} \neq 0.$$

Výraz na levé straně se zjednoduší a pro hledanou konstantu  $c$  dostáváme vztah

$$\frac{1}{\frac{1}{K^2} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2}} = c_3^2 \pi^2,$$

a z toho po úpravách a převedením na společného jmenovatele dostáváme

$$c_3^2 = \frac{K^2 L^2 M^2}{\pi^2 (K^2 L^2 + K^2 M^2 + L^2 M^2)}.$$

**Věta 9.** Poincarého nerovnost pro homogenní funkce tří proměnných. Pro každou funkci

$u \in U_0^3(J)$ ,  $J = (a,b) \times (c,d) \times (e,f)$  (viz (1.15)) je splněna nerovnost

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq c_3 \|\nabla u\|_{L^2(J)},$$

a rovnost platí, právě když

$$u(x,y,z) = k \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a} \sin \frac{\pi(y-c)}{d-c} \sin \frac{\pi(z-e)}{f-e}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hodnota konstanty je

$$c_3 = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)}{\pi \sqrt{(b-a)^2(d-c)^2 + (b-a)^2(f-e)^2 + (d-c)^2(f-e)^2}}.$$

### 1.1.4 Vícedimenzionální případy

Výpočet pro dimenze větší jak 3 provádět nebudeme. Dá se ale ukázat, že i ve vyšších dimenzích platí analogie vztahů odvozených v předchozích podkapitolách. Definujeme-li pro obecnou dimenzi  $n \in \mathbb{N}$  příslušný prostor funkcí na nějakém intervalu  $J$  (v dimenzi  $n$ )

$$U_0^n(J) := \{u, u \in C^1(\bar{J}), u(x) = 0, \quad \forall (x) \in \partial J\},$$

$$J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

můžeme Poincarého větu pro obecnou dimenzi  $n \in \mathbb{N}$  zformulovat následovně

**Věta 10.** Poincarého nerovnost pro homogenní funkce  $n$  proměnných. Pro každou funkci  $u \in U_0^n(J)$ , kde  $J$  je interval v  $\mathbb{R}^n$ , je splněna nerovnost

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq c_n \|\nabla u\|_{L^2(J)}$$

a rovnost platí, právě když

$$u(x) = k \prod_{i=1}^n \sin \frac{\pi(x_i - a_i)}{b_i - a_i}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Hodnota konstanty je

$$c_n = \frac{1}{\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(b_i - a_i)^2}}}.$$

V dimenzi 1 symbol  $\nabla u$  má význam  $u'$ .

**Důsledek 2.** Pro  $n \in \mathbb{N}$  položme

$$U_K^n(\Omega) = \{u, u \in C^1(\overline{\Omega}), u(x) = K, \quad \forall x \in \partial\Omega, K \in \mathbb{R}\},$$

kde  $\Omega$  je interval v dimenzi  $n$ . Potom platí

$$\|u - K\|_{L^2(\Omega)} \leq c_n \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in U_K^n(\Omega),$$

kde  $c_n$  je příslušná konstanta pro homogenní funkce  $n$  proměnných.

## 1.2 Funkce s nulovým průměrem

### 1.2.1 1D případ

**Definice 4.** Pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  definujme prostor funkcí

$$V_0^1((a, b)) := \{u, u \in C^1([a, b]), \int_a^b u(x) dx = 0\}. \quad (1.18)$$

Funkcím, které splňují podmínku

$$\int_a^b u(x) dx = 0, \quad (1.19)$$

budeme v dalším textu říkat "funkce s nulovým průměrem". Ve více dimenzích potom vztah (1.19) chápeme jako integrál přes příslušný vícedimenzionální interval (nebo obecně oblast).

Uvažujme nyní podobnou situaci jako v kapitole 1.1. Mějme funkci  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $u \in V_0^1((a, b))$ . Opět budeme chtít najít takovou konstantu (označme  $c_1$ , stejně jako v podkapitole 1.1.1), pro kterou bude splněna Wirtingerova nerovnost v 1D pro funkce s nulovým průměrem

$$\|u\|_{L^2((a,b))} \leq c_1 \|u'\|_{L^2((a,b))}, \quad \forall u \in V_0^1((a,b)). \quad (1.20)$$

Výpočet opět provedeme dosazením za funkce  $u$ ,  $u'$  příslušných Fourierových řad. Nicméně vzhledem k tomu, že obecně nepředpokládáme rovnost funkčních hodnot  $u(x)$  v krajních bodech intervalu  $[a, b]$ , již nebude výpočet normy derivace  $u$  tak jednoduchý jako pro homogenní funkce a musíme si funkci  $u$  vhodně posunout a zvolit si na příslušném intervalu vhodnou úplnou ortogonální bázi.

Použitím standardního postupu bychom mohli původní funkci  $u$  posunout např. tak, aby se bod  $\frac{a+b}{2}$  přesunul do nuly. Označíme-li  $L = \frac{b-a}{2}$ , potom výsledná funkce  $f$  vzniklá posunutím původní funkce  $u$  bude definována na intervalu  $[-L, L]$ . Výpočet  $\|f'\|_{L^2((-L,L))}$  bychom provedli rozvinutím funkce  $f$  do Fourierové řady podle ortog. systému

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$$

a přímou aplikací Věty 6 bychom dospěli k závěru

$$\|f'\|_{L^2((-L,L))}^2 = \frac{L(a'_0)^2}{2} + L \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\pi}{L} k b_k + a'_0 (-1)^k \right)^2 + \frac{\pi^2}{L^2} k^2 a_k^2 \right), \quad (1.21)$$

kde

$$a'_0 = f(L) - f(-L).$$

**Poznámka 10.** *Jak se dospěje ke vztahu (1.21) si ukážeme v dalším textu v analogickém postupu při volbě jiné ortog. báze.*

Pro nalezení konstanty bychom museli zjistit, kdy nabývá maximální hodnoty zlomek

$$\frac{L \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}{\frac{L(a'_0)^2}{2} + L \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{\pi}{L} k b_k + a'_0 (-1)^k \right)^2 + \frac{\pi^2}{L^2} k^2 a_k^2 \right)},$$

což je dost obtížné, navíc protože  $a'_0$  může být libovolné. Tento problém vyřešíme tak, že si zvolíme jinou funkci  $f$  jakožto posunutí původní funkce  $u$  a jinou ortogonální bázi. Položme tentokrát  $f(x) = u(x+a)$ ,  $x \in [0, b-a]$  a označme  $L = b-a$ ,  $I = (0, L)$ . Na intervalu  $I$  zvolme úplnou ortogonální bázi

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \cos \frac{3\pi x}{L}, \dots \right\}. \quad (1.22)$$



**Poznámka 11.** Úplnost báze (1.22) se dá ověřit např. podle následující Věty (viz [3]). Ovšem pro její ověření museli bychom si vzít ortonormální verzi báze (1.22).

**Věta 11.** Ortonormální soustava funkcí

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$$

je úplná v  $L^2((a, b))$  právě tehdy, když platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \left( \int_a^s \varphi_i(x) dx \right)^2 ds = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Z podmínky 1.19 plyne, že

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = 0.$$

Fourierův rozvoj funkce  $f$  proto bude mít tvar

$$f(x) \sim F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L}.$$

Uvažujme nyní Fourierův rozvoj funkce  $f'$

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos \frac{k\pi x}{L},$$

$$f'(x) - \frac{a'_0}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos \frac{k\pi x}{L}. \quad (1.23)$$

Budeme potřebovat následující Větu (viz [3])

**Věta 12.** Necht'  $f(t)$  je absolutně integrovatelná funkce na nějakém intervalu  $(a, b)$ . Fourierovu řadu funkce  $\int_0^x f(t) dt$  můžeme dostat z Fourierovy řady funkce  $f(t)$  integrací člen po členu, tj. platí

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

Podle této věty můžeme Fourierovu řadu funkce

$$\int_0^x (f'(t) - \frac{a'_0}{2}) dt = f(x) - \frac{a'_0 x}{2} - f(0) =: g(x)$$

získat integrováním řady na pravé straně (1.23), neboli naopak, lze řadu ve (1.23) získat formálním zderivováním Fourierovy řady funkce  $g$ . Použitím rozvoje

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}$$

dostáváme

$$f(x) - \frac{a'_0 x}{2} - f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} - \frac{La'_0}{4} - f(0) + \frac{2La'_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

Zderivováním obou stran podle  $x$  (řady vpravo derivujeme člen po členu) dostáváme

$$f'(x) - \frac{a'_0}{2} = -\frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin \frac{k\pi x}{L} - \frac{2a'_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

Převědeme  $\frac{a'_0}{2}$  na pravou stranu a první řadu rozdělíme podle sudosti/lichosti  $k$

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} - \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_{2k} \sin \frac{2k\pi x}{L} - \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) a_{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L} - \frac{2a'_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

A nyní můžeme spočítat normu  $f'$  dosazením výrazu na pravé straně. Umocněním tohoto výrazu dostaneme 10 členů, které následně budeme muset zintegrovat v mezích od 0 do  $L$ .

Díky ortogonalitě funkcí  $\{\sin \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{3\pi x}{L}, \dots\}$  na intervalu  $(0, L)$  a na základě vztahů

$$\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{2L}{\pi k}, & k \text{ je liché} \\ 0, & k \text{ je sudé} \end{cases},$$

$$\int_0^L \sin^2 \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{L}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \|f'\|_{L^2(I)}^2 &= \frac{L(a'_0)^2}{4} + \frac{\pi^2 L}{L^2} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 a_{2k}^2 + \frac{\pi^2 L}{L^2} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 a_{2k-1}^2 + \\ &+ \frac{4(a'_0)^2 L}{\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{a'_0 \pi 2L}{L \pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} - \frac{2(a'_0)^2 2L}{\pi \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{4a'_0 L}{L} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \end{aligned}$$

po zjednodušení

$$= \frac{L(a'_0)^2}{4} + \frac{\pi^2}{2L} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 - \frac{2(a'_0)^2 L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} =$$

použitím  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$= \frac{L(a'_0)^2}{4} + \frac{\pi^2}{2L} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 - \frac{L(a'_0)^2}{4} = \frac{\pi^2}{2L} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2.$$

Parsevalova rovnost pro normu  $f$  bude mít tvar

$$\|f\|_{L^2(I)}^2 = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Hledáme tedy maximální hodnotu podílu

$$\frac{\frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}{\frac{\pi^2}{2L} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2} = \frac{L^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}{\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2} \quad (1.24)$$

Analogicky jako pro homogenní funkce jedné proměnné bude zlomek v poslední rovnosti nabývat maximální hodnoty jenom tehdy, když bude platit

$$a_k = 0, \quad \forall k \geq 2, \quad a_1 \neq 0,$$

a v tomto případě hodnota zlomku bude  $L^2/\pi^2$ . Po odmocnění dostáváme pro hodnotu konstanty vztah

$$c_1 = \frac{L}{\pi}.$$

Protože funkce  $f$ , se kterou jsme pracovali, vznikla posunutím původní funkce  $u$ , bude i pro tuto funkci  $u$  hodnota konstanty stejná. Vzhledem k tomu, že jediným nenulovým koeficientem, aby zlomek (1.24) nabýval maxima, je  $a_1$ , dostáváme přímo na základě (1.22) příslušnou extrémní funkci a můžeme zformulovat následující větu.

**Věta 13.** Wirtingerova nerovnost v 1D pro funkce s nulovým průměrem. Pro všechny funkce  $u \in V_0^1((a,b))$  na intervalu  $[a,b]$  (viz (1.18)) platí nerovnost

$$\|u\|_{L^2((a,b))} \leq c_1 \|u'\|_{L^2((a,b))}$$

a rovnost nastává, právě když

$$u(x) = a_1 \cos \frac{\pi(x-b)}{b-a} = a_1 \sin \frac{\pi(2x-a-b)}{2(b-a)}, \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

Hodnota konstanty je

$$c_1 = \frac{b-a}{\pi}.$$

**Důsledek 3.** Platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  položme

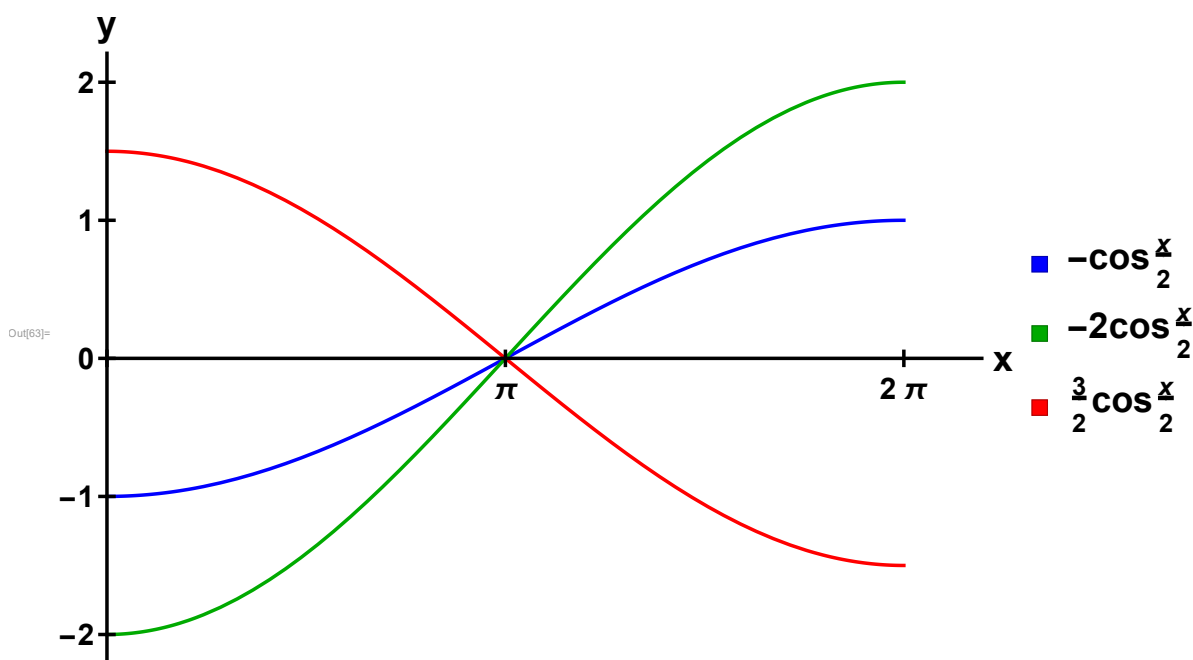
$$CV_0^n((a,b)) := \{u, u \in C^n([a,b]), \int_a^b \frac{D^k u}{Dx^k} dx = 0 \quad \forall k < n\},$$

$$CV_0^\infty((a,b)) := \{u, u \in C^\infty([a,b]), \int_a^b \frac{D^k u}{Dx^k} dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\},$$

$$\text{potom} \quad \|u\|_{L^2((a,b))} \leq \frac{(b-a)^k}{\pi^k} \left\| \frac{D^k u}{Dx^k} \right\|_{L^2((a,b))} \quad \forall k \leq n, \quad \forall u \in CV_0^n((a,b)),$$

$$\text{a také} \quad \|u\|_{L^2((a,b))} \leq \frac{(b-a)^k}{\pi^k} \left\| \frac{D^k u}{Dx^k} \right\|_{L^2((a,b))} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in CV_0^\infty((a,b)).$$

**Poznámka 12.** Hodnoty konstant pro homogenní funkce a funkce s nulovým průměrem v 1D na stejném intervalu  $[a,b]$  jsou stejné.



Obrázek 1.7: Příklady extrémních funkcí na intervalu  $[0, 2\pi]$ .

## 1.2.2 Vícedimenzionální případy

Vzhledem k náročnosti derivování Fourierových řad, a následně výpočtu  $L^2$  norem funkcí dvou a více proměnných, explicitní výpočet konstant pro tyto funkce provádět nebudeme. Dá se ale ukázat, a k tomu se vrátíme při numerickém výpočtu konstant ve třetí kapitole, a také v části druhé kapitoly, která je věnována souvislostem s Laplaceovým operátorem, že platí určitá analogie jako v 1D. Uvažujme  $n \in \mathbb{N}$  a otevřený interval  $J = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$  v  $\mathbb{R}^n$ . Definujme

$$V_0^n(J) := \{u, u \in C^1(\bar{J}), \int_J u(x) dx = 0\},$$

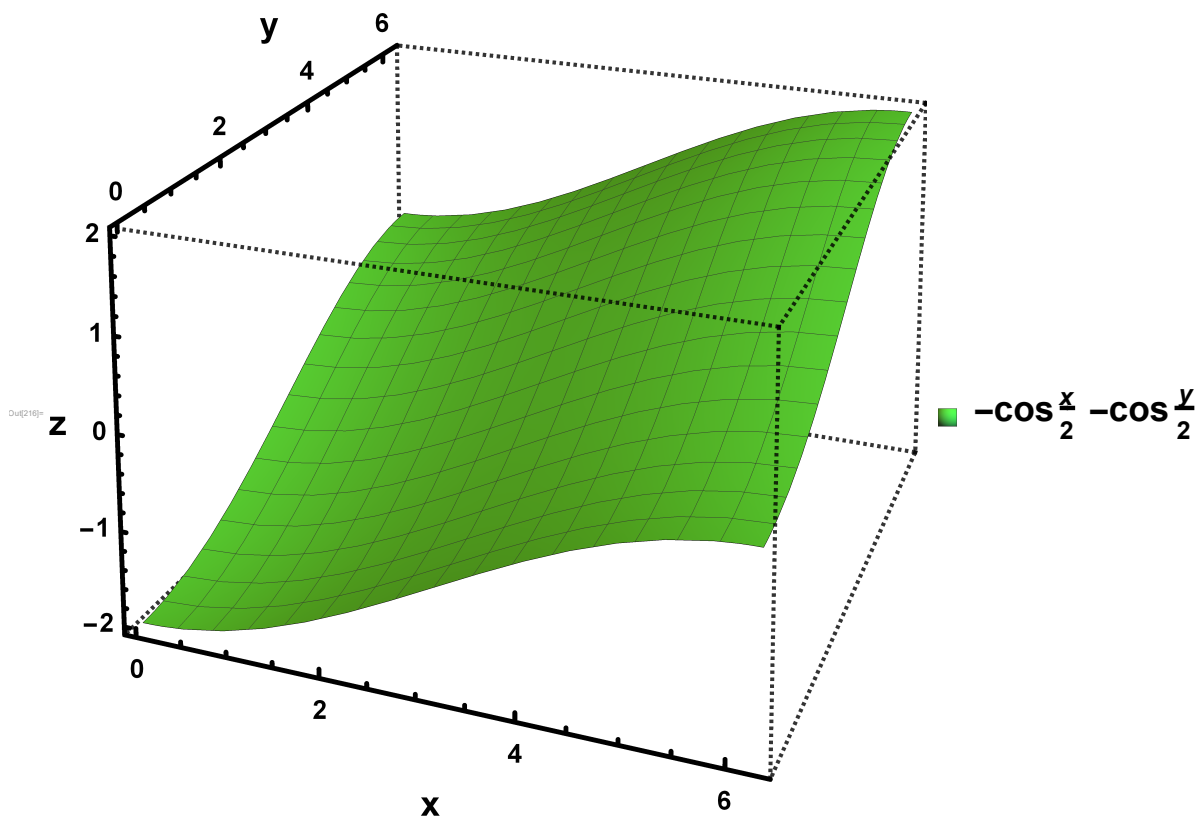
kde  $x$  chápeme jako  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Potom pro hodnotu konstanty  $c_n$  bude platit

$$c_n = \frac{d}{\pi},$$

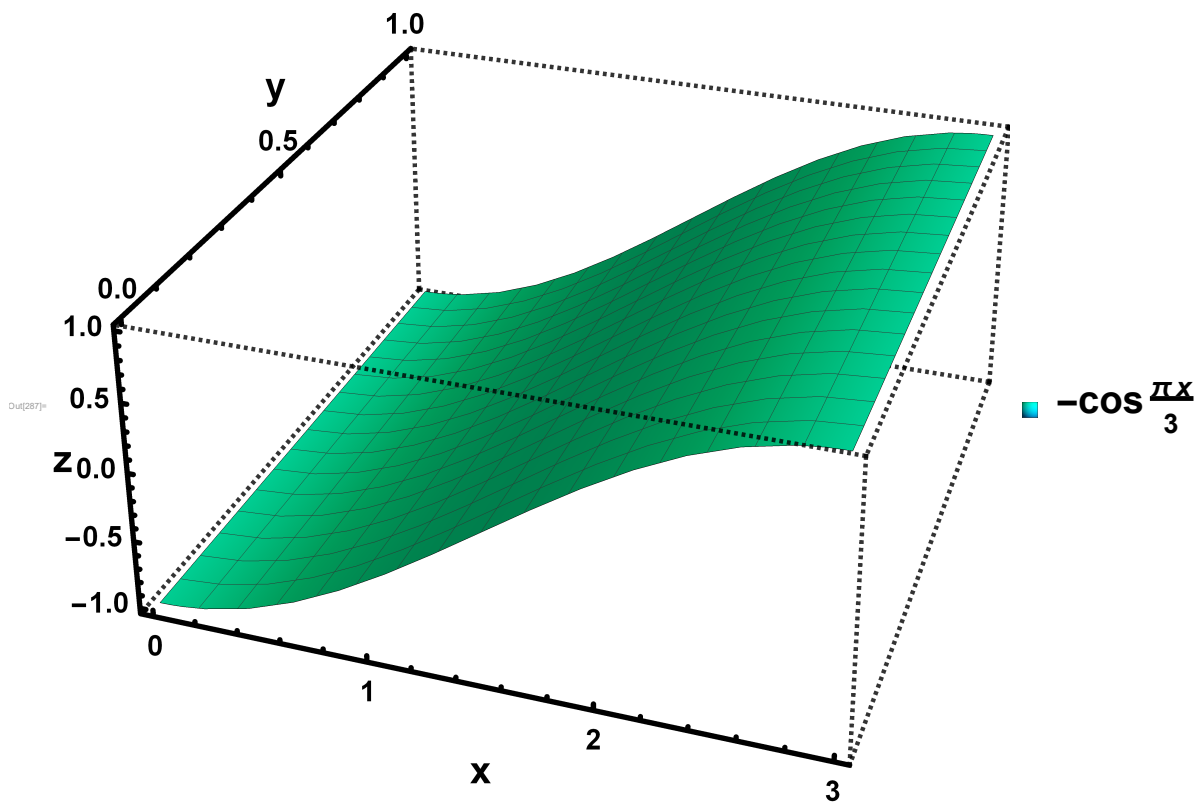
kde

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i).$$

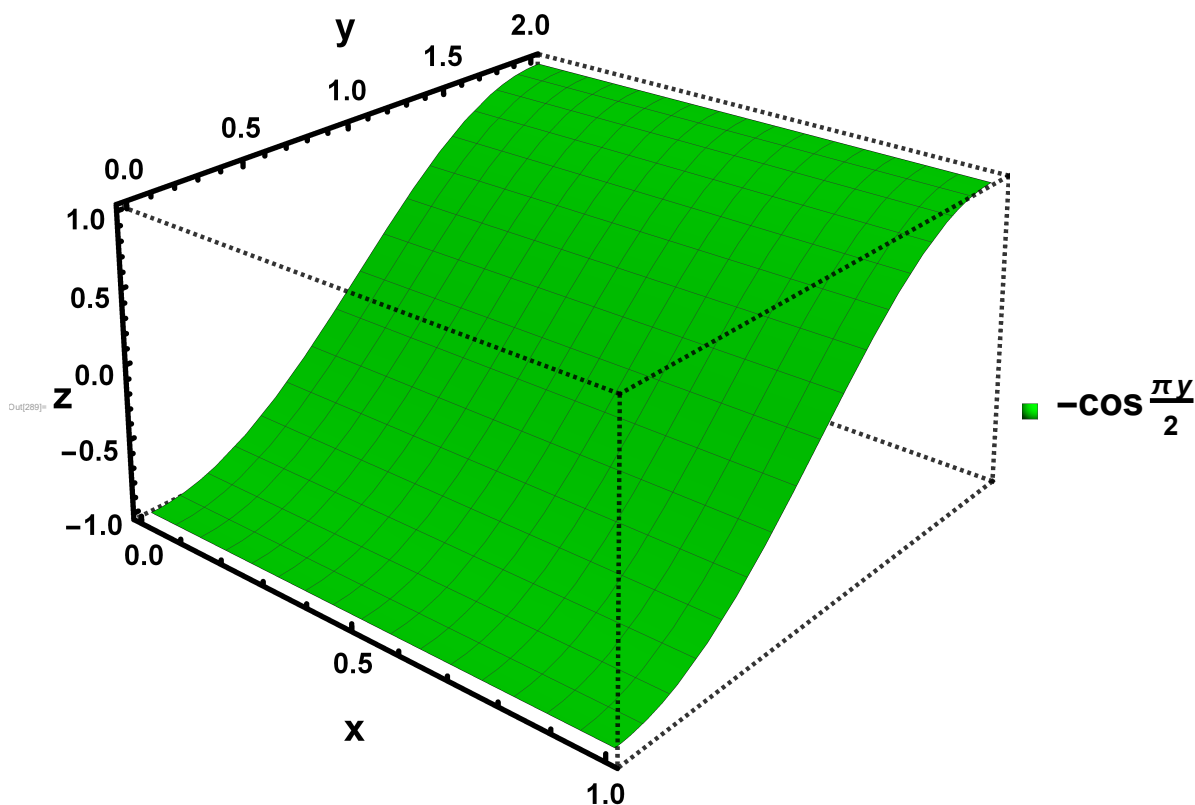
Záleží tedy na nejdelší hraně intervalu  $J$ . Příslušná extrémní funkce potom bude cosínová půlperioda vzhledem k té proměnné, která odpovídá nejdelší hraně intervalu  $J$ . Pokud dvě nebo více hran mají stejnou délku, může potom extrémní funkce být lineární kombinací jednoduchých cosínových půlperiod vzhledem k těm proměnným, které odpovídají nejdelším hranám.



Obrázek 1.8: Příklad extrémní funkce na intervalu  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .



Obrázek 1.9: Příklad extrémní funkce na intervalu  $[0, 3] \times [0, 1]$ .



Obrázek 1.10: Příklad extrémní funkce na intervalu  $[0, 1] \times [0, 2]$ .

Např. na čtvercovém intervalu  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  je extrémní funkcí  $f(x, y) = -\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{y}{2}$  a každý její nenulový násobek.

Extrémní funkce na  $[0, 3] \times [0, 1]$  je např.  $g(x, y) = -\cos \frac{\pi x}{3}$ .

Příkladem extrémní funkce na  $[0, 1] \times [0, 2]$  je  $h(x, y) = -\cos \frac{\pi y}{2}$ .

Grafy těchto funkcí jsou na Obr. 1.8, 1.9, 1.10.

**Důsledek 4.** Platí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\pi} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}),$$

$$\text{kde} \quad u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx, \quad x \in \Omega, \quad |\Omega| \text{ je Lebesgueova míra } \Omega,$$

$$\text{a pro} \quad \Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

$$\text{je} \quad d = \max_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i).$$

Tato nerovnost je speciálním případem tzv. Poincarého-Wirtingerovy nerovnosti.

**Poznámka 13.** Pro homogenní funkce jedné proměnné lze odhad pro konstantu  $c$  získat jednodušším výpočtem. Za předpokladu  $u \in C^1([a, b])$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  lze psát

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t) dt,$$

a protože  $u(a) = 0$ , plyne z toho

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt ,$$
$$u^2(x) = \left( \int_a^x u'(t) dt \right)^2 .$$

Použitím Hölderovy (Schwarzovy) nerovnosti dostáváme

$$\left( \int_a^x u'(t) dt \right)^2 = \left( \int_a^x 1 u'(t) dt \right)^2 \leq \int_a^x 1^2 dt \int_a^x u'^2(t) dt .$$

Protože  $(u'(t))^2 \geq 0$  na  $[a, b]$  lze psát

$$u^2(x) \leq \int_a^x 1^2 dx \int_a^x u'^2(t) dt \leq \int_a^x 1^2 dx \int_a^b u'^2(t) dt = (x-a) \int_a^b u'^2(t) dt .$$

Integrujeme-li tuto nerovnost v mezích od  $a$  do  $b$  a přejdeme-li opět k označení  $x$  místo  $t$  pro integrační proměnnou, dostáváme

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b u'^2(x) dx ,$$

a po odmocnění dostáváme odhad pro hodnotu konstanty  $c$

$$c = \frac{b-a}{\sqrt{2}} .$$

Porovnáme-li tento odhad se skutečnou hodnotou konstanty, dostaneme

$$\frac{b-a}{\sqrt{2}} / \frac{b-a}{\pi} \approx 2.22 .$$

Tedy odhad je zhruba 2-krát větší, než skutečná hodnota konstanty, nicméně platí i pro funkce, které jsou nulové pouze v levém krajním bodě intervalu  $[a, b]$ . Pro funkce, které jsou  $C^1$  na  $[a, b]$  a splňují  $u(b) = 0$ , platí stejný odhad. Stačí, když použijeme  $u(x) = -\int_x^b u'(t) dt$  a analogickým výpočtem dospějeme ke stejnému odhadu jako v předchozím případě.

V další kapitole si odvodíme obecnější verzi nerovností odvozených v této kapitole, ukážeme si jejich využití v diferenciálním počtu, a také souvislosti s Laplaceovým operátorem.

# Kapitola 2

## Aplikace nerovností

Text z následujících dvou podkapitol je částečně převzat z knihy [4].

### 2.1 Zobecnění Wirtingerových a Poincarého nerovností.

#### Friedrichsova nerovnost

V předchozí kapitole jsme řešili nerovnosti typu

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

kde  $u$  byla  $C^1$  funkce na uzavřené množině  $\Omega$  typu obdélník, a navíc musela splňovat další požadavky. Ukázali jsme, že pokud  $u$  je nulová na  $\partial\Omega$ , nebo její integrál přes  $\Omega$  je nulový, lze konstantu  $c$  pro výše uvedenou nerovnost odvodit explicitně. Ukázali jsme také, že např. v 1D (dá se ukázat, že platí i pro dimenze větší jak 1), položíme-li  $\Omega = [a, b]$ , stačí předpokládat  $u(a) = 0$  nebo  $u(b) = 0$ . Ve většině případů nesplňuje funkce  $u$  žádný z těchto předpokladů, není tedy nulová na hranici uvažované oblasti, ani její integrál přes tuto oblast není nulový. Nicméně ukážeme, že pro obecné funkce  $u$  splňující určité požadavky na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , pro kterou také musí něco platit, platí podobné nerovnosti, které uvažují také funkční hodnoty  $u$  na  $\partial\Omega$ . Jednou z nich je tzv. Friedrichsova nerovnost pojmenovaná po německém matematikovi Kurtu Ottovi Friedrichsovi.

**Definice 5.** Řekneme, že oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  má lipschitzovskou hranici, pokud pro každý bod ležící na hranici  $\Omega$  existuje okolí tak, že  $\partial\Omega$  lze na tomto okolí popsat lipschitzovskou funkcí.

**Poznámka 14.** Lipschitzovské funkce mají derivaci skoro všude.



**Věta 14.** *Friedrichsova nerovnost.* Necht'  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je omezená oblast s tzv. lipschitzovskou hranicí. Označme

$$M = \{u, u \in C^1(\overline{\Omega})\}.$$

Pak existují nezáporné konstanty  $c_1$  a  $c_2$  tak, že platí Friedrichsova nerovnost

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq c_1 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx + c_2 \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS, \quad \forall u \in M. \quad (2.1)$$

Člen na pravé straně nerovnosti (2.1)  $\int_{\partial\Omega} u^2(S) dS$  je pro dimenze větší jak 2 plošný integrál  $u^2$  přes hranici  $\partial\Omega$ , ve 2D je to křivkový integrál přes 1-rozměrnou uzavřenou křivku  $\partial\Omega$ . V 1D  $\partial\Omega$  představuje množinu ze dvou bodů  $\{a, b\}$ , a v tomto případě lze Friedrichsovu nerovnost (2.1) zapsat v jednom z těchto tvarů

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 u^2(a), \quad (2.2)$$

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 u^2(b), \quad (2.3)$$

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 (u^2(a) + u^2(b)). \quad (2.4)$$

**Poznámka 15.** Poslední nerovnost (2.4) získáme sečtením předchozích dvou.

**Poznámka 16.** Friedrichsovu nerovnost ve tvaru (2.1) lze ekvivalentně převést na tvar

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + a_2 \sqrt{\int_{\partial\Omega} u^2(S) dS},$$

kde  $a_1, a_2$  jsou nezáporné konstanty. Obě strany nerovnosti jsou tedy nezáporné a po umocnění dostáváme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a_1^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_2^2 \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS + 2a_1 a_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\int_{\partial\Omega} u^2(S) dS}.$$

Použitím vzorce  $2xy \leq x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq a_1^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_2^2 \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS + a_1 a_2 (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS) = \\ &= a_1(a_1 + a_2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_2(a_1 + a_2) \int_{\partial\Omega} u^2(S) dS. \end{aligned}$$

Stačí tedy položit  $c_1 = a_1(a_1 + a_2)$ ,  $c_2 = a_2(a_1 + a_2)$  a dostaneme původní nerovnost (2.1).

Uvedeme důkaz první nerovnosti (2.2), neboť druhá nerovnost (2.3) se dokáže stejným způsobem. Položme

$$\varphi(x) = \cos \frac{\pi(b-x)}{4(b-a)}, \quad \omega(x) = \frac{u(x)}{\varphi(x)}, \quad u(x) = \varphi(x)\omega(x).$$

$\varphi(x)$  je různá od nuly na  $[a, b]$ , tedy definice je korektní. Dále platí

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\pi}{4(b-a)} \sin \frac{\pi(b-x)}{4(b-a)}, & \varphi''(x) &= -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2} \cos \frac{\pi(b-x)}{4(b-a)}, \\ \varphi''(x) &= -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2} \varphi(x), & (\varphi\varphi'\omega^2)' &= \varphi'^2\omega^2 + \varphi\varphi''\omega^2 + 2\varphi\varphi'\omega\omega'. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tyto vztahy použijeme v dalších krocích. Postupnými úpravami dostáváme

$$u'^2 = (\varphi'\omega + \varphi\omega')^2 = \varphi'^2\omega^2 + \varphi^2\omega'^2 + 2\varphi\varphi'\omega\omega' =$$

podle (2.5)

$$\begin{aligned} &= \varphi^2\omega'^2 + (\varphi\varphi'\omega^2)' - \varphi\varphi''\omega^2 \geq (\varphi\varphi'\omega^2)' - \varphi\varphi''\omega^2 = \\ &= (\varphi\varphi'\omega^2)' + \frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\varphi^2\omega^2 = (\varphi\varphi'\omega^2)' + \frac{\pi^2}{16(b-a)^2}u^2. \end{aligned}$$

Integrací obou stran v mezích od  $a$  do  $b$  dostáváme

$$\int_a^b u'^2 dx \geq [\varphi\varphi'\omega^2]_a^b + \frac{\pi^2}{16(b-a)^2} \int_a^b u^2 dx.$$

Dále platí

$$[\varphi\varphi'\omega^2]_a^b = [\varphi^2 \frac{\varphi'}{\varphi} \omega^2]_a^b = \frac{\pi}{4(b-a)} [u^2 \tan \frac{\pi(b-x)}{4(b-a)}]_a^b = -\frac{\pi}{4(b-a)} u^2(a),$$

a po dosazení do poslední nerovnosti dostáváme

$$\int_a^b u'^2 dx \geq -\frac{\pi}{4(b-a)} u^2(a) + \frac{\pi^2}{16(b-a)^2} \int_a^b u^2 dx.$$

Vynásobením obou stran zlomkem  $\frac{16(b-a)^2}{\pi^2}$  dostáváme

$$\int_a^b u'^2 dx \leq \frac{16(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2 dx + \frac{4(b-a)}{\pi} u^2(a).$$

Položíme-li

$$c_1 = \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{4(b-a)}{\pi},$$

dostaneme původní nerovnost (2.2). Důkaz nerovnosti (2.3) se provede stejným způsobem.

Stačí položit

$$\varphi(x) = \cos \frac{\pi(x-a)}{4(b-a)}.$$

**Poznámka 17.** V případě, že  $u$  je nulová na hranici obdélníkové oblasti  $\Omega$  (tedy  $u$  je homogenní funkce, jak jsme definovali v kap.1), pak plošný integrál v nerovnosti (2.1) je nulový a Friedrichsova nerovnost je ekvivalentní nerovnosti Wirtingerově pro homogenní funkce v příslušné dimenzi. Nicméně, Friedrichsova nerovnost je obecnější také z toho důvodu, že platí i pro funkce definované na oblastech jiných než obdélníkového typu.

V další podkapitole si ukážeme podstatnou aplikaci této nerovnosti.

## 2.2 Důkaz pozitivní definitnosti diferenciálních operátorů

**Definice 6.** Necht' je dán Hilbertův prostor  $H$  a lineární množina  $M$  hustá v  $H$ . Operátor  $A : M \rightarrow M$  se nazývá symetrický, pokud platí

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \quad \forall u, v \in M.$$

Řekneme, že tento operátor je pozitivní, pokud je symetrický a platí

$$\langle Au, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in M,$$

$$\langle Au, u \rangle = 0 \iff u \equiv 0.$$

Pokud navíc existuje konstanta  $k > 0$  taková, že platí

$$\langle Au, u \rangle \geq k\|u\|^2, \quad \forall u \in M,$$

řekneme, že operátor  $A$  je pozitivně definitní.

Velká část inženýrských problémů vede na řešení operátorové rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$Au = f, \tag{2.6}$$

kde  $A$  je operátor (nejčastěji diferenciální) na  $M$ ,  $f$  je prvkem  $H$  a  $u \in M$  je neznámá, která je řešením rovnice (2.6). Ukazuje se, že některé operátory jsou na vhodně zvolených oblastech pozitivní (nebo dokonce pozitivně definitní), a pro tento případ existuje řada numerických metod, které jsou určeny pro řešení rovnice (2.6). Velmi podstatnou vlastnost (které tyto numerické metody využívají) pozitivních operátorů uvádí tato Věta

**Věta 15.** O minimu kvadratického funkcionálu.

Mějme operátor  $A$  na množině  $M$ , který je pozitivní,  $f \in H$ . Pak  $u_0 \in M$  je řešením rovnice

$$Au = f,$$

právě tehdy, když funkcionál

$$\langle Au, u \rangle - 2\langle f, u \rangle$$

nabývá na  $M$  svého minima, a to právě pro prvek  $u_0$ .

V dalším textu si ukážeme, jak lze příslušnou Friedrichsovu nerovnost použít pro důkaz pozitivní definitnosti diferenciálních operátorů. Pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  uvažujme diferenciální rovnici v divergentním tvaru

$$-(pu')' + qu = f, \quad (2.7)$$

kde

$$f \in L^2((a, b)), \quad p \in C^1([a, b]), \quad q \in C([a, b]), \quad (2.8)$$

$$\exists p_0 > 0 : p(x) \geq p_0, \quad \forall x \in [a, b], \quad q(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (2.9)$$

s homogenními okrajovými podmínkami, které v obecném případě lze zapsat v jednom z následujících tvarů

$$\begin{aligned} \alpha u'(a) - \beta u(a) &= 0, & \gamma u'(b) + \delta u(b) &= 0, \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta &\geq 0, & \alpha + \beta &> 0, & \gamma + \delta &> 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nejsou-li okrajové podmínky homogenní, lze pro vhodně zvolenou funkci  $v(x)$  použít transformaci  $u(x) = v(x) + w(x)$ , kterou daný problém převedeme na řešení rovnice (2.7) s homogenními okrajovými podmínkami. Důkaz pozitivní definitnosti operátoru  $A$  provedeme pro některé speciální případy podmínek (2.10).

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (2.11)$$

$$u(a) = u'(b) = 0, \quad (2.12)$$

$$u'(a) - \beta u(a) = u'(b) + \delta u(b) = 0, \quad \beta, \delta > 0, \quad (2.13)$$

$$u'(a) = u'(b) = 0. \quad (2.14)$$

1)  $u(a) = u(b) = 0$  (Dirichletovy okrajové podmínky).

Řešení uvažujme na množině (označíme  $M_1$ ) těch funkcí, které jsou  $C^2$  na  $[a, b]$  a splňují (2.11). Tato množina je lineární a označme příslušný diferenciální operátor

$$A_1 u = -(pu')' + qu, \quad u \in M_1,$$

o kterém se výpočtem přesvědčíme, že je pozitivně definitní. Nejprve dokážeme, že je symetrický. Musí tedy platit  $\langle A_1 u, v \rangle = \langle u, A_1 v \rangle$ ,  $\forall u, v \in M_1$ .

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v \rangle &= \int_a^b (-(pu')' + qu)v dx = \int_a^b -(pu')'v dx + \int_a^b quv dx = \\ &= -[pu'v]_a^b + \int_a^b pu'v' dx + \int_a^b quv dx = \end{aligned}$$

protože  $v(a) = v(b) = 0$

$$= \int_a^b pu'v' dx + \int_a^b quv dx = [puv']_a^b - \int_a^b u(pv')' dx + \int_a^b quv dx =$$

použitím  $u(a) = u(b) = 0$

$$= - \int_a^b u(pv')' dx + \int_a^b quv dx = \int_a^b u(-(pv')' + qv) dx = \langle u, A_1 v \rangle .$$

Pro pozitivní definitnost dostáváme

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, u \rangle &= \int_a^b (-(pu')'u + qu^2) dx = \int_a^b -(pu')'u dx + \int_a^b qu^2 dx = \\ &= -[pu'u]_a^b + \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx = \end{aligned}$$

na základě toho, že  $u(a) = u(b) = 0$

$$= \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx \geq \int_a^b pu'^2 dx \geq p_0 \int_a^b u'^2 dx \geq p_0 C_1 \int_a^b u^2 dx = p_0 C_1 \|u\|^2 .$$

První dvě nerovnosti vyplývají z podmínek (2.8). Poslední nerovnost plyne z Friedrichsovy nerovnosti pro homogenní funkce. Dostáváme tedy

$$\langle A_1 u, u \rangle \geq p_0 C_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in M,$$

a tím je dokázáno, že operátor  $A_1$  je na  $M_1$  pozitivně definitní.

2)  $u(a) = u'(b) = 0$  (Smíšené okrajové podmínky).

Zde je situace velmi podobná předchozímu případu. Položme za  $M_2$  množinu funkcí, které jsou  $C^2$  na  $[a, b]$  a splňují (2.12). Stejným výpočtem se nechá ověřit, že operátor  $A_2$  je na  $M_2$  symetrický a že platí

$$\langle A_2 u, u \rangle = \int_a^b -(pu')'u + qu^2 dx \geq p_0 \int_a^b u'^2 dx \geq p_0 C_2 \int_a^b u^2 dx .$$

Poslední nerovnost plyne z Friedrichsovy nerovnosti pro funkce, které jsou nulové v levém krajním bodě svého definičního oboru.

3)  $u'(a) - \beta u(a) = u'(b) + \delta u(b) = 0$ ,  $\beta, \delta > 0$  (Newtonovy okrajové podmínky).

Operátor  $A_3$  uvažujme na množině  $M_3$ , kterou tvoří funkce  $C^2$  na  $[a, b]$  splňující (2.13). Ověříme symetrii

$$\begin{aligned} \langle A_3 u, v \rangle &= \int_a^b (-(pu')' + qu)v dx = - \int_a^b (pu')' v dx + \int_a^b quv dx = -[pu'v]_a^b + \\ &+ \int_a^b pu'v' dx + \int_a^b quv dx = -[pu'v]_a^b + [puv']_a^b - \int_a^b u(pv')' dx + \int_a^b quv dx = \\ &= -[pu'v]_a^b + [puv']_a^b + \int_a^b u(-(pv')' + qv) dx = -[pu'v]_a^b + [puv']_a^b + \langle u, A_3 v \rangle. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že  $-[pu'v]_a^b + [puv']_a^b = 0$ . Podle (2.13) dostáváme

$$\begin{aligned} & -[pu'v]_a^b + [puv']_a^b = \\ &= -(-\delta p(b)u(b)v(b) - \beta p(a)u(a)v(a)) + (-\delta p(b)u(b)v(b) - \beta p(a)u(a)v(a)) = \\ &= \delta p(b)u(b)v(b) + \beta p(a)u(a)v(a) - \delta p(b)u(b)v(b) - \beta p(a)u(a)v(a) = 0, \end{aligned}$$

tedy operátor  $A_3$  je na  $M_3$  skutečně symetrický. Pro pozitivní definitnost, přeskóčíme-li ve výpočtu některé kroky, které jsou analogické jako v případě 1), dostaneme

$$\langle Au, u \rangle = -[pu'u]_a^b + \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx =$$

podle vztahů (2.13)

$$= \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx + \beta p(a)u^2(a) + \delta p(b)u^2(b) \geq$$

označíme  $k = \min\{\beta, \delta\}$ , a dále podle (2.8)

$$\geq p_0 \int_a^b u'^2 dx + \beta p_0 u^2(a) + \delta p_0 u^2(b) \geq p_0 \left( \int_a^b u'^2 dx + k(u^2(a) + u^2(b)) \right).$$

Podle Friedrichsovy nerovnosti platí

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 (u^2(a) + u^2(b)),$$

a lze tedy psát

$$p_0 \left( \int_a^b u'^2 dx + k(u^2(a) + u^2(b)) \right) = p_0 \left( \frac{1}{c_1} c_1 \int_a^b u'^2 dx + \frac{k}{c_2} c_2 (u^2(a) + u^2(b)) \right) \geq$$

položíme  $t = \min\{\frac{1}{c_1}, \frac{k}{c_2}\}$

$$\geq p_0 t \left( c_1 \int_a^b u'^2(x) dx + c_2 (u^2(a) + u^2(b)) \right) \geq p_0 t \int_a^b u^2 dx = p_0 t \|u\|_{L^2((a,b))}^2.$$

Dokázali jsme, že operátor  $A_3$  je na  $M_3$  pozitivně definitní.

4)  $u'(a) = u'(b) = 0$  (Neumannovy okrajové podmínky).

Tento případ je oproti předchozím poněkud složitější. Symetrie se nechá dokázat stejným způsobem, jako v případech 1) nebo 2). Nicméně pozitivní definitnost není na  $M_4$  (množině funkcí, které jsou  $C^2$  na  $[a, b]$  a splňují (2.14)) v obecném případě zaručena. Postupujeme-li stejným způsobem jako v případě 1), dospějeme k tomu, že platí

$$\langle A_4 u, u \rangle \geq p_0 \int_a^b u'^2 dx,$$

což v případě 1) byl předposlední krok při ověřování pozitivní definitnosti. Na tomto místě nelze ale použít žádnou z Friedrichsových nerovností, jelikož nemáme žádnou podmínku pro funkční hodnoty  $u$  v krajních bodech intervalu  $[a, b]$ . Tento operátor je nicméně pozitivně definitní na  $M_4$  za dodatečné podmínky, že

$$\exists q_0 > 0 : q(x) \geq q_0, \quad \forall x \in [a, b],$$

a pozitivní definitnost jednoduše ověříme následujícím výpočtem

$$\begin{aligned} \langle A_4 u, u \rangle &= \int_a^b (-(pu')'u + qu^2) dx = \int_a^b -(pu')'u dx + \int_a^b qu^2 dx = \\ &= -[pu'u]_a^b + \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b qu^2 dx \geq \\ &\geq p_0 \int_a^b u'^2 dx + q_0 \int_a^b u^2 dx \geq q_0 \int_a^b u^2 dx = q_0 \|u\|_{L^2((a,b))}^2. \end{aligned}$$

Dále si ukážeme, že v případě  $q \equiv 0$  na  $[a, b]$  není operátor  $A_4$  na  $M_4$  pozitivní.

$$\langle A_4 u, u \rangle = \int_a^b (-pu')'u dx = -[pu'u]_a^b + \int_a^b pu'^2 dx = \int_a^b pu'^2 dx.$$

Z definice pozitivnosti (viz Def. 6) musí platit, že

$$\langle Au, u \rangle = \int_a^b pu'^2 dx = 0 \implies u \equiv 0 \text{ na } [a, b],$$

nicméně funkce  $u$  může být konstantní (různá od nuly) a přitom bude platit  $\langle Au, u \rangle = 0$ , což je spor s definicí pozitivnosti operátoru.

**Poznámka 18.** *Dá se ukázat, že výše uvažovaný operátor  $A_4$  je pozitivně definitní na  $M_4$  za slabšího předpokladu. Stačí uvažovat, že  $\exists x_0 \in [a, b] : q(x_0) > 0$ .*

Nyní si ukážeme souvislosti mezi Poincarého konstantami a extrémními funkcemi nerovností zmíněných v první kapitole s Laplaceovým operátorem, konkrétně s maticemi diskretizace Laplaceova operátoru, jejich vlastními čísly a vlastními vektory.

## 2.3 Souvislosti s Laplaceovým operátorem, diskretizace Laplaceova operátoru, aproximace konstant pomocí vlastních čísel

Laplaceova diferenciální rovnice popisuje mnoho různých fyzikálních a chemických procesů. Používá se např. pro popis gravitačního nebo elektrického potenciálu, difúze a šíření tepla, mechaniky tekutin, určitých jevů v kvantové mechanice atd. V této kapitole provedeme numerickou diskretizaci Laplaceova operátoru na intervalech v 1D a 2D, ukážeme si souvislosti s Poincarého konstantami (na příslušných intervalech) a ověříme, že výsledky získané pomocí numerických výpočtů odpovídají teorii, kterou jsme již odvodili.

**Definice 7.** Necht'  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Uvažujme prostor funkcí

$$M = \{u, u \in C^2(\Omega)\}.$$

Laplaceova rovnice je potom rovnice ve tvaru

$$-\Delta u = -\nabla^2 u = 0, \quad u \in M, \quad (2.15)$$

kde symbolem  $\Delta$  se označuje tzv. Laplaceův operátor, který je v prostoru  $\mathbb{R}^n$  definován jako

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (2.16)$$

Formálně suma

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

je divergence gradientu funkce  $u$ , proto se někdy Laplaceův operátor označuje jako  $\nabla^2$ .

V matematické analýze Laplaceova rovnice (2.15) spadá do kategorie eliptických parciálních diferenciálních rovnic.

**Poznámka 19.** Důvod, proč je Laplaceův operátor v rovnici (2.15) se znaménkem mínus je ten, že výsledný diferenciální operátor je pozitivně definitní.

**Poznámka 20.** Laplaceova rovnice (2.15) je speciálním případem Poissonovy rovnice

$$\Delta u = f, \quad (2.17)$$

kteřá v obecném případě má nenulovou pravou stranu.



Pokud existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  a nenulová funkce  $f \in M$  takové, že platí

$$-\Delta f(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

řekneme, že  $\lambda$  je vlastní číslo Laplaceova operátoru a  $f$  je jeho vlastní funkce. Spektrem Laplaceova operátoru rozumíme množinu všech jeho vlastních čísel.

### 2.3.1 1D případ

Mějme Laplaceovu rovnici (2.15) na množině funkcí (označme  $M$ ), které jsou  $C^2([a, b])$ , s homogenní okrajovou podmínkou  $u(a) = u(b) = 0$ . Dá se ukázat, že příslušný Laplaceův operátor má nekonečně mnoho vlastních čísel

$$\left\{ \frac{\pi^2}{(b-a)^2}, \frac{4\pi^2}{(b-a)^2}, \frac{9\pi^2}{(b-a)^2}, \dots \right\}. \quad (2.18)$$

Obecně lze tedy posloupnost vlastních čísel zapsat ve tvaru

$$\left\{ \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

**Poznámka 21.** V případě nehomogenních okrajových podmínek vlastním číslem bude také nula a vlastní funkce jemu příslušná bude konstantní funkce.

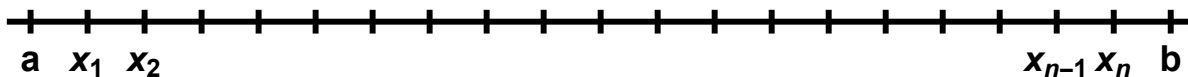
Připomeneme si, že pro hodnotu Poincarého konstanty (v první kapitole uváděné jako Wirtingerova konstanta) pro homogenní funkce jedné proměnné platí

$$c = \frac{b-a}{\pi},$$

a porovnáním s nejmenším vlastním číslem (označme  $\lambda_{min}$ ) Laplaceova operátoru v naší úloze dostáváme vztah

$$c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}. \quad (2.19)$$

Ukážeme, jak se pomocí diskretizace Laplaceova operátoru dá získat aproximace příslušné Poincarého konstanty. Mějme Poissonovou rovnici (2.17) na intervalu  $I = [a, b]$  s homogenními okrajovými podmínkami, tedy  $u(a) = u(b) = 0$ . Interval  $I$  si rovnoměrně rozdělíme na  $n + 2$  bodů ( $n$  vnitřních bodů a 2 krajní body, ve kterých je  $u$  nulová) (viz Obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Dělení intervalu  $[a, b]$ .

Položme  $x_0 = a, x_{n+1} = b$ . Derivaci funkce  $u$  v nějakém bodě  $x_i$  nahradíme druhou centrální diferencí, která je dána vztahem

$$u''(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.20)$$

kde  $h$  je norma dělení intervalu  $I$ , pro kterou platí

$$h = \frac{b-a}{n+1}.$$

Dále z rovnice (2.17) platí

$$-u''(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dosadíme-li za  $u''(x_i)$  příslušnou druhou centrální diferencí, dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

s tridiagonální maticí (označme  $A$ ). Řešením této soustavy dostaneme přibližné řešení Poissonovy rovnice (2.17), nicméně nás bude zajímat nejmenší vlastní číslo matice  $A$ . Dá se ukázat, že tato matice je pozitivně definitní, a navíc pro její vlastní čísla platí

$$\lambda_n > \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_2 > \lambda_1.$$

Za těchto podmínek můžeme pro výpočet nejmenšího vlastního čísla použít inverzní mocninné metody. Dále si připomeneme, že druhé nejmenší vlastní číslo Laplaceova operátoru je 4krát větší než první nejmenší (tedy  $\lambda_2 = 4\lambda_1$ ). Pro naši matici  $A$  platí podobná věc, její nejmenší vlastní číslo (pro které, jak zjistíme, pro větší diskretizaci platí dostatečně přesně (2.19)) je přibližně 4x menší než druhé nejmenší vlastní číslo. Díky tomu bude inverzní mocninná metoda konvergovat velice rychle a stačí malý počet iterací. Ukážeme náčrt algoritmu této metody aplikované pro naši úlohu v Matlabu

Konstrukce matice  $A$ ;

počáteční vektor  $u = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ ;

for  $i=1:k$

$u = A \setminus u$ ;

```

u = u/norm(u);
end
lambda = u.A.u / u.u;

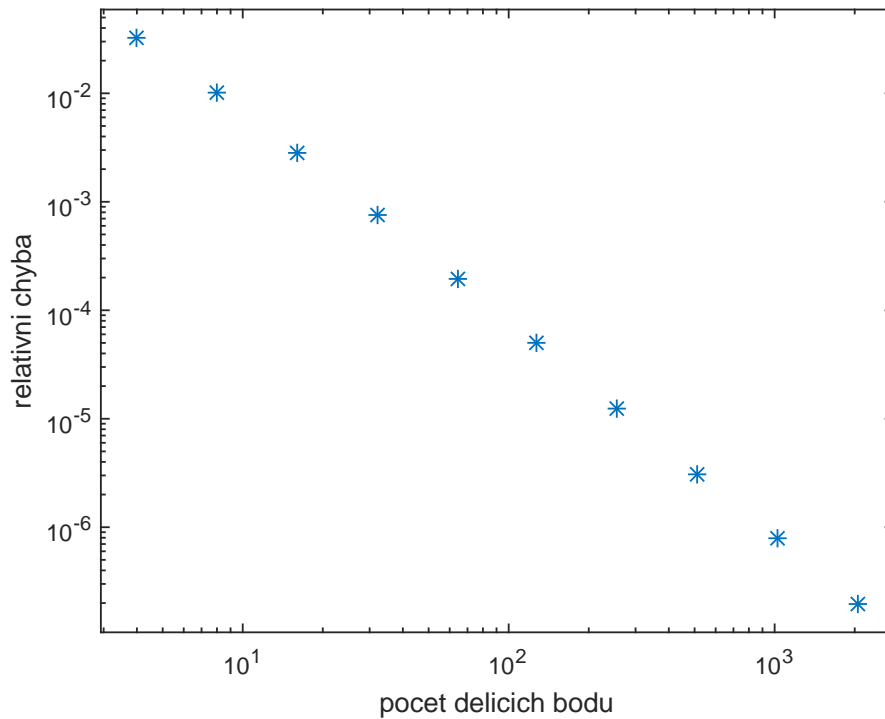
```

Místo toho, abychom pracovali s inverzí matice  $A$ , řešíme v každé iteraci soustavu  $Ax = u$  s řídkou maticí  $A$  a řešení dosazujeme zpátky do  $u$ . Při větší diskretizaci je velmi důležité mít matici  $A$  uloženou jako řídkou matici, v opačném případě hrozí přetečení paměti. Pro stabilnější výpočet vektor  $u$  v každé iteraci normujeme. Na konci nejmenší vlastní číslo  $\lambda_1$  získáme pomocí tzv. Rayleighho podílu.

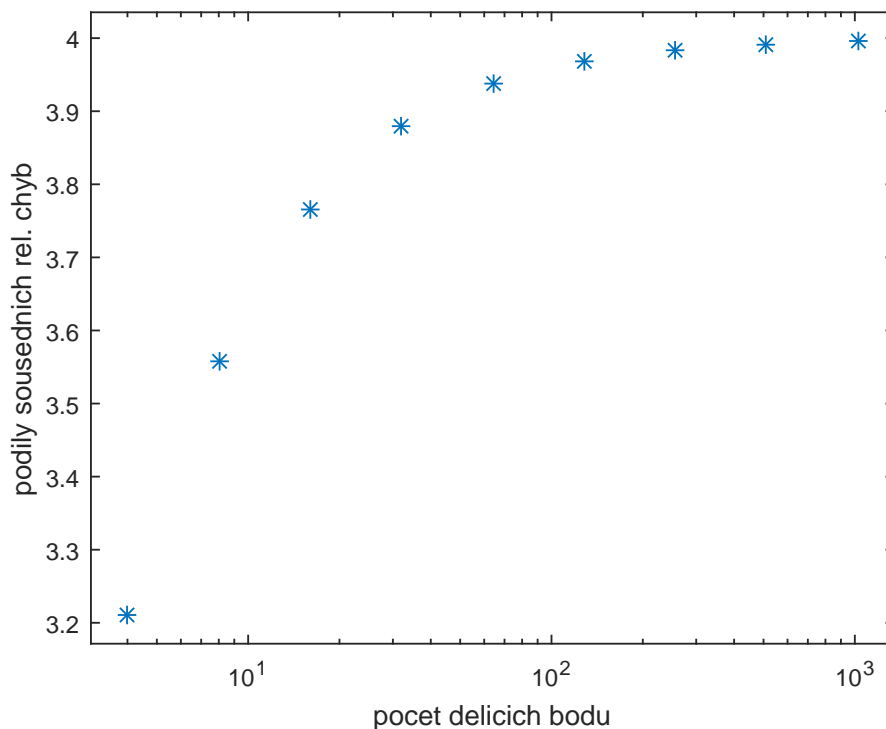
$$\lambda_1 = \frac{u^T A u}{u^T u}.$$

Vektor  $u$  na konci iteračního procesu aproximuje vlastní vektor matice  $A$  pro  $\lambda_1$ , a také vlastní funkci Laplaceova operátoru příslušné jeho nejmenšímu vlastnímu číslu v diskretizačních bodech. Jak jsme ukázali v kap. 1, funkce, pro kterou platí rovnost (1.2) je půlperioda sínu na intervalu  $[a, b]$  násobená konstantou. Na Obr. 2.4, je znázorněna vlastní funkce Laplaceova operátoru na intervalu  $[0, 1]$  příslušná jeho nejmenšímu vlastnímu číslu spolu s vlastním vektorem matice  $A$  velikosti  $8 \times 8$  příslušným jejímu nejmenšímu vlastnímu číslu.

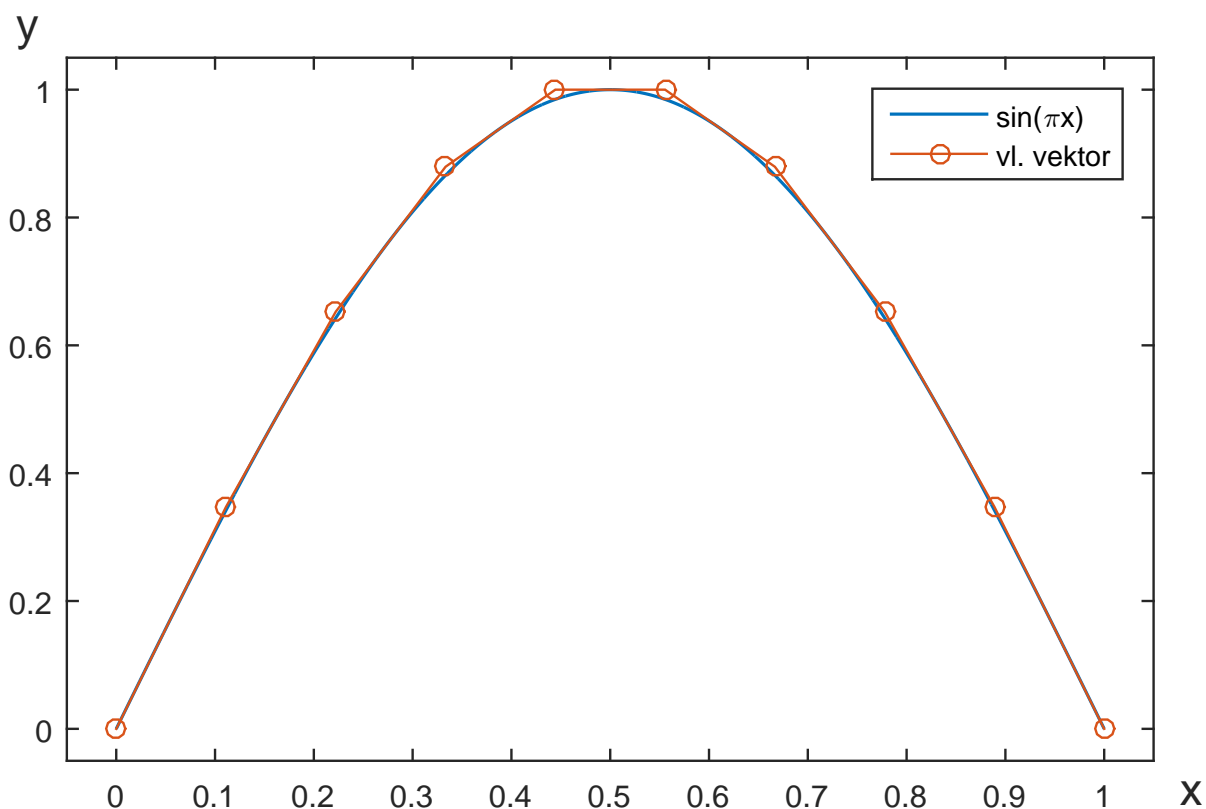
Jak je vidět, vlastní vektor matice  $A$  aproximuje příslušnou extrémní funkci dostatečně přesně již při 10 dělicích bodech intervalu  $[0, 1]$ . Následující obrázky ilustrují rychlost konvergence nejmenšího vlastního čísla matic reprezentujících diskretizovaný Laplaceův operátor na intervalu  $[0, 1]$  pro různá dělení tohoto intervalu. Graf na Obr. 2.2 zobrazuje relativní chyby aproximací Poincarého konstanty v logaritmické škále, zatímco graf na Obr. 2.3 zobrazuje podíly dvou sousedních relativních chyb. Z těchto grafů je vidět, že posloupnost nejmenších vlastních čísel konverguje k Poincarého konstantě kvadraticky (zjermníme-li dělení dvakrát, klesne relativní chyba téměř čtyřikrát).



Obrázek 2.2: Relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  matic diskretizovaného Laplaceova operátoru s homogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1]$  a Poincarého konstantou na  $[0, 1]$  v logaritmické škále pro různé velikosti matic ( $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $\dots$ ). V každé iteraci zjemňujeme dělení dvakrát počínaje čtyřmi vnitřními dělicími body.



Obrázek 2.3: Podíly dvou sousedních relativních chyb z grafu nahoře a jejich konvergence k hodnotě 4, z čehož plyne kvadratická konvergence  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k hodnotě Poincarého konstanty.

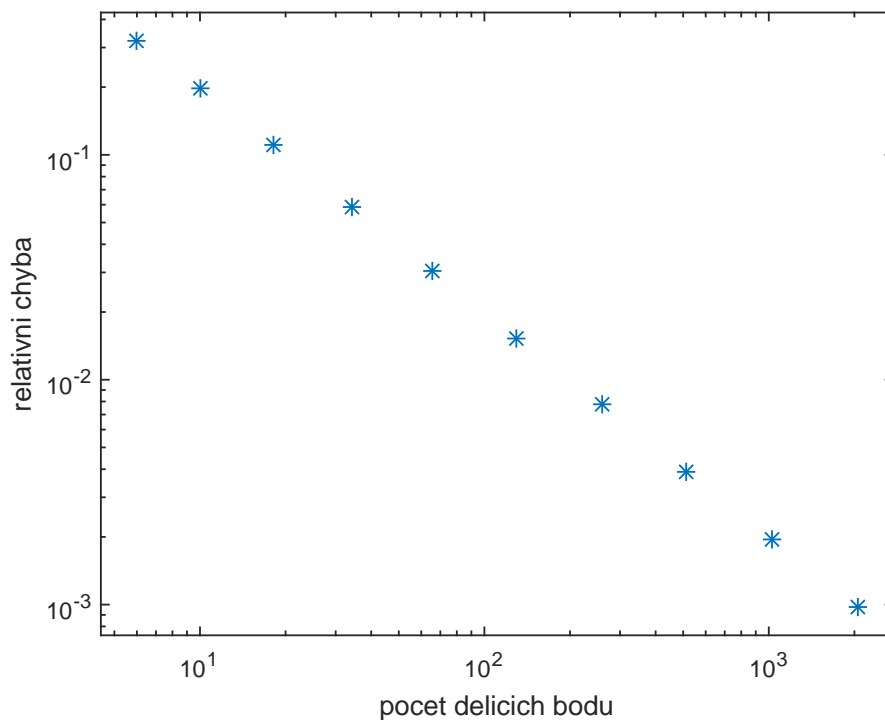


Obrázek 2.4: Vlastní vektor matice  $A$  velikosti  $8 \times 8$  diskretizovaného Laplaceova operátoru s homogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1]$  odpovídající její nejmenšímu vlastnímu číslu spolu s extrémní funkcí pro Poincarého nerovnost pro homog. funkce na  $[0, 1]$ .

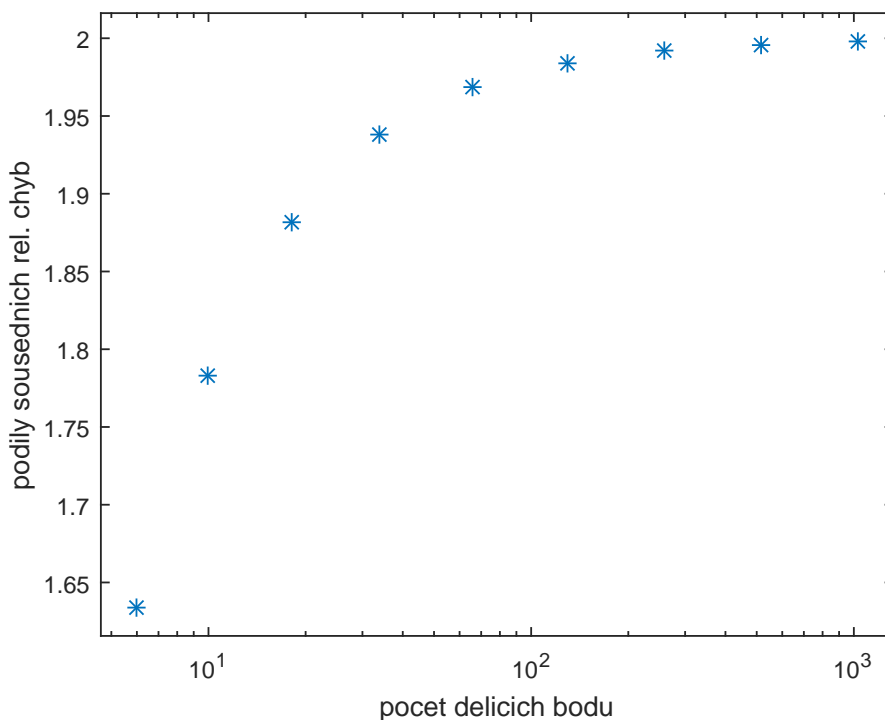
Stejný postup použijeme pro diskretizovaný Laplaceův operátor s nehomogenními okrajovými podmínkami. Matice diskretizace bude poněkud odlišná, jelikož funkční hodnoty  $u$  v krajních bodech nemusí být nulové, a její velikost je o 2 větší než v případě homogenních okrajových podmínek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

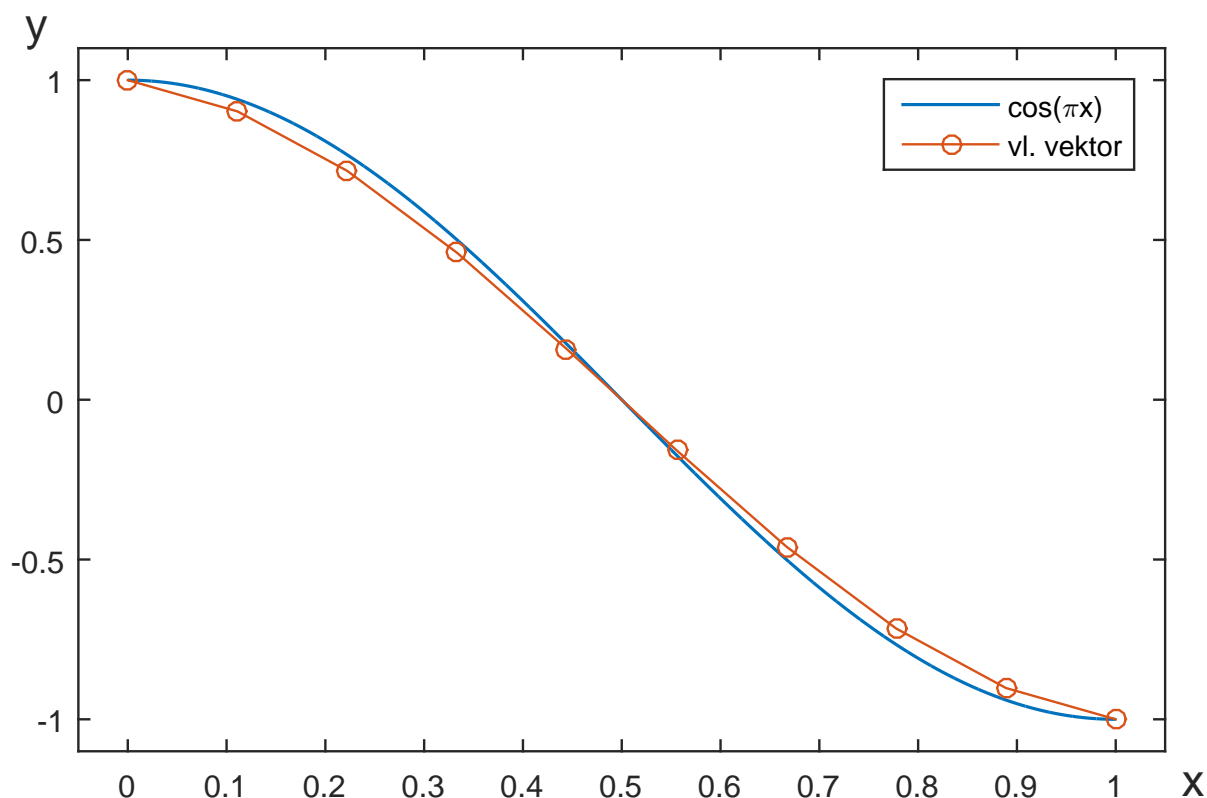
Výsledky (vlastní vektor matice  $A$  příslušný jejímu nejmenšímu vlastnímu číslu spolu s extrémní funkcí pro Poincarého nerovnost pro funkce s nulovým průměrem na  $[0, 1]$ , relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  a Poincarého konstantou a podíly dvou sousedních relativních chyb) ilustrují obrázky 2.7, 2.5 a 2.6. Oproti případu s homogenními okrajovými podmínkami, zde dostáváme pouze lineární konvergenci.



Obrázek 2.5: Relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  matic diskretizovaného Laplaceova operátoru s nehomogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1]$  a Poincarého konstantou na  $[0, 1]$  v logaritmické škále pro různé velikosti matic ( $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $\dots$ ). V každé iteraci zjemňujeme dělení dvakrát počínaje čtyřmi vnitřními dělicími body.



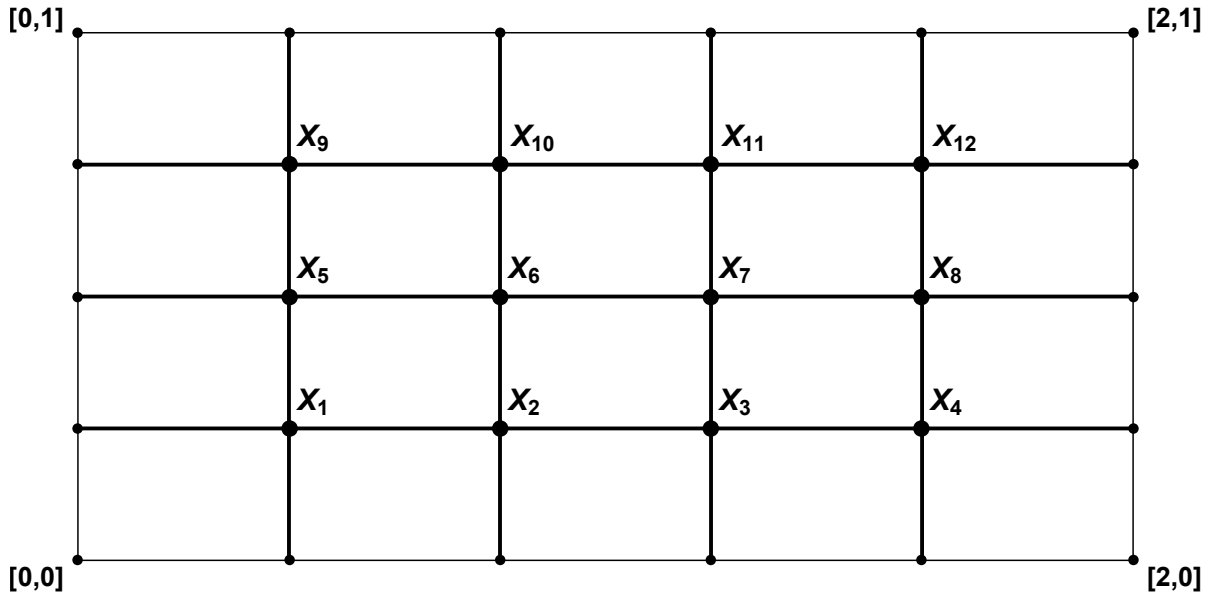
Obrázek 2.6: Podíly dvou sousedních relativních chyb z grafu nahoře a jejich konvergence k hodnotě 2, z čehož plyne lineární konvergence  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k hodnotě Poincarého konstanty.



Obrázek 2.7: Vlastní vektor matice  $A$  velikosti  $8 \times 8$  diskretizovaného Laplaceova operátoru s nehomogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1]$  odpovídající jejímu druhému nejmenšímu vlastnímu číslu spolu s extrémní funkcí pro Poincarého nerovnost pro funkce s nulovým průměrem na  $[0, 1]$ .

### 2.3.2 2D případ

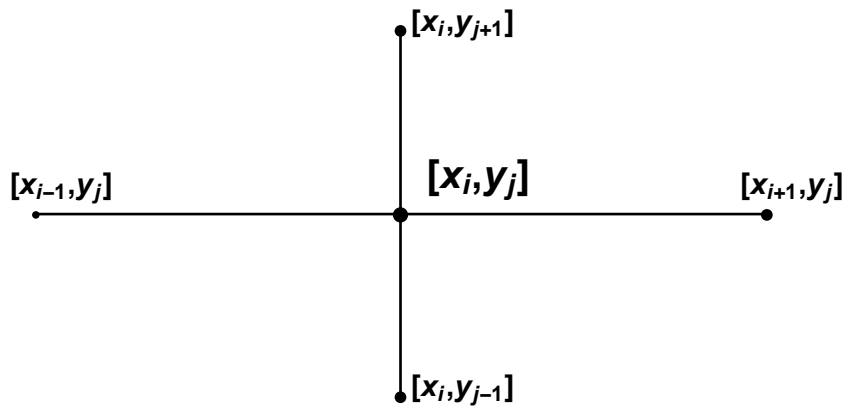
Analogicky můžeme Laplaceův operátor diskretizovat i ve 2D, zvolme si proto nějaký interval  $J = [a, b] \times [c, d]$ . Rozdělíme-li interval  $[a, b]$  na  $m$  dělicích bodů a interval  $[c, d]$  na  $n$  dělicích bodů, dostaneme celkem  $m \times n$  bodů diskretizujících interval  $J$ . Zatímco v 1D pořadí dělicích bodů bylo triviální  $(x_0, \dots, x_{n+1})$ , ve 2D si dělicí body příslušného intervalu  $J$  musíme nějak vhodně uspořádat. Jednou z možností je, že příslušné body budeme číslovat postupně po řádcích (každému řádku odpovídá nějaké pevné  $y \in (c, d)$ ). Ukážeme si příklad takového uspořádání pro interval  $I = [0, 1] \times [0, 2]$  pro  $m = 5, n = 6$  a stejný princip aplikujeme pro diskretizaci intervalu  $J$  a následně konstrukci matice diskretizovaného Laplaceova operátoru ve 2D. Ukážeme si, že  $1/\sqrt{\lambda_{\min}}$  matice diskretizace bude při zjemňování dělení intervalu  $J$  konvergovat k Poincarého konstantě pro homogenní funkce na intervalu  $J$ .



Obrázek 2.8: Příklad uspořádání dělicích bodů pro interval  $[0, 1] \times [0, 2]$  pro  $5 \times 6 = 30$  dělicích bodů ( $3 \times 4 = 12$  bodů uvnitř).

Druhou derivaci vzhledem k proměnným  $x$  a  $y$  v rovnici (2.15) opět nahradíme druhou centrální diferencí. Označíme-li za  $h_x$  normu dělení intervalu  $J$  vzhledem k  $x$  a analogicky za  $h_y$  normu dělení  $J$  vzhledem k  $y$ , dostaneme

$$\begin{aligned}
 & -u''_{xx}(x_i, y_j) - u''_{yy}(x_i, y_j) = \\
 & = \frac{-u(x_{i-1}, y_j) + 2u(x_i, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h_x^2} + \frac{-u(x_i, y_{j-1}) + 2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1})}{h_y^2} = \\
 & = \frac{h_y^2(-u(x_{i-1}, y_j) + 2u(x_i, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)) + h_x^2(-u(x_i, y_{j-1}) + 2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1}))}{h_x^2 h_y^2}
 \end{aligned}$$



Obrázek 2.9: Princip druhé centrální diference pro 2D interval. Aproximace výrazu  $-u''_{xx}(x_i, y_j) - u''_{yy}(x_i, y_j)$  pomocí funkční hodnoty  $u$  v tomto bodě a funkčních hodnot  $u$  v dalších 4 sousedních bodech .



**Poznámka 22.** Existují některé další varianty druhé centrální diference ve 2D, v síti (2.8) bychom mohli uvažovat např. 8 sousedních bodů místo 4.

Ukážeme si příklad matice diskretizace Laplaceova operátoru na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  pro 3 vnitřní dělicí body vzhledem ke každé proměnné (tedy celkem 9 vnitřních dělicích bodů).

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 64 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & 0 & 0 & -16 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 64 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & -16 & 64 \end{array} \right] .$$

Oproti 1D, kde jsme měli tridiagonální matici, ve 2D dostaneme pětdiagonální matici, kterou lze zapsat v blokovém tvaru. V našem případě

$$A = \begin{pmatrix} B & C & O \\ C & B & C \\ O & C & B \end{pmatrix} ,$$

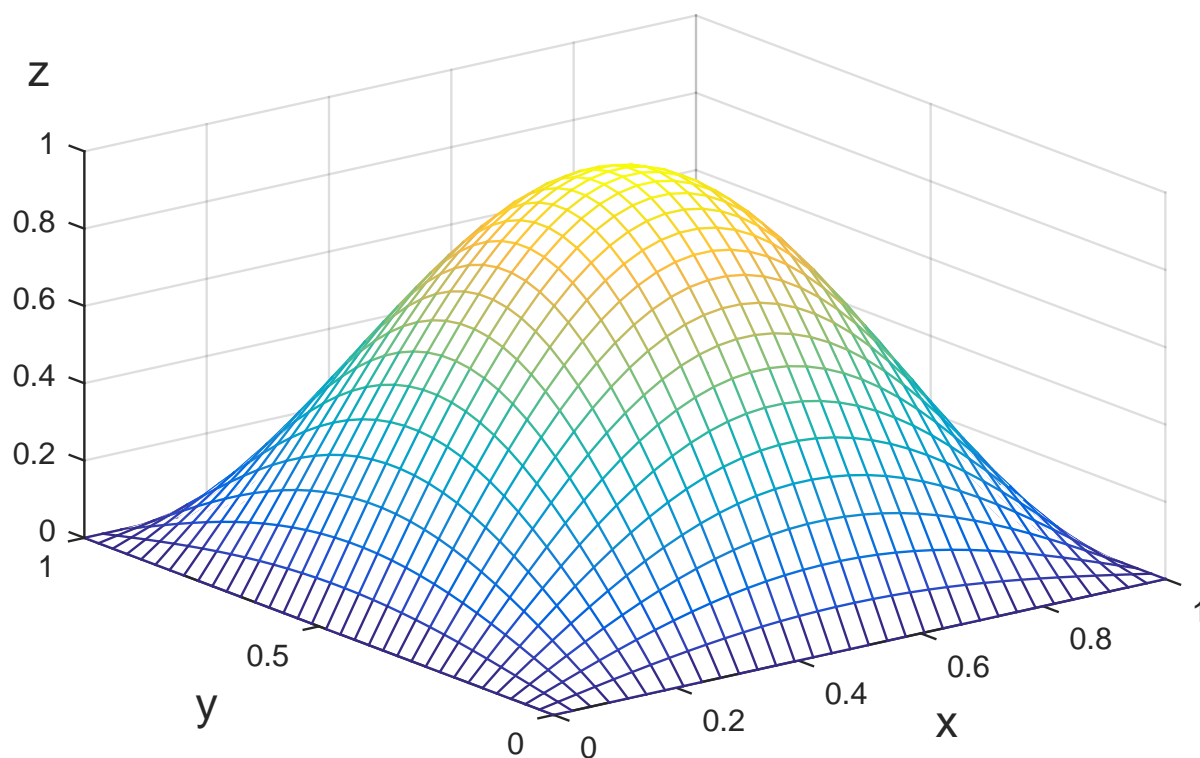
kde

$$B = \begin{pmatrix} 64 & -16 & 0 \\ -16 & 64 & -16 \\ 0 & -16 & 64 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

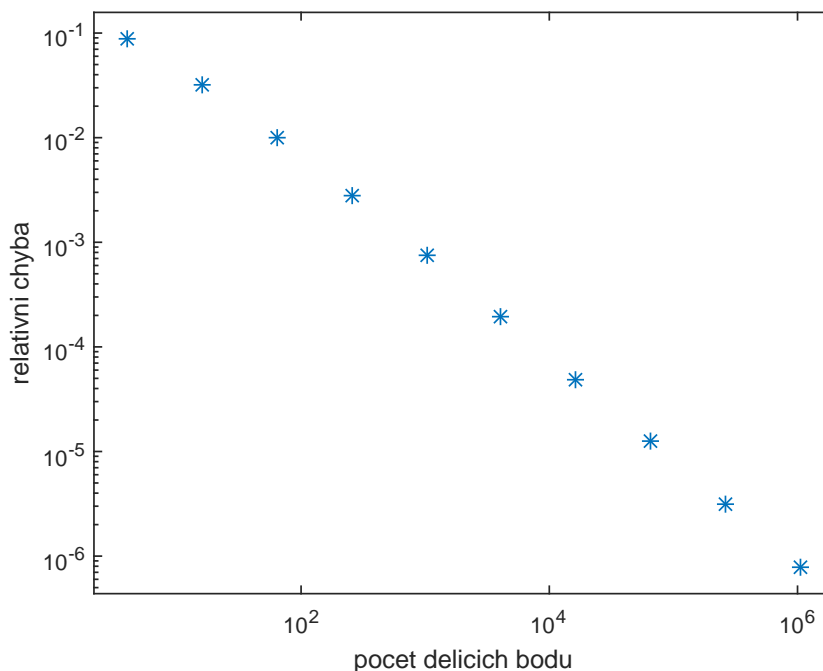
a  $O$  je nulová matice  $3 \times 3$ . Všechny prvky na hlavní diagonále matice  $A$  jsou stejné a jejich hodnota je  $2/h_x^2 + 2/h_y^2$ . Dále stejnou hodnotu mají prvky na poddiagonále a naddiagonále, která je rovna  $-1/h_y^2$ . A nakonec prvky na zbývajících dvou nenulových diagonálách jsou také stejné a jejich hodnota je rovna  $-1/h_x^2$ .

Všimneme si, že řádky matice  $A$ , které mají pouze 3 nenulové prvky, odpovídají bodům ležícím v jednom z rohů sítě tvořenou vnitřními dělicími body intervalu  $J$  (viz (2.8)). Řádky, které mají 4 nenulové prvky, odpovídají těm bodům, které leží na krajích sítě ale neleží v rohu. Nakonec bodům, které jsou ze všech stran obklopené dalšími vnitřními body intervalu  $J$ , odpovídají řádky, které mají 5 nenulových prvků. To samé platí i pro sloupce matice  $A$ .

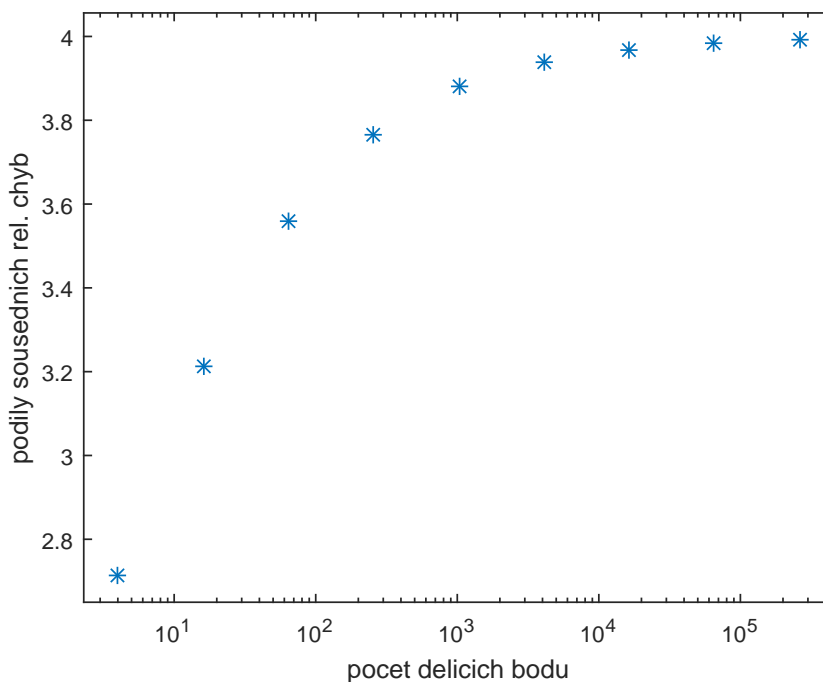
A nyní se můžeme podívat na konvergenci  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  matice  $A$  k Poincarého konstantě pro homogenní funkce ve 2D. Pro jednoduchost si zvolme interval  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Následující obrázky 2.10, 2.11 a 2.12 obsahují vlastní funkci matice  $A$  příslušné jejímu nejmenšímu vlastnímu číslu pro určitou iteraci, relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  a Poincarého konstantou a podíly dvou sousedních relativních chyb. Podle Obr. 2.12 můžeme usoudit, že konvergence k Poincarého konstantě je lineární (chyba klesne téměř čtyřikrát při dvojnásobném zjemnění intervalu  $J$  vzhledem k  $x$  a  $y$ ).



Obrázek 2.10: Vlastní vektor matice  $A$  velikosti  $1024 \times 1024$  (tedy 32 vnitřní dělicí body vzhledem k  $x$  a  $y$ ) diskretizovaného Laplaceova operátoru s homogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  odpovídající její nejmenšímu vlastnímu číslu.

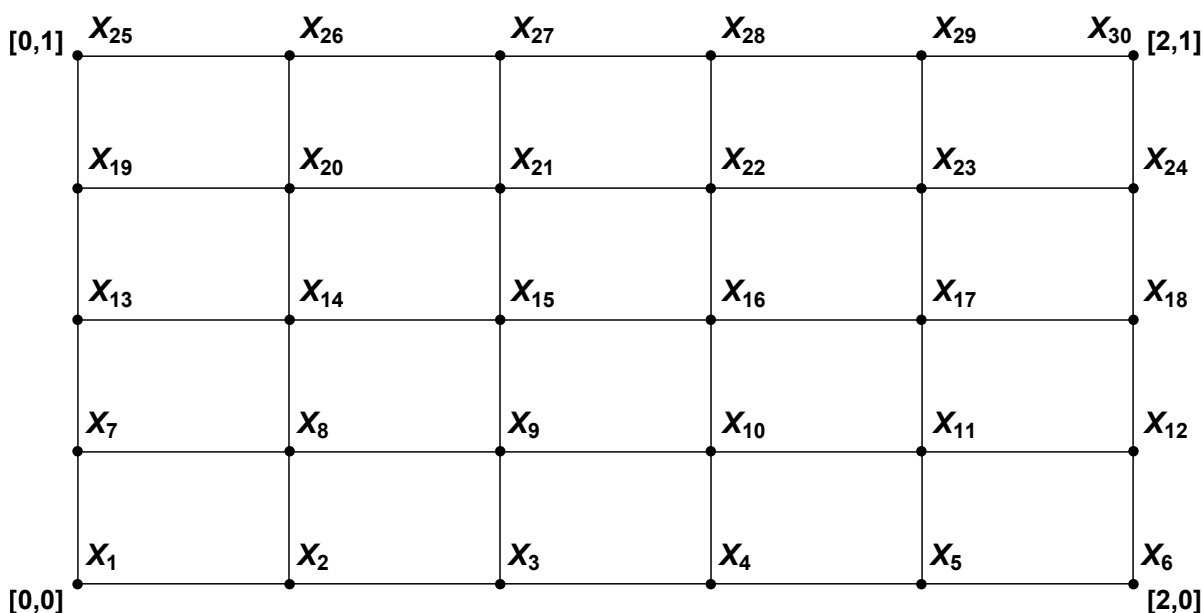


Obrázek 2.11: Relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  matic diskretizovaného Laplaceova operátoru s homogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  a Poincarého konstantou na  $[0, 1] \times [0, 1]$  v logaritmické škále pro různé velikosti matic ( $4 \times 4$ ,  $16 \times 16$ ,  $64 \times 64$ ,  $\dots$ ). Velikost matice diskretizace ve 2D se v každé iteraci zvětší 4krát, jelikož zjemňujeme dělení dvakrát vzhledem k  $x$  a  $y$ . V první iteraci máme čtyři vnitřní dělicí body.



Obrázek 2.12: Podíly dvou sousedních relativních chyb z grafu nahoře a jejich konvergence k hodnotě 4, z čehož plyne lineární konvergence  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k hodnotě Poincarého konstanty.

V případě Laplaceova operátoru s nehomogenními okrajovými podmínkami bude podobná situace jako v 1D. Diskretizační body můžeme uspořádat podle stejného principu jako v předchozím případě (viz Obr. 2.13).



Obrázek 2.13: Příklad uspořádání dělicích bodů pro interval  $[0, 1] \times [0, 2]$  pro  $5 \times 6 = 30$  dělicích bodů.

Vzhledem k tomu, že ne všechny body mají ze všech stran další sousední body, pro některé z nich bude tvar druhé centrální diference poněkud redukovaný (podobně jako v případě diskretizace Laplaceova operátoru s homogenními okrajovými podmínkami). Např. pro bod  $X_1$  bude platit

$$-\Delta u(X_1) = -u''_{xx}(X_1) - u''_{yy}(X_1) \approx \frac{u(X_1) - u(X_2)}{h_x^2} + \frac{u(X_1) - u(X_7)}{h_y^2} = \frac{h_y^2(u(X_1) - u(X_2)) + h_x^2(u(X_1) - u(X_7))}{h_x^2 h_y^2}.$$

Druhé derivace v rohových bodech tedy aproximujeme pomocí tří funkčních hodnot  $u$ . Pro ostatní body na kraji sítě kromě rohových bodů bude aproximace druhé derivace popsána funkčními hodnotami  $u$  ve 4 bodech. Např. pro  $X_2$  bude platit

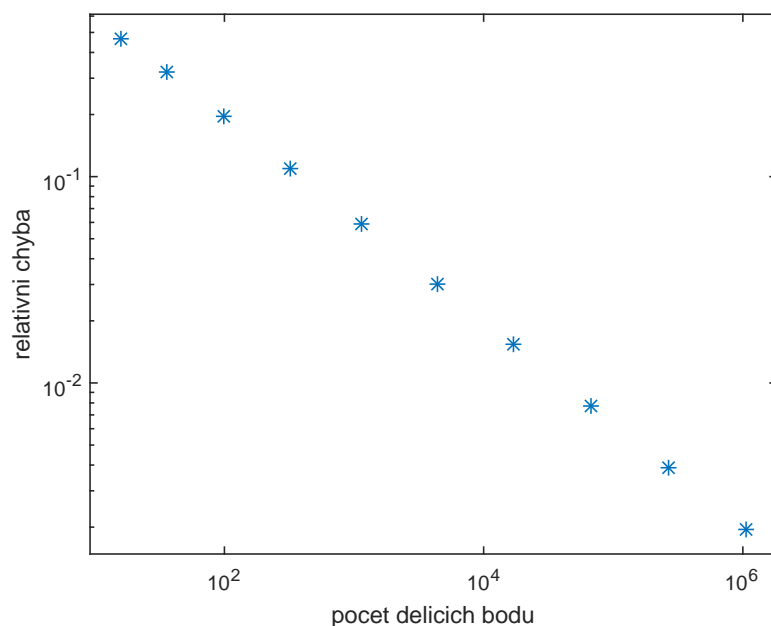
$$-\Delta u(X_2) = -u''_{xx}(X_2) - u''_{yy}(X_2) \approx \frac{-u(X_1) + 2u(X_2) - u(X_3)}{h_x^2} + \frac{u(X_2) - u(X_8)}{h_y^2} = \frac{h_y^2(-u(X_1) + 2u(X_2) - u(X_3)) + h_x^2(u(X_2) - u(X_8))}{h_x^2 h_y^2}.$$

Např. na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  se čtyřmi dělicími body vzhledem k  $x$  a  $y$  (dohromady tedy 16)

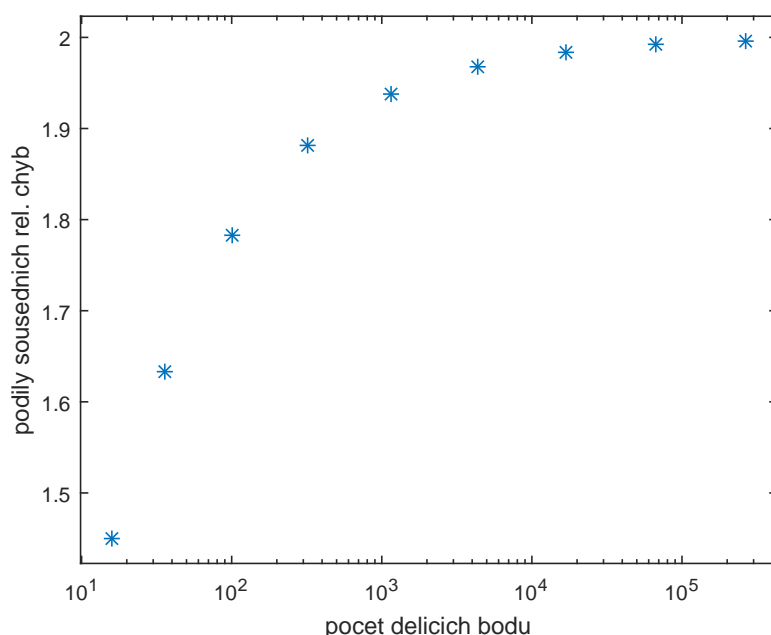
matice diskretizace bude vypadat následovně

$$A = \begin{bmatrix} 18 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 27 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 27 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -9 & 0 & 0 & 0 & 27 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 36 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 36 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 27 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 27 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 36 & -9 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 36 & -9 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 27 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 27 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -9 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

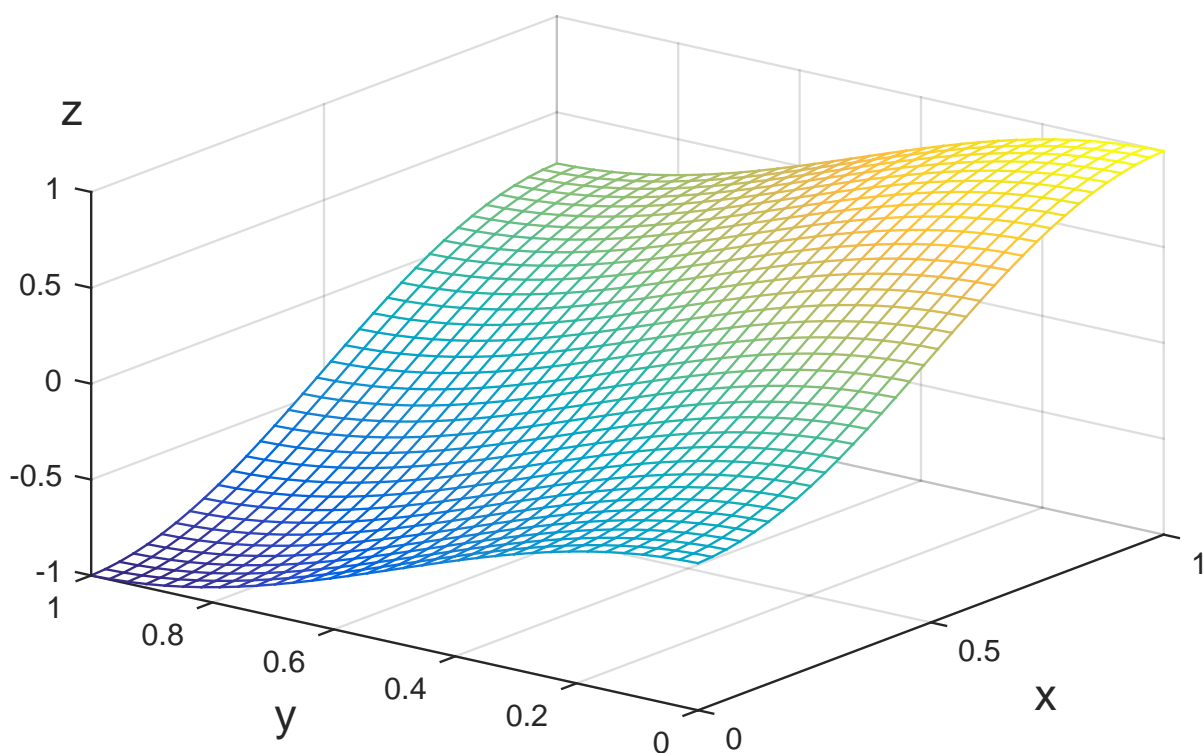
Stejně jako v případě s Laplaceovým operátorem s homogenními okrajovými podmínkami, je tato matice pětdiagonální a lze ji zapsat v blokovém tvaru. Na obrázcích 2.16, 2.14 a 2.15 jsou zobrazené vlastní vektor matice  $A$  příslušný druhému nejmenšímu vlastnímu číslu, relativní chyby mezi hodnotou Poincarého konstantou a  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  a podíly sousedních relativních chyb. Je vidět, že konvergence hodnot  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k Poincarého konstantě pro funkce s nulovým průměrem na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  je polynomiální řádu  $1/2$ , tedy oproti všem předchozím případům nejhorší.



Obrázek 2.14: Relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  matic diskretizovaného Laplaceova operátoru s nehomogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  a Poincarého konstantou na  $[0, 1] \times [0, 1]$  v logaritmické škále pro různé velikosti matic ( $4 \times 4$ ,  $16 \times 16$ ,  $64 \times 64$ ,  $\dots$ ). Velikost matice diskretizace ve 2D se v každé iteraci zvětší 4krát, jelikož zjemňujeme dělení dvakrát vzhledem k  $x$  a  $y$ . V první iteraci máme čtyři dělicí body.



Obrázek 2.15: Podíly dvou susedních relativních chyb z grafu nahoře a jejich konvergence k hodnotě 2, z čehož plyne polynomiální konvergence řádu  $1/2$  (tedy při čtyřnásobném zvětšení počtu dělicích bodů klesne relativní chyba pouze dvakrát).



Obrázek 2.16: Vlastní vektor matice  $A$  velikosti  $1024 \times 1024$  (pro 32 dělicí body vzhledem k  $x$  a  $y$ ) diskr. Lapl. operátoru s nehomogenními okrajovými podmínkami na intervalu  $[0, 1] \times [0, 1]$  odpovídající její nejmenšímu vlastnímu číslu.

V další kapitole si ukážeme odvození konstant pomocí tzv. metodě konečných prvků, kde se setkáme s podobnými maticemi jako při diskretizaci Laplaceova operátoru.

# Kapitola 3

## Numerický výpočet konstant metodou konečných prvků

Explicitní výpočet konstant pomocí rozvoju funkcí a jejich gradientů do Fourierových řad má svoje výhody a nevýhody. Pro libovolnou obdélníkovou oblast dokážeme najít explicitní vyjádření konstant a příslušných extrémních funkcí. Odvozená nerovnost potom platí pro všechny funkce splňující předem stanovené požadavky (především spojitost prvních parciálních derivací na uzávěru uvažované oblasti), bez nichž příslušný výpočet nedokážeme formálně provést. Poincarého nerovnosti nicméně platí obecně za slabších předpokladů na funkce. Mohli bychom uvažovat např. funkci  $u$  splňující pouze  $u \in C^1(J)$ , kde  $J$  je otevřená obdélníková oblast. Stále by platilo  $u \in L^2(J)$ , ale nemusí již platit  $u' \in L^2(J)$ , jelikož derivace  $u$ , ačkoliv je spojitá na  $J$ , nemusí být na této oblasti omezená a její  $L^2$  norma může být nekonečno. Jednoduchým příkladem pro tento případ je funkce

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

např. na intervalu  $J = [0, \frac{1}{2}]$ . Její graf ukazují obrázky 3.1 a 3.2. Tato funkce je spojitá na  $[0, \frac{1}{2}]$  (existuje konečná limita v nule zprava) a tedy omezená. Její derivace

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

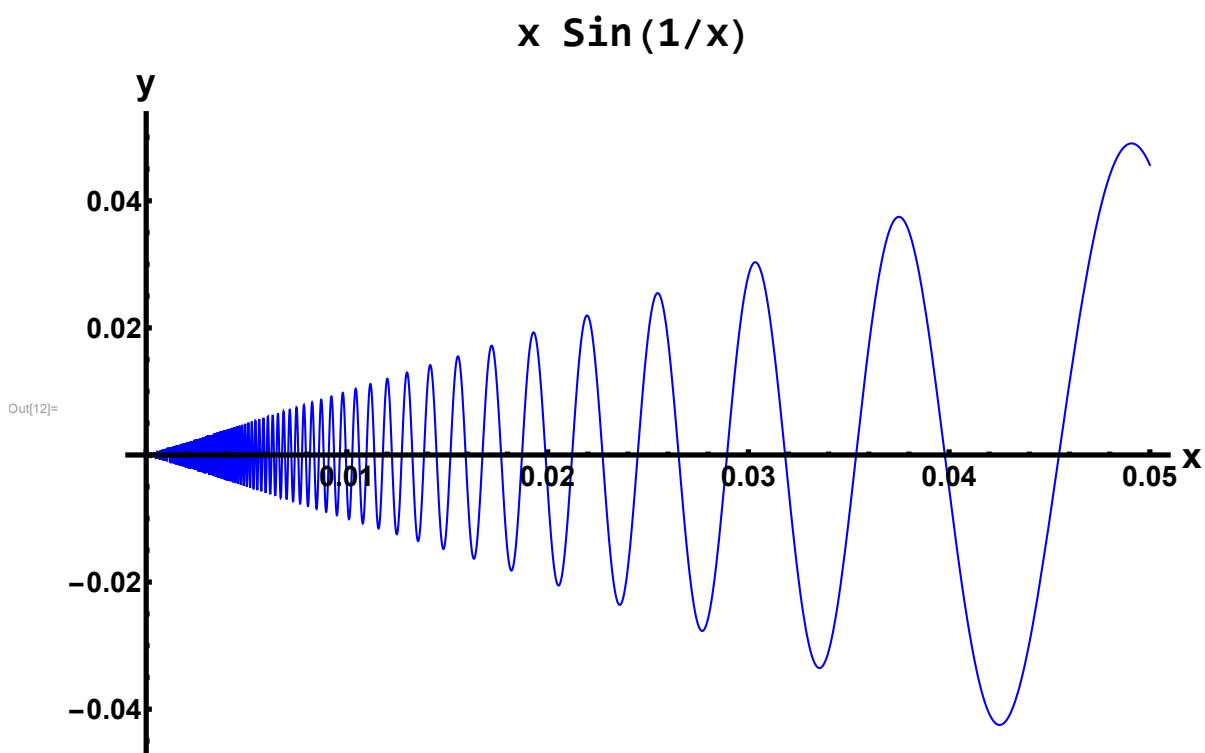
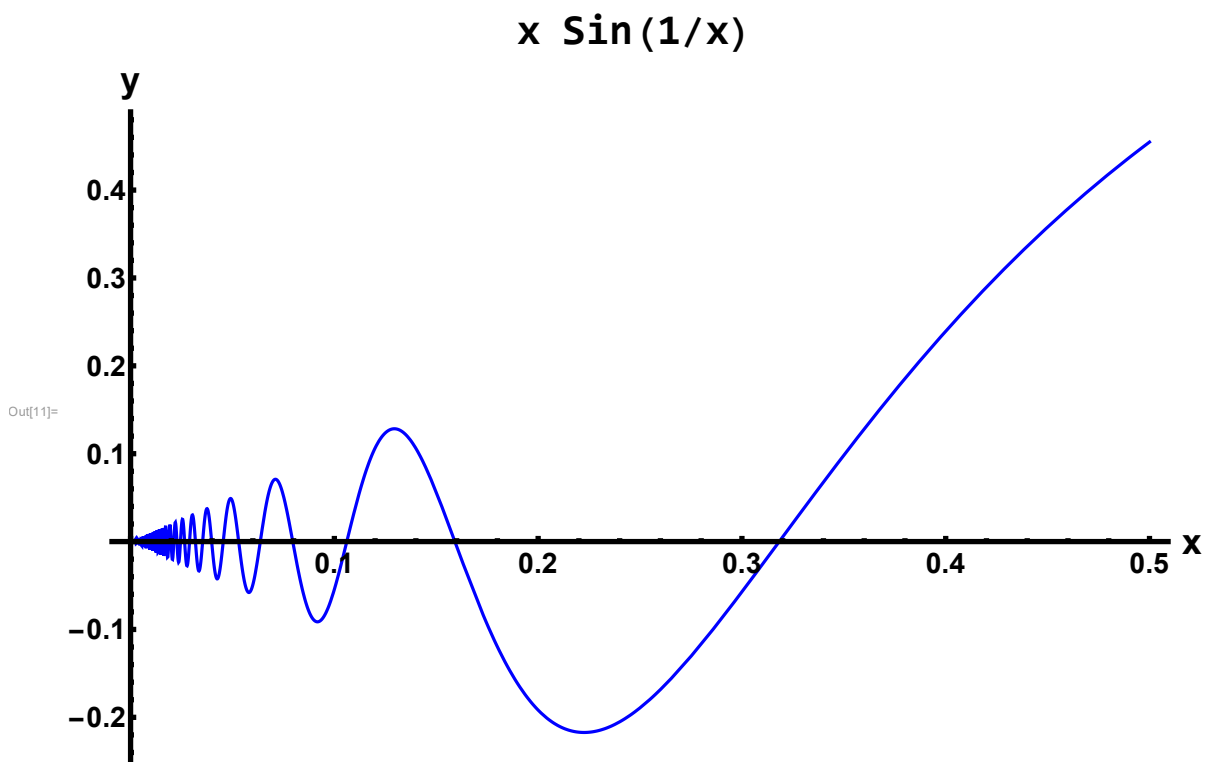
ale není na tomto intervalu omezená, nemá ani limitu v nule zprava. Její norma je nekonečno, a proto nerovnost

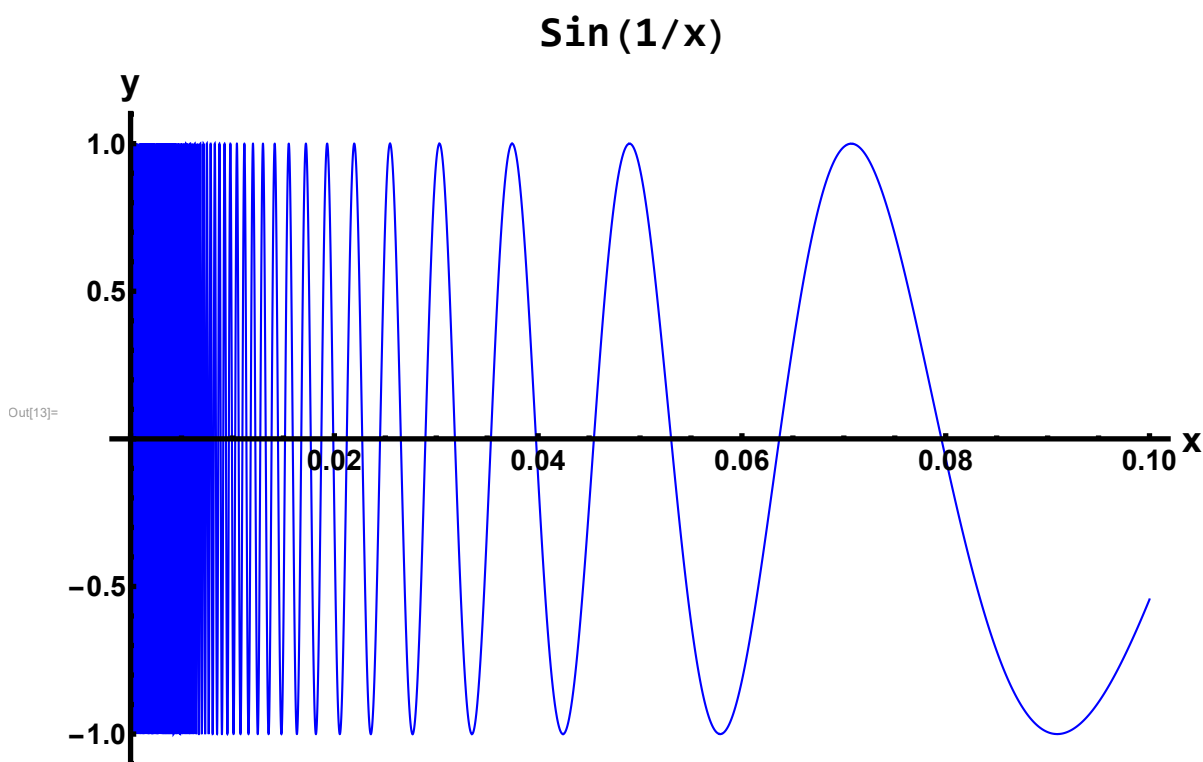
$$\|f\|_{L^2(J)} \leq c \|f'\|_{L^2(J)} \tag{3.1}$$

platí pro libovolnou konstantu  $c > 0$ . Stejně tak platí nerovnost (3.1) i pro funkci (obr. 3.3)

$$g(x) = \sin \frac{1}{x},$$





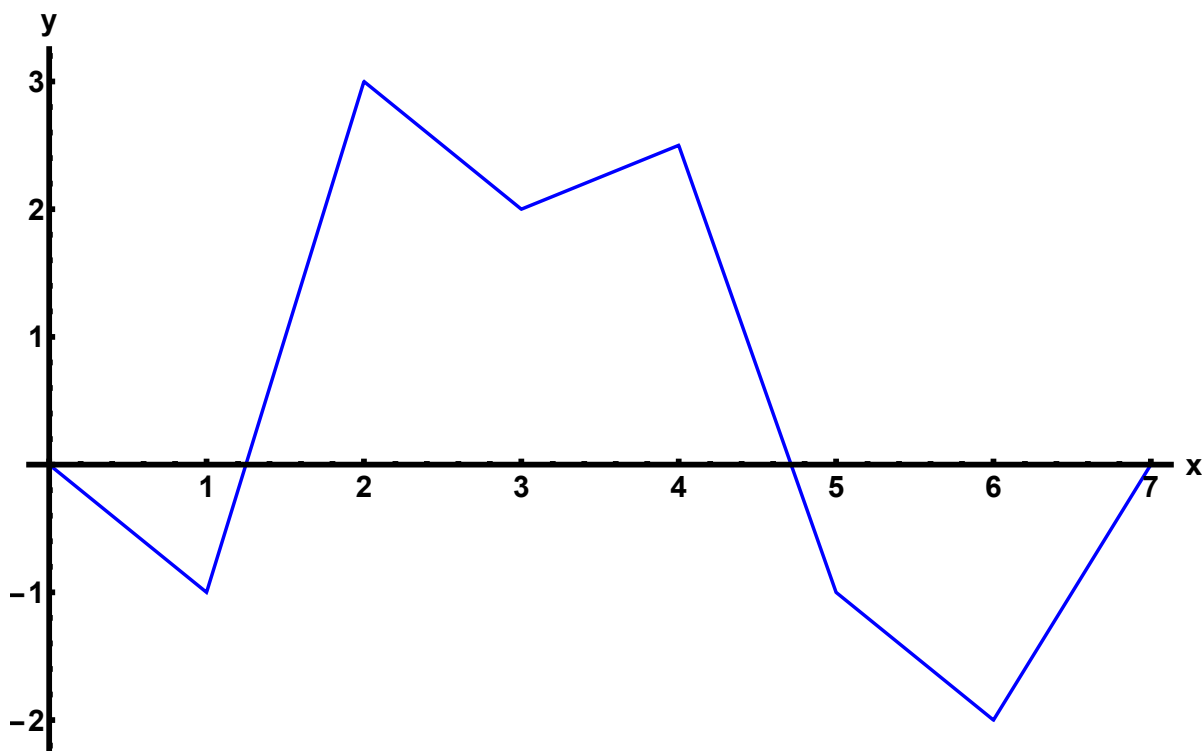


Obrázek 3.3: graf funkce  $\sin \frac{1}{x}$  na intervalu  $[0, \frac{1}{10}]$

kteřá nemá limitu v nule zprava, ani její derivace. Funkce  $g$  je nicméně omezená na intervalu  $(0, \frac{1}{10})$  a její norma je konečná, zatímco norma  $g'$  je nekonečná a nerovnost (3.1) opět platí pro libovolnou hodnotu  $c > 0$ .

Tyto funkce byly speciálními případy, kdy pro ně platila nerovnost (3.1). My se v dalším textu podíváme na funkce z poněkud obecnějších prostorů než těch, které jsme uvažovali v první kapitole při explicitním odvození nerovností  $(U_0^n(\Omega), V_0^n(\Omega))$ . Ukazuje se, že nerovnosti typů Poincarého nebo Friedrichsových platí pro funkce z tzv. Sobolevových prostorů  $W^{k,p}(\Omega)$ , což jsou prostory funkcí, pro které existují slabé derivace. Příklad takové funkce, která je spojitá a po částech  $C^1$  na intervalu  $[0, 7]$ , je na Obr.3.4. Numerická metoda, které je tato kapitola věnována a která vede na výpočet konstant pro funkce z těchto prostorů, se nazývá metoda konečných prvků (angl. "finite elements").

Tato metoda se začala vyvíjet kolem roku 1940 a za její hlavní zakladatele se považují ruský matematik A. Hrennikoff a německý matematik R. Courant. Časem tato metoda prošla bouřlivým vývojem především v inženýrství a matematické fyzice. Základní myšlenkou této metody je to, že místo původních funkcí  $u$  z příslušných prostorů budeme pracovat s jejich aproximacemi pomocí speciálních funkcí (tzv. "hat functions").



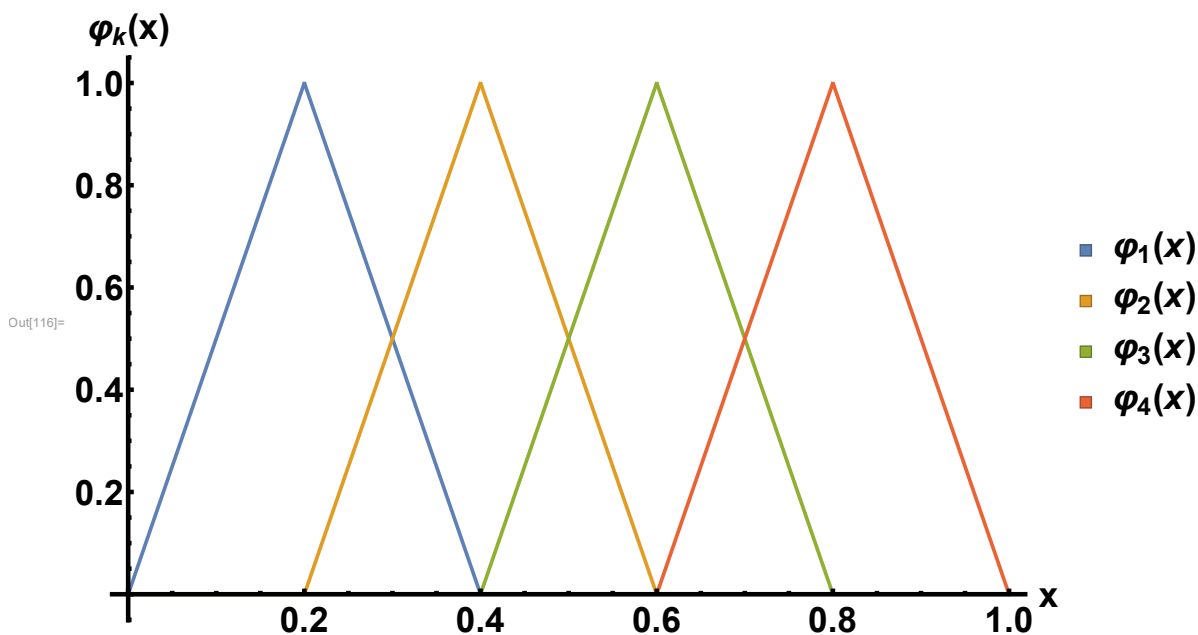
Obrázek 3.4: graf po částech lineární funkce  $h$  na intervalu  $[0, 7]$  .

### 3.1 1D případ

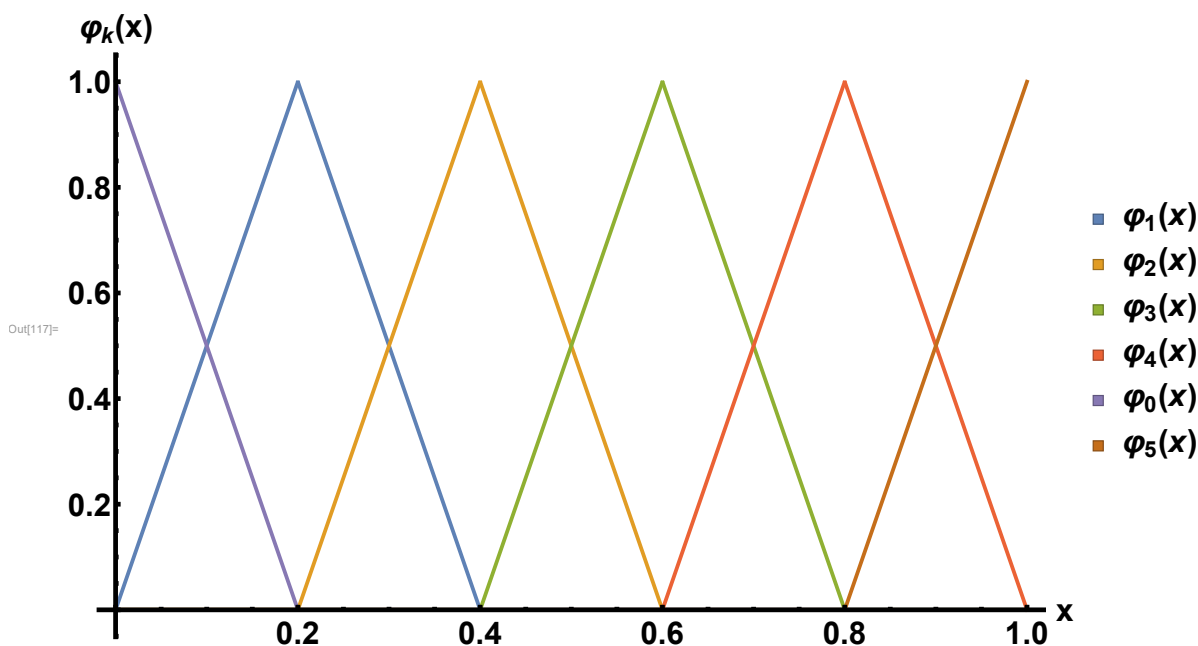
Pro začátek uvedeme myšlenku pro funkce jedné proměnné. Uvažujme interval  $[a, b]$  a homogenní funkce z prostoru  $U_0^1((a, b))$  (viz. (1.1)). Uvažujme dále rovnoměrné dělení tohoto intervalu s  $n + 1$  dělicími body a normou dělení  $h = \frac{b-a}{n}$ . Příslušnou množinu konečných prvků (označme  $M$ ) potom budou tvořit  $n$  funkcí, které jsou definovány následovně

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - (a + (k-1)h)}{h}, & a + (k-1)h \leq x < a + kh \\ -\frac{x - (a + (k+1)h)}{h}, & a + kh \leq x < a + (k+1)h, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (3.2)$$

Pro interval  $[0, 1]$  a  $n = 4$  budeme mít 4 funkce, jejichž graf ukazuje Obr. 3.5. V případě funkcí s nulovým průměrem bude mít množina  $M$  dva prvky navíc (viz Obr. 3.6), bez nich by totiž nebylo možné aproximovat funkci  $u$  v krajních bodech. Pro všechny funkce  $\varphi_k$  z množiny  $M$  platí následující:



Obrázek 3.5: "hat functions" pro homogenní funkce na intervalu  $[0, 1]$  s 5 dělicími body



Obrázek 3.6: "hat functions" pro nehomogenní funkce na intervalu  $[0, 1]$  s 5 dělicími body

1. Všechny tyto funkce jsou spojité na celém  $\mathbb{R}$  a po částech lineární (a tedy po částech  $C^1$ ), a navíc mají slabou derivaci na celém  $\mathbb{R}$ .
2. Maximum každé funkce  $\varphi_k(x)$  je 1 a nabývá se v bodě  $a + kh$ .
3. To co pro nás bude důležité při numerickém výpočtu konstant je to, že skalární součin dvou funkcí  $\varphi_i(x), \varphi_j(x)$  je nenulový jenom tehdy, když  $i = j$  nebo  $|i - j| = 1$ . Platí tedy

$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \neq 0$  jenom tehdy, když je funkce skalárně vynásobená sama se sebou nebo se sousední funkcí.

Zvolme nějakou funkci  $u \in U_0^1((a,b))$ . Pro aproximaci této funkce a její derivace konečnými prvky z množiny  $M$  bude platit

$$\begin{aligned} u(x) &\sim \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(x), \\ u'(x) &\sim \sum_{k=1}^n u'_k \varphi_k(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde  $u_k$  jsou příslušné Fourierovy koeficienty funkce  $u(x)$  vzhledem k prvkům množiny  $M$  a jsou dány vztahem

$$u_k = \frac{1}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \int_a^b u(x) \varphi_k(x) dx,$$

a  $u'_k$  chápeme jako slabou derivaci  $u_k$ . Dosadíme-li za  $u$  a  $u'$  příslušné aproximace (3.3), dostáváme

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2((a,b))}^2 &= \int_a^b u^2(x) dx \sim \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \\ &= \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle. \end{aligned}$$

Analogicky

$$\|u'\|_{L^2((a,b))}^2 \sim \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \langle \varphi'_i, \varphi'_j \rangle.$$

Poslední vztahy můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\|u\|_{L^2((a,b))}^2 \sim \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

analogicky

$$\|u'\|_{L^2((a,b))}^2 \sim \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \langle \varphi'_1, \varphi'_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi'_1, \varphi'_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi'_n, \varphi'_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi'_n, \varphi'_n \rangle \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Matice skalárních součinů  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  ve (3.4) je v literatuře označována jako  $M$  ("Mass matrix") a matice ve (3.5) jako  $K$  ("Stiffness matrix"). Položme  $v = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Poslední dva vztahy (3.4) a (3.5) se nám zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2((a,b))}^2 &\sim v M v^T, \\ \|u'\|_{L^2((a,b))}^2 &\sim v K v^T. \end{aligned}$$

Původní úloha hledání maxima zlomku

$$\frac{\|u\|_{L^2((a,b))}^2}{\|u'\|_{L^2((a,b))}^2},$$

což je ekvivalentní jako hledání minima zlomku

$$\frac{\|u'\|_{L^2((a,b))}^2}{\|u\|_{L^2((a,b))}^2},$$

se převede na úlohu hledání minima zlomku

$$\frac{vKv^T}{vMv^T}, \quad (3.6)$$

který je označován jako zobecněný Rayleighho koeficient a hledání jeho minimální hodnoty vede na zobecněnou úlohu vlastních čísel

$$Kv = \lambda Mv.$$

Spočteme-li hodnoty skalárních součinů mezi prvky  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  a jejich derivacemi, dostaneme explicitní tvary matic tuhosti a hmotnosti. Pro homogenní verzi bude platit

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix},$$

$$M = h \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \dots & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2/3 \end{pmatrix}.$$

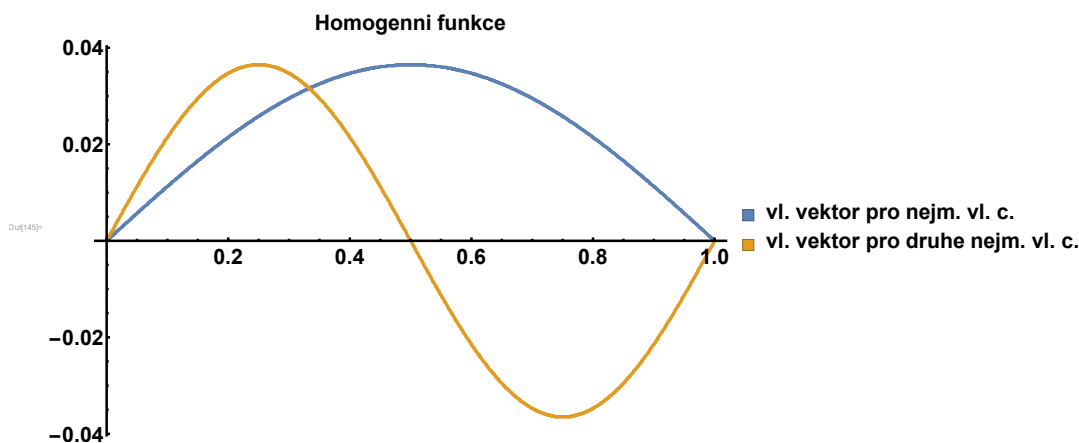
A v případě nehomogenních funkcí budou matice tuhosti a hmotnosti mít tvary

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

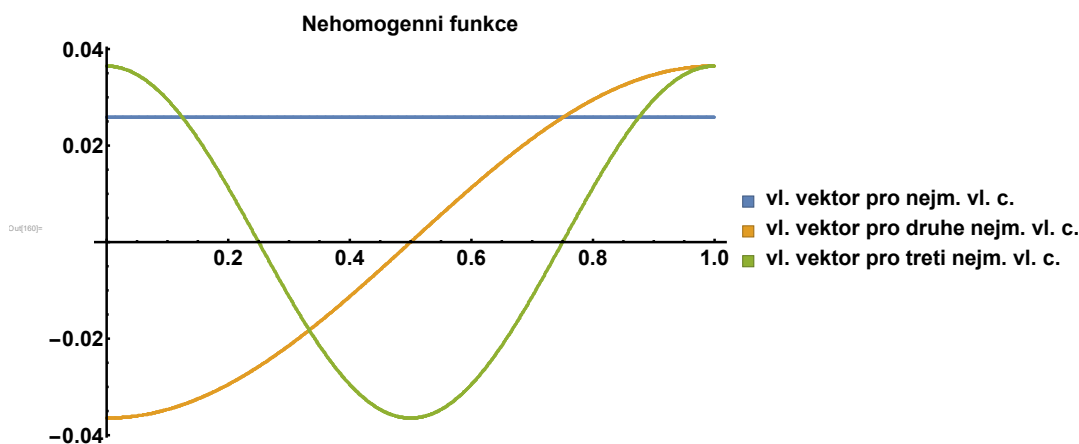
$$M = h \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

kde  $h$  je norma dělení uvažovaného intervalu.

Nyní se můžeme podívat na vlastní čísla a vlastní vektory matic tuhosti a hmotnosti. Pro začátek zvolme interval  $[0, 1]$  a 1500 dělicích bodů. Na Obr. 3.7 jsou nakresleny vlastní vektory pro dvě nejmenší vlastní čísla zobecněné úlohy  $Kv = \lambda Mv$  pro homogenní funkce. Obr. 3.8 potom zobrazuje vlastní vektory pro tři nejmenší vlastní čísla v případě nehomogenních funkcí.



Obrázek 3.7: Vlastní vektory pro dvě nejmenší vlastní čísla zobecněné úlohy  $Kv = \lambda Mv$  pro homogenní funkce.



Obrázek 3.8: Vlastní vektory pro 3 nejmenší vlastní čísla zobecněné úlohy  $Kv = \lambda Mv$  pro nehomogenní funkce.

V homogenním případě má vlastní číslo  $\lambda_{min}$  hodnotu 9.86960. Použijeme-li explicitní vztah pro Poincarého konstantu pro homogenní funkce jedné proměnné, dostáváme

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\pi^2}{(b-a)^2} = \pi^2 \approx 9.86961, \quad \left| \frac{1}{c^2} - \lambda_{min} \right| \approx 0.00001 = 10^{-5}.$$

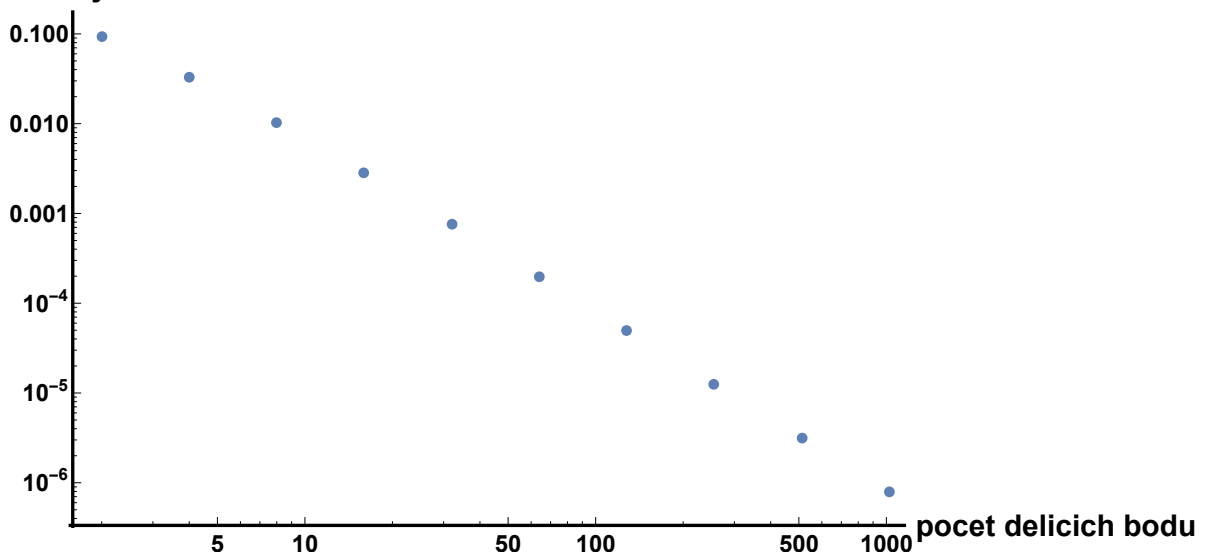
Vlastní vektor modré barvy na Obr. 3.7 potom není nic jiného než příslušná extrémní funkce (přesněji její aproximace).

Podobně pro nehomogenní případ dostáváme hodnotu nejmenšího vlastního čísla  $\lambda_1 = 0$  a druhého nejmenšího vlastního čísla  $\lambda_2 = 9.86960$ . Vzhledem k tomu, že v 1D mají Poincarého konstanty pro homogenní funkce a funkce s nulovým průměrem stejnou hodnotu, dostáváme opět

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\pi^2}{(b-a)^2} = \pi^2 \approx 9.86961.$$

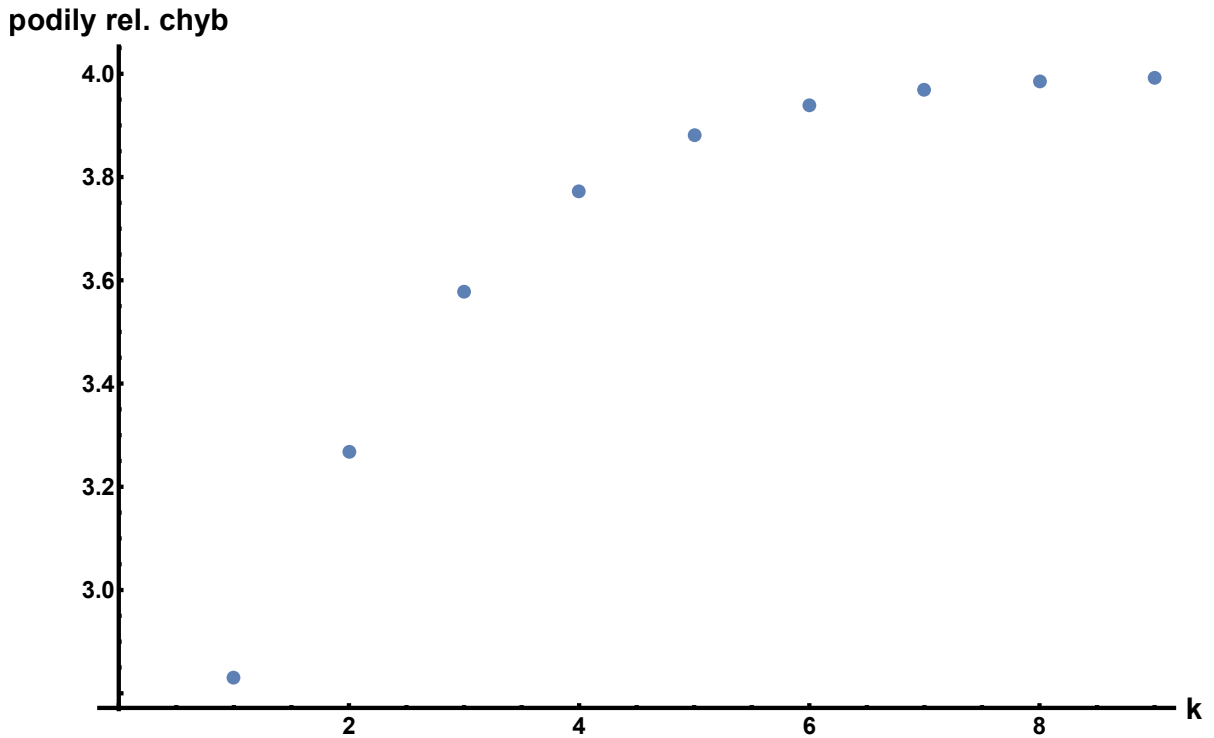
a extrémní funkce je tentokrát vlastní vektor (viz Obr. 3.8 označený žlutou barvou) pro druhé nejmenší vlastní číslo  $\lambda_2$ . Následující dva grafy zobrazují konvergenci  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k Poincarého konstantě. V obou případech (jak pro homogenní funkce, tak i pro funkce s nulovým průměrem) dostáváme kvadratickou konvergenci vzhledem k počtu dělicích bodů (a tedy počtu konečných prvků).

rel. chyba



Obrázek 3.9: Relativní chyby mezi  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  a Poincarého konstantou pro homogenní funkce na intervalu  $[0, 1]$ .





Obrázek 3.10: Podíly sousedních relativních chyb z grafu nahoře.  $k$  na ose  $x$  znamená pořadí iterace. V  $k$ -té iteraci máme  $2^k$  dělicích bodů. Konvergence podílů relativních chyb k hodnotě 4 znamená kvadratickou konvergenci  $1/\sqrt{\lambda_{min}}$  k Poincarého konstantě pro homogenní funkce na intervalu  $[0, 1]$ .

## 3.2 2D případ

V této podkapitole si ukážeme princip metody konečných prvků ve 2D pro oblasti typů obdélník, L-oblast a mezikruží. U funkcí více proměnných nelze bohužel zaručit pevně stanovenou konvergenci pro každou oblast. Zpomalení konvergence způsobují např. oblasti, které nejsou konvexní nebo mají v některých místech na své hranici tupé úhly (např. L-oblast má v jednom bodě své hranice úhel  $270^\circ$ , nicméně stále ještě není kritickým případem, kdy metoda konečných prvků konverguje velmi pomalu).

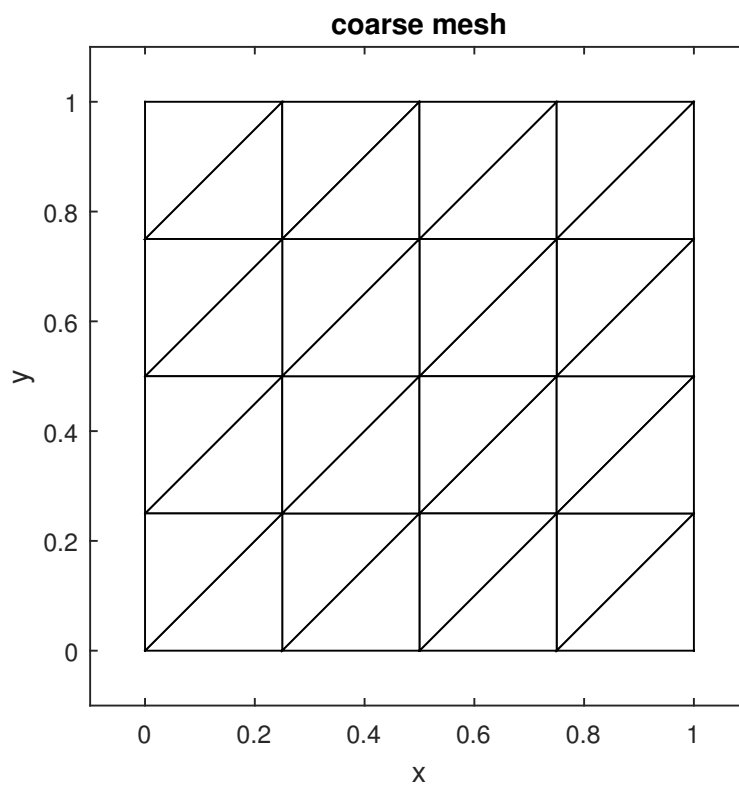
Oproti 1D případu, kde jsme měli interval a jeho rovnoměrné rozdělení, budeme oblasti ve dvou dimenzích tzv. triangularizovat. Většina výsledků, které zde uvedeme, byly získané použitím matlabovského kódu [5]. V následujících obrázcích si nejprve ukážeme příklady triangulací pro čtverec  $[0, 1] \times [0, 1]$  a mezikruží danou dvěma kružnicemi se středy v počátku a poloměry  $2$  a  $1/2$  (triangulace L-oblasti je velmi podobná triangulaci obdélníkové oblasti). Dále si ukážeme příklady extrémních funkcí pro L-oblast a mezikruží (pro obdélníkovou ob-

last by obrázky byly téměř shodné s obrázky 1.8, 1.9 a 1.10. Výpočtem se nechá ověřit, že konvergence pro všechny tyto 3 typy oblastí je lineární vzhledem k počtu konečných prvků ve 2D (nezávisle na tom, zda počítáme konstantu pro homogenní funkce nebo funkce s nulovým průměrem). Následující Tabulka 3.1 obsahuje vypočtené hodnoty konstant pro každou ze tří uvažovaných oblastí a pro oba typy funkcí (homogenní a s nulovým průměrem).

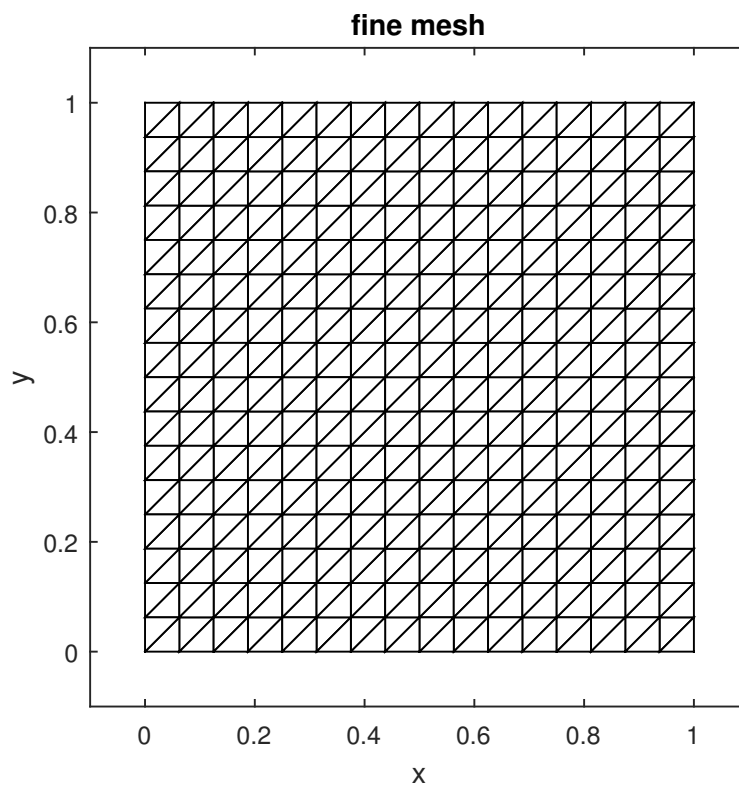
	čtverec	L-oblast	mezikruží
homogenní funkce	0.22506213	0.16102866	0.48807534
funkce s nulovým průměrem	0.31830190	0.41157704	1.21616527

Tabulka 3.1: Poincarého konstanty pro oba typy funkcí numericky vypočtené pro čtverec  $[0, 1] \times [0, 1]$ , L-oblast  $[0, 1] \times [0, 1] \setminus [0.5, 1] \times [0.5, 1]$  a mezikruží dané dvěma kružnicemi se středy v počátku a poloměry 2 a 0.5 .

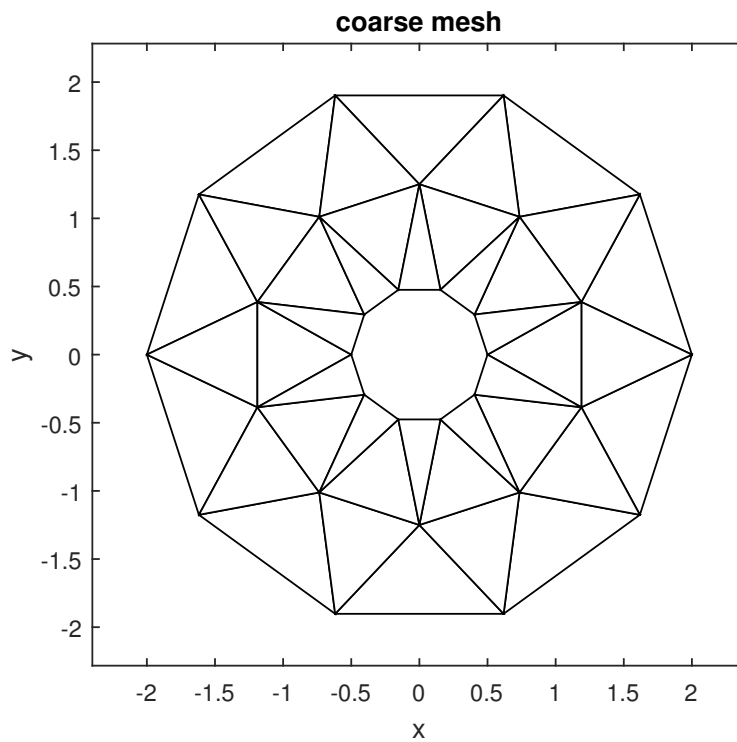
**Poznámka 23.** *Popisky grafů v následujících obrázcích nemusí odpovídat terminologii používané v této práci. Všechny detaily se proto uvádí pod každým obrázkem.*



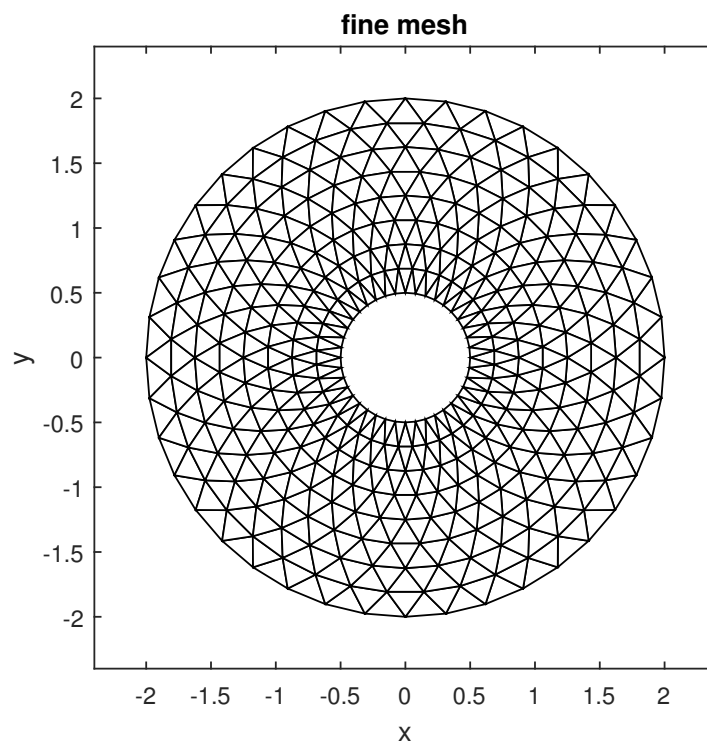
Obrázek 3.11: Hrubá triangulace obdélníkové (čtvercové) oblasti  $[0, 1] \times [0, 1]$ .



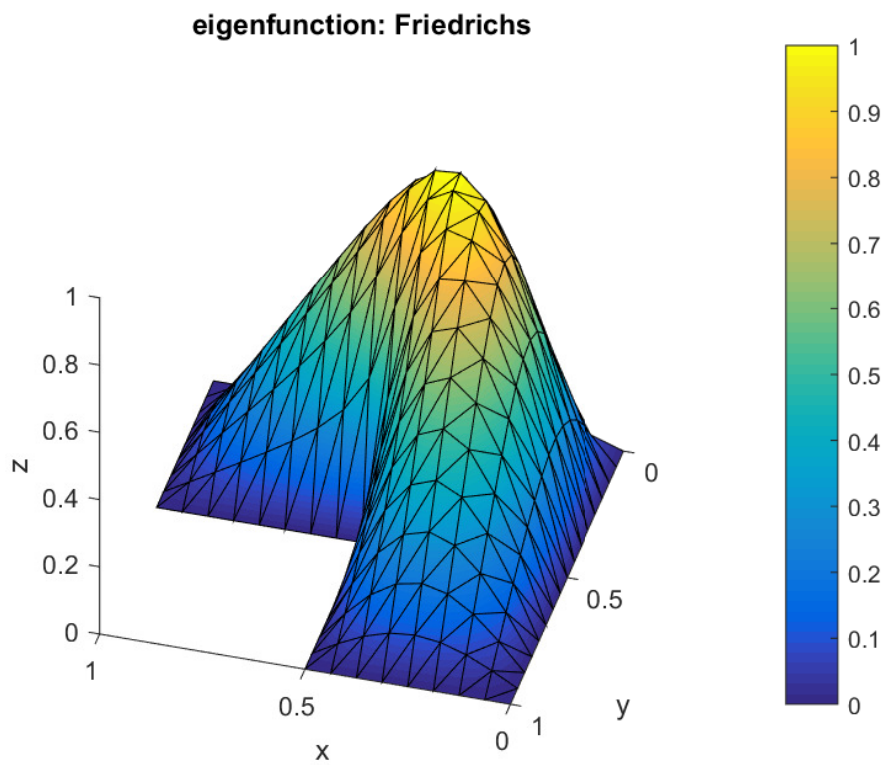
Obrázek 3.12: Jemná triangulace obdélníkové (čtvercové) oblasti  $[0, 1] \times [0, 1]$ .



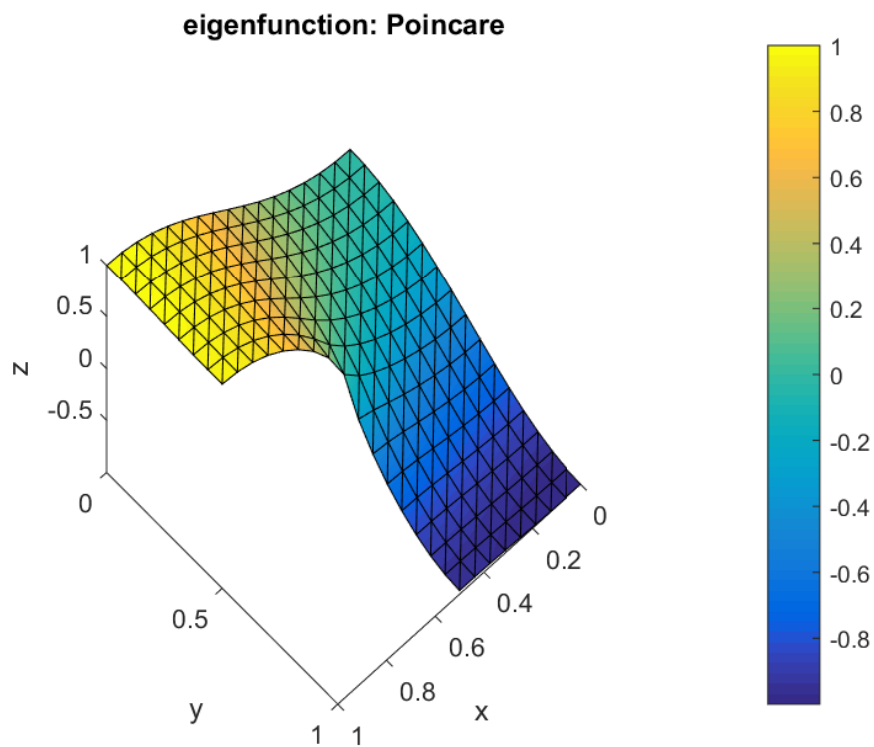
Obrázek 3.13: Hrubá triangulace mezikruží danou dvěma kružnicemi se středem v počátku a poloměry 2 a  $1/2$ .



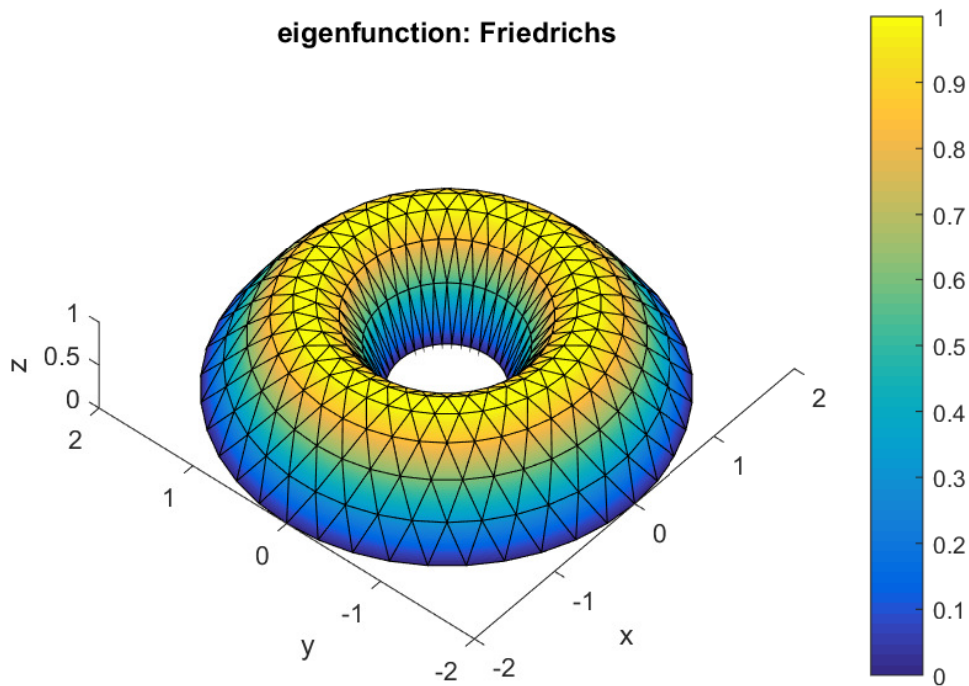
Obrázek 3.14: Jemná triangulace mezikruží danou dvěma kružnicemi se středem v počátku a poloměry 2 a  $1/2$ .



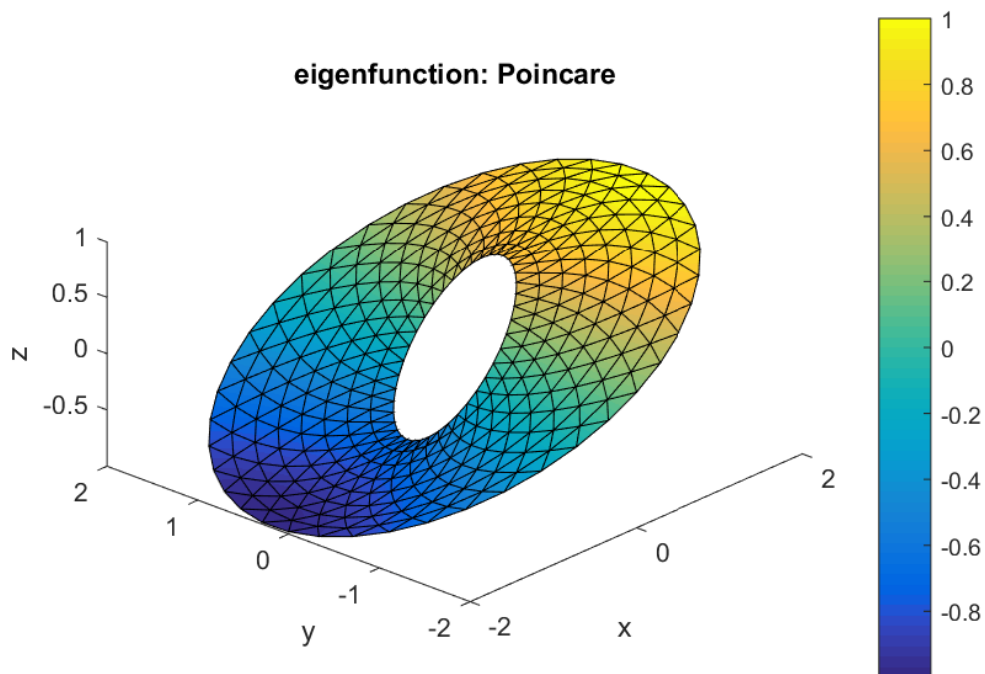
Obrázek 3.15: Homogenní extrémní funkce pro L-oblast .



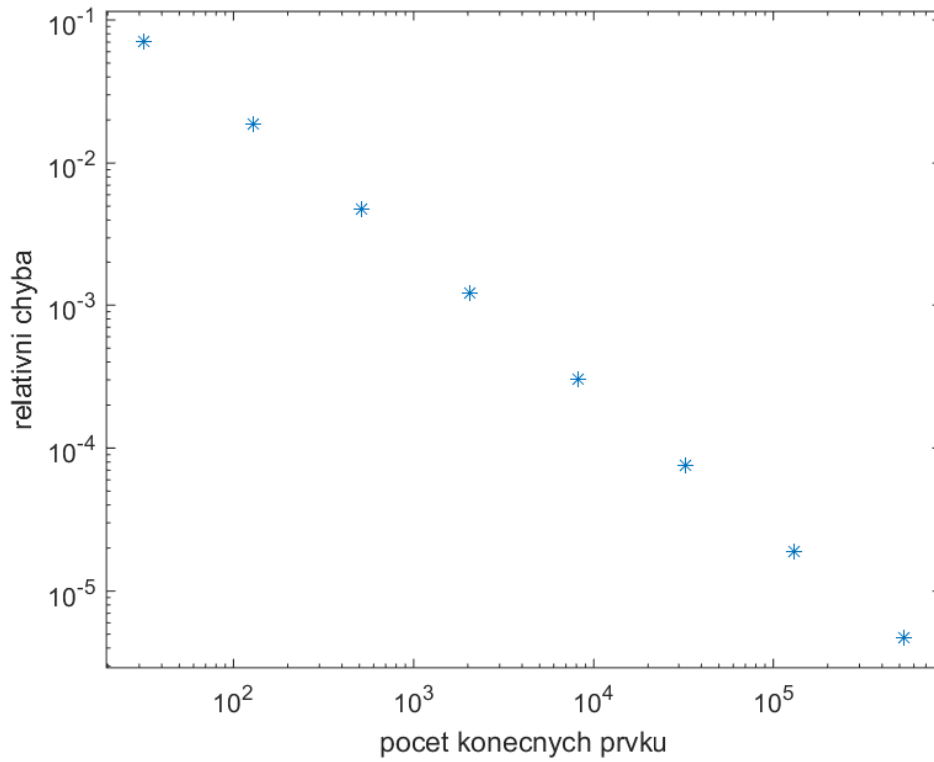
Obrázek 3.16: Extrémní funkce s nulovým průměrem pro L-oblast .



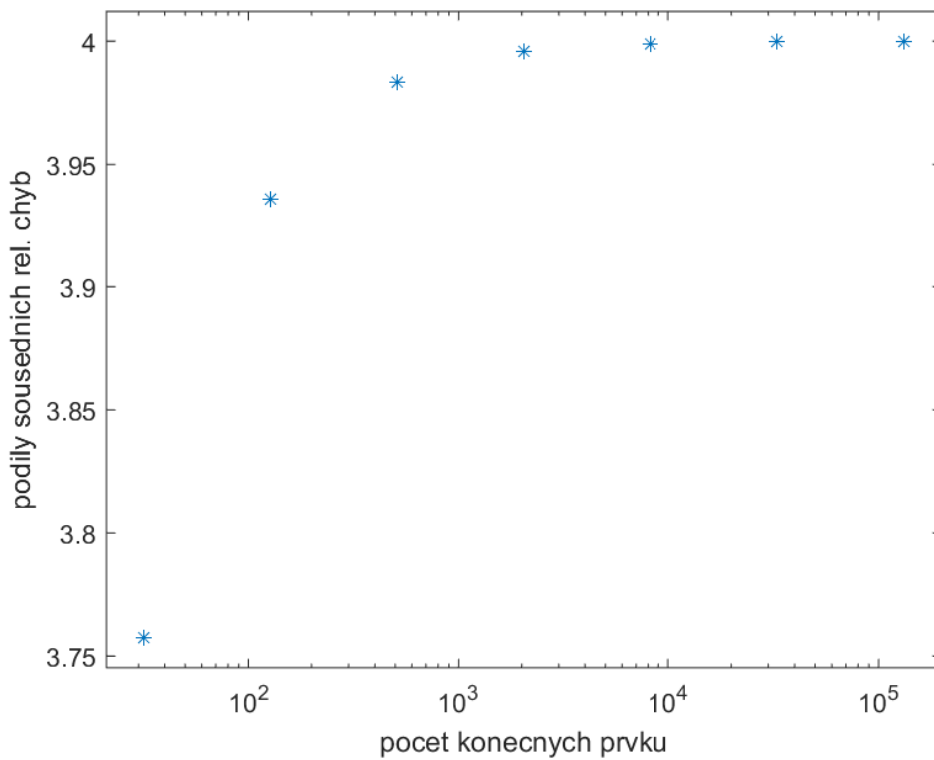
Obrázek 3.17: Homogenní extrémní funkce na mezikruží .



Obrázek 3.18: Extrémní funkce s nulovým průměrem na mezikruží .



Obrázek 3.19: Relativní chyba vzhledem k počtu konečných prvků ve 2D pro čtverec .



Obrázek 3.20: Podíl dvou sousedních relativních chyb z grafu nahoře .

# Závěr

Teoretické odvození nám na jednu stranu umožní určit přesné hodnoty konstant včetně extrémních funkcí. Explicitně jsou v práci odvozeny hodnoty konstant pro funkce jedné, dvou a tří proměnných na oblastech tvaru intervalu, obdélníku a kvádrů. Tyto a také další hodnoty pro jednoduché geometrické oblasti jsou známé z literatury [2], nám jejich odvození posloužilo jako úvod do problematiky. Dále se dají např. odvodit také souvislosti s Laplaceovým operátorem (Kapitola 2).

Na druhou stranu je explicitní výpočet z hlediska obtížnosti omezující jednak pro velice speciální typy oblastí, ale také co se týče požadavků na funkce. Naopak, numerické metody pro výpočet konstant jsou schopny dobře se poradit s oblastmi různých typů (ale i přesto pro některé oblasti můžeme mít např. velmi pomalé konvergence), a fungují i za slabších předpokladů na funkce.

Teorie Friedrichsových a Poincarého nerovností je dobrou ilustrací toho, jak jsou matematická analýza a numerická matematika mezi sebou provázané. Díky bouřlivému vývoji počítačového softwaru za posledních několika desítek let jsme schopni velké množství výsledků odvozených teoreticky implementovat v počítači a verifikovat jejich správnost. Nebo také naopak, experimentování s různými náročnějšími výpočty v počítačovém softwaru nám umožňuje hledat souvislosti v těch oblastech matematicky, které doposud nebyly prozkoumány, a na základě získaných výsledků tyto věci později dokázat teoreticky.



# Literatura

- [1] VALDMAN, J: Minimization of Functional Majorant in A Posteriori Error Analysis based on H(div) Multigrid-Preconditioned CG Method. *Advances in Numerical Analysis*, vol. 2009, Article ID 164519 (2009).
- [2] KUZNETSOV, N., NAZAROV, A.: Sharp constants in the poincaré, Steklov and related inequalities (A survey), *Mathematika*, vol. 61, 328–344 (2015).
- [3] KUFNER, A., KADLEC, J., *Fourierovy řady*, Academia, 1969.
- [4] REKTORYS, K., *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, 1999.
- [5] VALDMAN, J. :Computation of the Friedrichs and Poincare constants in 2D/3D. MATLAB package.  
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23991>