Ekonomická fakulta
Faculty of Economics
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Ekonomická Fakulta
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Bakalářská práce

Ekonomické úlohy řešené nelineární interpolací

Vypracoval: Petr Závorka
Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice 2019

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Ekonomická fakulta
Akademický rok: **2017/2018**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Petr ZÁVORKA**
Osobní číslo:	**E16235**
Studijní program:	**B6208 Ekonomika a management**
Studijní obor:	**Účetnictví a finanční řízení podniku**
Název tématu:	**Ekonomické úlohy řešené nelineární interpolací**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce bude obsahovat zpracování ekonomických jevů, ukazatelů a veličin pomocí numerických metod. Student v teoretické části popíše podstatu interpolace a definuje různé polynomiální (nelineární) i nepolynomiální interpolace. Dále pak vybere vhodnou ekonomickou veličinu (příp. veličiny), které v průběhu času mění svou hodnotu. Pomocí vybrané interpolační metody experimentálně ověří, že na základě předchozích známých hodnot veličiny lze predikovat její hodnotu v čase budoucím. Navrhne vhodnou strategii, pomocí níž provede praktický odhad této veličiny pro nejbližší období (měsíce, roky, atd.). K tomu účelu vhodným způsobem použije dostupný software.

Metodický postup:

1. Seznámení se s metodami numerické matematiky.
2. Formulace a odvození interpolačního polynomu.
3. Studium dalších typů interpolace.
4. Vyhledání a shromáždění dat.
5. Výběr vhodné interpolační metody a provedení interpolace na vybraných datech.
6. Srovnání výsledků, diskuse a formulace závěrů.

Rozsah grafických prací:	**dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy:	**40 - 50 stran**
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná**

Seznam odborné literatury:

1. **Beu, T.A. (2017).** *Introduction to numerical programming.* **CRC Press, Boca Raton.**
2. **Burden, R.L., & Faires J.D. (2011).** *Numerical Analysis.* **9th edition, Brooks/Cole, Boston.**
3. **Courant, R., & John, F. (1999).** *Introduction to Calculus and Analysis I.* **Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.**
4. **Horová, I., & Zelinka, J. (2008).** *Numerické metody.* **2.vydání, MU Brno.**
5. **Organisation for economic co-operation and development [online]. [cit. 7.3.2018]. Dostupné z: http://stats.oecd.org/**
6. **Zörnig, P. (1989).** *Numerické metody.* **FEL ČVUT Praha.**

Vedoucí bakalářské práce:	**Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**
	Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce:	**19. ledna 2018**
Termín odevzdání bakalářské práce:	**12. dubna 2019**

doc. Ing. Ladislav Rolínek, Ph.D.
děkan

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
Studentská 13
370 05 České Budějovice
L.S.

doc. RNDr. Jana Klicnarová, Ph.D.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 22. března 2018

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem zpracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47 zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Ekonomickou fakultou – elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona číslo 111/1008 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací These.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Písku 9.4. 2019

……………………………..

Petr Závorka

Poděkování

Rád bych poděkoval Jihočeské společnosti pro rozvoj lidských zdrojů za poskytnutí dat k tvorbě této práce. Jmenovitě paní ředitelce ing. Daně Feferlové za její ochotu ke spolupráci a začlenění do projektu modelování a predikce trhu práce. Dále panu ing. Martinu Necidovi za spolupráci a koordinaci spolupráce. Poděkování patří také vedoucímu práce Mgr. Petru Chládkovi Ph.D. za cenné tipy a postřehy v průběhu vytváření této práce.

Obsah

1. ÚVOD

1.1. Cíle

Cílem této práce je posoudit vhodnost užití numerické metody pro modelování a predikci ekonomických veličin, konkrétně průměrných hrubých mezd. A dále posoudit vhodnost interpolační metody pro využití v projektu KOMPAS.

1.2. Užití

Aproximace se využívají ve většině vědních disciplín. Ani ekonomika nezůstává pozadu. V tomto oboru je hojně využívána zejména lineární interpolace, například při výpočtech vnitřního výnosového procenta, kterým se hodnotí výnosnost investic. Co se týče nelineárních metod, používají se zejména v makroekonomickém odvětví a pro extrapolaci údajů. Avšak nejvíce se setkáváme s metodami statistickými, těmi se modeluje například chování aktiv na burze. Používají se i propočty dopadu změn podniku na jeho výsledky na trhu a pravděpodobnost různých variant. Statistickými metodami se také modeluje například měnový kurz nebo se díky nim zjišťuje, jak zacílit na trh.

Možnosti využití interpolačních metod na řešení dynamických ekonomických modelů lze dohledat v článku (Judd, 2014) .

V této práci budou zjišťovat, zda lze aproximace využít na modelování a predikci trhu práce v rámci projektu Kompas ve spolupráci s Jihočeskou společností pro rozvoj lidských zdrojů. Zde jsou popsány jen vybrané části trhu práce, například se jedná o informace o hrubých mzdách dle klasifikace CZ-NACE v Jihočeském kraji.

2. Literární rešerše

2.1. Aproximace

„Aproximace je způsob, kterým zjišťujeme hodnoty funkce, které neznáme. Zpravidla se jedná o příliš složité funkce, které se nahrazují funkcemi jednoduššími. Aproximace nám dává pouhé přiblížení ke skutečné hodnotě funkce.“ (Zörnig, 1989) Předpokládejme, že máme funkci $F(x)$ a realizace této funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pro demonstraci je určena funkce $F(x)$ následující tabulkou.

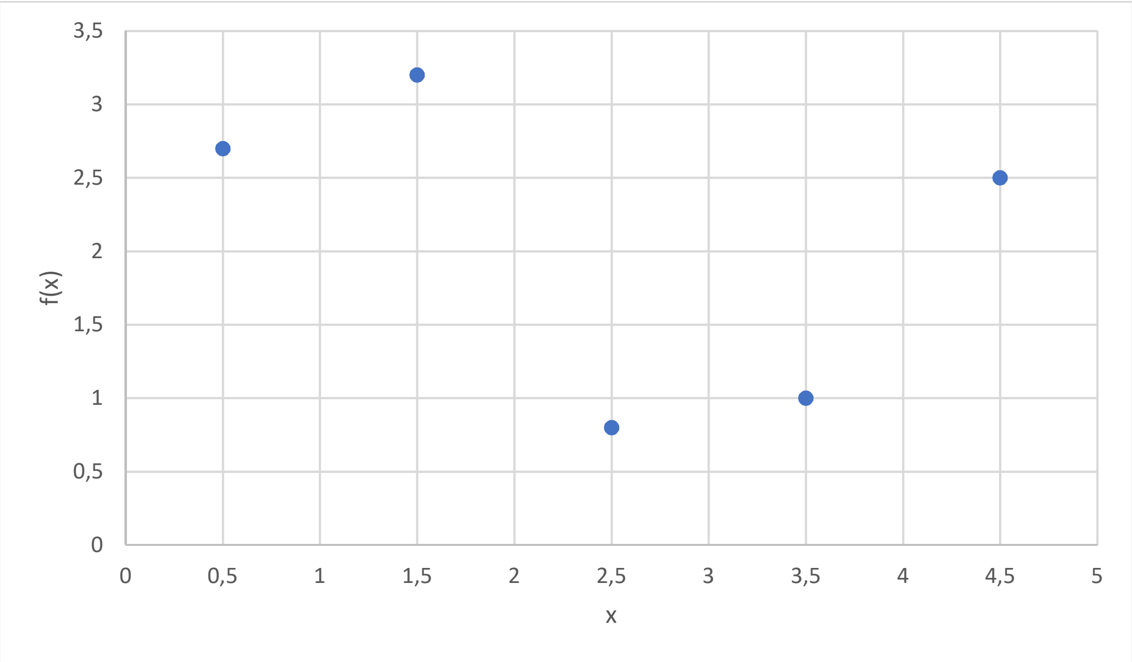
Tabulka 1 realizace funkce F(x)

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
f(x)	2,7	3,2	0,8	1	2,5

zdroj: vlastní výpočty

Pak tato funkce zobrazena graficky vypadá následujícím způsobem.

Graf 1 realizace F(x)



zdroj: vlastní výpočty

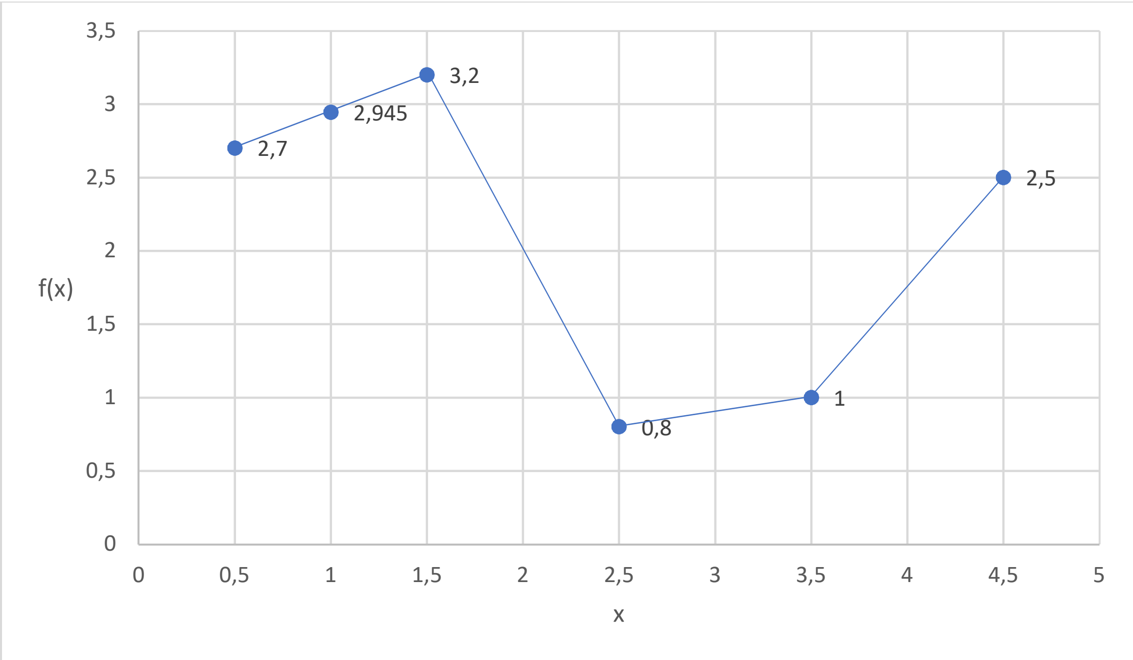
Toto je nespojitá funkce. Pokud se bude chtít určit hodnota v bodě x=1, tak v původním zadání funkce je tato hodnota neznámá, proto se musí k jejímu zjištění využít aproximace, která z nespojité funkce udělá funkci spojitou.

2.1.1. Lineární splajn

Metod aproximace je celá řada. Nejjednodušší je aproximace pomocí lineárního splajnu[1]. „Tato metoda aproximace se zakládá na principu prokládání přímky mezi každé dva sousední body zkoumané funkce.“ (Burden, 2001). Díky tomuto proložení jsme schopni určit alespoň přibližnou funkční hodnotu *f(x)*. Na následujícím příkladu lze pozorovat celý postup výpočtu pro x=1.

V tomto konkrétním případě bude proložení lomenou funkcí vypadat následovně.

Graf 2 proložení za pomocí lineárního splajnu



Když je tato aproximace úspěšně hotová, jsme schopni určit přibližnou funkční hodnotu *f(1)*. Rovnice přímky, kterou jsme spojili body x=0,5 a x=1,5, je v obecném tvaru

$$0{,}5x - y + 2{,}45 = 0\ .$$

Z této rovnice je možné snadno dopočítat, že *f(1)*=2,95. Právě proto, že je tato metoda nejjednodušší, její výsledek není příliš přesný. Další metodou, která je již přesnější, ale stále dosti jednoduchá, je metoda nahrazení funkce pomocí interpolačního polynomu (dále jen interpolace). O této metodě a všech způsobech, jak určit interpolační polynom, bude více pojednáno v následující kapitole, z toho důvodu bude zatím přeskočena.

[1] Též zvaná lomená funkce.

2.1.2. Kubický splajn

Tato metoda je komplikovanější verzí lineárního splajnu. V tomto případě prokládáme každé dva sousední body příslušnou kubickou funkcí. Základní rozdíl mezi kubickým splajnem a interpolací tkví ve faktu, že interpolační polynom prochází všemi uzlovými body (body známé z tabulkového zadání), zatímco v případě těchto splajnů kubická funkce prochází pouze sousedními body.

„Aby bylo dosaženo jednoznačnosti, při konstrukci se zadává tzv. okraj, který je buď určen první derivací nebo druhou derivací.

Každý splajn bude označen *S(x)*, x= 1,2,…,n. Poté se nalezne příslušný splajn na intervalu <x_i;x_{i+1}>, který se stanoví následovně.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Takto nalezená funkce musí ovšem vyhovovat následujícím podmínkám:

$$S_i(x_i) = f_i(x_i)\,, i = 0,1,\dots,n-1\,, S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})\,, i = 0,1,\dots,n-2$$

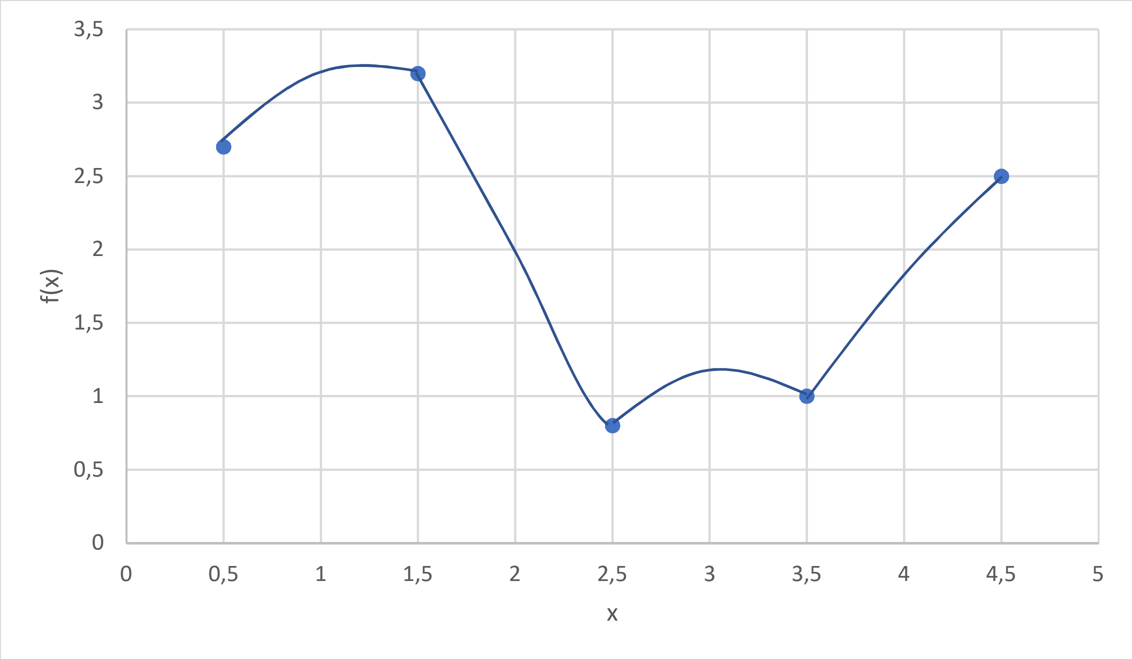
$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), i = 0,1,\dots,n-2$$

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), i = 0,1,\dots,n-2$$

„. (Horová, 2008)

Pokud takto vypočtené funkce S_i zobrazíme graficky, bude funkce *F(x)* vypadat následovně.

Graf 3 funkce F(x) aproximována pomocí splajnů, ilustrace



Tento způsob aproximace je přesnější než předešlé metody, avšak početně mnohem náročnější, proto zde bude pouze představena grafická ilustrace této metody a nebude počítána.

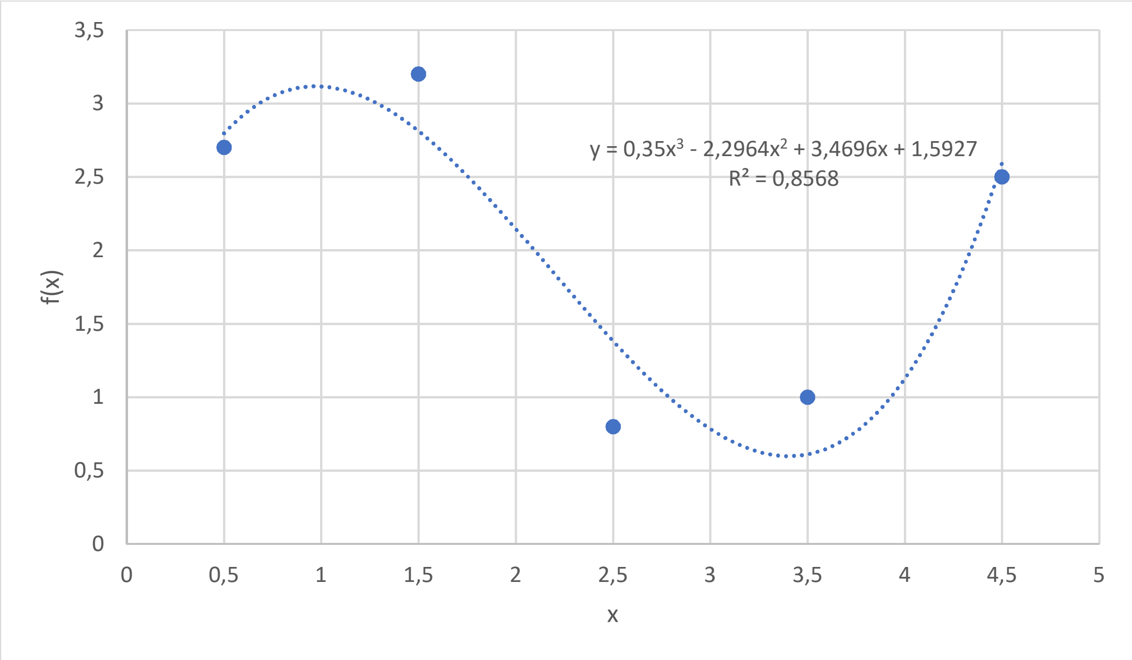
2.1.3. Regrese

Nyní bude popsána metoda statistická a tou jest regrese. Jedná se o statistickou metodu, kterou popisuje ve své knize J. M. Wooldridge : „Základním předpokladem je, že funkce *F(x)* je funkcí náhodné veličiny X, která má své rozdělení hustoty pravděpodobnosti a svou distribuční funkci." Do této chvíle byla každá realizace *f(x)* jednoznačné číslo, nyní je to vnímáno spíše jako skupina bodů, z nichž každý má svou vlastní pravděpodobnost, že funkce *F(x)* nabyde hodnoty právě *f(x)* v bodě *x*. „Tento přístup umožnuje modelovat s již započítanou nepřesností. Při modelaci křivky regrese nemusí nutně procházet všemi body *f(xi)*, i= 0,1,…,n, ale v největší blízkosti těchto bodů. Rovnice regresní křivky je stanovována metodou nejmenších čtverců. U každé rovnice takovéto regresní křivky se udává koeficient determinace R^2, který udává, jak velkou část z celkové variability hodnot závislé proměnné se podařilo naším modelem vysvětlit." (Wooldridge, 2009)

Tato metoda má však nevýhodu, její přesnost je úměrná počtu pozorování. Pro ilustraci na příkladné funkci *F(x)* použijeme regresní model ve tvaru.

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \qquad [7]$$

Graf 4 regresní model



zdroj: vlastní výpočty

V tomto případě se koeficienty α, β, γ, δ určují pomocí metody nejmenších čtverců. Model tedy vychází následovně.

$$y = 0{,}35x^3 - 2{,}2964x^2 + 3{,}4696x + 1{,}5927$$

Avšak nesmí se zapomenout, že takto vypočtená aproximace je pouze bod z intervalu pravděpodobných hodnot. Tento interval se dále musí zkonstruovat a rozsah tohoto intervalu je závislý na počtu pozorování a rozdělení náhodné veličiny X.

2.2. Interpolace

Nyní bude blíže popsána interpolace. Jak již bylo řečeno, tato metoda je používána k aproximaci funkce, která je velmi složitá na popsání. Interpolace využívá jeden z nejjednodušších útvarů v matematice a tím jest polynom.

2.2.1. Polynomiální interpolace

Tato metoda je nejjednodušší lineární interpolací a je používána pro funkce zadané tabulkou hodnot funkce $f\ (x)$. Interpolační funkce $\varphi(x)$ je dána interpolačním polynomem, tento polynom dosahuje stupně nejvýše n, kde n je počet známých bodů a je zapsán v následujícím tvaru.

$$\varphi_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Pro tento polynom platí: $\varphi(x_i) = f(x_i)$, i=0,1,…,n.

„Úmluva. Body x_i, i = 0,1,…,n, $x_i \neq x_k$ pro i ≠ k budeme nazývat uzly, polynom P_n interpolační polynom. $\prod_n$ množinu všech reálných polynomů stupně nejvýše n tvaru:**Chyba! Záložka není definována.**

$$P_n(x_i) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Věta 6.1. Pro (n+1) daných dvojic čísel

(x_i, f_i), i=0,1,…,n, $x_i \neq x_k$ pro i ≠ k, existuje právě jeden polynom $P_n \in \prod_n$ takový, že:

$P_n(x_i) = f_i$, i= 0,1,…,n.

Důkaz.

Jednoznačnost: Předpokládejme, že existují dva interpolační polynomy $P_n, Q_n \in \prod_n$ splňující podmínky věty 6.1,

$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = f_i$, i = 0,1,…,n.

Položíme $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$. Je zřejmé, že $R_n \in \prod_n$ a dále $R_n(x_i) = 0$, i = 0,1,….n, tzn. Rn má alespoň n+1 různých kořenů. To je ale spor s předpokladem, že R_n je polynom stupně nejvýše n. Odtud plyne, že polynomy P_n a Q_n musí být totožné.“ (Horová, 2008)

2.2.2. Lagrangeův interpolační polynom

Nyní bude blíže popsáno, jakým způsobem se stanoví konkrétní polynom. „Nejdříve sestrojíme polynom l_i, i = 0,1,…,n s těmito vlastnostmi:

(a) l_i je polynom stupně n,

(b) $l_i(x_j) = 0 \; pro \; i \neq j$

$l_i(x_j) = 1 \; pro \; i = j$

Je zřejmé, že

$$l_i(x) = A_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

Konstantu A_i určíme tak, aby byla splněna podmínka $l_i(x_i) = 1$, tedy

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

a odtud

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \qquad (15)$$

Definujeme nyní polynom P_n vztahem.

$$P_n(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + \dots + l_n(x)f_n = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)f_i$$

Snadno se ověří, že tento polynom splňuje interpolační podmínku 6.1, a protože je lineární kombinací polynomů stupně n, je polynomem stupně nejvýše n.

Interpolační polynom $P_n(x)$ nazýváme Lagrangeovým interpolačním polynomem, nebo přesněji Lagrangerovým tvarem interpolačního polynomu.“ (Horová, 2008)

„Úmluva. Polynom l_i, i=0,1,…,n„ definované vztahem (15) budeme nazývat fundamentálními polynomy.

Z jednoznačnosti interpolačního polynomu rovněž plyne, že interpolační polynom stupně nejvýše n pro polynom Q_n stupně n je tentýž polynom, tj. $P_n(x) = Q_n(x)$.

Položíme.

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots . (x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Je zřejmé, že.

$$\omega_{n+1}^{/}(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k) \quad [17]$$

Použitím těchto vztahů lze fundamentální polynomy zapsat ve tvaru

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega_{n+1}^{/}(x_i)}, \quad i = 0,1, \dots, n$$

.“ (Horová, 2008)

2.2.3. Newtonův interpolační polynom

Nyní bude popsán a vysvětlen Newtonův interpolační polynom.

„Definice 6.1. Výraz $f[x_0, \dots, x_n]$ ve vztahu

$$\sum_{J=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)} = f[x_0, \dots, x_n]$$

nazýváme poměrnou diferencí řádu n funkce f v bodech $x_0, \dots, x_n$.

Položme $f(x_0) = f[x_0]$. Dále

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1},$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Poznamenejme, že poměrná diference je symetrickou funkcí svých argumentů, tedy hodnota poměrné diference nezávisí na pořadí uzlů x_i.

Lagrangeův interpolační polynom je po teoretické stránce velmi důležitý. Je základem pro odvození metod numerického derivování a integrování. Ale pro praktické výpočty, zejména pro velký počet uzlů nebo při změně počtu uzlů (kdy je třeba přepočítat všechny polynomy l_i), je výhodnější použít některé z formulí, které nyní uvedeme.“ (Horová, 2008)

„Věta 6.2. Interpolační polynom $P_n \in \prod_n$ pro body (x_i,f_i), $i=0,1,\ldots,n$ může být zapsán ve tvaru

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n] \qquad (22)$$

." (Horová, 2008)

„Důkaz- Budeme postupovat tak, že vhodným způsobem vyjádříme Lagrangeův interpolační polynom a další úpravou dostaneme vyjádření (22). Nechť $P_n \in \prod_n$ je Lagrangeův interpolační polynom pro dané body (x_i,f_i) , $i = 0,1,\ldots,n$. Zapíšeme tento polynom ve tvaru

$$P_n(x) = P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] + \cdots + [P_j(x) - P_{j-1}(x)] + \cdots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)], \qquad (23)$$

kde $P_j \in \prod_j$ je Lagrangeův interpolační polynom pro body (x_i,f_i), $i = 0,1,2,\ldots,j$.
Počítejme rozdíly $P_j(x) - P_{j-1}(x)$:

$$P_j(x) - P_{j-1}(x) = \sum_{i=0}^{j} \frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{j+1}(x_i)} f_i - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\omega_j(x)}{(x-x_i)\omega'_{j+1}(x_i)} f_i = \frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{j+1}(x_j)} f_j +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} f_i [\frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{j+1}(x_i)} - \frac{\omega_j(x)}{(x-x_i)\omega'_j(x_i)}].$$

Pro ω_{j+1} a ω_j platí

$$\omega_{j+1}(x) = \prod_{i=0}^{j}(x - x_i), \omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \rightarrow \omega_{j+1}(x) = (x - x_j)\omega_j(x).$$

Dále pro derivace funkcí ω_j a ω_{j+1} máme

$$\omega'_{j+1}(x) = \omega_j(x) + (x - x_j)\omega'_j(x) \rightarrow \omega'_{j+1}(x_i) = (x_i - x_j)\omega'_j(x_i) pro\ i \neq j$$

$$\omega_j(x_j)\ pro\ i = j$$

Těchto vztahů nyní užijeme pro výpočet rozdílů $P_j(x) - P_{j-1}(x)$:

$$P_j(x) - P_{j-1}(x) = \frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{j+1}(x_j)} f_j + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\omega_j(x)(x-x_j-x_i+x_j)}{(x-x_i)\omega'_{j+1}(x_i)} f_i = \frac{\omega_j(x)}{\omega'_{j+1}(x_j)} f_j +$$

$$+\omega_j(x) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{f_i}{\omega'_{j+1}(x_i)} = \omega_j(x) \sum_{i=0}^{j} \frac{f_i}{\omega'_{j+1}(x_i)} = \omega_j f[x_0, \ldots, x_j]$$

Každý rozdíl $P_j(x) - P_{j-1}(x)$ pro $j = 0,1,\ldots,n$ můžeme tedy vyjádřit ve tvaru

$$P_j(x) - P_{j-1}(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_{j-1})f[x_0, \ldots, x_j].$$

Odtud a z [23] nyní plyne, že interpolační polynom může být zapsán ve tvaru (22). Interpolační polynom [22] se nazývá Newtonův interpolační polynom. Ještě jednou připomínáme, že pro dané body (x_i, f_i), $i = 0,1,\dots,n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, je interpolační polynom určen jednoznačně, tzn. že Newtonův interpolační polynom je totožný s Lagrangeovým interpolačním polynomem, liší se pouze formou zápisu." (Horová, 2008)

„Důsledek 1. Nechť $x_i \in$ [a,b] $i = 0,1,\dots,n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$. Nechť $f \in C^n$ [a,b]. Pak existuje bod $\theta \in$ (a,b) takový, že

$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta)$."(Horová, 2008)

Nyní tyto vztahy budou dokázány. „Důkaz. Funkce $\Phi(x) = f(x) - P_n(x)$ má alespoň (n+1) nulových bodů v $[a,b]$ $: x_0, \dots, x_n$.

Podle Rolleovy věty má funkce $\Phi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)$ alespoň jeden nulový bod $\theta \in (a,b)$: $f^{(n)}(\theta) - P_n^{(n)}(\theta) = 0$

a

$$f^{(n)}(\theta) = P_n^{(n)}(\theta)$$

Na druhé straně, ze vztahu (22) plyne $\quad P_n^{(n)}(\theta) = n!\, f[x_0, \dots, x_n]$

a odtud

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta) = f[x_0, \dots, x_n] \, .$$

Poznámka. Lze ukázat, že:

$$\lim_{\substack{x_i \to x_0 \\ i=1,\dots,n}} f[x_0, \dots x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

neboli

$f[x_0, .. x_0] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

$(n+1) krát$". (Horová, 2008)

Nyní bude ukázán důsledek tohoto důkazu. „Důsledek 2. Nechť Q_{n-1} je polynom stupně nejvýše *n-1*. Pak

$$Q_{n-1} = [x_0, \dots, x_n] = 0$$

Je-li $Q_n(x) = x^n$, pak

$Q_n[x_0, \dots, x_n] = 1$ " (Horová, 2008)

2.2.4. Chyba interpolace

Každá metoda aproximace dosahuje nějaké chyby, ta je způsobena faktem, že se jedná pouze o přiblížení ke skutečné funkci.

„Zabývejme se nyní otázkou, s jakou přesností bude interpolační polynom $P_n \in \prod_n$ aproximovat danou funkci v bodech různých od bodů x_i, $i = 0,1,\dots,n$? Odpověď dává následující věta.

Věta 6.3. Nechť $f \in C^{(n+1)}$ [a,b] a nechť uzly $x_i \in [a,b]$, $i = 0,1,\dots n$, $xi \neq xk$ pro $i \neq k$. Nechť dále $Pn \in \prod n$ je interpolační polynom splňující podmínky. Pak ke každému bodu $\bar{x} \in [a,b]$ existuje bod $\varepsilon \in (a,b)$ tak, že platí:

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{\omega_{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon), \qquad \varepsilon = \varepsilon(\bar{x})$$

Důkaz. Sestrojme Newtonův tvar interpolačního polynomu podle vztahu (6.6) pro uzly $x_0,\dots,x_n$, $\bar{x}$. Je tedy třeba najít interpolační polynom $P_{n+1} \in \prod_{n+1}$. Tento polynom je tvaru:

$$P_{n+1}(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_0) f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}].$$

Jelikož P_{n+1} je interpolačním polynomem i v bodě $\bar{x}$, je $f(\bar{x}) = P_{n+1}(\bar{x})$. Ale na druhé straně

$$P_{n+1}(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + (\bar{x} - x_0) \dots (\bar{x} - x_n) f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}],$$

neboli

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \dots (\bar{x} - x_n) f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}].$$

Zde

$$\omega_{n+1}(\bar{x}) = \prod_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i).$$

Nyní podle důsledku 1 je

$$f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

a odtud plyne tvrzení. Vztah (6.17) jsme dokázali použitím Newtonova interpolačního polynomu. Ale z jednoznačnosti interpolačního polynomu plyne, že vztah platí pro polynom vyjádřený v libovolném tvaru.“ (Horová, 2008)

Poznámka 4. Z důsledku 1 je jasné, že bod ε závisí na $\bar{x}$. Této skutečnosti si musíme být vědomi při dalších úvahách a operacích týkajících se chyby interpolace. Rozdíl $E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$ nazýváme chybou interpolace v bodě $\bar{x}$. Jestliže $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, $\forall \in [a,b]$, lze chybu interpolace ohraničit shora takto:

$$|E(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(\bar{x})|.$$

Tento odhad závisí na vlastnostech interpolované funkce a na volbě uzlů x_i. Vzniká tedy otázka, jak volit uzly x_i, aby maximální absolutní hodnota ω_{n+1} byla na daném intervalu co nejmenší. Toho lze dosáhnout tak, že za uzly x_i zvolíme kořeny některých speciálních polynomů.“ (Horová, 2008)

2.2.5. Interpolace na ekvidistantních uzlech

„Nyní předpokládejme, že body x_i, $i = 0,1,\dots,n$ jsou ekvidistantní, tj. existuje reálné číslo $h \neq 0$ takové, že

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0, \dots, n.$$

Číslo h obvykle nazýváme krok. Vypočteme pro Lagrangeův interpolační polynom $P_{n-1} \in \prod_{n-1}$, který je interpolačním polynomem v uzlech $x_0,\dots,x_{n-1}$, fundamentální polynom li

$${}_il_l(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n^/(x_i)}$$

Počítejme hodnoty těchto polynomů v bodě x_n :

$$l_i(x_n) = \frac{\omega_n(x_n)}{(x_n - x_i)\omega_n\,(x_i)}$$
$$= \frac{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_i)(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})}$$

Nyní je $x_n - x_i = x_0 + nh - (x_0 + ih) = (n - i)h$. Dosazením do předchozího vztahu dostaneme:

$$l_i(x_n) = \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{(n-i)(i)\dots\big(i-(i-1)\big)\big(i-(i+1)\big)\dots(i-(n-1))}$$

$$= -\frac{n!}{i!\,(n-i)!}(-1)^{n-i}$$

odtud

$$l_i(x_n) = -(-1)^{n-i}\binom{n}{i}.$$

Počítejme nyní rozdíl

$$f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = f(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(x_i).$$

Hodnotu $f(x_n)$ lze zahrnout do součtu s koeficientem

$$(-1)^{n-n}\binom{n}{n} = 1$$

a výsledkem je

$f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$." (Horová, 2008)

Nyní bude ukázána přesná definice a poté důkaz.

„Definice. Výraz

$$\Delta^n f_j = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_{i+j}$$

se nazývá n-tá obyčejná diference v bodě x_j.

Např.:

$$\Delta^1 f_0 = -f(x_0) + f(x_0 + h) = -f_0 + f_1$$

$$\Delta^2 f_0 = f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) = f_0 - 2f_1 + f_2$$

$$\Delta^3 f_0 = -f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3$$

atd.

Obdobným způsobem jako poměrné diference lze i pro obyčejné diference dokázat rekurentní vztah:

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta(\Delta^k f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i.$$

Věta. Nechť uzly x_i , i = 0,1,…,n jsou ekvidistantní, $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$. Pak Newtonův interpolační polynom lze zapsat ve tvaru

$$P_n(x_0 + th) = f_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta^j f_0}{j!} t(t-1)\dots(t-j+1),$$

kde $x = x_0 + th$, t je nová proměnná. $t \in R$.

Důkaz. Bod x, ve kterém počítáme hodnotu interpolačního polynomu, vyjádříme pomocí kroku h, $x = x_0 + th$, t je nová proměnná. Nyní

$$x - x_i = x_0 + th - (x_0 + ih) = (t - i)h.$$

Víme, že Newtonův polynom je tvaru

$$P_n(x) = f_0 + f(x - x_0)[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n].$$

Upravíme j-tý člen tohoto polynomu:

$$(x - x_0)\dots\left(x - x_{j-1}\right)f\left[x_0, \dots, x_j\right] = (x - x_0)\dots(x - x_{j-1})\frac{\Delta^j f_0}{j!\, h^j}$$

a dále, v důsledku toho, že $x - x_i = (t - i)h$, dostaneme

$$(x - x_0)\dots\left(x - x_{j-1}\right)f\left[x_0, \dots, x_j\right] = \frac{t\dots(t - j + 1)}{j!}\Delta^j f_0$$

a odtud plyne vztah stanovený větou. „ (Horová, 2008)

3. Projekt KOMPAS

3.1. Představení projektu

Predikce trhu práce – projekt KOMPAS, číslo projektu: CZ.03.1.54/0.0/0.0/15_122/0006097, realizován Ministerstvem práce a sociálních věcí, financován Operačním programem Zaměstnanost. Hlavními cíli projektu je tvorba predikce trhu práce na národní úrovni, tvorba predikcí a modelu regionálních trhů práce a rozšíření odborného pracoviště pro monitorování a predikce trhu práce na Ministerstvu práce a sociálních věcí. Zmíněné cíle projektu jsou řešeny prostřednictvím 13 klíčových aktivit.

3.2. Výstupy projektu

Jedním z hlavních výstupů projektu bude vytvoření bezplatné webové aplikace pro širokou veřejnost, kde budou informace o současném a budoucím vývoji trhu práce. Tato predikce bude nápomocná jako informační podpora procesů plánování a rozhodování, a to jak na úrovni národní, tak i regionální.

Během projektu dojde ke zpracování 15 sektorových studií -> Vyhodnocování požadavků ekonomiky na kvalifikovanou práci a možností/reakce vzdělávacího systému.

V jednotlivých regionech jsou tvořeny regionální profily, které budou přístupné na webové platformě. Profily budou kontinuálně zpracovávány a budou zachycovat stěžejní charakteristiky jednotlivých krajů. Aktuální regionální profil Jihočeského kraje je ke stažení v dokumentech níže.

V rámci projektu je upravován a aktualizován monitoring trhu práce, který každoročně rozesílají krajské pobočky Úřadu práce. Cílem je sjednocení struktury pro všechny kraje a docílení co největší spolupráce firem na dotazníku a maximální možné návratnosti.

4. Metodika

K modelaci jednotlivých veličin bude použit Lagrangeuv interpolační polynom ve tvaru:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, kde n je počet známých bodů, vypočtu pomocí programu Maple16. Grafy a tabulky vytvořím v tabulkovém editoru Microsoft Excel. Pro modelaci $F(t)$ je považován první údaj řady za $t=0$.

Pro zkoumání vhodnosti metody interpolačního polynomu se posoudí grafický průběh interpolační funkce. Identifikují se body, ve kterých by mohla vznikat při interpolaci velká chyba, a to např. z důvodu rychlé změny nebo proto, že růst sledované veličiny je stabilní, avšak interpolační funkce má klesající průběh.

Takto se vyberou dva nebo více bodů, postupně tyto body vynechám z výpočtu interpolačního polynomu, do takto vypočtené interpolační funkce dosadím vynechané body a porovnám hodnoty s původními. Na základě rozdílů vypočtených a skutečných bodů rozhodnu o vhodnosti aplikace metody na konkrétní časovou řadu a o tom, zda je metodu vhodné použít pro účely projektu. V případě, že je metoda vhodná, pokusím se provést extrapolaci[2].

[2] Predikce hodnoty mimo známí interval v našem případě v čase budoucím.

5. Modely

5.1. Průměrné hrubé měsíční mzdy

Nyní využiji interpolačních metod k modelování údajů z trhu práce, konkrétně mezd. Ty jsou rozčleněny podle systému klasifikace CZ-NACE.

Tabulka 2 hrubé mzdy podle klasifikace CZ-NACE

Sekce CZ-NACE		2011	2012	2013	2014	2015	2016
Celkem[3]		21 041	21 174	21 749	22 296	23 118	24 218
A	Zemědělství, lesnictví a rybářství	18 506	19 557	20 165	21 082	21 516	22 425
B	Těžba a dobývání	24 748	26 301	26 043	26 341	29 939	30 519
C	Zpracovatelský průmysl	21 803	22 807	22 834	23 632	24 399	25 490
D	Výroba a rozvod elektřiny, plynu, tepla a klimatizovaného vzduchu	39 047	39 219	41 562	41 432	40 824	42 824
E	Zásobování vodou; činnosti související s odpadními vodami, odpady a sanacemi	21 338	21 902	22 345	22 298	22 013	23 537
F	Stavebnictví	22 635	23 473	22 649	23 178	24 027	24 856
G	Velkoobchod a maloobchod; opravy a údržba motorových vozidel	18 206	19 015	18 473	19 239	20 340	21 396
H	Doprava a skladování	19 363	19 668	18 961	19 751	19 816	21 731
I	Ubytování, stravování a pohostinství	11 242	11 452	11 464	12 250	12 715	13 481
J	Informační a komunikační činnosti	32 324	36 619	32 428	32 233	32 547	32 589
K	Peněžnictví a pojišťovnictví	33 871	33 934	33 618	34 593	33 776	35 847
L	Činnosti v oblasti nemovitostí	16 858	15 913	16 261	16 813	18 484	19 526
M	Profesní, vědecké a technické činnosti	21 588	21 783	21 652	22 532	22 922	23 775
N	Administrativní a podpůrné činnosti	13 611	12 862	13 093	13 027	14 325	15 071
O	Veřejná správa a obrana; povinné sociální zabezpečení	23 932	24 642	26 147	25 405	26 870	28 259
P	Vzdělávání	20 755	21 080	21 121	21 700	22 043	23 067
Q	Zdravotní a sociální péče	23 285	23 407	23 423	23 970	25 627	26 529
R	Kulturní, zábavní a rekreační činnosti	18 537	19 341	20 082	20 191	20 795	21 716
S	Ostatní činnosti	15 471	16 212	16 155	16 148	17 087	17 831

zdroj: Český statistický úřad

Následně bude každá sekce popsána grafem a příslušným interpolačním polynomem.

5.1.1. Zemědělství, lesnictví a rybářství

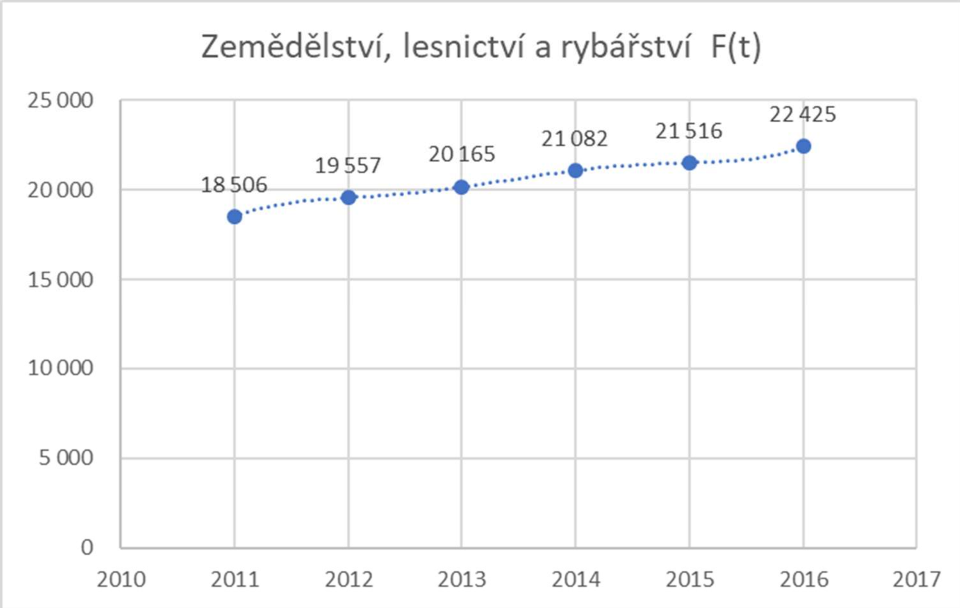
Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek A, který vypadá následovně.

$$F(t) = 27{,}45t^5 - 338{,}83t^4 + 1472{,}1t^3 - 2677{,}7t^2 + 2568t + 18506$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

[3] souhrnný průměr za všechna odvětví.

Graf 5 skupina A



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

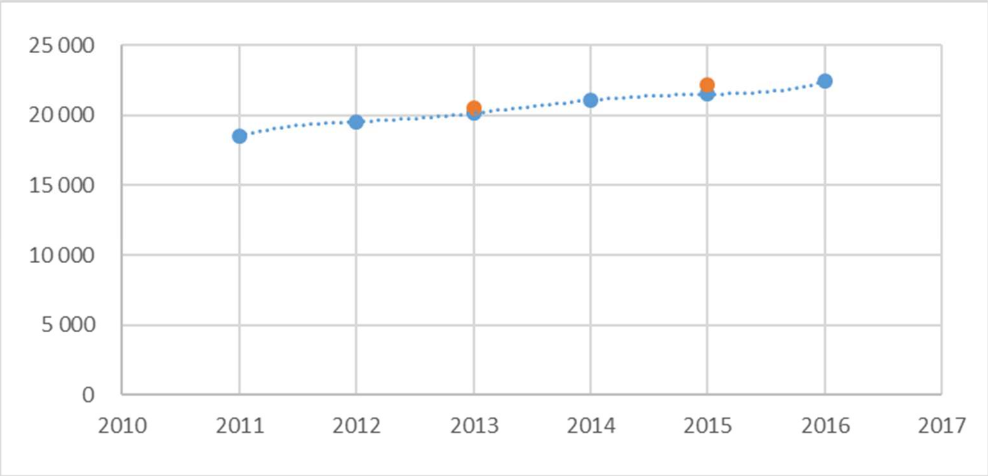
$$F(t) = 18{,}017t^4 - 147{,}47t^3 + 259{,}48t^2 + 920{,}97t + 18506$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 20 494,37. Původní hodnota je 20 165. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -36{,}883t^4 + 346{,}63t^3 - 1003{,}2t^2 + 1744{,}5t + 18506$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 22 0175. Původní hodnota je 21 516. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 6 zobrazení odchylek pro skupinu A



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Na základě porovnání lze říci, že pro tento konkrétní případ je interpolace, v rámci zkoumaného intervalu vhodnou metodou.

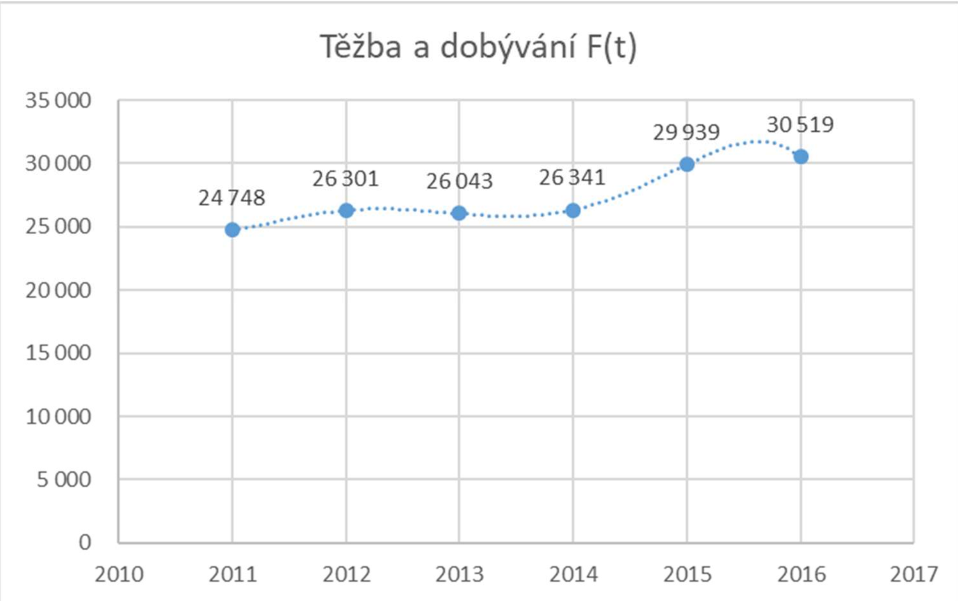
5.1.2. Těžba a dobývání

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek B, který vypadá následovně.

$$F(t) = -78{,}658t^5 + 802{,}29t^4 - 2452{,}8t^3 + 2016{,}7t^2 + 1265{,}5t + 24748$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 7 skupina B



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

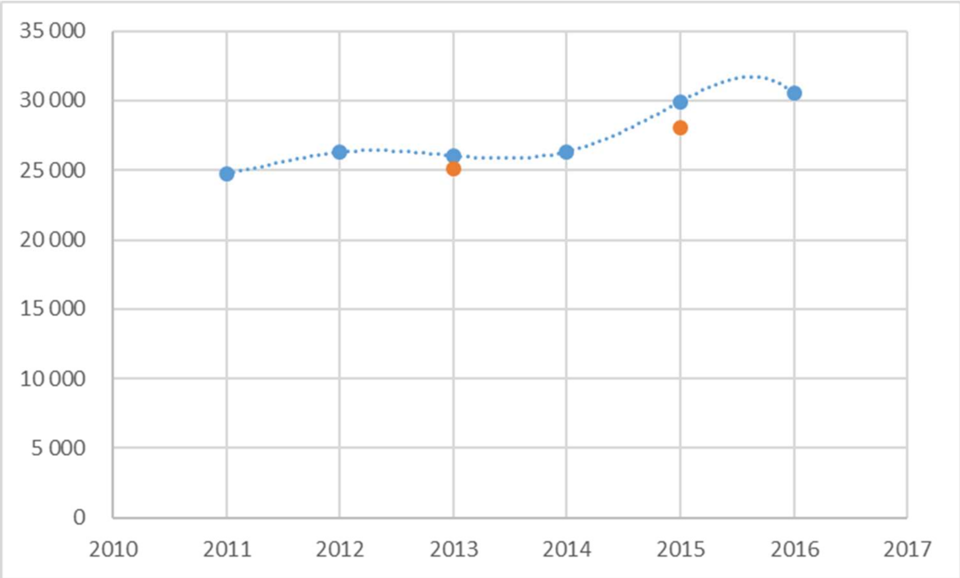
$$F(t) = -220{,}27t^4 + 2188t^3 - 6399{,}7t^2 + 5984{,}9t + 24748$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 25 098,68. Původní hodnota je 26 301. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -62{,}95t^4 + 772{,}2t^3 - 2781{,}5t^2 + 3625{,}2t + 24748.$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 28050,4. Původní hodnota je 29 939. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 8 zobrazení odchylky pro skupinu B



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Zde je vidět systematická odchylka, která mírně podhodnocuje průběh časové řady. Pro tuto konkrétní časovou řadu se dá tato metoda vyhodnotit jako vhodná, a proto je možné pokusit se o extrapolaci do dalších bodů. Pro rok 2017 by takto extrapolovaná hodnota byla 29 938,45.

5.1.3. Zpracovatelský průmysl

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek C, který vypadá následovně.

$$F(t)= 30{,}892t^5 - 415{,}17t^4 + 2010t^3 - 4075{,}8t^2 + 3454{,}1t + 21803$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 9 skupina C

zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

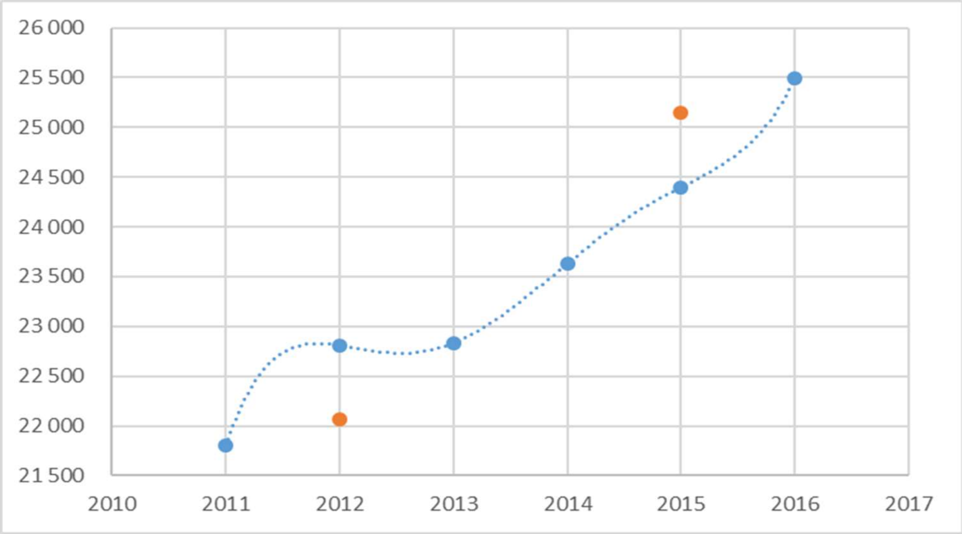
$$F(t) = 17{,}317t^4 - 183{,}27t^3 + 681{,}48t^2 - 252{,}93t + 21803$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 22 065,6. Původní hodnota je 22 807. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -75{,}358t^4 + 743{,}48t^3 - 2191{,}4t^2 + 2527{,}3t + 21803$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 25 140,87. Původní hodnota je 24 399. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 10 zobrazení odchylky pro skupinu C



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Zde je již patrná významná odchylka od původních hodnot, proto interpolační metoda nebude vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu.

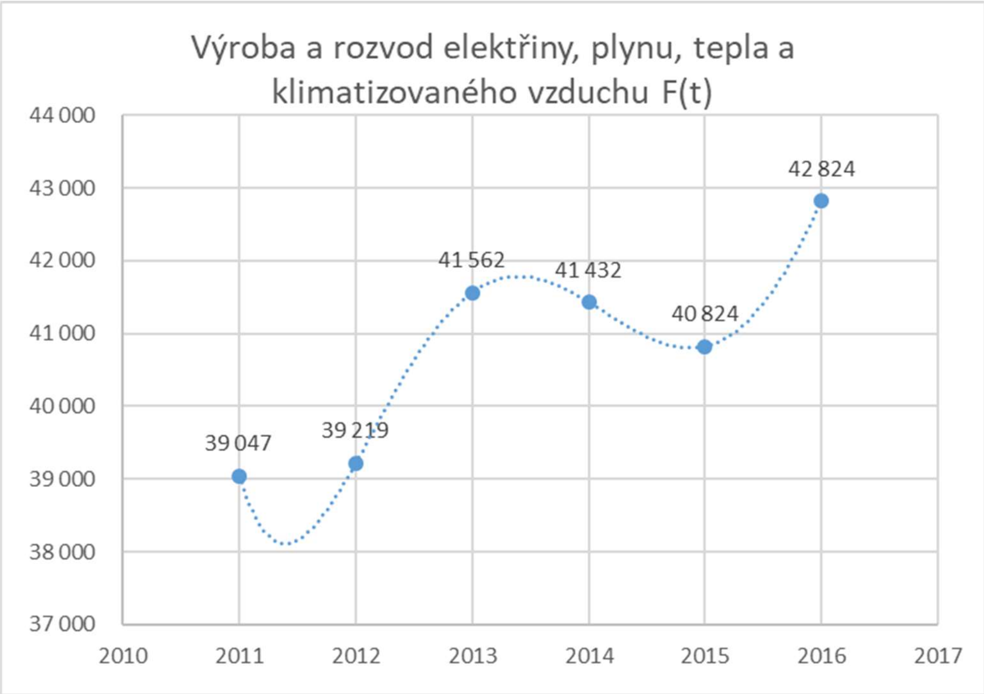
5.1.4. Výroba a rozvod elektřiny, plynu, tepla a klimatizovaného vzduchu

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek D, který vypadá následovně.

$F(t) = -46{,}233t^5 + 738{,}96t^4 - 4051{,}9t^3 + 8762t^2 - 5230{,}8t + 39047$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 11 skupina D



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

$$F(t) = 137{,}92t^4 - 1324{,}1t^3 + 3815{,}1t^2 - 2456{,}9t + 39047$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 41 007,52. Původní hodnota je 41 562. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

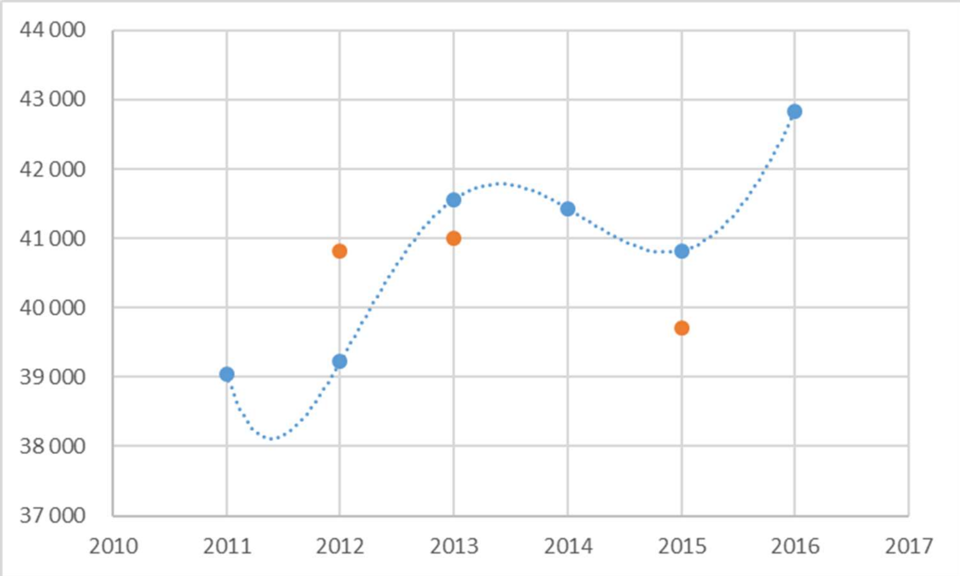
$$F(t) = 230{,}39t^4 - 2156{,}4t^3 + 5941{,}8t^2 - 3843{,}9t + 39047$$

Po dosazení, hodnota pro rok 2015 vychází 39 710,44. Původní hodnota je 40 824. Pro přesnější určení, zda je použití interpolace vhodné, provedu výpočet při vynechání roku 2012. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 91{,}692t^4 - 769{,}35t^3 + 1642{,}1t^2 + 317{,}15t + 39047$$

Vypočtená hodnota pro rok 2012 je 40 068,15. Původní hodnota je 39 219. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 12 zobrazení odchylek pro skupinu D



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Z grafu je jasné, že pro tuto časovou řadu modelovat za pomoci interpolace není vhodné.

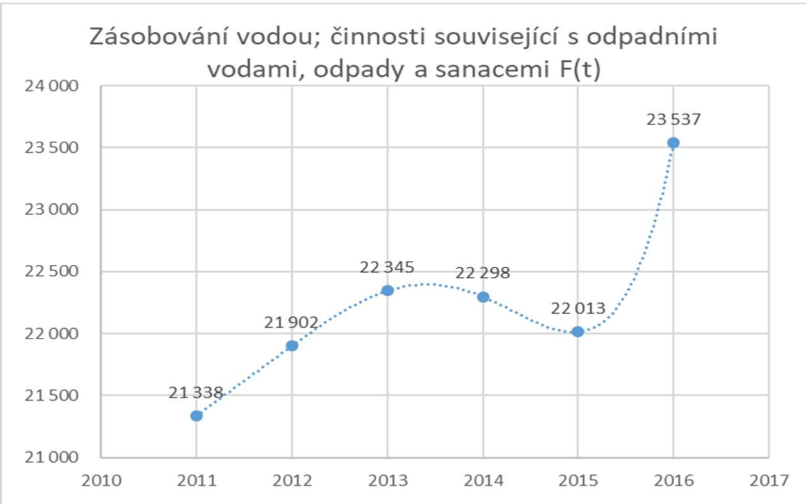
5.1.5. Zásobování vodou; činnosti související s odpadními vodami, odpady a sanacemi

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek E, který vypadá následovně.

$F(t) = -46{,}233t^5 + 738{,}96t^4 - 4051{,}9t^3 + 8762t^2 - 5230{,}8t + 39047$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 13 skupina E



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

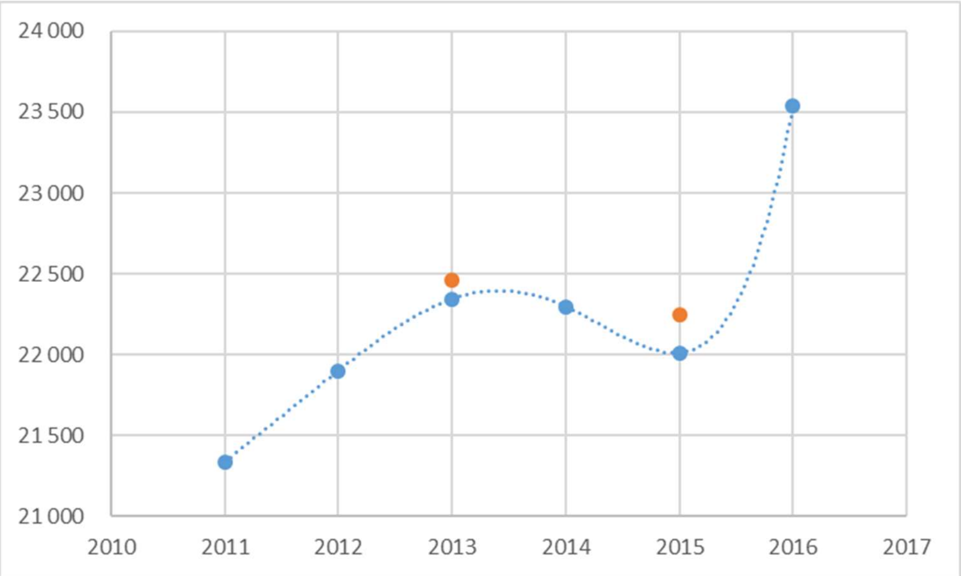
$$F(t) = 55{,}225t^4 - 451{,}55t^3 + 966{,}28t^2 - 5{,}95t + 21338$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 22 462,42. Původní hodnota je 22 345. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 35{,}658t^4 - 275{,}45t^3 + 516{,}24t^2 + 287{,}55t + 21338$$

Po dosazení, hodnota pro rok 2015 vychází 22 247,69. původní hodnota je 22 013. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 14 odchylka interpolace pro skupinu E



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Pro tuto časovou řadu je polynomiální interpolace v rámci zkoumaného intervalu vhodnou metodou.

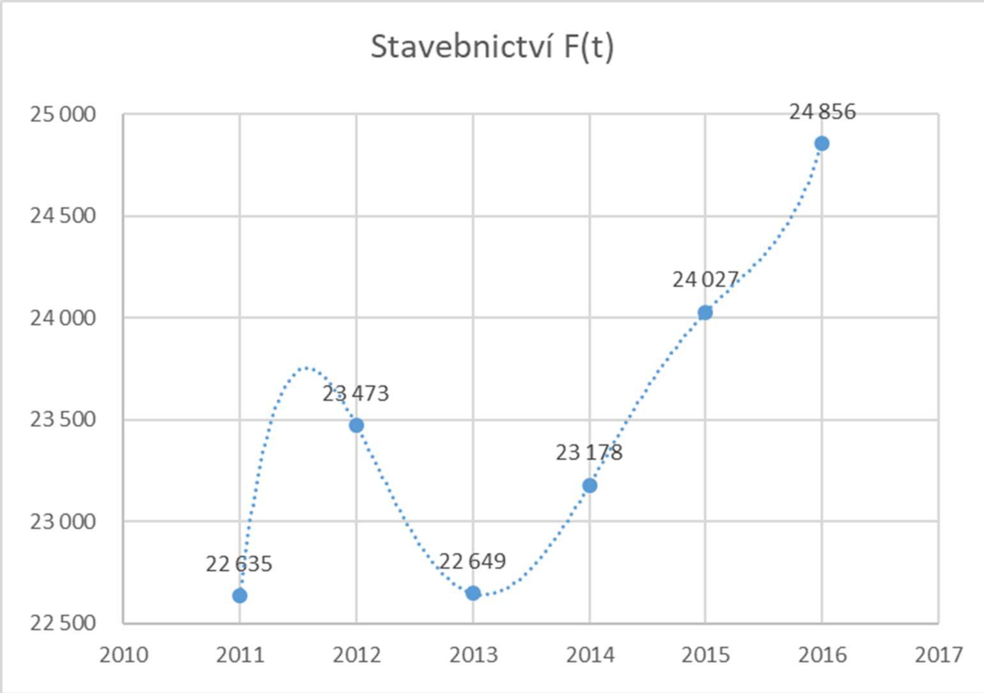
5.1.6. Stavebnictví

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek F, který vypadá následovně.

$$F(t) = 39{,}508t^5 - 563{,}75t^4 + 2897{,}3t^3 - 6169{,}2t^2 + 4634{,}2t + 22635$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 15 skupina F



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

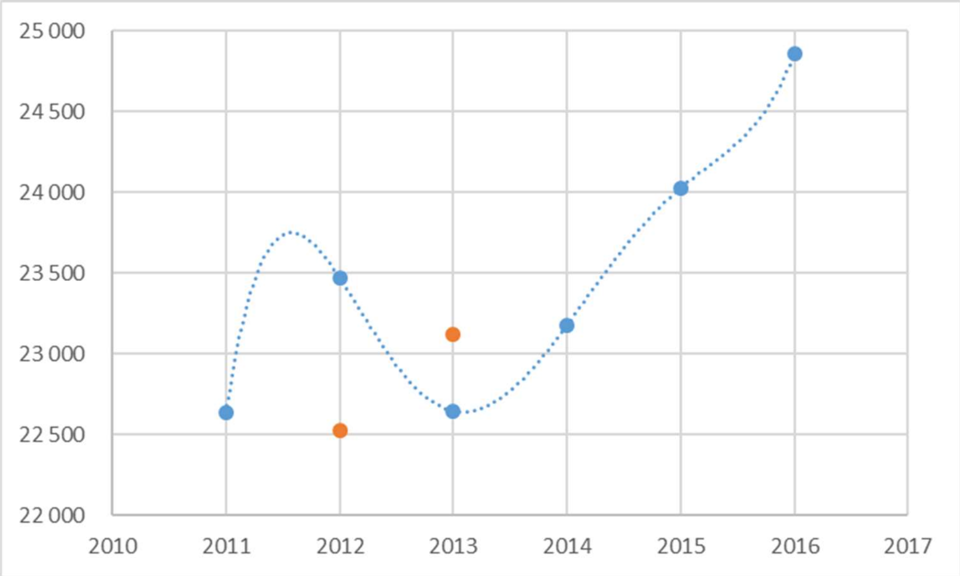
$$F(t) = -10{,}633t^4 + 92{,}2t^3 - 84{,}967t^2 - 106{,}8t + 22635$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 22 524,8. Původní hodnota je 23 635. Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 25 098,68. Původní hodnota je 26 301. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2013. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -50{,}142t^4 + 566{,}3t^3 - 1941{,}9t^2 + 2263{,}7t + 22635$$

Po dosazení hodnota pro rok 2013 vychází 23 122,93. Původní hodnota je 23 473. Nyní bude vše zobrazeno graficky.

Graf 16 odchylka interpolace skupiny F



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Z grafu je jasně viditelné, že v roce 2012 je chyba velmi velká, proto bych tuto metodu nepovažoval za vhodnou.

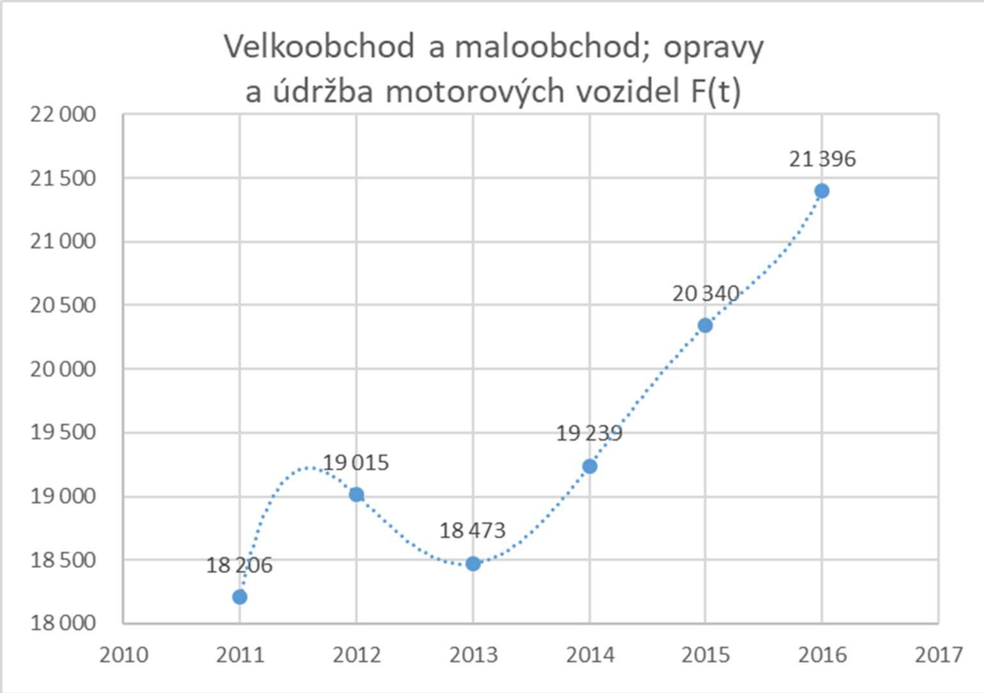
5.1.7. Velkoobchod a maloobchod; opravy a údržba motorových vozidel

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek G, který vypadá následovně.

$$F(y) = 39{,}508t^5 - 563{,}75t^4 + 2897{,}3t^3 - 6169{,}2t^2 + 4634{,}2t + 22635$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 17 skupina G



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

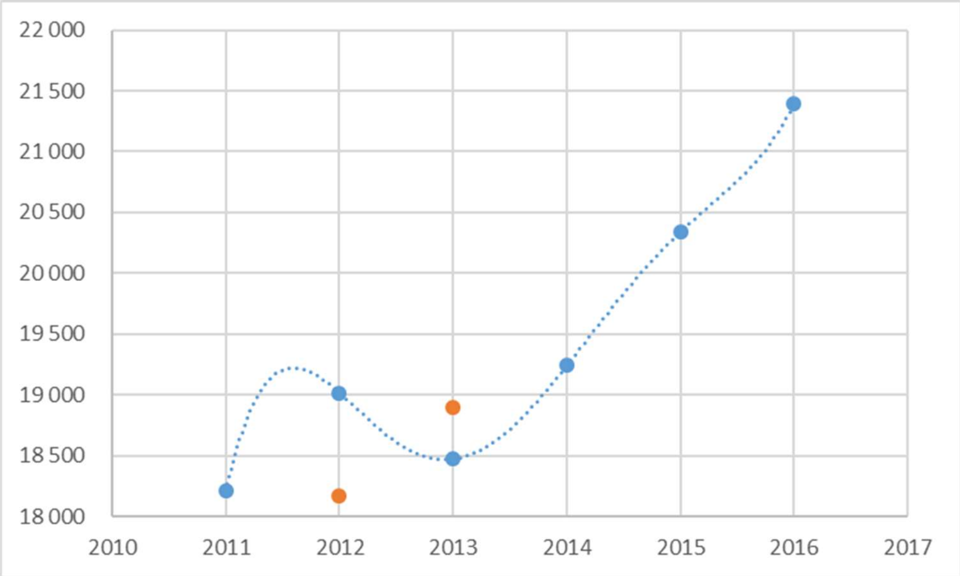
$$F(t) = -10{,}5t^4 + 83{,}667t^3 - 8t^2 - 101{,}17t + 18206.$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 18 170. Původní hodnota je 19 015. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2013. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -45{,}708t^4 + 506{,}17t^3 - 1662{,}8t^2 + 2011{,}3t + 18206$$

Po dosazení hodnota pro rok 2013 vychází 18 895,43. Původní hodnota je 18 473. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 18 odchylka interpolace pro skupinu G



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Z grafu je jasně viditelné, že v roce 2012 je chyba velmi velká, proto bych tuto metodu nepovažoval za vhodnou.

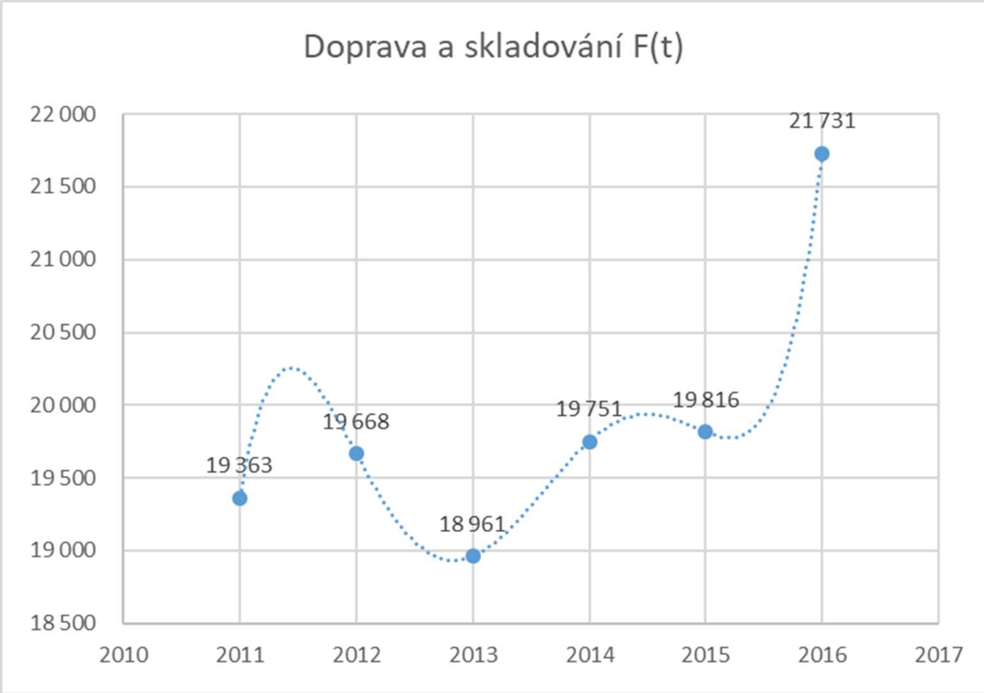
5.1.8. Doprava a skladování

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek H, který vypadá následovně.

$$F(t) = 79{,}4t^5 - 991{,}12t^4 + 4379{,}9t^3 - 7898{,}9t^2 + 4735{,}7t + 19363$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 19 skupina H



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

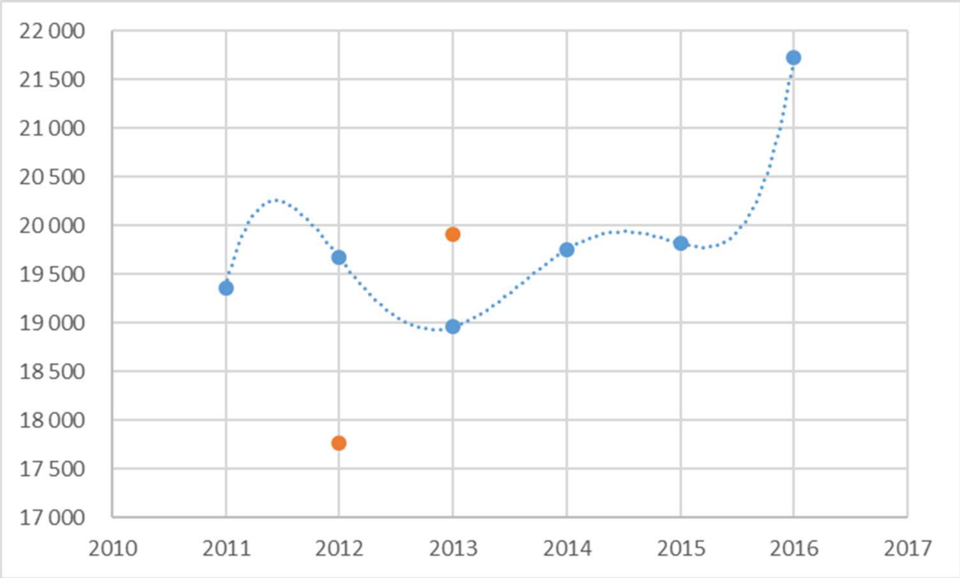
$$F(t) = 120{,}47t^4 - 1257{,}5t^3 + 4328{,}7t^2 - 4792{,}3t + 19363$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 17 762,17. Původní hodnota je 19 668. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2013. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 41{,}075t^4 - 304{,}68t^3 + 596{,}92t^2 - 28{,}317t + 19363$$

Po dosazení hodnota pro rok 2013 vychází 19 913,81. Původní hodnota je 18 961. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 20 zobrazení odchylek pro skupinu H



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Z grafu je jasně viditelné, že v roce 2012 je chyba velmi velká, proto bych tuto metodu nepovažoval za vhodnou.

5.1.9. Ubytování, stravování a pohostinství

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek I, který vypadá následovně.

$F(t) = 31{,}533t^5 - 401{,}46t^4 + 1782{,}4t^3 - 3109t^2 + 1906{,}6t + 11242$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 21 skupina I

zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

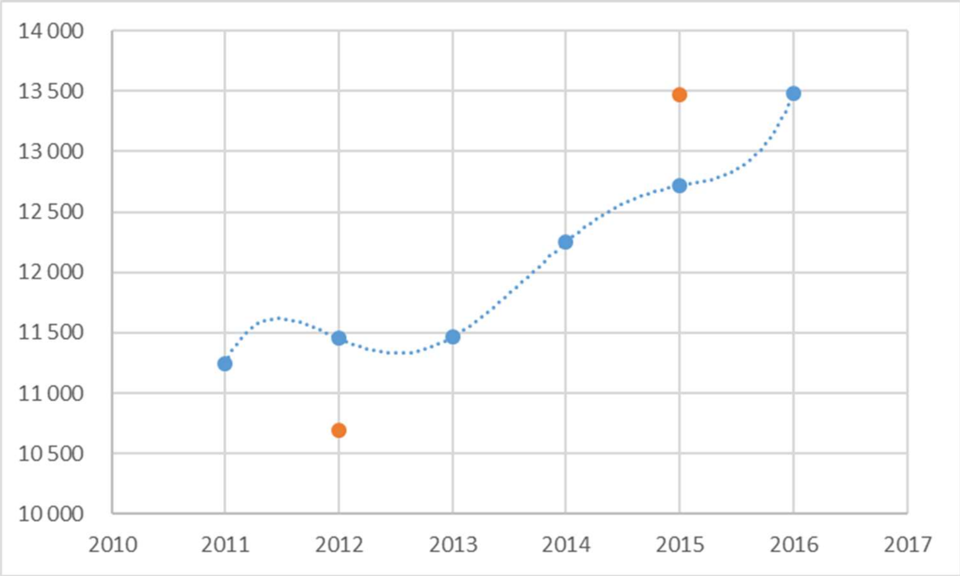
$$F(t) = 40{,}008t^4 - 456{,}45t^3 + 1747{,}1t^2 - 1877{,}5t + 11242$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 10 695,16. Původní hodnota je 11 452. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně:

$$F(t) = -54{,}592t^4 + 489{,}55t^3 - 1185{,}5t^2 + 960{,}55t + 11242.$$

Pro rok 2015 po dosazení hodnota vychází 13 471,85. Původní hodnota je 12 715. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 22 zobrazení odchylky interpolace pro skupinu I



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Z grafu je jasně viditelné, že v roce 2012 je chyba velmi velká, proto bych tuto metodu nepovažoval za vhodnou.

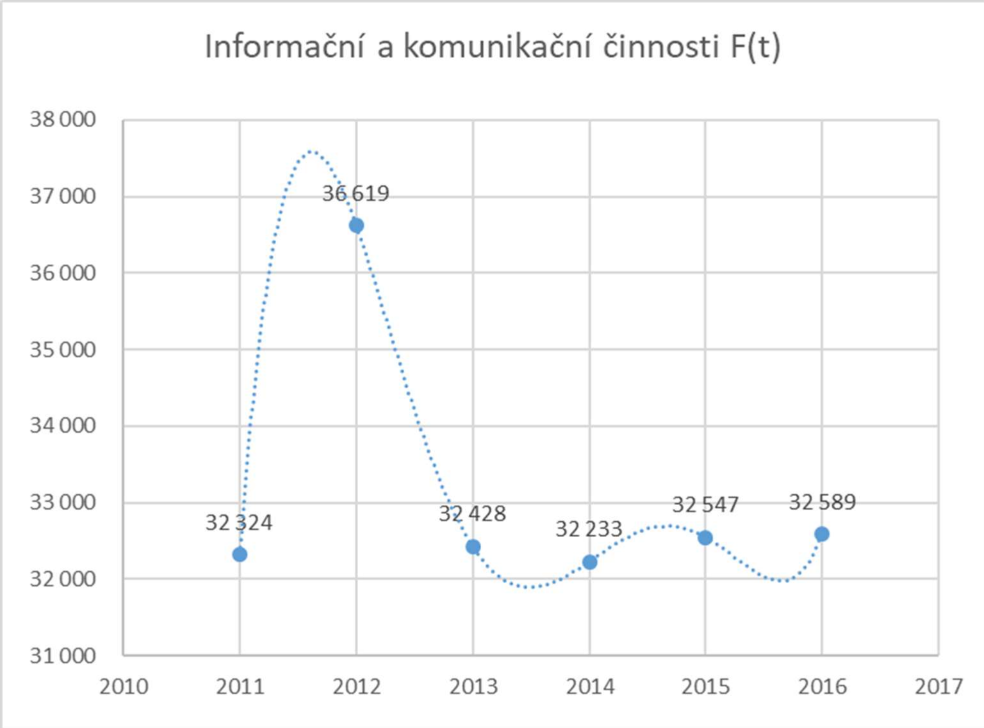
5.1.10. Informační a komunikační činnosti

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek J, který vypadá následovně.

$$F(t) = 155{,}62t^5 - 2221{,}6t^4 + 11519t^3 - 25584t^2 + 20426t + 32324$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 23 skupina J



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

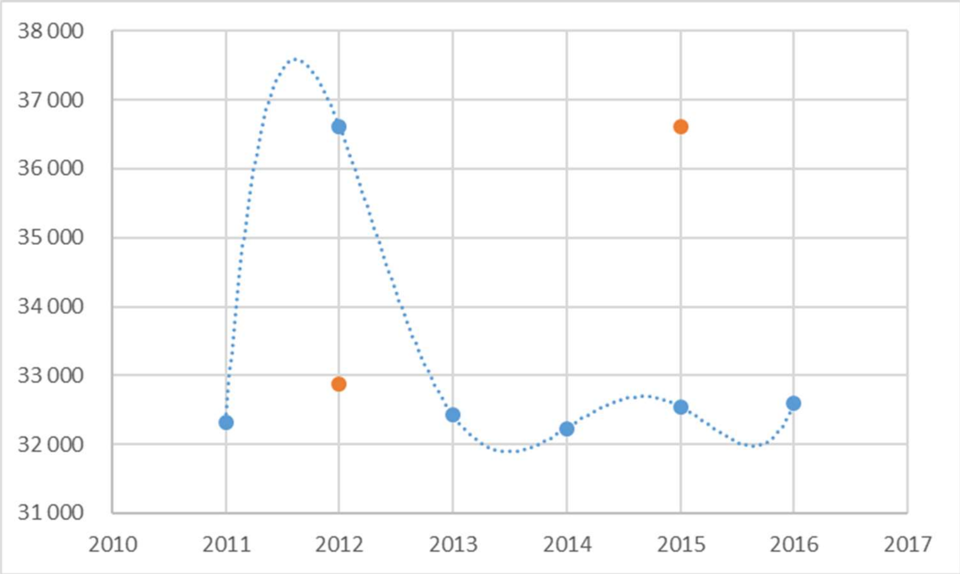
$$F(t) = -42{,}875t^4 + 470{,}08t^3 - 1618{,}1t^2 + 1750{,}9t + 32324$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 32 884,01. Původní hodnota je 36 619. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně:

$$F(t) = -509{,}75t^4 + 5138{,}8t^3 - 16091t^2 + 15757t + 32324.$$

Po dosazení, hodnota pro rok 2015 vychází 36 619,05. Původní hodnota je 32 547. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 24 odchylka skupina j



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Zde je veškerá chyba způsobena extrémem v roce 2012. Bez tohoto extrému by interpolace fungovala velmi spolehlivě.

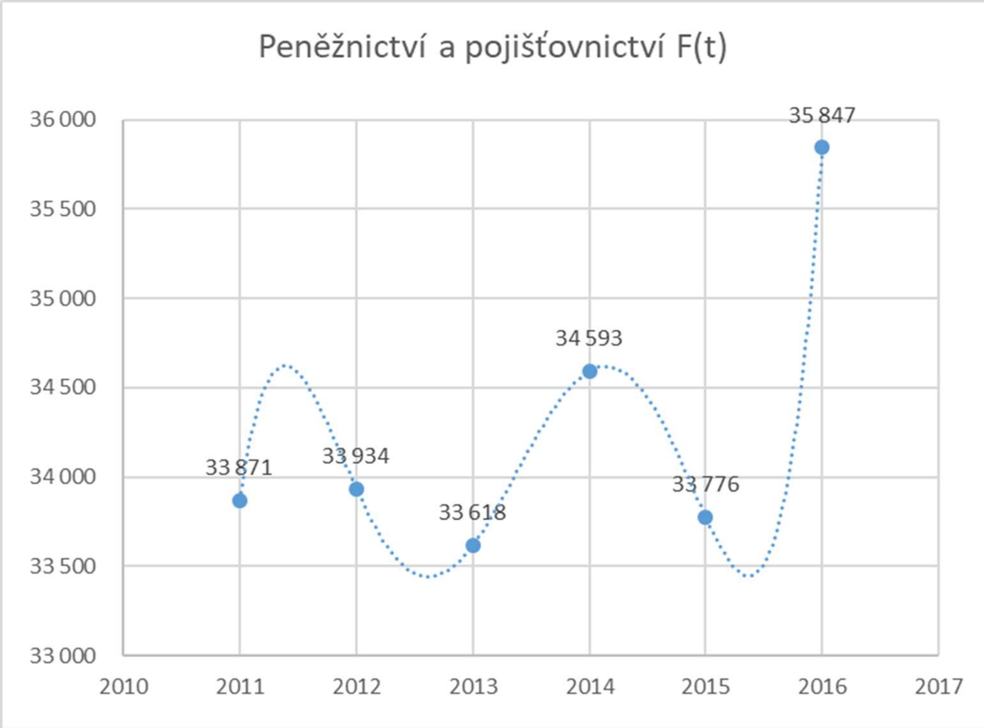
5.1.11. Peněžnictví a pojišťovnictví

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek K, který vypadá následovně.

$F(t) = 104{,}3t^5 - 1241t^4 + 5117{,}1t^3 - 8418t^2 + 4500{,}6t + 33871$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 25 skupina K



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

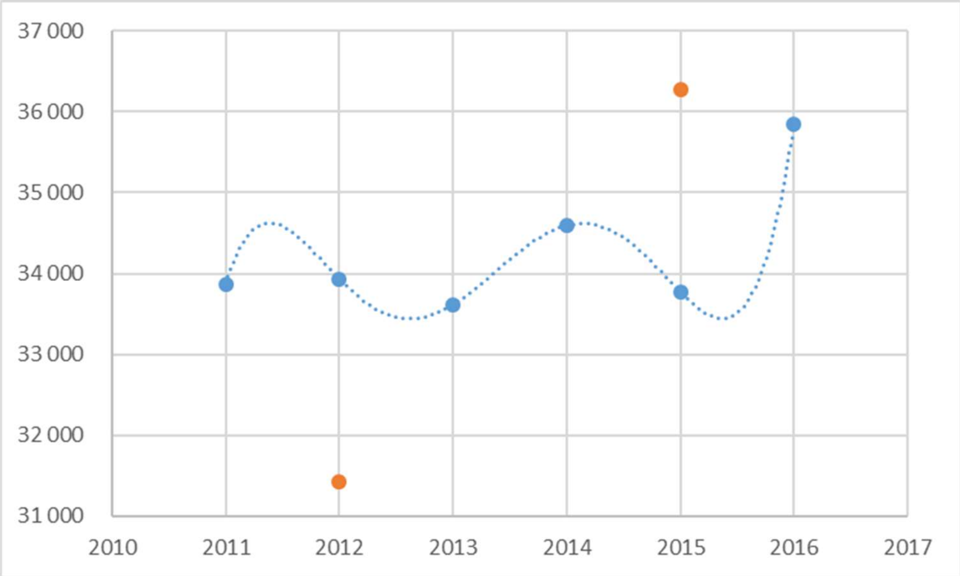
$$F(t) = 219{,}16t^4 - 2288{,}2t^3 + 7644{,}2t^2 - 8015{,}4t + 33871$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 33 1430,76. Původní hodnota je 33 934. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -93{,}742t^4 + 840{,}78t^3 - 2055{,}7t^2 + 1371{,}6t + 33871$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 36 278,17. Původní hodnota je 33 776. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 26 zobrazení odchylek pro skupinu K



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

V grafu je vidět, že interpolační metoda vytváří významné odchylky, proto ji nepovažuji za vhodnou.

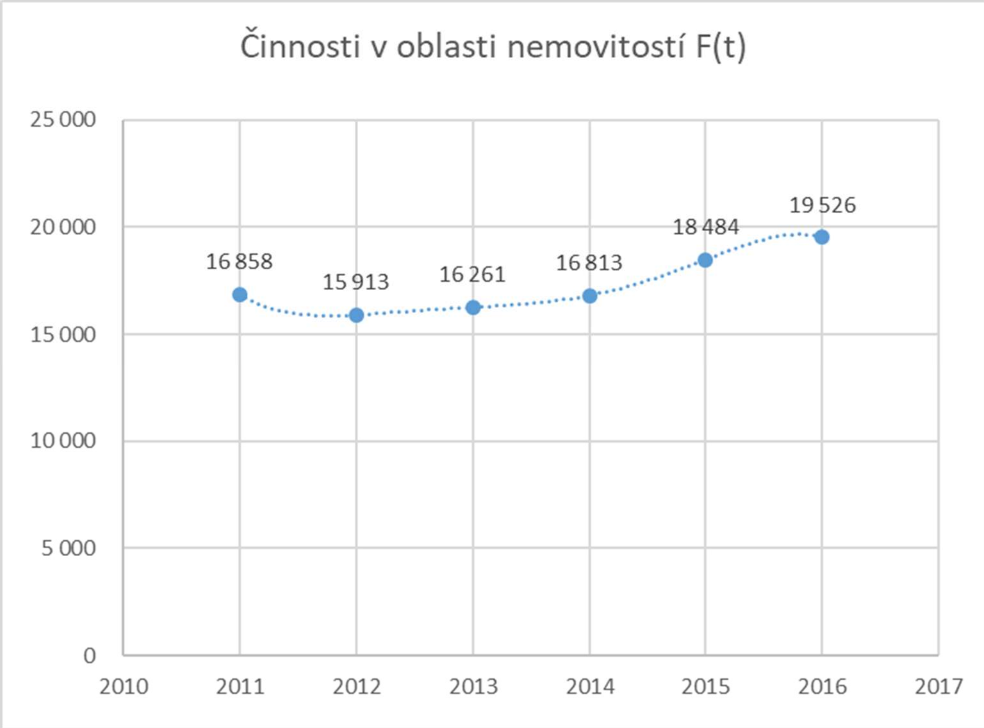
5.1.12. Činnosti v oblasti nemovitostí

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek L, který vypadá následovně.

$F(t) = -38{,}892t^5 + 472{,}42t^4 - 2043{,}7t^3 + 4054{,}1t^2 - 3388{,}9t + 16858$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 27 skupina L



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

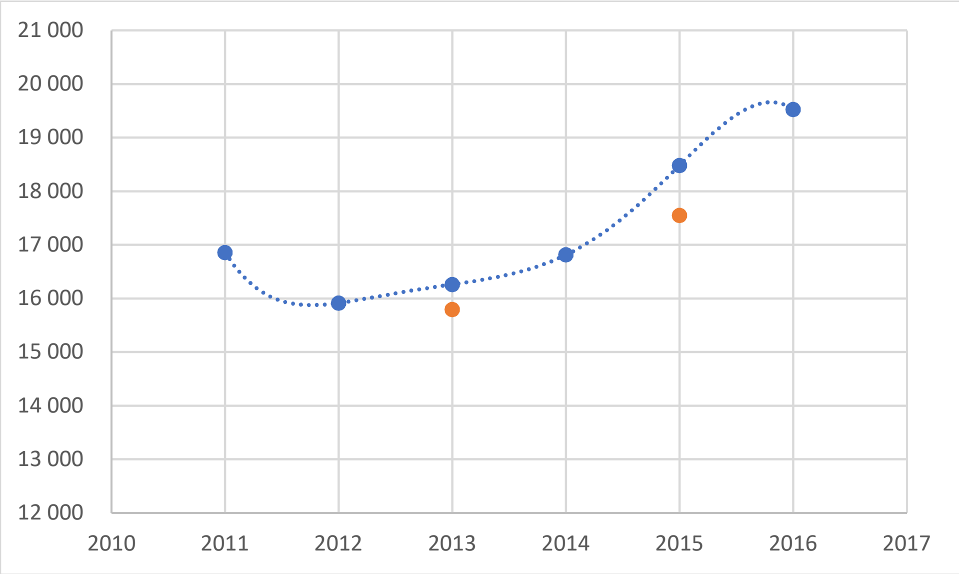
$$F(t) = -33{,}175t^4 + 250{,}9t^3 - 107{,}33t^2 - 1055{,}4t + 16858$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 15 794,28. Původní hodnota je 16 261. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 44{,}608t^4 - 449{,}15t^3 + 1681{,}7t^2 - 2222{,}1t + 16858$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 17 550,85. Původní hodnota je 18 484. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 28 zobrazeni odchylek interpolace pro skupinu L



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Pro tuto časovou řadu je polynomiální interpolace na zkoumaném intervalu vhodná.

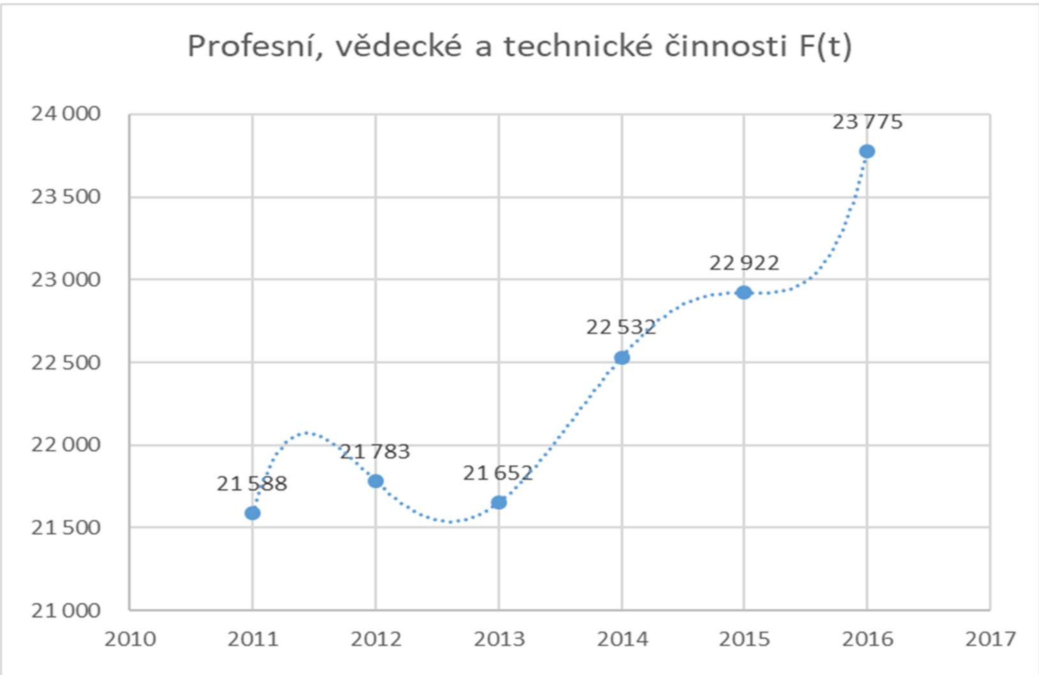
5.1.13. Profesní, vědecké a technické činnosti

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek M, který vypadá následovně.

$$F(t) = 44{,}1t^5 - 559{,}25t^4 + 2475{,}8t^3 - 4337{,}2t^2 + 2571{,}6t + 21588$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 29 skupina M



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

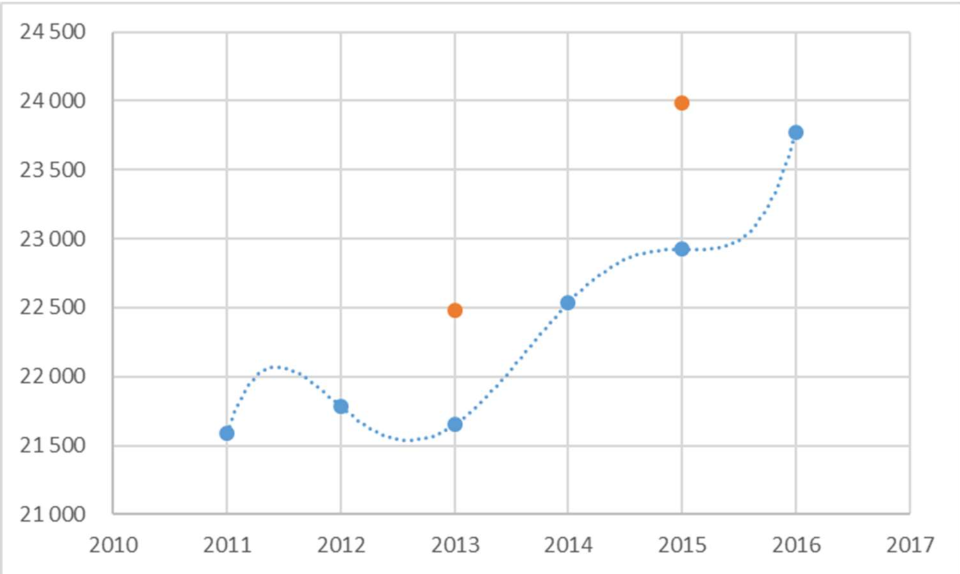
$$F(t) = 14{,}05t^4 - 126{,}07t^3 + 381{,}45t^2 - 74{,}433t + 21588$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 22 478,91. Původní hodnota je 21 652. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -74{,}15t^4 + 667{,}73t^3 - 1647{,}1t^2 + 1248{,}6t + 21588$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 23 981,12. Původní hodnota je 22 922. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 30 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu M



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Zde interpolační metoda není příliš vhodnou. Lze pozorovat velkou odchylku vypočtených hodnot od skutečných.

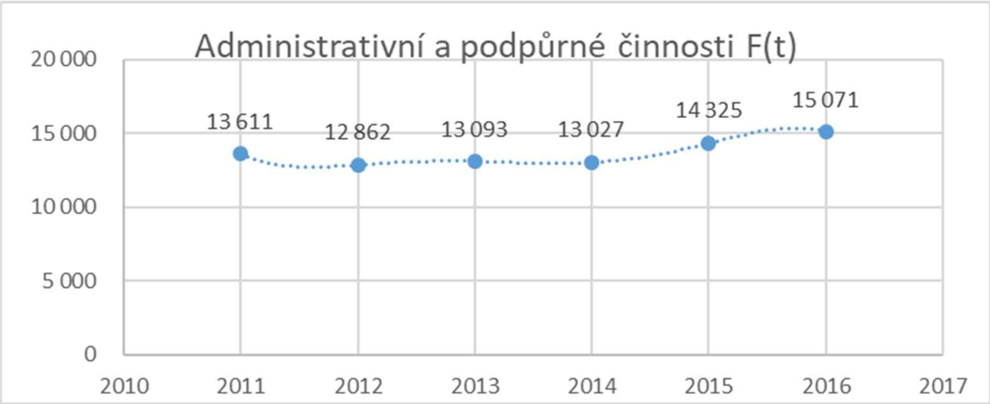
5.1.14. Administrativní a podpůrné činnosti

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek N, který vypadá následovně.

$$F(t) = -54{,}292t^5 + 665{,}33t^4 - 2847{,}5t^3 + 5189{,}7t^2 - 3702{,}2t + 13611$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 31 skupina N



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

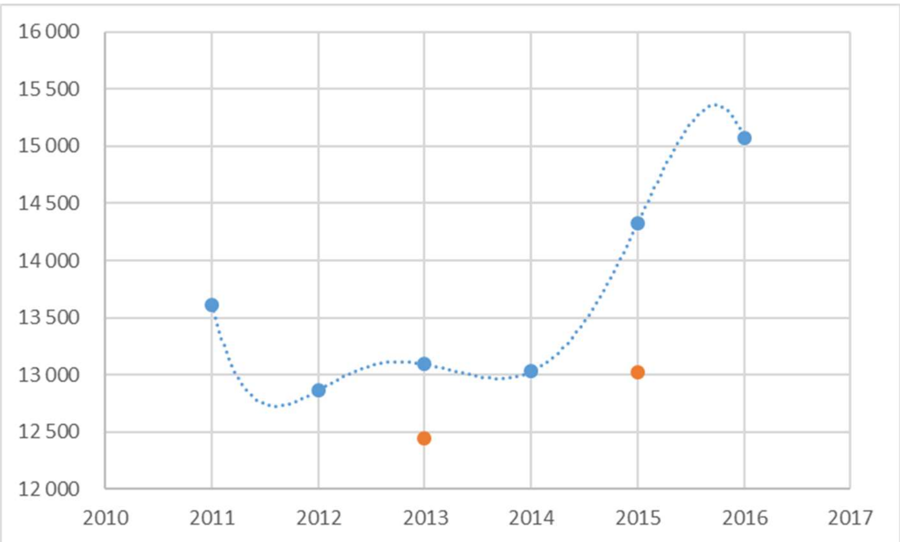
$$F(t) = -40{,}458t^4 + 355{,}67t^3 - 619{,}54t^2 - 444{,}67t + 13611$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 12 441,53. Původní hodnota je 13 093. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2015. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 68{,}125t^4 - 621{,}58t^3 + 1877{,}9t^2 - 2073{,}4t + 13611$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 13 022,68. Původní hodnota je 14 325. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 32 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu N



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočet

Lze pozorovat odchylku, která pro rok 2012 není příliš dramatická, avšak pro rok 2015 je tento rozdíl mezi vypočtenou hodnotou a skutečnou hodnotou značný.

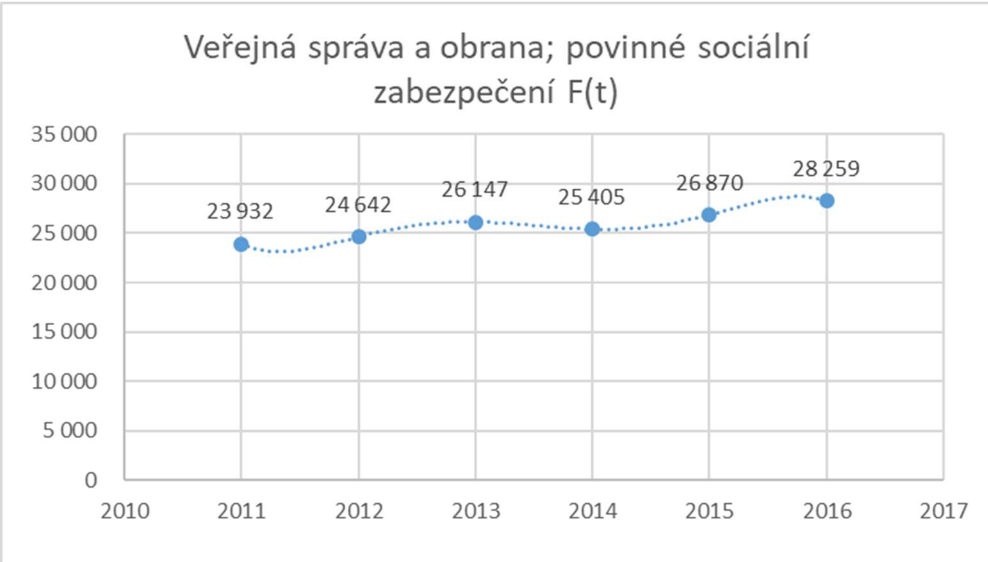
5.1.15. Veřejná správa a obrana; povinné sociální zabezpečení

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek O, který vypadá následovně.

$F(t) = -118,61t^5 + 1498,4t^4 - 6532,3t^3 + 11285t^2 - 5422,1t + 23932$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 33 skupina O



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

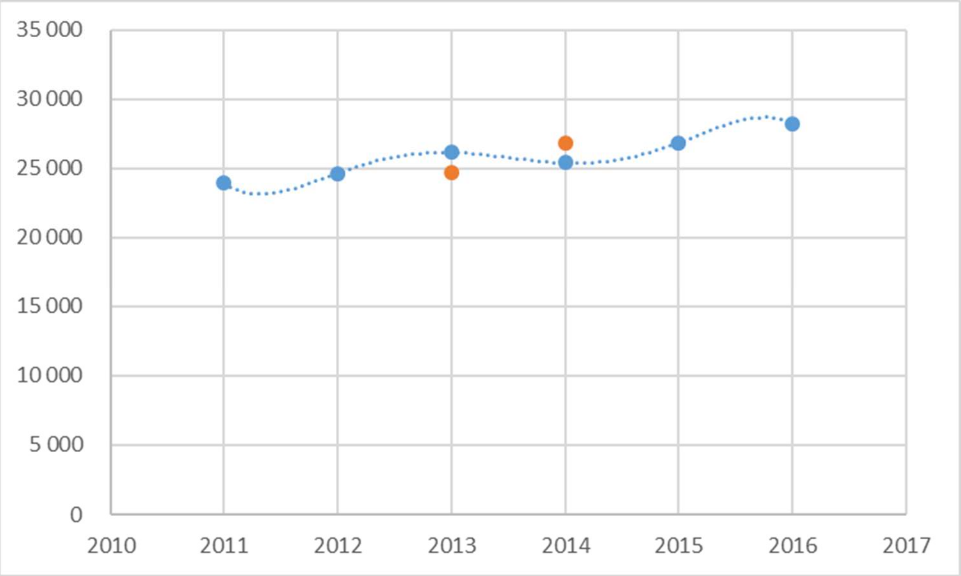
$F(t) = -43,492t^4 + 465,6t^3 - 1406,5t^2 + 1694,4t + 23932$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 24 723,73. Původní hodnota je 26 642. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2014. Interpolační polynom vypadá následovně.

$F(t) = 75,117t^4 - 720,48t^3 + 2033,1t^2 - 677,77t + 23932$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 26 828,11. Původní hodnota je 25 405. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 34 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu O



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Zde lze tuto metodu vyhodnotit jako vhodnou, odchylka není příliš velká. Extrapolace do dalšího roku tedy činí 26 828,11.

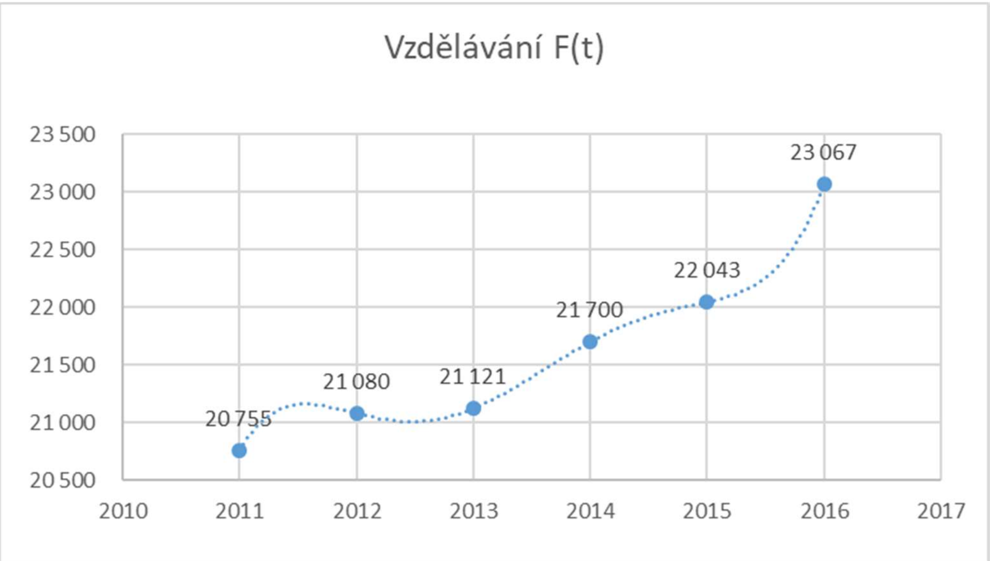
5.1.16. Vzdělávání

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek P, který vypadá následovně.

$F(t)= 27{,}392t^5 - 340{,}42t^4 + 1494{,}7t^3 - 2654{,}1t^2 + 1797{,}4t + 20755$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 35 skupina P



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

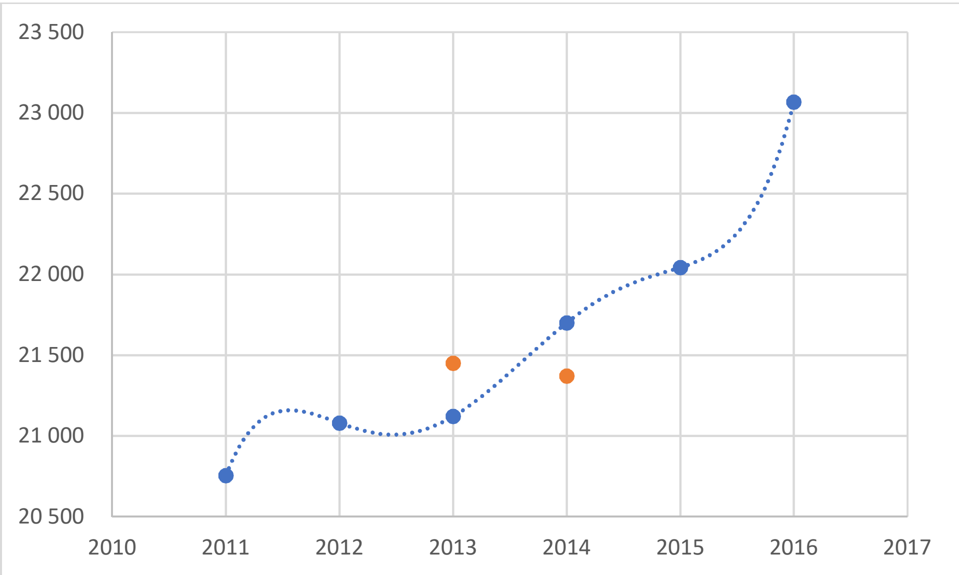
$$F(t) = 15{,}675t^4 - 121{,}4t^3 + 276{,}82t^2 + 153{,}9t + 20755$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 21 449,68. Původní hodnota je 21 121. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2014. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -11{,}717t^4 + 152{,}52t^3 - 517{,}53t^2 + 701{,}73t + 20755$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 21 371,38. Původní hodnota je 21 700. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 36 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu P



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

V tomto případě je interpolace v rámci zkoumaného intervalu vhodnou metodou, odchylka není příliš velká.

5.1.17. Zdravotní a sociální péče

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek Q, který vypadá následovně.

$$F(t) = -19{,}883t^5 + 196{,}42t^4 - 575{,}25t^3 + 596{,}08t^2 - 75{,}367t + 23285$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 37 skupina Q

zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2013 a vypočtu znovu interpolační polynom.

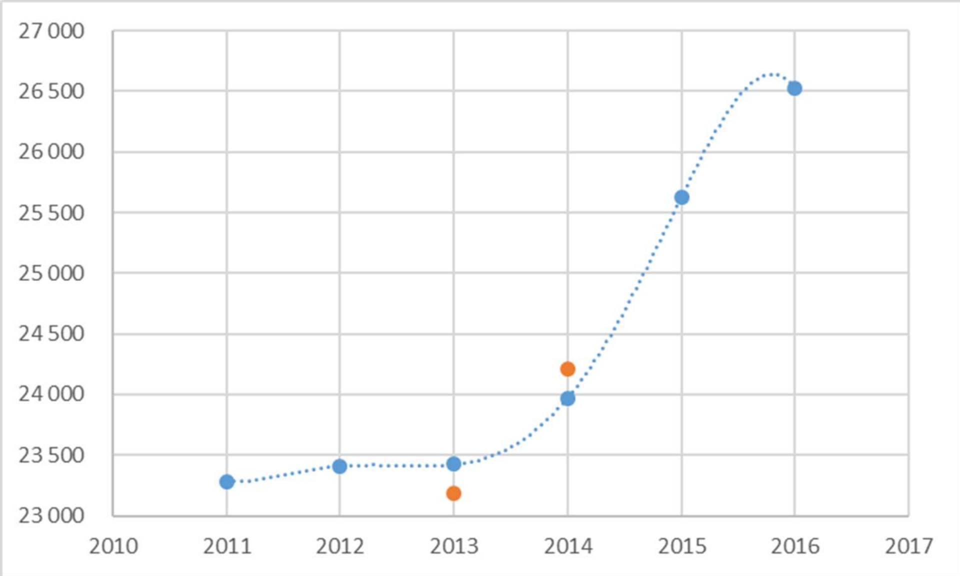
$$F(t) = -62{,}067t^4 + 597{,}87t^3 - 1531{,}4t^2 + 1117{,}6t + 23285$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2013; ta se rovná 23 184,49. Původní hodnota je 23 423. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2014. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -42{,}183t^4 + 399{,}03t^3 - 954{,}82t^2 + 719{,}97t + 23285$$

Po dosazení hodnota pro rok 2015 vychází 24 208,52. Původní hodnota je 23 970. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 38 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu Q



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty.

Pro tuto časovou řadu je vhodné na zkoumaném intervalu použít interpolační metodu.

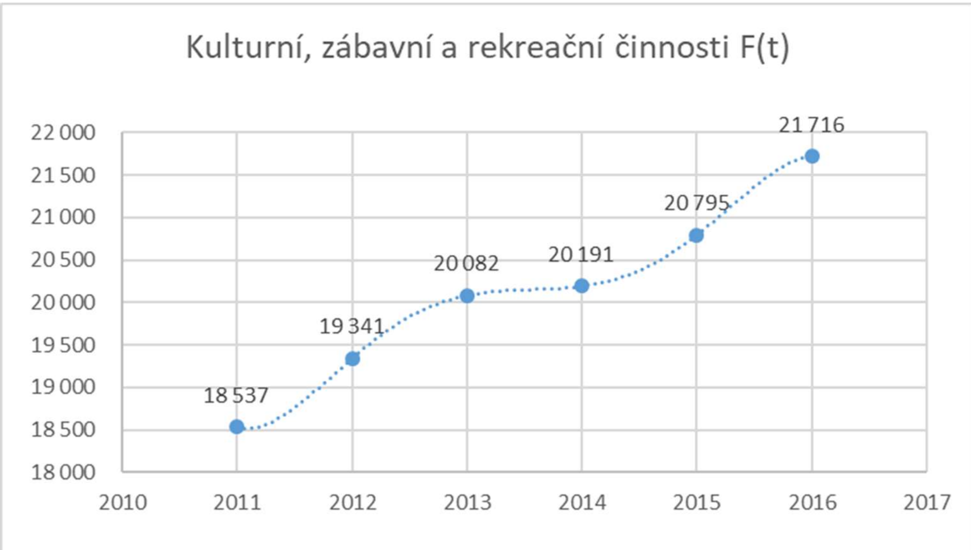
5.1.18. Kulturní, zábavní a rekreační činnosti

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek R, který vypadá následovně.

$$P(t) = -25{,}008t^5 + 320{,}75t^4 - 1394{,}1t^3 + 2280{,}8t^2 - 378{,}37t + 18537$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 39 skupina R



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

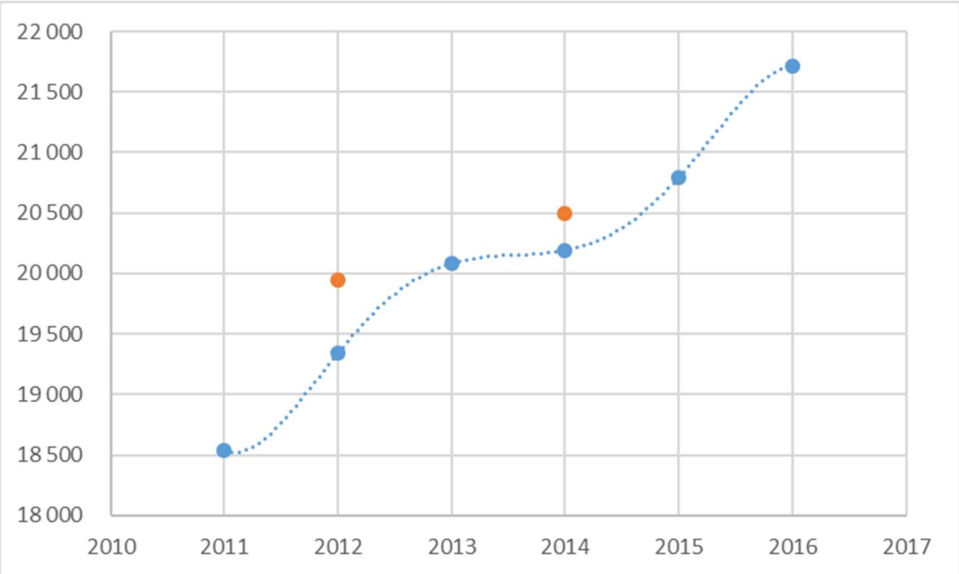
$$F(t) = -29{,}367t^4 + 381{,}47t^3 - 1570{,}5t^2 + 2622{,}6t + 18537$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 19 941,2. Původní hodnota je 19 341. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2014. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = 20{,}65t^4 - 168{,}72t^3 + 330{,}1t^2 + 621{,}97t + 18537$$

Po dosazení hodnota pro rok 2014 vychází 20 491,02. Původní hodnota je 20 191. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 40 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu R



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

U této časové řady lze pozorovat vysokou odchylku v roce 2012, tato odchylka se zmenšuje s postupem času. Na zkoumaném intervalu není polynomiální interpolace vhodnou metodou.

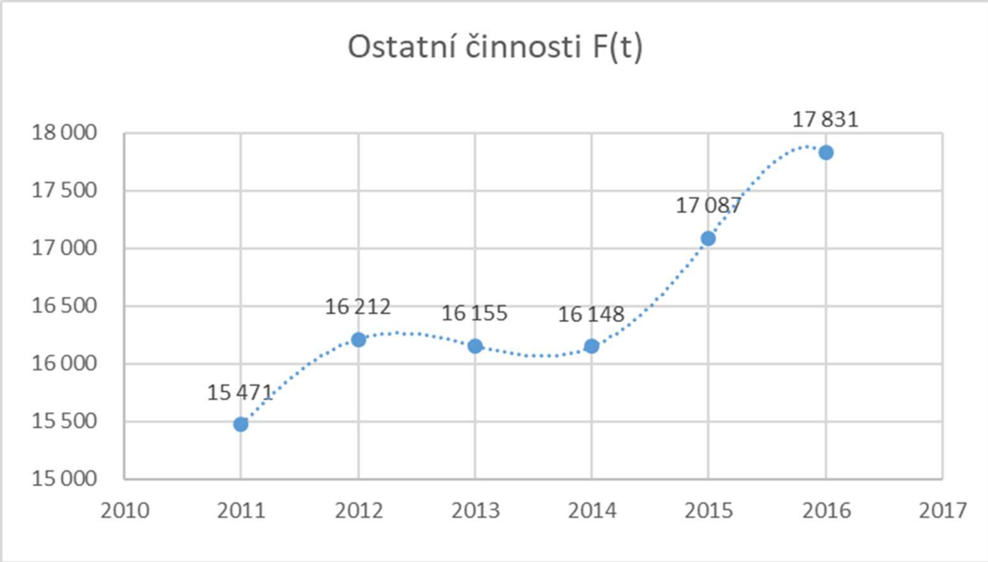
5.1.19. Ostatní činnosti

Interpolační polynom je vypočítán z dat v tabulce 2 řádek S, který vypadá následovně.

$$F(t) = -17{,}375t^5 + 175{,}75t^4 - 478{,}79t^3 + 67{,}75t^2 + 993{,}67t + 15471$$

Graficky tato funkce vypadá následovně.

Graf 41 skupina S



zdroj: Český statistický úřad

Nyní je nutné testovat, zda je tato metoda vhodná pro aplikaci na tuto konkrétní časovou řadu. Právě proto vynechám hodnotu z roku 2012 a vypočtu znovu interpolační polynom.

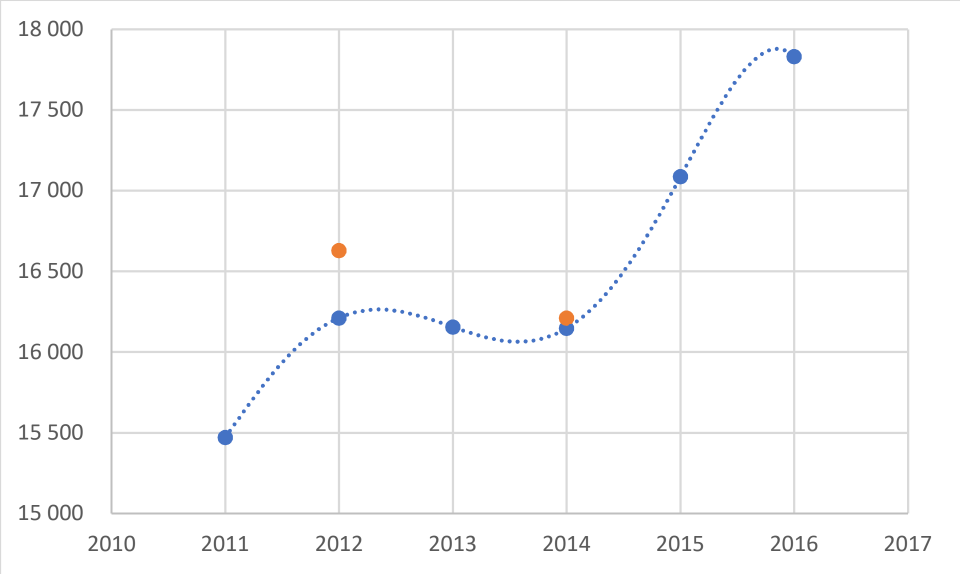
$$F(t) = -67{,}5t^4 + 754{,}83t^3 - 2608t^2 + 3078{,}7t + 15471$$

Na základě tohoto polynomu dopočtu hodnotu v roce 2012; ta se rovná 16 629,03. Původní hodnota je 16 212. Obdobně provedu výpočet bez hodnoty v roce 2014. Interpolační polynom vypadá následovně.

$$F(t) = -32{,}75t^4 + 372{,}58t^3 - 1287{,}5t^2 + 1688{,}7t + 15471$$

Po dosazení hodnota pro rok 2014 vychází 16 212,03. Původní hodnota je 16 148. Dále bude vše zobrazeno graficky.

Graf 42 zobrazeni odchylky při interpolaci pro skupinu S



zdroj: Český statistický úřad + vlastní výpočty

Pro tuto časovou řadu je vhodné v rámci zkoumaného intervalu použít polynomiální interpolační metodu.

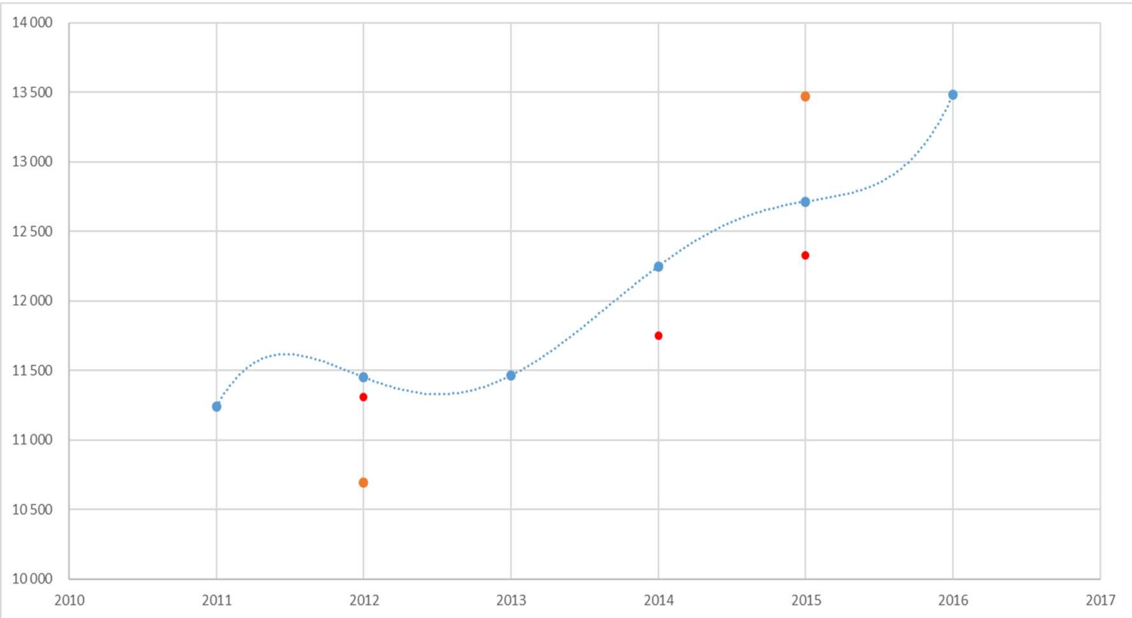
6. Diskuze

Je jasné, že polynomiální interpolace nezvládá uspokojivě modelovat všechny veličiny. Proto se zde nabízí otázka, jak je modelovat lépe? Vezměme příklad ze skupiny Ubytování, stravování a pohostinství. Ačkoliv zde celou dobu mzda roste, křivka, která tuto veličinu modeluje, střídavě stoupá a klesá. Toto se pokusím odstranit tak, že použiji jiný základní model. Vhledem k struktuře zkoumaných dat lze najít funkci, která odpovídá jejich průběhu lépe, například funkce exponenciální. Proto proložím data křivkou.

$$y = 11166{,}045 + e^{0{,}68x+3{,}647}$$

Pro výpočet této křivky jsem využil pouze 3 body, a to hodnoty z roků 2011, 2013 a 2016. Proto vzniká malá odchylka v roce 2014. Nyní jsem schopen porovnat odchylky. Ty jsou zobrazeny na grafu níže[4].

Graf 43 porovnání interpolačních metod



zdroj: Český statistický úřad

Je patrné, že tato exponenciální funkce modeluje tuto konkrétní veličinu mnohem lépe. Jednak jde o stále stoupající funkci stejně jako mzda a zároveň odchylka v jednotlivých bodech je mnohem menší. Tato metoda má nevýhodu, že pro její výpočet se musí snížit počet výchozích bodů.

---

[4] oranžová – polynom. interpolace ; červená – exponenciální interpolace

7. Závěr

Polynomiální interpolace je vhodná pro svou relativní jednoduchost a dosáhl jsem s ní poměrně dobrých výsledků. V rámci zkoumaných intervalů je metoda vhodná ve více než polovině zkoumaných řad, ovšem pro predikci hodnot v budoucích časech není tato polynomiální interpolace vhodným nástrojem. Proto je tato metoda nevhodná pro využití pro účely projektu KOMPAS.

Vždy je však nutné vhodnost individuálně posoudit na základě struktury zkoumaných dat. Ačkoliv v celé práci užívám stejné typy dat, jejich struktura se v jednotlivých případech velmi liší. Dochází k velkým výkyvům nebo je zde jeden extrémní případ, jako tomu je u skupiny J. V případech, kdy polynomiální interpolace nemodeluje příliš přesně, je nutné interpolaci za pomoci polynomu nahradit vhodnou interpolační funkcí, například exponenciální.

I. Summary

This bachelor thesis deals with a solution of economic problems using nonlinear interpolation. Nonlinear interpolation is a numerical method that can approximate complex mathematical functions. Methods such as Lagrange Interpolation Polynomial, Newton Interpolation Polynomial, Neville's Algorithm, Hermite Interpolation and Spline Interpolation are described and used for the purposes of the work. It tests methods. It decides whether method is appropriate. It shows graphically. Data on wages in the South Bohemian Region serves as model data. They are available to the public through the statistical office database. There are information on average wages distributed according to the CZ-NACE system.

Keywords: wages, approximation, interpolation, CZ-NACE, wage development

JEL classification:

C65 Miscellaneous Mathematical ToolsE24 Wages

II. Reference

Beu, T. (2017). *Introduction to numerical programming.* Boca Raton: CRC Press.

Burden, R. L. (2001). *Numerical Analysis,.* Boston: Pacific Grove : Brooks/cole.

Courant, R. &. (1999). *Introduction to Calculus and Analysis I.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Český statistický úřad. (28. Prosinec 2018). *Statistická ročenka Jihočeského kraje.* Načteno z Český statistický úřad : https://www.czso.cz/csu/czso/statisticka-rocenka-jihoceskeho-kraje-2018

Horová, Z. (2008). *Numerické metody.* Brno: Masarykova univerzita v Brně.

Judd, K. ,. (červenec 2014). Smolyak method for solving dynamic economic models: Lagrange interpolation, anisotropic grid and adaptive domain. *Journal of Economic Dynamics and Control*, stránky 92-123.

Wooldridge, J. M. (2009). *Itroductory Econometrics A modern Apprach.* Michigan: South-Western,a part of Cengage Learning.

Zörnig. (1989). *Numerické metody.* Praha: Ediční středisko ČVUT,Praha6, Zikova4.

III. Seznam grafů a tabulek