



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Stereometrické úlohy

Vypracovala: Kamila Křížová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Stereometrické úlohy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne.....

.....

Kamila Křížová

Poděkování

Tímto děkuji vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za jeho vstřícnost při konzultacích a za velmi cenné rady, kterými mi při vypracování práce pomohl.

Anotace:

Tato práce s názvem Stereometrické úlohy se zabývá konstrukčním řešením vybraných prostorových úloh pomocí interaktivního softwaru GeoGebra, kde nejčastěji využívám jeho 3D prostředí. Řešení úloh se vždy skládá ze slovního či symbolického popisu vlastní konstrukce, který je doplněn o grafické znázornění, které jsem vytvořila pomocí rovnoběžného promítání. Úlohám předchází teoretický základ, který čtenáře seznamuje se základními vlastnostmi stereometrie. Na závěr se zaměřuji na problematiku prostorových úloh u žáků základních škol.

Annotation:

This bachelor thesis named Stereometric Tasks deals with construction of selected spatial tasks with GeoGebra interactive software, where I often use its 3D environment. Solution of each task comprises verbal or symbolic description of the construction which is always accompanied by graphical representation created using the parallel projection. Before the tasks, there is a theoretic summary which acquaints the reader with basic features of stereometry. At the end of the thesis I focus on the problem of spatial tasks solved by pupils at elementary schools.

Obsah

Úvod	6
1. Úvod do stereometrie	8
1.1 Historie stereometrie.....	8
1.2 Vybraná tělesa	11
1.3 Rovnoběžné promítání.....	17
1.3.1 Termíny rovnoběžného promítání.....	17
1.3.2 Základní věty rovnoběžného promítání.....	18
1.4 Základní konstrukce v prostoru	21
1.5 Úvod do GeoGebry	22
2. Odchylky	24
2.1 Odchylka přímek v prostoru	24
2.2 Odchylka dvou rovin	27
2.3 Odchylka přímky a roviny	27
3. Řezy těles	30
3.1 Řezy krychle	30
3.2 Řezy jehlanu	35
3.3 Řezy hranolu	40
4. Průnik přímky s tělesy	44
4.1 Průnik přímky s krychlí.....	44
4.2 Průnik přímky s hranolem.....	46
4.3 Průnik přímky s jehlanem	50
5. Prostorové úlohy u přijímacích zkoušek	53
5.1 Vybrané úlohy pro žáky základních škol	53
Závěr	61

Úvod

Slovo *stereometrie*, jehož volný překlad z řečtiny znamená „měření těles“, označuje geometrii v prostoru, kterou se tato práce zabývá. Stereometrie není omezena pouze na konkrétní tělesa, ale pojednává i o nekonečném množství způsobů umístění a vzájemných polohách bodů, přímk a rovin v trojrozměrném prostoru.

V této práci jsem řešila různé druhy stereometrických úloh, které se u žáků či studentů často netěší příliš velké oblibě, protože si žádají prostorovou představivost, jejíž rozvíjení bývá spíše opomíjeno. Ve školství se klade důraz především na geometrii v rovině, proto stereometrické znalosti a představy mnohdy žákům schází.

Kapitola první se zabývá zejména teoretickou stránkou stereometrie. Zmiňuji zde historický kontext vědy od jejího počátku do 19. století. V další podkapitole píš o tělesech, se kterými se v úlohách setkáváme, a o jejich vlastnostech. Následující podkapitola shrnuje pojmy a vlastnosti rovnoběžného promítání, na které lze narazit v každé úloze, protože jsou stavebním kamenem pro popis řešení a jeho grafické znázornění. Dále je zde uveden výčet základních konstrukcí v prostoru. Na závěr kapitoly stručně popisují prostředí a nástroje programu GeoGebra, kterých jsem též využívala.

Druhá kapitola je přechodem mezi teoretickou a praktickou částí, jelikož obsahuje tři subkapitoly věnované odchyškám (tj. odchylka dvou přímk, odchylka dvou rovin a odchylka přímky a roviny), kdy zmiňuji věty a některé z nich vysvětluji na řešených příkladech.

Následující kapitola se věnuje řezům těles rovinou a skládá se ze tří podkapitol, kdy se v každé z nich věnuji řezům jiným tělesem. První podkapitola je nejobsáhlejší, jsou zde řešeny úlohy na řezy krychle, které řadím dle náročnosti na sestavení. Druhá podkapitola se zabývá řezy jehlanů a třetí řezy hranolů.

Ve čtvrté kapitole se zabývám průnikem přímky s tělesem. Kapitola je strukturována stejně jako kapitola předchozí na tři podkapitoly, které opět obsahují řešené úlohy průníků přímky s krychlí, jehlanem a hranolem. Úlohy mají společné to, že řešením jsou bod(y) či úsečka.

Závěrečná kapitola popisuje problematiku výuky stereometrie na českých školách a nedostatečně rozvinutou prostorovou představivost u některých žáků. Zároveň zde konstatuji, že důraz na prostorovou geometrii by měl být kladen zejména na středních školách, aby žáci byli schopni úspěšně absolvovat testy studijních předpokladů. Na konci práce je vložena podkapitola s několika příklady pro žáky základních škol, které by mohly žákům činit problémy. U každé úlohy uvádím případné nesprávné řešení, kterého se mohou žáci dopustit a zároveň i řešení správné.

1. Úvod do stereometrie

1.1 Historie stereometrie

První stereometrické představy vznikaly přirozeně z praktických potřeb. Člověk měl tendenci si odjakživa usnadňovat svou práci, proto již v pozdní době ledové začaly v jeho rukách vznikat nejrůznější nástroje geometrických tvarů za účelem lovu kořisti, opracovávání materiálů, přemísťování předmětů apod. Nálezy z období neolitu napovídají, že geometrické představy se dočkaly velkého pokroku se vznikem tkalcovství, hrnčířství, stavitelství a umění. Asi největší vliv mělo na geometrické představy zemědělství, zřejmě proto, že bylo nutné měřit zemědělské plochy a objemy naturálií, vody a podobně, kdy vše šlo ruku v ruce s rozvojem obchodu. O něco později zase zkoumání hvězdné oblohy vedlo naše předky k získání poznatků o kouli [4].

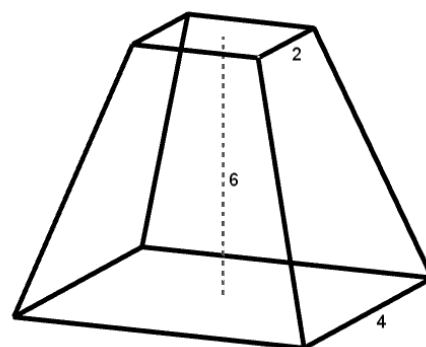
První stereometrické i planimetrické poznatky nacházíme u vyspělých starověkých národů, které žily na území starého Egypta a Mezopotámie. Zde se nám nejstarší písemné památky dochovaly v podobě egyptských hieroglyfů na papyrech a klínového písma na hlíněných destičkách v Mezopotámii [9].

Jedna z nejzajímavějších egyptských „stereometrických“ úloh je zapsána v takzvaném *moskevském papyru* a pochází asi z roku 1850 př. n. l. Tento dokument (také „*Goleniščenův papyrus*“) obsahuje 25 matematických úloh a je uložen v moskevském Puškinově muzeu. V jedné úloze se počítá objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou. Text v překladu i s řešením zní takto:

„Způsob výpočtu pyramidy nemající vrchol. Máš-li dánu pyramidu bez vrcholu vysokou 6 loktů, s dolní hranou 4 lokte a horní 2 lokte (*Obrázek 1*), umocni 4 na druhou, dostaneš 16; zdvojnásob 4, dostaneš 8; umocni 2 na druhou, dostaneš 4;

(1) Přičti těchto 16 k těmto 8 a 4

(2) Dostaneš 28



Obrázek 1

- (3) Vypočti $\frac{1}{3}$ ze 6, obdržíš 2
 (4) Počítej s 28 dvakrát, dostáváš 56
 (5) Je to skutečně 56. Nalezl jsi správně.“

V papyru je zároveň uveden i náčrt a schéma výpočtu. Komolý jehlan je zde zobrazen jako nevelký lichoběžník, v textu chybí rozdělovací znaménka. Operace umocnit „na druhou“ je značena hieroglyfem „jít mimo“. Je tedy zajímavé, že postup je vlastně založen na správném vzorci [4].

My bychom úlohu řešili nejspíš takto:

$$S_1 (\text{obsah podstavy}) = 4^2 = 16$$

$$S_2 (\text{obsah „stříšky“}) = 2^2 = 4$$

$$v (\text{výška}) = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \quad [8]$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = \underline{\underline{56 \text{ jednotek}^3}}$$

Matematika jako věda taková se začínala rozvíjet teprve od 7. st. př. n. l. ve starém Řecku *Thaletem z Milétu* a *Pythagorem ze Samu*. Především Thales se podílí na přetvoření geometrie. Vytvořil abstraktní vědu zkoumající různé geometrické tvary, kde vycházel z nejrůznějších sbírek úloh počítajících s výměrami polí, objemy hrází a sýpek, rozměry cihel a podobně [4].

Pythagoras se zabýval společně se svými žáky pravidelnými mnohostěny. V té době byly známy čtyři z pěti pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn). Pythagorejci však nikdy nebyli ve stereometrii na tak vysoké úrovni, jako v planimetrii [4].

Stereometrie jako zvláštní vědní disciplína byla jmenována *Platonem*, jenž žil v 5. – 4. st. př. n. l. Patřila tak mezi 5 vědeckých disciplín (společně s aritmetikou, geometrií, astronomií a hudbou), které by měl v tehdejší době ovládat každý státník. V Platonově škole provedli důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů a tato nauka byla i součástí platónových idealistických názorů. Podle něj se oheň skládá ze čtyřstěnů, vzduch

z osmistěnů, voda z dvacetistěnů a země z krychlí. Obrys světa pak tvoří dvanáctistěn. Pravidelné mnohostěny tedy dodnes nazýváme „platonská tělesa“ [4].

V 5. st. př. n. l. přichází *Demokritos* a věnuje ve svých geometrických spisech pozornost především určování ploch a objemů těles. To právě on zřejmě přichází na to, že objem hranolu je roven jedné třetině objemu jehlanu o stejné výšce a podstavě. Demokritos dále zobecňuje větu pro jehlany s mnohoúhelníkovou podstavou. Zároveň kruh nazval mnohoúhelníkem o nekonečném počtu stran, proto z věty pro jehlany vyplývá i zobecnění pro kužele [4].

Dále se matematická věda přesouvá do římského impéria, konkrétně do Alexandrie, která zde byla hlavním střediskem vědy. Zde působící *Eukleides* (žijící ve 4. – 3. st. př. n. l.) se soustavně zabýval stereometrií. Sestavil soubor knih zvaný *Základy*. Jde po bibli o nejrozsáhlejší písemné dílo do 19. století a ve svých 13 knihách se zabývá matematikou. Jedenáctá kniha se zabývá obecně stereometrií, pojednává tedy o geometrii těles. Dvanáctá kniha rozebírá povrchy a objemy těles. Ve třinácté knize se píše o pravidelných mnohostěnech neboli platónských tělesech. Eukleidův soubor *Základy* vyniká svou přesností, je vybudován podle jednotného logického schématu [4].

Jeden z největších matematiků historie byl ve 3. st. př. n. l. *Archimedes*. Tento matematický génius stanovil povrchy a objemy těles ohraničených křivými plochami a od jeho myšlenek se po následujících 2000 let odvíjel i integrální počet [4].

Dalšího velkého rozkvětu se stereometrie dočkala v 18. století, kdy se švýcarský matematik *Leonard Euler* zabývá studiem mnohostěnů. Ty byly sice zkoumány již ve starověku, ale Euler zkoumal mnohostěny, které vyhovují tzv. Eulerově větě. Dokázal, že mezi takovéto mnohostěny patří zejména ty konvexní. Ty jsou podle této věty nazývány Eulerovy mnohostěny. Počátkem 19. století se začínaly více zkoumat prostorové vztahy mezi přímkami a mezi přímkami a rovinami francouzskými matematiky *Adrienem Marie Legendrem* a *Augustinem Louisem Cauchym*. Nadále se začaly rozšiřovat znalosti prostorových útvarů, k nimž přispěla deskriptivní geometrie, jejíž základy položil *Gaspard Monge* [4].

1.2 Vybraná tělesa

Krychle

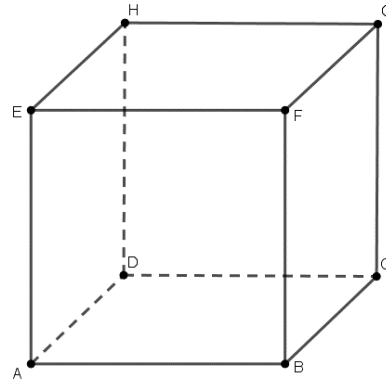
Těleso o šesti stěnách stejného obsahu a dvanácti hranách stejné délky se nazývá krychle. Jde vlastně o speciální případ kvádrů, který však má všechny hrany stejně dlouhé.

$$S (\text{povrch}) = 6 \cdot a^2$$

$$V (\text{objem}) = a^3,$$

kde a je délka hrany krychle.

Ve stereometrii se krychle zobrazuje nejčastěji tak, že jedna stěna leží ve frontální rovině, což znamená, že se zobrazí ve skutečné velikosti. Úsečky kolmé na průmětnu zobrazujeme do úseček svírajících s obrazem vodorovných úseček úhel 45° . Délka těchto úseček je rovna polovině skutečné délky. Nejčastěji bývá krychle zobrazována v nadhledu, tedy že vidíme horní, přední a jednu z bočních stěn. Pokud je vidět levá stěna, nazýváme zobrazení *levý nadhled*, pokud vidíme pravou stěnu, jde o *pravý nadhled*. Pravý nadhled společně s pravidly pro zobrazení krychle ilustruje *Obrázek 2* [7].



Obrázek 2

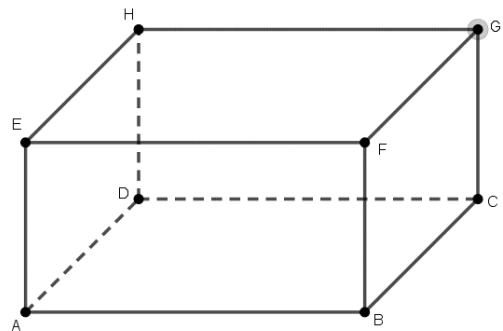
Kvádr

Kvádr je definován jako těleso o šesti stěnách, přičemž protější strany jsou shodné obdélníky, popřípadě čtverce.

$$S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

kde a, b, c jsou délky hran kvádrů.

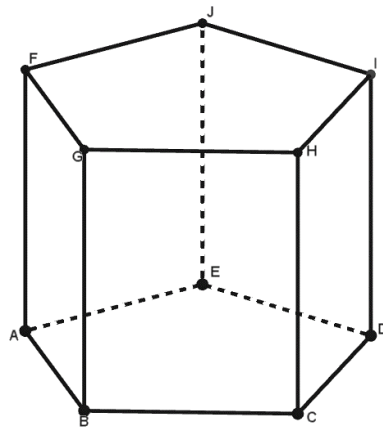


Obrázek 3

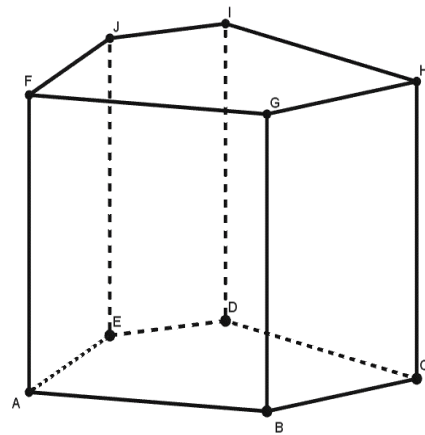
Hranol

Hranolem nazýváme libovolné těleso, jež je tvořeno dvěma shodnými mnohoúhelníky, které tvoří jeho horní a dolní podstavu. Bočními stěnami jsou rovnoběžníky. Zvláštním typem hranolu je *pravidelný n-boký hranol* (Obrázek 4), jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky (například pravidelný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník atd.) a boční stěny tvoří shodné obdélníky, popřípadě čtverce.

Napravo od pravidelného pětibokého hranolu je znázorněn obecný hranol, jehož podstavami jsou dva shodné pětiúhelníky a stěny jsou různé obdélníky.

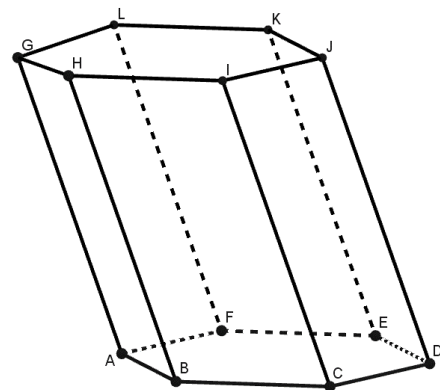


Obrázek 4



Obrázek 5

Zvláštním případem je kosý hranol, jehož boční hrany nejsou kolmé k podstavě. Podstavy jsou shodné n-úhelníky ležící v rovnoběžných rovinách.

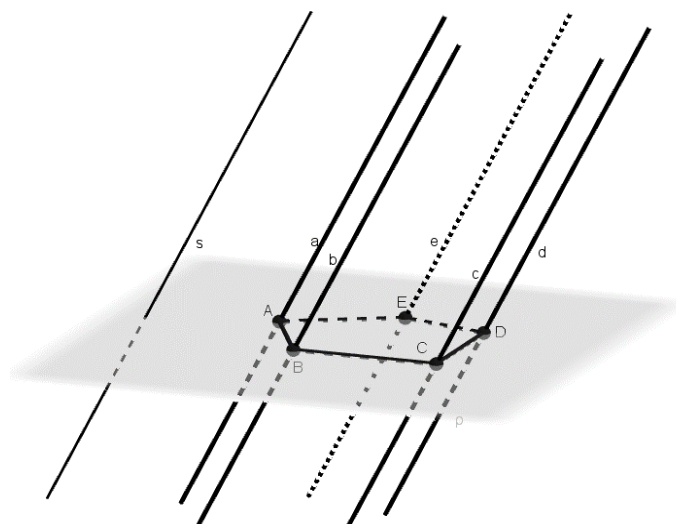


Obrázek 6

Hranolová plocha

V rovině ρ je dán n -úhelník $ABCDE$ a přímka s různoběžná s rovinou ρ . Množina všech přímek, který mají stejný směr s přímkou s , a které protínají obvod mnohoúhelníku $ABCDE$, se nazývá *hranolová plocha*. Množina všech přímek, které procházejí mnohoúhelníkem $ABCDE$ a jsou rovnoběžné se směrem s , se nazývá *hranolový prostor* [2].

Mnohoúhelník $ABCDE$ se nazývá *řídící mnohoúhelník* a jednotlivým přímkám říkáme *přímky plochy*. Přímky a, b, c, d, e procházejí vrcholy řídícího mnohoúhelníku, jsou to *hrany hranolové plochy*. Všechny přímky, které protínají stranu řídícího n -úhelníku, tvoří *stěnu hranolové plochy* [2].



Obrázek 7

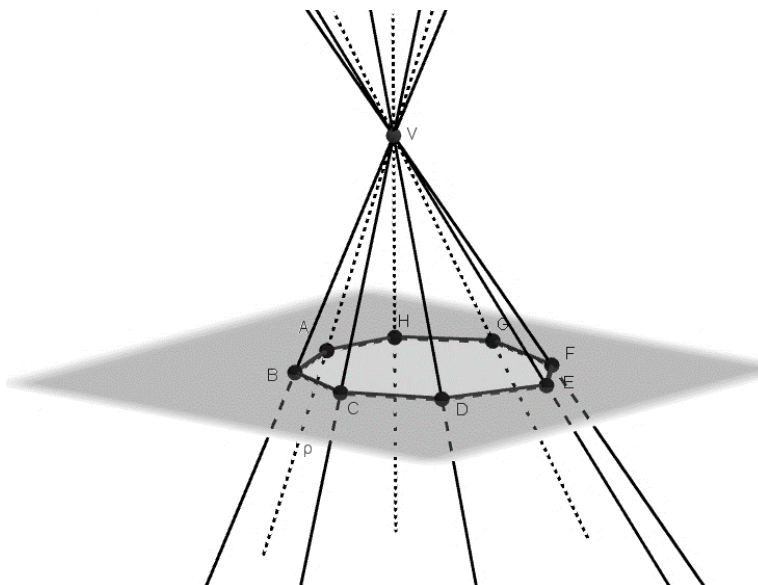
Čtyřstěn

Nejjednodušším typem trojrozměrného tělesa je čtyřstěn. Vymezuje jej nejmenší možný počet bodů, jimiž lze těleso v prostoru definovat. Všechny čtyři stěny čtyřstěnu neboli tetraedru tvoří trojúhelníky. U *pravidelného čtyřstěnu* jsou všechny stěny shodné a jsou to rovnostranné trojúhelníky. Úhel dvou hran při vrcholu je vždy roven 60° . Zvolíme-li jednu ze stěn čtyřstěnu jako podstavu, dostaneme trojboký jehlan.

Úsečka spojující libovolný vrchol čtyřstěnu a střed protější stěny se nazývá *těžnice čtyřstěnu*. Všechny čtyři těžnice mají jediný společný bod, který se nazývá *těžiště čtyřstěnu*. Vzdálenost těžiště od vrcholu se rovná třem čtvrtinám délky příslušné těžnice.

Jehlan

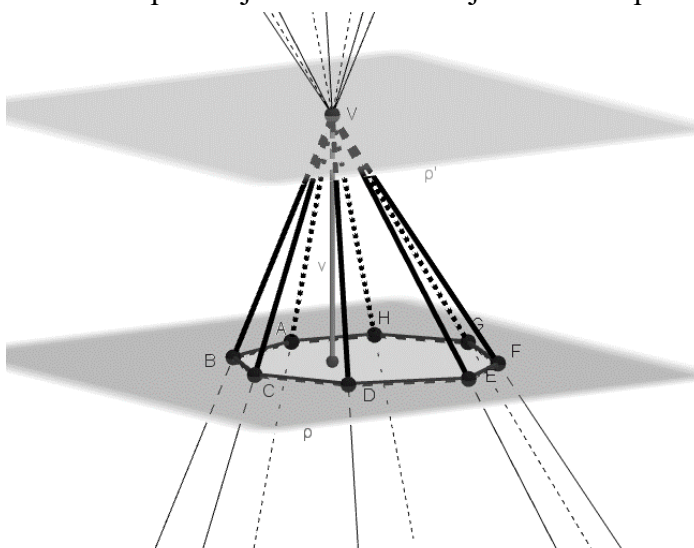
Je dán n -úhelník $ABC\dots$ ležící v rovině ρ a bod V , který v rovině ρ neleží. Sjednocení všech přímek, které protínají hranici mnohoúhelníku $ABC\dots$, a zároveň náleží bodu V , se nazývá n -boká jehlanová plocha [2].



Obrázek 8

Sjednocením všech přímek, které prochází n -úhelníkem $ABC\dots$, a zároveň daným bodem V , je n -boký jehlanový prostor. Jehlanová plocha je vlastně hranice jehlanového prostoru. Bod V nazýváme *vrcholem* jehlanové plochy či jehlanového prostoru.

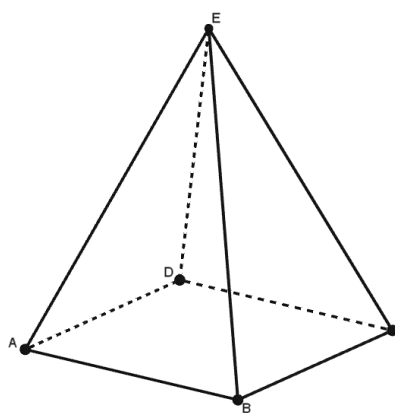
N -boký jehlan je část n -bokého jehlanového prostoru, která je mezi rovinou ρ' ; $\rho' \in V \wedge \rho' \parallel \rho$ a řídícím n -úhelníkem v rovině ρ (Obrázek 9). Bod V se v tomto případě nazývá hlavní vrchol jehlanu a mnohoúhelník $ABC\dots$ je podstavou jehlanu [2].



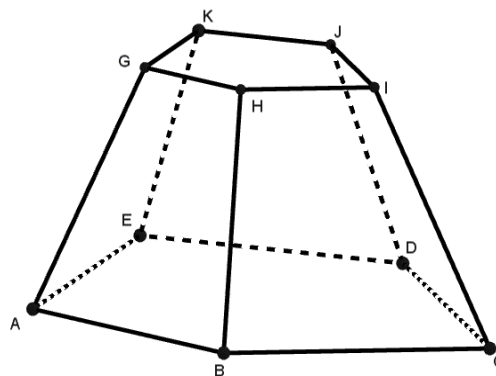
Obrázek 9

Vzdálenost vrcholu V od roviny, v níž leží podstava, je rovna výšce jehlanu v . Stěny jehlanu jsou tvaru trojúhelníků, u nichž je jeden z vrcholů vždy bod V a hrana, která je součástí n -úhelníku $ABC\dots$ je *podstavná hrana*. Nazýváme je též *bočními stěnami jehlanu* a jejich sjednocení je *plášť jehlanu*. Stěnová výška boční stěny je vzdálenost hlavního vrcholu V od podstavné hrany.

Pokud podstavu tvoří pravidelný n -úhelník, a pokud kolmý průmět hlavního vrcholu V do postavy je středem tohoto pravidelného n -úhelníku, pak se jehlan nazývá *pravidelný n -boký jehlan*. Nejčastěji operujeme s pravidelným čtyřbokým jehlanem (*Obrázek 10*).



Obrázek 10



Obrázek 11

Speciálním případem jehlanu je *komolý n -boký jehlan*. Toto těleso nemá vrchol, ale v horní části je tvořeno stěnou, která je rovnoběžná a podobná s podstavou (*Obrázek 11*).

Mnohostěny

Mnohostěny nebo také n -stěny jsou tělesa, jejichž hranice je sjednocením n mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z n -úhelníků je zároveň stranou i n -úhelníku sousedního. Platí, že žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v jedné a též rovině.

Tyto mnohoúhelníky nazýváme stěnami mnohostěnu. Strany těchto mnohoúhelníků jsou hrany mnohostěnu. Stěny se společnou hranou nazýváme sousední. Úsečka, jenž spojuje dva vrcholy mnohostěnu ležící v jedné stěně, které nejsou zároveň sousední, je *stěnová úhlopříčka*. Jestliže existuje úsečka, která spojuje dva vrcholy mnohostěnu, které neleží v jedné stěně, nazveme ji *tělesovou úhlopříčkou* mnohostěnu.

Všechna tělesa v této kapitole se obecně označují jako *mnohostěny*.

Konvexní mnohostěn

Konvexní mnohostěn vzniká průnikem konečného počtu poloprostorů. Ten definujeme tak, že s každými dvěma body Y a Z náležícími libovolnému konvexnímu mnohostěnu je součástí konvexního mnohostěnu i celá úsečka YZ .

Pro konvexní mnohostěny platí Eulerova věta:

Označíme-li s počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran konvexního mnohostěnu, pak platí:

$$s + v = h + 2$$

Tuto větu dokážeme na pravidelném dvanáctistěnu:

$$s = 12 \text{ (dvanáctistěn)}$$

$$v = (12 \cdot 5) : 3 = 20$$

(počet všech vrcholů dělený počtem hran stýkajících se v jednom vrcholu)

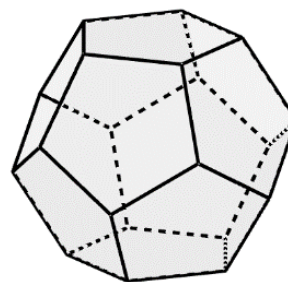
$$h = (12 \cdot 5) : 2 = 30$$

(počet všech hran dělený počtem stěn stýkajících se v jedné hraně)

$$s + v = h + 2$$

$$12 + 20 = 30 + 2$$

$$32 = 32$$



Obrázek 12

1.3 Rovnoběžné promítání

Deskriptivní geometrie je matematická věda, která studuje konstruktivní metody, díky nimž zobrazuje prostorové útvary do roviny. Zároveň je nutné, aby bylo možné z rovinného zobrazení vyčíst všechny základní vlastnosti zobrazeného útvaru, mezi které patří například velikost, tvar nebo vzájemná poloha jednotlivých částí. Zobrazení (nebo také příbuznost) má být vždy takové, aby vzoru příslušel obraz vždy jednoznačně a obráceně, aby obraz určoval právě jediný útvar v prostoru [2, 3].

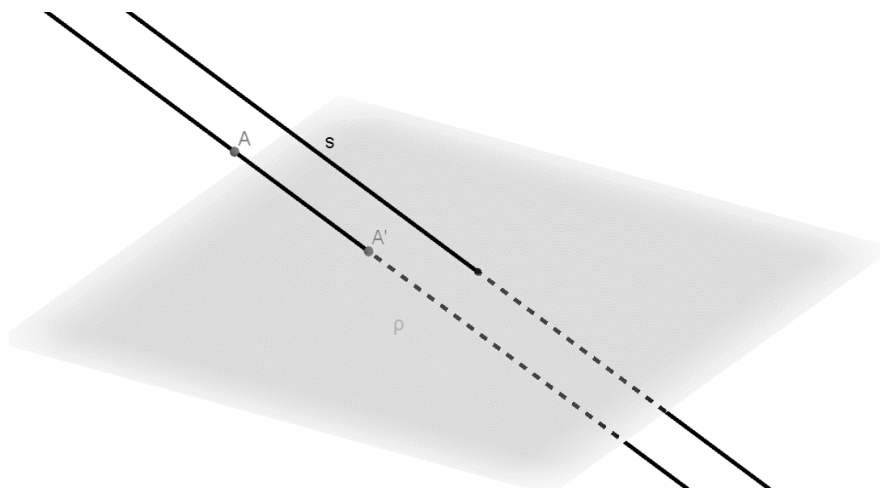
Konstruktivní metody těchto vlastností se nazývají zobrazovací metody a v této kapitole se budeme zabývat skupinou, která patří k tzv. rovnoběžným nebo také paralelním zobrazovacím metodám – tzv. *rovnoběžným promítáním*. Popíšeme si základní poučky rovnoběžného promítání a zavedeme si základní konstrukce v prostoru.

1.3.1 Termíny rovnoběžného promítání [4]

Průmětna je vodorovná rovina ρ a je to pevná rovina, do které provádíme průmět (vznikne zde celý obraz nějakého vzoru).

Směr promítání je dán přímkou s , která není rovnoběžná s rovinou ρ .

Promítací přímka je nějaká přímka s' , která je rovnoběžná se směrem promítání s . Pokud máme nějaký libovolný bod A v prostoru, tak jeho obrazem je bod A' , který vznikne jako $s' \cap \rho$, kde $(s' \parallel s) \wedge (s' \cap A)$.



Obrázek 13

Pro sestrojování průmětů bodů prostoru potřebujeme tedy danou pevnou rovinu ρ a sní různoběžnou přímkou s . Říkáme proto, že **rovoběžné promítání** je určeno průmětnou ρ a přímkou s .

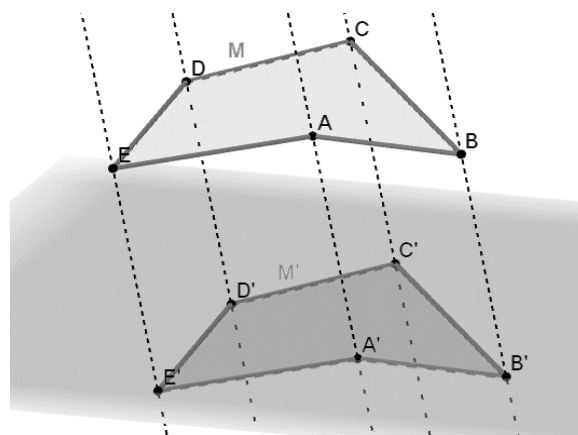
Každým bodem A prostoru prochází jediná promítací přímka s' . Protože předpokládáme, že s je různoběžná s ρ , protne se přímka s' s rovinou ρ právě v jednom bodě. Tento bod označíme jako A' a je to **průmět bodu** A . Je zřejmé, že tato úvaha platí, leží-li bod A v rovině ρ . Potom A je totožný s A' . Tímto jsme dokázali jednu ze základních vět o rovnoběžném promítání (*Kapitola 1.3.2, Věta 1*).

1.3.2 Základní věty rovnoběžného promítání

Rovnoběžné promítání využíváme zvláště při zobrazování menších předmětů. Rovněž je do značné míry názorné, protože jím určitým způsobem nahrazujeme středové promítání a to tak, že střed promítání je velmi vzdálen od průmětny. Toto promítání je tedy pro praktické účely vhodnější. Nevlastní body jsou zobrazovány jako nevlastní, proto ve větách o rovnoběžném promítání budeme mít na mysli jen vlastní body, přímky a roviny [3, 5].

Věta 1: Rovnoběžným průmětem bodu je bod (*Obrázek 13*).

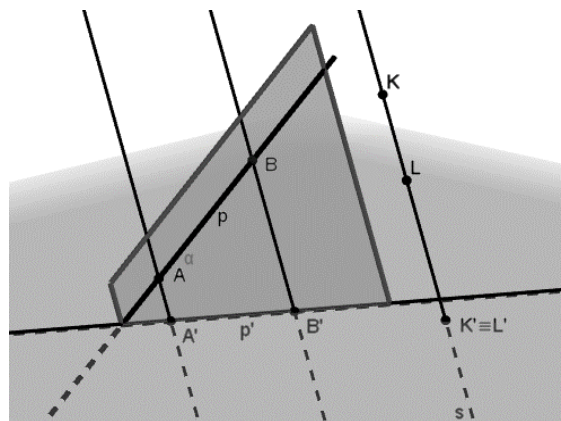
Jinak také říkáme, že body prostoru se jednoznačně zobrazí do bodů roviny ρ . Jestliže máme složitější geometrický útvar M , pak jako jeho průmět M' rozumíme množinu průmětů všech jeho bodů. Každým bodem A útvaru M prochází jedna promítací přímka a všechny promítací přímky bodů útvaru M vyplní promítací útvar (*Obrázek 14*).



Obrázek 14

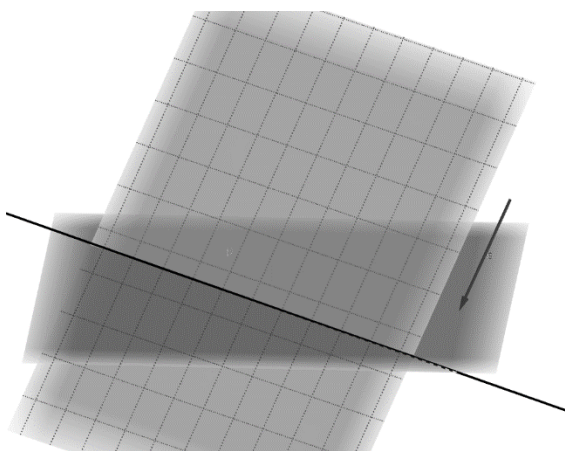
Je-li promítacím útvarem rovina rovnoběžná se směrem promítání s , nazveme ji **promítací rovinou** (*Obrázek 15*) [2].

Věta 2: Průmětem přímky p , která nepatří směru promítání s , je přímka p' . Průmětem přímky KL , která je rovnoběžná se směrem promítání s , je bod $K' \equiv L'$ (Obrázek 15) [2].

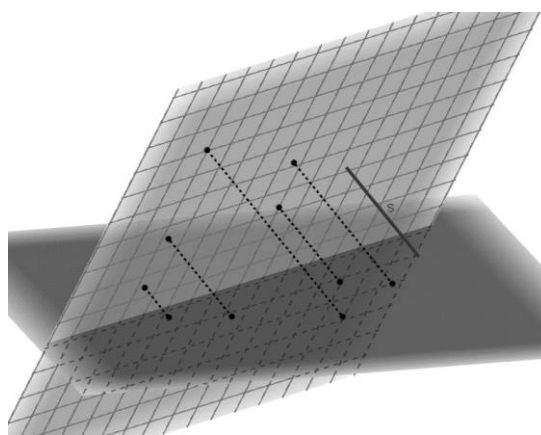


Obrázek 15

Věta 3: Průmětem promítací roviny ρ je přímka (Obrázek 16). Průmětem každé jiné roviny ρ je celá průmětna (Obrázek 17) [2].



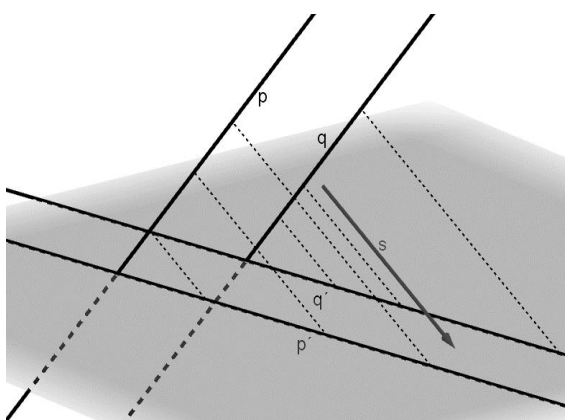
Obrázek 16



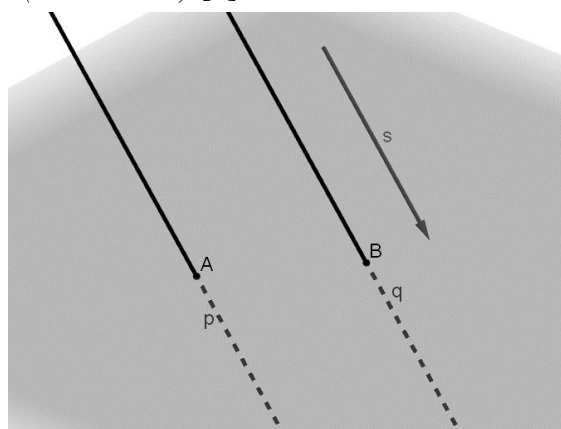
Obrázek 17

Věta 4: V rovnoběžném promítání se rovnoběžnost zachovává.

Rovnoběžným průmětem dvou rovnoběžek p a q , které nepatří směru promítání s , jsou opět rovnoběžky – p' a q' (Obrázek 18). Jestliže rovnoběžky p a q patří směru promítání s , pak jejich průmětem je dvojice bodů A a B (Obrázek 19) [2].



Obrázek 18



Obrázek 19

Věta 5: Rovnoběžným průmětem různoběžných přímek, přičemž žádná z nich nepatří směru promítání s jsou:

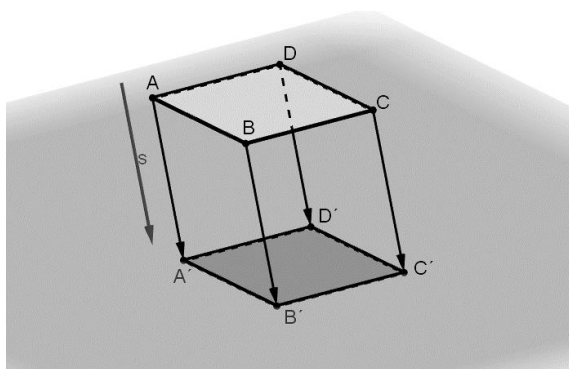
- a) přímky různoběžné;
- b) přímky totožné.

Patří-li jedna z různoběžek směru promítání s , je jejím průmětem bod, který je incidentní s průmětem druhé různoběžky [2].

Věta 6: Průměty úseček, které jsou rovnoběžné a shodné, a které nepatří směru promítání, jsou zase rovnoběžné a shodné úsečky [2].

Věta 7: Rovnoběžným průmětem obrazce, který leží v rovině hlavní, tj. rovině rovnoběžné s průmětnou, je obrazec s ním shodný.

Tuto větu lze snadno ilustrovat obrázkem hranolu (*Obrázek 20*). Vzorem promítání je jeho horní podstava $ABCD$, která leží v rovině, jež je rovnoběžná s průmětnou. Tuto rovinu nazýváme *hlavní rovinou*. Boční hrany hranolu jsou vlastně úsečky ležící na promítacích přímkách vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$. Průmětem horní podstavy je v tomto případě dolní podstava $A'B'C'D'$ [2].



Obrázek 20

Věta 8: Necht' body A, B, C jsou tři různé body ležící na přímce p , která nepatří směru promítání. Potom rovnoběžným průmětem přímky p je přímka p' , na které leží průměty bodů A', B', C' , přičemž platí: $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$. Zároveň uspořádání bodů na přímce p' je stejné jako uspořádání bodů na přímce p .

- Konstrukce roviny, která je určena
 - a) třemi nekolineárními body
 - b) přímkou a bodem neležícím na této přímce
 - c) dvěma různoběžkami
 - d) dvěma nesplývajícími rovnoběžkami
- Konstrukce průsečnice dvou různých rovin
- Konstrukce průsečíku přímky s rovinou
- a) Konstrukce roviny vedené daným bodem kolmo k dané přímce
- b) Konstrukce přímky vedené daným bodem kolmo k dané rovině
- a) Konstrukce přímky vedené daným bodem rovnoběžně s danou přímkou
- b) Konstrukce roviny vedené daným bodem rovnoběžně s danou rovinou

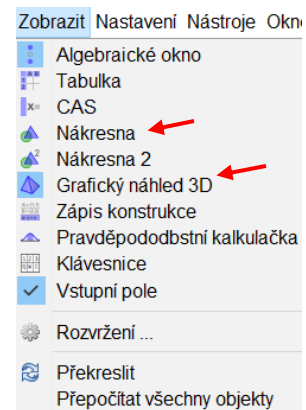
1.5 Úvod do GeoGebry

Při řešení všech stereometrických úloh v této práci jsem využívala matematického softwaru s názvem GeoGebra (konkrétně *GeoGebra Classic 5*), který dynamicky propojuje geometrii a algebru v jeden celek.

Na začátku je nutné se rozhodnout, zda budeme pracovat ve dvojrozměrném či v trojrozměrném prostředí. Na horní liště stiskneme tlačítko „Zobrazit“ (Obrázek 22).

- 1) Pokud zvolíme nástroj „Nákresna“, vytvoří se nám rovina pro dvojrozměrný nákres.
- 2) Zvolíme-li nástroj „Grafický náhled 3D“, otevře se nám trojrozměrné prostředí.

Ve své práci využívám obou těchto prostředí, avšak pro názornost postačí, ukážu-li nástroje 3D GeoGebry, které jsou téměř stejné, jako ve dvojrozměrném prostředí, nicméně ještě doplněné ještě o další prvky, které existují pouze v prostoru.

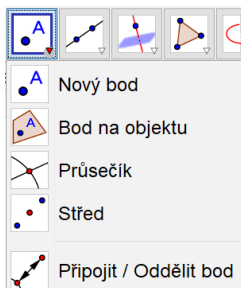


Obrázek 22

„[Algebraické okno](#)“ = prostor pro vkládání bodů o daných souřadnicích (např.

$A = (3, 1)$ nebo $B = (0, 1, -2)$ apod.)

a) *Společné nástroje*



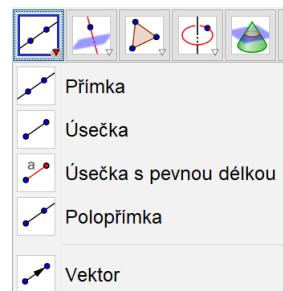
Obrázek 23

„Nový bod“ = nástroj, pomocí něhož lze klepnutím na libovolné místo vložit bod

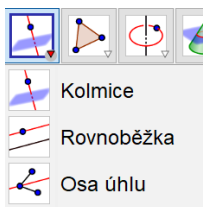
„Průsečík“ = vytvoření průsečíku po kliknutí na dva objekty, jenž se protínají

„Střed“ = nástroj pro vytvoření středu libovolné úsečky

„Přímka“, „Úsečka“, „Polopřímka“ a „Vektor“ = geometrické útvary, které určíme dvěma různými body



Obrázek 24

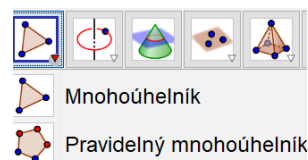


Obrázek 25

„Kolmice“ = nástroj pro vytvoření přímky, která je vedena z bodu kolmo k přímce, příp. rovině

„Rovnoběžka“ = nástroj pro vytvoření přímky, která je vedena daným bodem rovnoběžně s přímkou

„Pravidelný mnohoúhelník“ – lze jej vytvořit ze dvou bodů, při dotázání se na počet vrcholů zvolíme libovolnou číslici

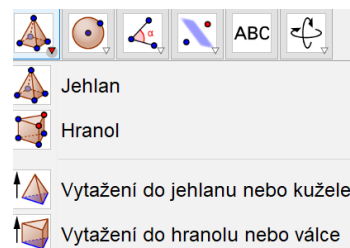


Obrázek 26

b) *Nástroje ve 3D prostředí*

„Vytažení do jehlanu nebo kužele“ – umožňuje z libovolného n-úhelníku vytvořit jehlan o námi zvolené výšce

„Vytažení do hranolu nebo válce“ – z libovolného n-úhelníku vytvoří hranol o námi zvolené výšce



Obrázek 27

2. Odchylky

Metrické vlastnosti prostorových objektů nám pomáhají blíže specifikovat vztahy mezi body, přímkami a rovinami v prostoru. Tyto vztahy popisují například nejruznější odchylky, kolmosti či vzdálenosti objektů v prostoru [4].

V této kapitole se zaměříme na odchylky, které demonstrujeme na vybraných tělesech (krychle, jehlan). Odchylka je velikost úhlu, kterou svírají dva geometrické objekty.

2.1 Odchylka přímek v prostoru

Věta 1: Odchylka dvou různoběžných přímek (*Obrázek 28*)

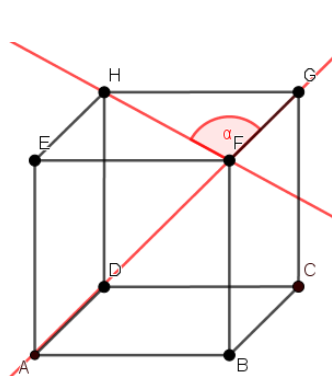
Odchylka α dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, který přímky spolu svírají [4].

Věta 2: Odchylka dvou rovnoběžných přímek (*Obrázek 29*)

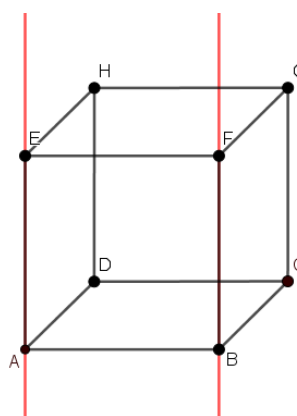
Jsou-li dvě přímky v prostoru rovnoběžné (např. dvě boční hrany krychle), pak je jejich odchylka rovna 0° [4].

Věta 3: Odchylka dvou mimoběžných přímek (*Obrázek 30*)

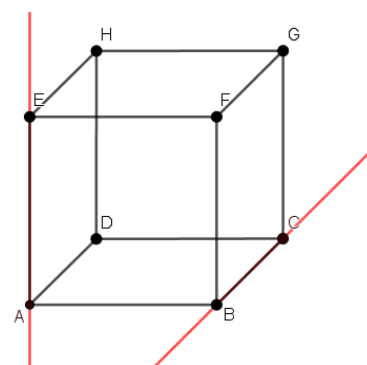
Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami [4].



Obrázek 28



Obrázek 29



Obrázek 30

Příklad:

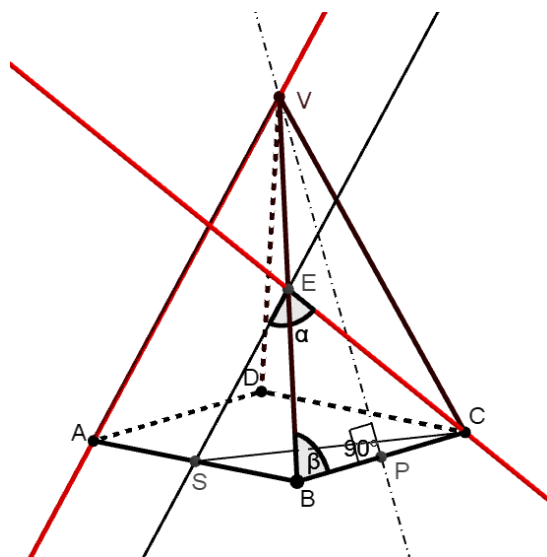
Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má $|AB| = a = 4 \text{ cm}$ a $|AV| = b = 6 \text{ cm}$. Bod E je středem hrany BV . Určete konstrukčně i početně odchylku přímek AV a CE (Obrázek 31).

Konstrukční řešení

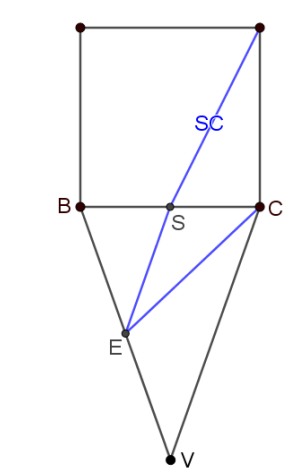
Nejprve vedeme bodem E rovnoběžku s přímkou AV , která protne hranu AB v bodě S . Odchylka přímek AV a CE je odchylka různoběžek CE a SE podle Věty 3.

Využíváme podobnosti trojúhelníků, přičemž trojúhelník ABV je podobný s trojúhelníkem SBE , proto platí, že bod S leží na středu hrany AB .

Pro konstrukční řešení sestojíme trojúhelník SCE , jehož vnitřní úhel při vrcholu E je hledaná odchylka. Abychom jej dokázali sestojit, potřebujeme znát skutečné délky jeho stran. Ty si vyznačíme do obrázku znázorňujícího boční stěnu a

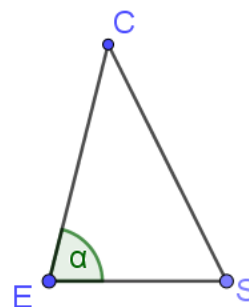


Obrázek 31



Obrázek 32

podstavu jehlanu (Obrázek 32), který je orientační. Malá změna bude v tom, že bod S si vyznačíme na střed podstavné hrany BC , ale délky stran se nezmění. Modře vyznačené úsečky jsou strany trojúhelníku SCE , který nyní můžeme sestojit. Při vrcholu E vznikne úhel α , který je hledanou odchylkou (Obrázek 33).



Obrázek 33

Počtní řešení

Pro počtní řešení potřebujeme znát všechny délky stran trojúhelníka SCE . Úsečka SE je střední příčkou boční stěny jehlanu a platí pro ni, že je rovnoběžná s hranou AV a bod E je středem hrany BV . Z obrázku č. 31 je patrné, že

$$|SE| = \frac{1}{2} AV = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ cm.}$$

Z pravoúhlého trojúhelníku SBC s pravým úhlem při vrcholu B je

$$|SC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ cm.}$$

Pro vypočítání délky hrany CE potřebujeme znát úhel β , který svírá hrana podstavy s hranou boční. Budeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku BPV , který má hledaný úhel při vrcholu B . $\cos\beta$ vypočítáme z kosinové věty, která říká, že kosinus úhlu β je roven poměru stran přilehlá ku přeponě:

$$\cos\beta = \frac{BP}{BV} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nyní víme, že $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $|CB| = 4 \text{ cm}$ a $|BE| = \frac{1}{2} |BV| = 3 \text{ cm}$. Tyto hodnoty dosadíme do kosinové věty:

$$|CE|^2 = |CB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |BE| \cdot \cos\beta$$

$$|CE|^2 = 16 + 9 - 24 \cdot \frac{1}{3}$$

$$|CE| = \sqrt{16 + 9 - 8} = \sqrt{17} \text{ cm}$$

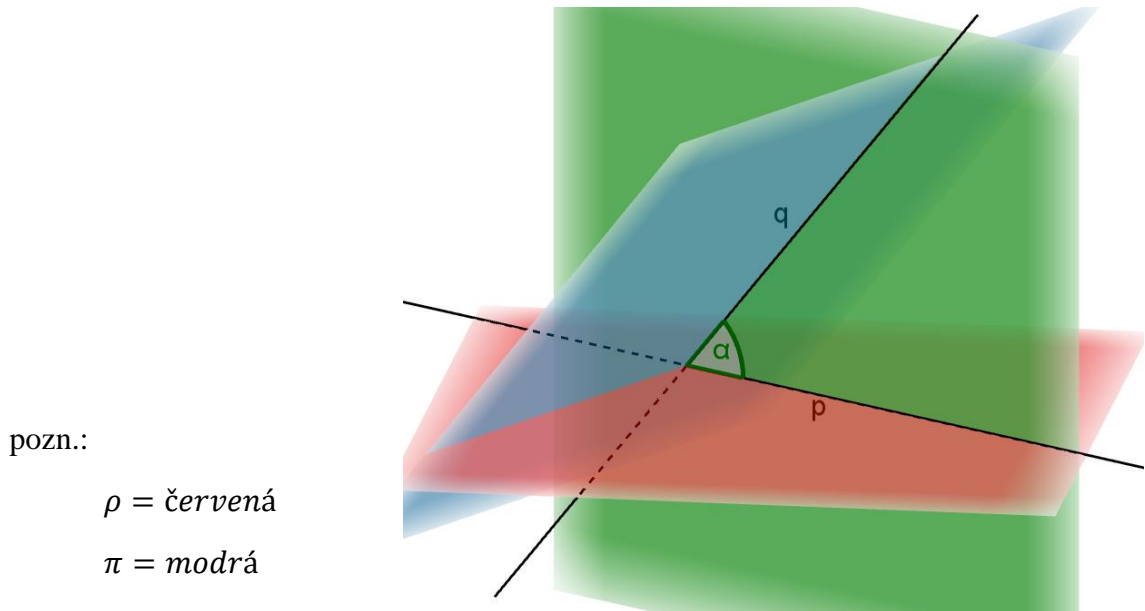
A opět za pomoci kosinové věty vypočítáme velikost hledané odchylky α , přičemž si ze vzorce rovnou vyjádříme $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{|CE|^2 + |SE|^2 - |SC|^2}{2 \cdot |CE| \cdot |SE|} = \frac{\sqrt{17}^2 + 3^2 - \sqrt{20}^2}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot 3} = \frac{17 + 9 - 20}{6 \cdot \sqrt{17}} = \frac{6}{6 \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\alpha = \underline{75,96^\circ}$$

2.2 Odchylka dvou rovin

Věta 4: Odchylka α dvou rovin ρ a π je odchylka jejich průsečnic p a q s rovinou, která je kolmá k oběma rovinám (Obrázek 34) [4].



Obrázek 34

Věta 5: Jsou-li roviny ρ a π různoběžné, pak pro jejich odchylku α platí:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ [4].$$

Věta 6: Jsou-li roviny ρ a π rovnoběžné, pak pro jejich odchylku α platí: $\alpha = 0^\circ$ [4].

2.3 Odchylka přímky a roviny

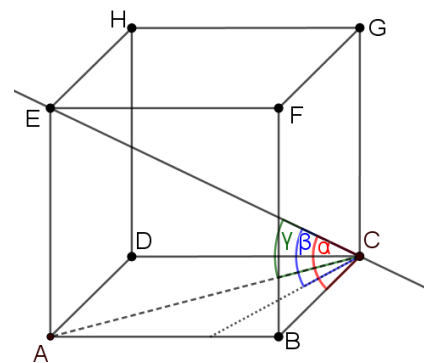
Věta 7: Odchylka přímky a roviny je velikost nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky roviny [4].

Příklad:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku roviny ABC a přímky EC .

Řešení

Při hledání odchylky je třeba si všimnout všech přímek roviny ABC , které procházejí bodem C . Nejmenší odchylka je odchylka přímek CE a CA (úhel γ), protože přímka CA je pravoúhlým průmětem přímky CE do roviny ABC .



Obrázek 35

Závěr

Na základě tohoto poznatku jsme dospěli k následující větě (Věta 8).

Věta 8: Je-li přímka různoběžná s rovinou, je odchylka přímky a roviny rovna

odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny [4].

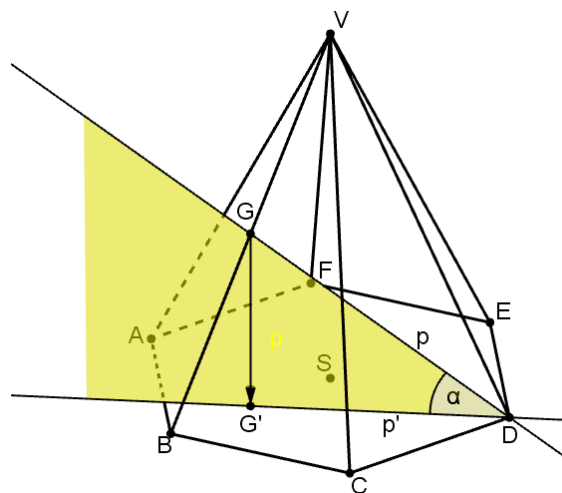
Věta 9: Je-li přímka kolmá k rovině, pak odchylka přímky a roviny je rovna 90° [4].

Příklad:

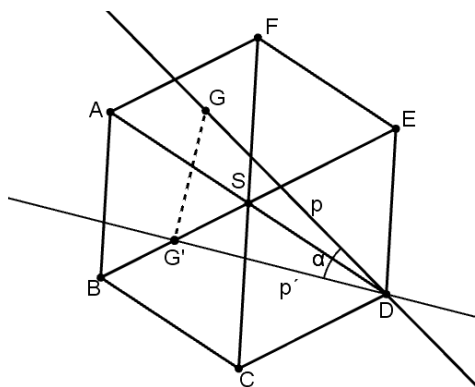
Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ se středem podstavy S a platí: $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|VS| = v = 8 \text{ cm}$. Určete odchylku přímky DG od roviny podstavy, jestliže bod G je středem hrany BV .

Grafické řešení

Pomocí promítací roviny ρ vytvoříme kolmý průmět p' přímky $p \equiv DG$ do roviny podstavy jehlanu. Úhel α je odchylka přímky DG od roviny podstavy.



Obrázek 36



Obrázek 37

Sklopením přímky p' do roviny podstavy se zobrazí skutečná velikost odchylky α , přičemž trojúhelník DGG' je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu G' , G je středem hrany BV a $|GG'| = \frac{1}{2}v = 4 \text{ cm}$.

Počtení řešení

Délku úsečky $G'D$ vypočítáme pomocí kosinové věty z trojúhelníku $G'DS$:

$$|G'D|^2 = |G'S|^2 + |SD|^2 - 2 \cdot |G'S| \cdot |SD| \cdot \cos|\sphericalangle S|$$

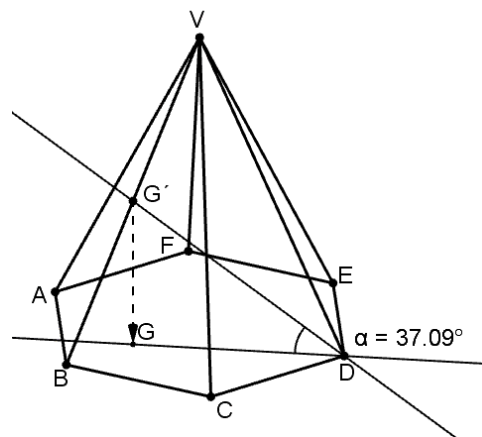
$$|G'D|^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \cos 120^\circ$$

$$|G'D|^2 = \frac{5}{4}a^2 - a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|G'D| = \sqrt{\frac{7}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|GG'|}{|G'D|} = \frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot a} = \frac{8}{\sqrt{7} \cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\alpha = 37,0867 \approx \underline{\underline{37,09^\circ}}$$



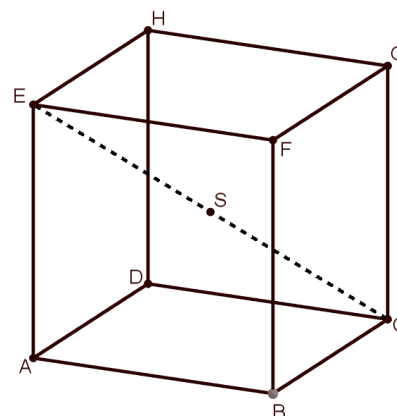
Obrázek 38

3. Řezy těles

3.1 Řezy krychle

Příklad 1:

Středem krychle $ABCDEFGH$ je vedena rovina, která je kolmá na tělesovou úhlopříčku EC . Určete řez krychle touto rovinou.

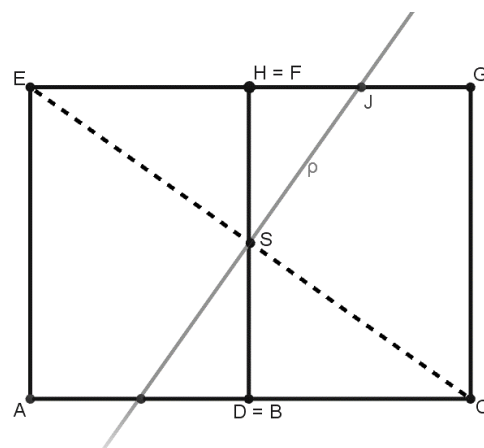


Obrázek 39

Grafické řešení

Abychom mohli sestavit řez, tak potřebujeme najít alespoň tři body roviny, které zároveň náleží plášti kvádrů. Pokud je však krychle natočena jako na předchozím obrázku, je velmi obtížné vytvořit kolmou rovinu na úsečku EC . Můžeme si však pomoci tak, že natočíme krychli tak výhodně, aby úsečka EC byla kolmo k našemu úhlu pohledu (tedy ve skutečné velikosti). To je tehdy, splynou-li úsečky BF a DH v jednu-budou totožné (Obrázek 40).

Nyní můžeme sestavit rovinu řezu ρ . Víme, že prochází bodem S a je kolmá na tělesovou úhlopříčku EC . Rovina ρ je nyní vidět jen jako přímka, která je kolmá na EC a je rovnoběžná s úhlem pohledu.



Obrázek 40

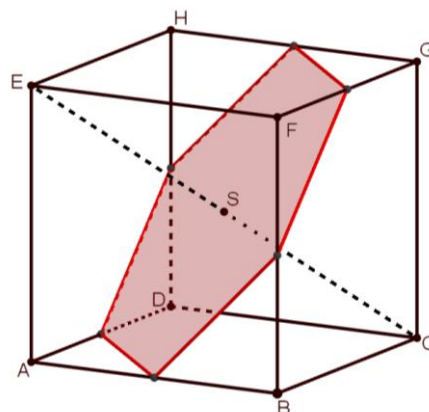
Z obrázku vyplývá, že rovina pravděpodobně prochází středy hran AD , AB , HG a FG . Zároveň pravděpodobně prochází i středem dvou bočních hran DH a BF . Pokud je naše úvaha správná, pak řez krychle rovinou má tedy s hranami krychle celkem 6 společných bodů, které jsou navíc středy těchto hran. Naši úvahu dokážeme početně:

Počtení řešení

Zprvu vypočítáme délku tělesové úhlopříčky krychle podle Pythagorovy věty takto: $EC^2 = (\sqrt{2a^2})^2 + a^2$, kde $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a = |EG|$ je délka stěnové úhlopříčky. Po úpravě dostaneme $EC = \sqrt{3}a$. Nyní vypočítáme odchylku tělesové úhlopříčky EC od podstavy jako $\sin \alpha = \frac{AE}{EC} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha = 35^\circ 16'$. Z Obrázku 40 úhel $\beta = EJS$ je roven $90^\circ - 35^\circ 16' = 54^\circ 44'$. Nakonec $\operatorname{tg} \beta = \frac{HS}{HJ}$; $|HJ| = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} 54^\circ 44'} = 0,3535a \approx \frac{1}{4}\sqrt{2}a$.

Závěr

Počteně jsme dokázali, že $|HJ| = \frac{1}{4}|EG|$ (Obrázek 40). Úvaha tedy byla správná. Řezem krychle rovinou je tedy pravidelný šestiúhelník.



Obrázek 41

Příklad 2:

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body X, Y, Z , pro které platí:

X je bodem hrany DH , $|DX|:|XH| = 5:1$

Y je bodem hrany AE , $|AY|:|YE| = 1:2$

Z je bodem hrany BF , $|BZ|:|ZF| = 1:1$

Popis konstrukce v programu GeoGebra

a) Začneme tím, že si do algebraického okna vepíšeme následující body:

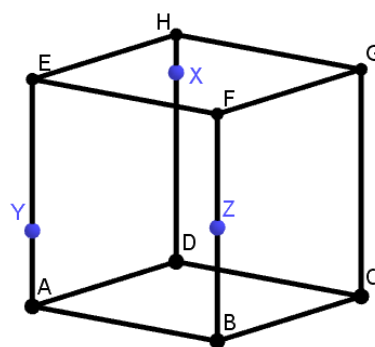
$A = (-3, -3, 0)$, $B = (3, -3, 0)$, $C = (3, 3, 0)$ a $D = (-3, 3, 0)$.

Tyto body jsou námi zvolené. Máme zde jistotu, že jejich spojením vznikne pravidelný mnohoúhelník $ABCD$, který bude podstavou krychle. Nyní použijeme nástroj „Vytažení ho hranolu nebo válce“, a po dotázání na výšku hranolu zvolíme

6 jednotek, aby vznikla krychle. V tuto chvíli máme krychli $ABCDEFGH$. Nakonec si nanese body X, Y, Z na taková místa, aby byly splněny poměry délek úseček v zadání příkladu.

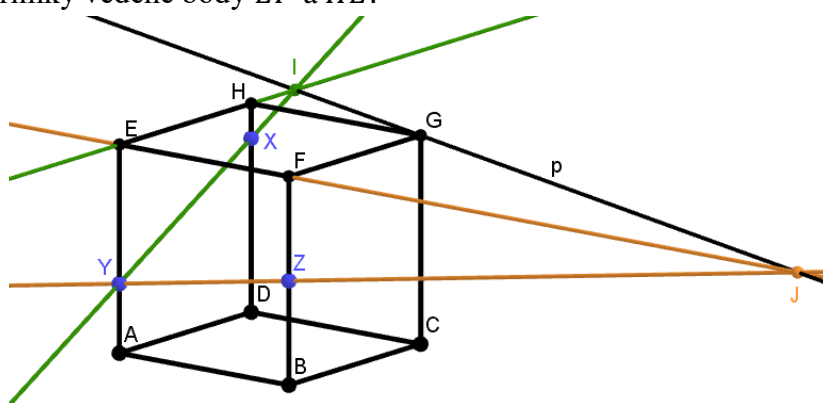
Bod X bude mít souřadnice $(-3, 3, 5)$,

$Y = (-3, -3, 2)$ a $Z = (3, -3, 3)$.



Obrázek 42

- b) Nyní potřebujeme znázornit do nákresu rovinu, kterou určují body X, Y, Z . Začneme tak, že vytvoříme přímky YZ a XY . Potřebujeme nalézt takové přímky na krychli, z nichž jedna leží ve stejné rovině s přímkou YZ , druhá ve stejné rovině s přímkou XY . Nejvhodněji se nám nabízejí přímky vedené body EF a HE .

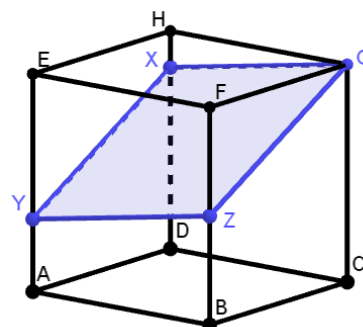


Obrázek 43

- c) Z obrázku vidíme, že dvojice přímek YX a EH (zeleně) se protínají v bodě I , jelikož obě leží v jedné rovině. To platí i pro oranžové přímky EF a YZ , které díky své různoběžnosti dávají za vznik bodu J . Je zřejmé, že nově vzniklé body I a J náležejí rovině EFG , spojíme je tedy přímkou p .

Závěr

Nalezením přímky p jsme schopni dořešit úlohu, protože zjistíme, že řezná rovina XYZ zahrnuje i bod krychle G ($p \in G$). Řez krychle je tedy dán body $XYZG$ a na obrázku je vyznačen modrým čtyřúhelníkem.



Obrázek 44

Příklad 3:

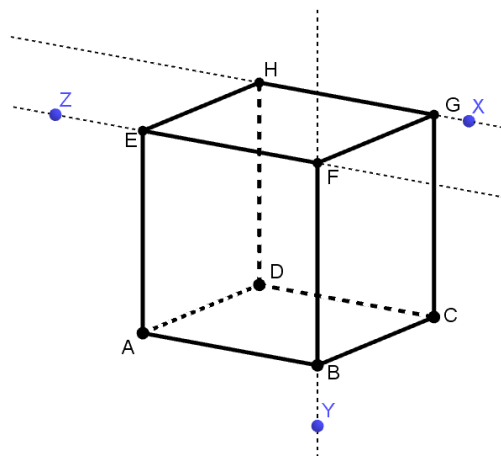
Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky 5 cm . Sestrojte řez krychle rovinou XYZ , jestliže jsou tyto body zadány takto:

$X \in \leftrightarrow GH$ a platí, že $|GX| = 1\text{ cm}$

$Y \in \leftrightarrow BF$ a platí, že $|BY| = 1,5\text{ cm}$

$Z \in \leftrightarrow EF$ a platí, že $|ZE| = 2\text{ cm}$

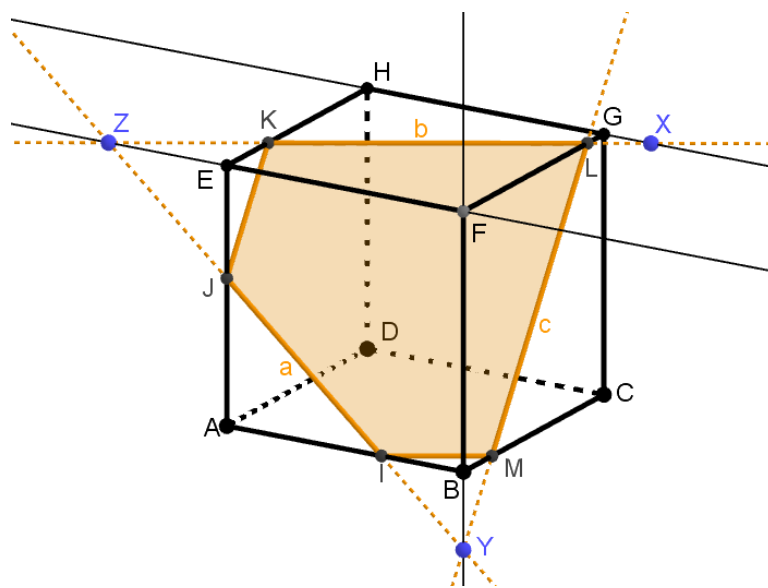
Všechny tři body leží mimo krychli $ABCDEFGH$.



Obrázek 45

Popis konstrukce

1. $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \in YZ$
2. I ; $I \in \leftrightarrow a \cap AB$
3. J ; $J \in \leftrightarrow a \cap AE$
4. $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \in XZ$
5. K ; $K \in \leftrightarrow b \cap EH$
6. L ; $L \in \leftrightarrow b \cap FG$
7. $\leftrightarrow c$; $\leftrightarrow c \in YL$
8. M ; $M \in \leftrightarrow c \cap BC$
9. rovina $IJKLM$



Obrázek 46

Závěr

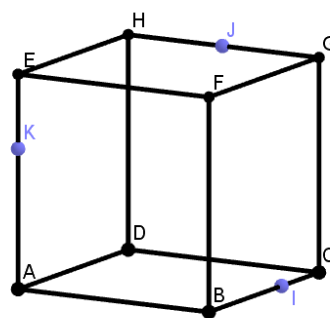
Body I, J, K, L a M vymezují rovinu řezu krychle $ABCDEFGH$. Řezem krychle je tedy pětiúhelník $IJKLM$.

Příklad 4:

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a tři body I, J, K , které určují rovinu. Zjistěte řez krychle touto rovinou.

Úvaha

Konstrukce této úlohy je již složitější. Problém nacházíme ve chvíli, kdy si všimneme, že body I, J, K určující rovinu leží sice na hranách krychle, ale jsou na jejich mimoběžkách. Nemůžeme tedy začít s tradičním krokem, že spojíme dva body náležící jedné stěně krychle.



Obrázek 47

Potřebujeme najít nějaký pomocný bod S , pro nějž by platilo, že by ležel na rovině řezu a zároveň ležel v nějaké rovině totožné s libovolnou stěnou krychle.

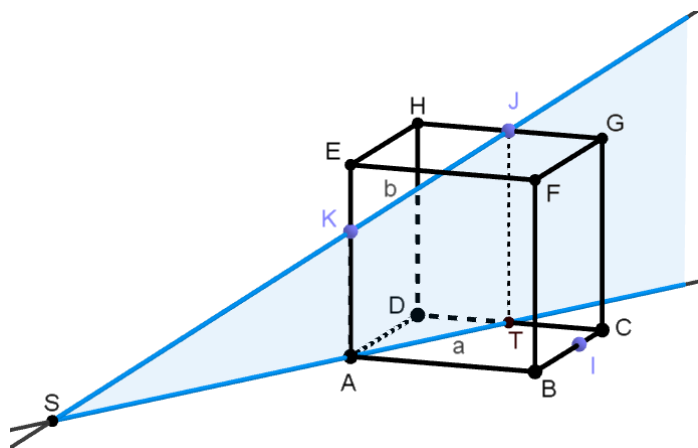
Popis konstrukce

1) Začneme tak, že si body J, K promítneme do podstavy krychle. Bod K se promítne do bodu A , bod J se promítne do bodu T . Spojením bodů K, J vznikne přímka b . Spojením bodů A, T vytvoříme přímku a , která náleží do roviny totožné s podstavou krychle. Tímto jsme využili vlastností promítací roviny (modře), kde a je průmět přímky b do roviny podstavy ABC (Obrázek 48).

2) Přímka a náleží do roviny určené podstavou krychle a přímka b náleží rovině řezu. Obě přímky náleží modré promítací rovině, proto $a \cap b = S$.

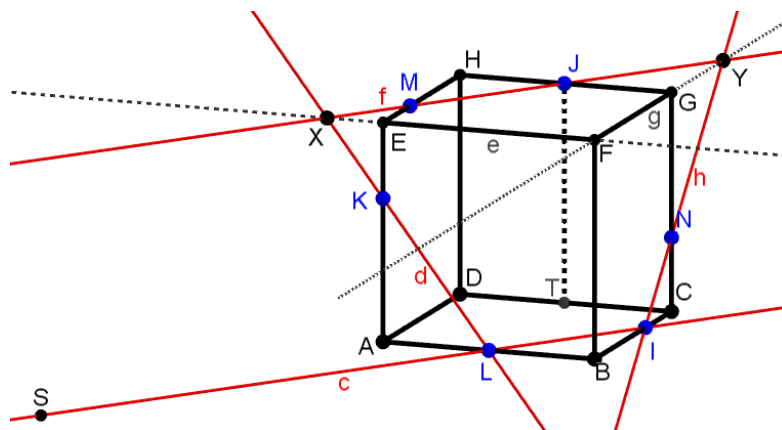
3) Dále postupujeme konstrukčně takto:

1. $\leftrightarrow c$; $\leftrightarrow c \in SI$
2. L ; $L \in \leftrightarrow c \cap AB$



Obrázek 48

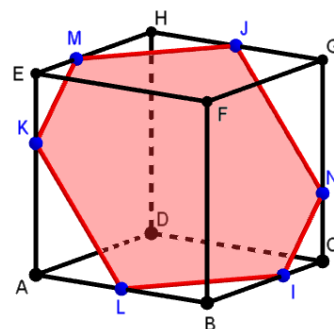
3. $\leftrightarrow d; \leftrightarrow d \in KL$
4. $\leftrightarrow e; \leftrightarrow e \in EF$
5. $X; X \in \leftrightarrow d \cap \leftrightarrow e$
6. $\leftrightarrow f; \leftrightarrow f \in XJ$
7. $M, M \in \leftrightarrow f \cap EH$
8. $\leftrightarrow g; \leftrightarrow g \in FG$
9. $Y; Y \in \leftrightarrow f \cap \leftrightarrow g$
10. $\leftrightarrow h; \leftrightarrow h \in IY$
11. $N; N \in \leftrightarrow h \cap CG$



Obrázek 49

Závěr

Tímto postupem vznikla rovina řezu vymezená body I, J, K, L, M, N na krychli. Řezem je šestiúhelník $ILKMJN$.



Obrázek 50

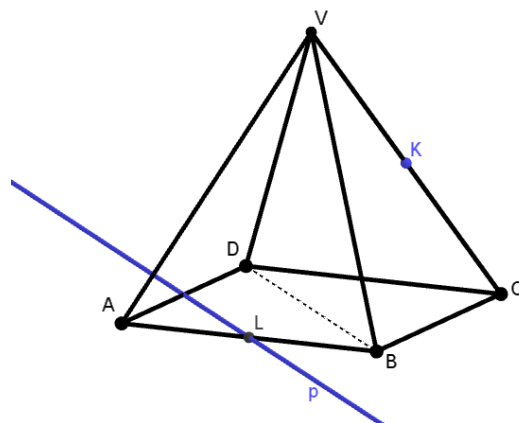
3.2 Řezy jehlanu

Mezi mnohoúhelníky podstavy a řezu jehlanu nalzáme zajímavý vztah. Body A, A' , které leží na téže přímce procházející vrcholem, se nazývají *sdružené body* (odpovídající si). Máme-li další sdružené body B, B' , pak přímky AB a $A'B'$ nazýváme *sdruženými přímkami*. Přímka, na které se protínají sdružené přímky je *osa kolineace* a vrchol jehlanu V slouží jako *střed kolineace*. Úlohy v této kapitole tedy řešíme využitím *středové kolineace* [2].

Příklad 1:

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ρ , která je dána přímkou p a bodem K s následujícími vlastnostmi:

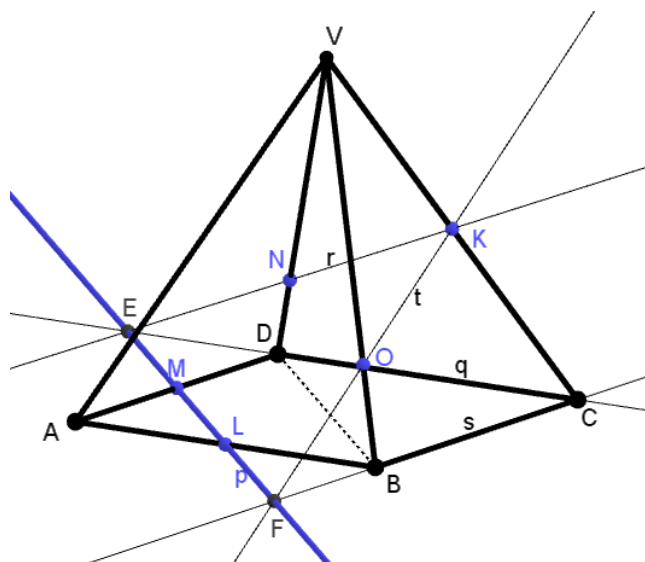
- bod K je středem hrany jehlanu CV
- přímka p je rovnoběžná s úhlopříčkou podstavy BD a zároveň prochází bodem L ; L je středem hrany AB



Obrázek 51

Konstrukce

Jak je z nákresu zadání příkladu zřejmé, tak přímka p leží v podstavě jehlanu a protíná úsečku AD v bodě, který si označíme M . Nyní prodloužíme úsečku DC v přímku q . Platí, že $p \cap q = E$.



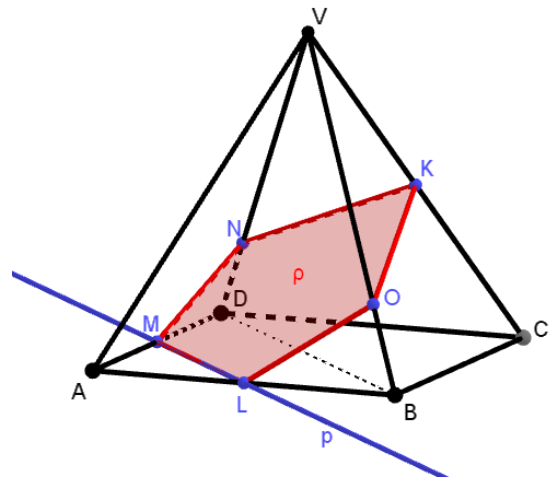
Obrázek 52

O bodu E můžeme říci, že leží v rovině, která je dána boční stěnou jehlanu CDV a v níž se vyskytuje i zadaný bod K udávající rovinu řezu ρ . Můžeme tedy body E a K spojit přímkou, nyní $r \equiv EK$. Tímto krokem jsme našli další průsečík roviny řezu s hranou jehlanu, platí: $KE \cap DV = N$.

V dalším kroku označíme přímkou určenou body BC jako přímkou s . Platí, že $p \cap s = F$. V tuto chvíli leží bod F v rovině, která je dána boční stěnou BCV , na níž se vyskytuje i bod K . Spojíme tedy body K a F přímkou t . Tímto jsme našli poslední průsečík roviny ρ s hranou jehlanu, bod O , o kterém platí: $t \cap BV = O$.

Závěr:

Konstruktivním řešením úlohy jsme našli body M, N, O . Tyto body společně se zadanými body K, L náležejí hranám pravidelného čtyřbokého hranolu a zároveň jsou vrcholy pětiúhelníku, který vznikne jako řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ρ .



Obrázek 53

Příklad 2:

Šikmý jehlan o pravidelné šestiboké podstavě $ABCDEF$ je zadán bodem podstavu

$A = (-4, 0, 0)$, středem podstavu $S = (0, 0, 0)$ a vrcholem $V = (-1, 2, 6)$. Zobrazte řez rovinou ρ , která je dána body K, L, M , mající tyto vlastnosti:

$K \in BC, |BK|:|KC| = 1:1$

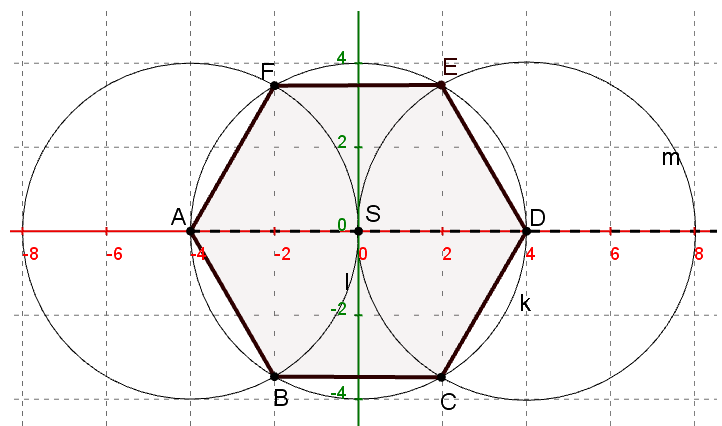
$L \in DV, |DL|:|LV| = 1:2$

$M \in AV, |AM|:|MV| = 3:2$

Konstrukce kosého jehlanu

GeoGebra 2D

- 1) k ; $k(S, r = AS)$
- 2) D ; $D \in \leftrightarrow AS \cap k$
- 3) l ; $l(A, r = k)$
- 4) B ; $B \in k \cap l$
- 5) F ; $F \in k \cap l$
- 6) m ; $m(D, r = k)$
- 7) C ; $C \in k \cap m$
- 8) E ; $E \in k \cap m$



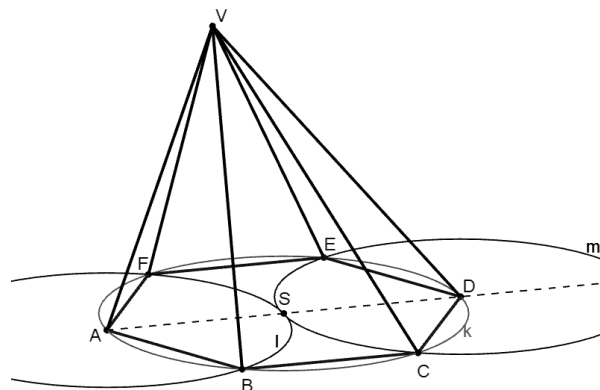
Obrázek 54

9) šestiúhelník $ABCDEF$

GeoGebra 3D

10) V ; $V = (-1, 2, 6)$

11) jehlan $ABCDEFV$



Obrázek 55

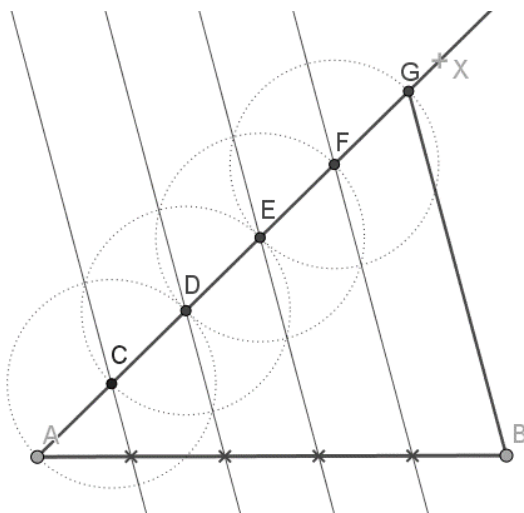
Konstrukce bodů K, L, M

1) K ; $K \in BC \wedge |BK| = |KC|$

Zbylé body L a M nelze sestrojít stejně jako bod K pomocí nástroje „Střed“. Je třeba hrany, kterým body L, M náležejí, nějakým způsobem rozdělit v určitém poměru. Konkrétně hranu DV rozdělíme na 3 části (poměr 1: 2) a hranu AV rozdělíme na 5 částí (poměr 3: 2).

Libovolnou úsečku lze rozdělit na libovolný počet dílů tímto postupem:

Máme úsečku AB . Nakreslíme libovolnou polopřímku, která vychází z bodu A a



Obrázek 56

neleží na úsečce AB . Na tuto polopřímku nanese se tolik bodů, na kolik dílů potřebujeme rozdělit danou úsečku tak, aby platilo: $|AC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG|$. Nyní spojíme poslední bod polopřímky G s bodem B . Dále vedeme rovnoběžky s úsečkou GB body C, D, E, F . Tím vzniknou čtyři průsečíky těchto rovnoběžek s úsečkou AB , a protože jsou stejně daleko od sebe, tak nám rozdělily

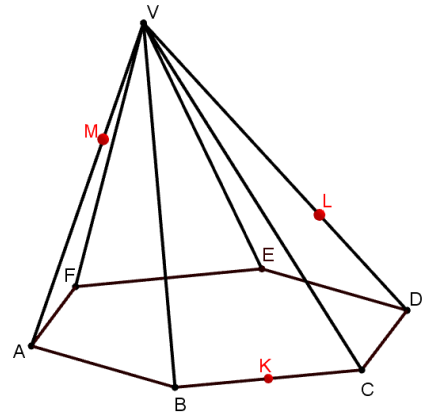
úsečku na pět stejných dílů.

2) L ; $|DL| = \frac{1}{2} |LV|$

3) M ; $|AM| = \frac{3}{2} |MV|$ (Obrázek 57)

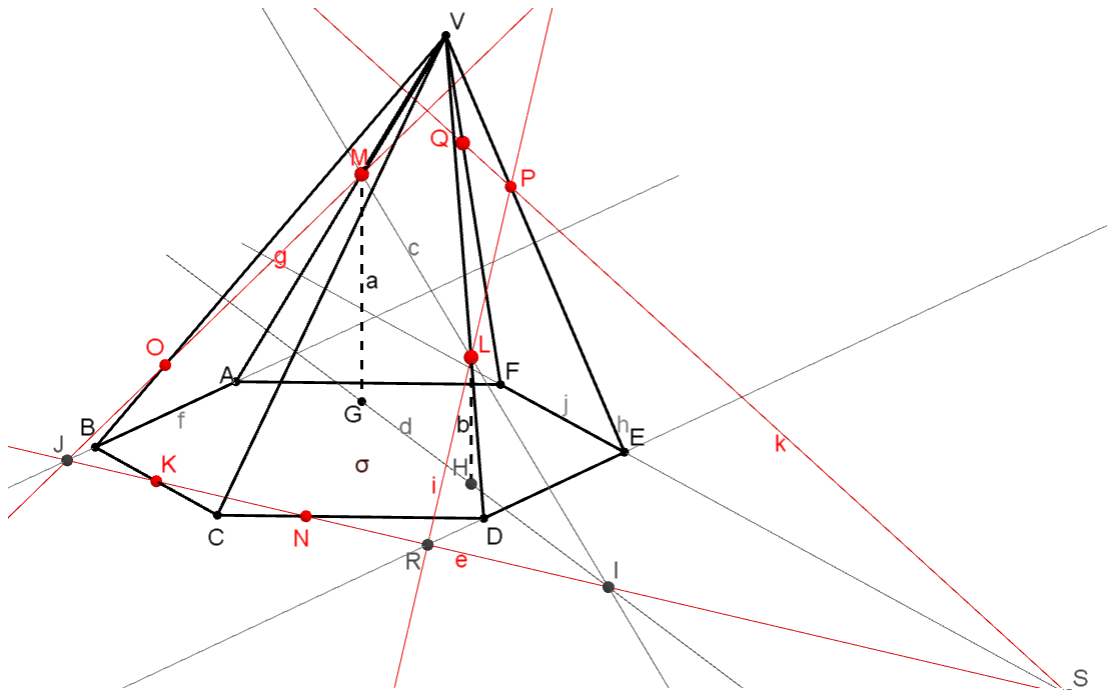
Konstrukce řezu jehlanu

Žádné dva body řezné roviny nenáleží jedné stěně jehlanu, tudíž je nemůžeme přímo spojit a dostat alespoň část řezu. Pomůžeme si tak, že proložíme pomocnou rovinu π (promítací rovinu) body L, M . Jinými slovy provedeme kolmý průmět přímky ML do roviny podstavy σ a to je výhodné proto, že třetí bod K podstavě náleží.



Obrázek 57

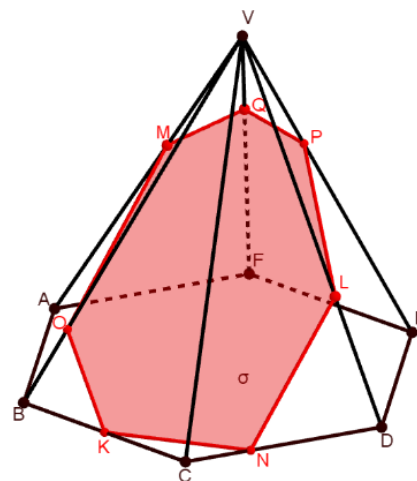
- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \perp \sigma \wedge \leftrightarrow a \in M$ | 8) $\leftrightarrow e$; $\leftrightarrow e \in KI$ | 15) R ; $R \in \leftrightarrow h \cap \leftrightarrow e$ |
| 2) G ; $G \in \leftrightarrow a \cap \sigma$ | 9) N ; $N \in \leftrightarrow e \cap CD$ | 16) $\leftrightarrow i$; $\leftrightarrow i \in RL$ |
| 3) $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \perp \sigma \wedge \leftrightarrow b \in L$ | 10) $\leftrightarrow f$; $\leftrightarrow f \in AB$ | 17) P ; $P \in \leftrightarrow i \cap EV$ |
| 4) H ; $H \in \leftrightarrow b \cap \sigma$ | 11) J ; $J \in \leftrightarrow e \cap \leftrightarrow f$ | 18) $\leftrightarrow j$; $\leftrightarrow j \in EF$ |
| 5) $\leftrightarrow c$; $\leftrightarrow c \in LM$ | 12) $\leftrightarrow g$; $\leftrightarrow g \in JM$ | 19) S ; $S \in \leftrightarrow j \cap \leftrightarrow e$ |
| 6) $\leftrightarrow d$; $\leftrightarrow d \in GH$ | 13) O ; $O \in \leftrightarrow g \cap BV$ | 20) $\leftrightarrow k$; $\leftrightarrow k \in SP$ |
| 7) I ; $I \in \leftrightarrow c \cap \leftrightarrow d$ | 14) $\leftrightarrow h$; $\leftrightarrow h \in DE$ | 21) Q ; $Q \in \leftrightarrow k \cap FV$ |



Obrázek 58

Závěr

Tímto postupem vznikla rovina řezu ρ kosým šestibokým jehlanem, kde řezem je n-úhelník (sedmiúhelník) $KNLPQMO$.



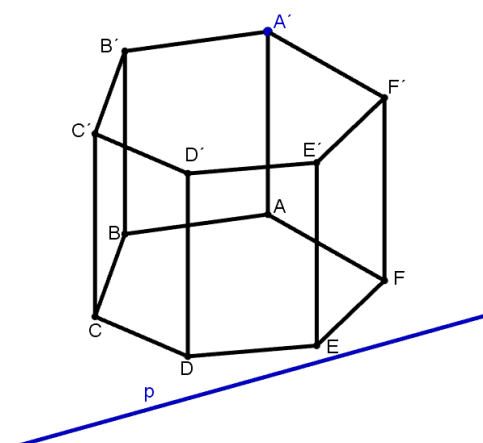
Obrázek 59

3.3 Řezy hranolu

Rovina protínající hranol má s tělesem společný mnohoúhelník – tzv. řez hranolu rovinou, kdy vrcholy jsou na hranách a stěny ve stěnách hranolu. Obecně platí, že mezi dvěma mnohoúhelníky tvořícími podstavu hranolu a jeho řez je *afinní vztah*, kdy osou afinity je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu. Směr afinity určují hrany hranolu.

Příklad 1:

Je dán šestiboký hranol o podstavě $ABCDEF$ v rovině ρ a rovina π určená přímkou p a bodem horní podstavy A' , kde $p = \rho \cap \pi$ (Obrázek 60). Zobraďte řez roviny π hranolem.

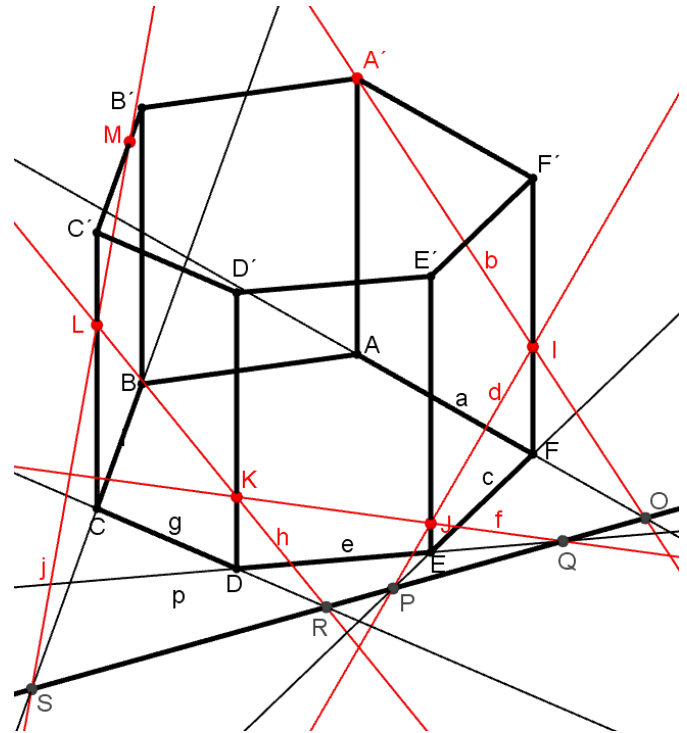


Obrázek 60

Konstrukce řezu hranolu

- 1) $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \in AF$
- 2) O ; $O \in \leftrightarrow a \cap \leftrightarrow p$
- 3) $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \in A'O$

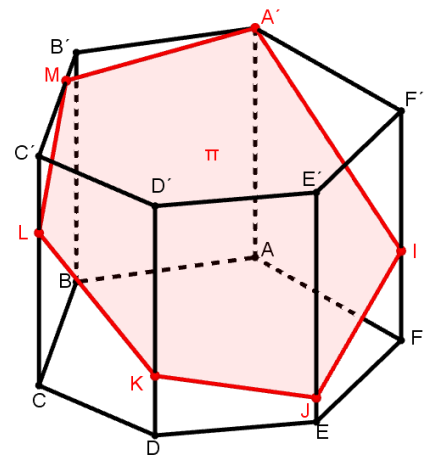
- 4) $I; I \in \leftrightarrow b \cap \leftrightarrow p$
- 5) $\leftrightarrow c; \leftrightarrow c \in EF$
- 6) $P; P \in \leftrightarrow c \cap \leftrightarrow p$
- 7) $\leftrightarrow d; \leftrightarrow d \in PI$
- 8) $J; J \in \leftrightarrow d \cap EE'$
- 9) $\leftrightarrow e; \leftrightarrow e \in DE$
- 10) $Q; Q \in \leftrightarrow e \cap \leftrightarrow p$
- 11) $\leftrightarrow f; \leftrightarrow f \in QJ$
- 12) $K; K \in \leftrightarrow f \cap D'D$
- 13) $\leftrightarrow g; \leftrightarrow g \in CD$
- 14) $R; R \in \leftrightarrow g \cap \leftrightarrow p$
- 15) $\leftrightarrow h; \leftrightarrow h \in KR$
- 16) $L; L \in \leftrightarrow h \cap CC'$
- 17) $\leftrightarrow i; \leftrightarrow i \in BC$
- 18) $S; S \in \leftrightarrow i \cap \leftrightarrow p$
- 19) $\leftrightarrow j; \leftrightarrow j \in SL$
- 20) $M; M \in \leftrightarrow j \cap B'C'$



Obrázek 61

Závěr

Tato úloha má přímku p jako osu afinity.
 Řezem hranolu je obecný šestiúhelník $IJKLMA'$,
 který je v afinitě s podstavou hranolu.



Obrázek 62

Příklad 2:

Zobrazte řez roviny $\rho(AKL)$ kosým hranolem $ABCDEA'B'C'D'E'$ o pětiúhelníkové podstavě $ABCDE$, jsou-li zadány souřadnice těchto bodů:

$$A = (-3, -2, 0) \quad D = (0, 1, 5, 0) \quad K \text{ takové, že } |DK| = |KD'|$$

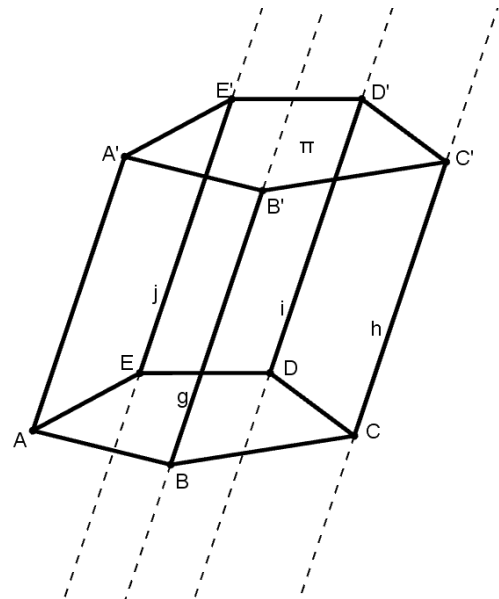
$$B = (-0,5, -3, 0) \quad E = (-2, 1, 0) \quad L \text{ takové, že } |A'L| = |LE'|$$

$$C = (2, -1, 0) \quad A' = (-2, 0, 4)$$

Konstrukce hranolu v GeoGebra 3D

Začneme tím, že do algebraického okna zapíšeme body A, B, C, D, E , které nám udávají podstavu hranolu, proto je můžeme spojit v pětiúhelník $ABCDE$. Vyznačíme i bod A' , který leží v rovině horní podstavy. Pro ostatní vrcholy hranolu neznáme souřadnice, ale bod A' nám udává vzdálenost horní a dolní podstavy kosého hranolu a zároveň můžeme body A a A' spojit hranou. Nyní pokračujeme těmito kroky:

- 1) $\leftrightarrow g$; $\leftrightarrow g \in B$; $\leftrightarrow g \parallel AA'$
- 2) $\leftrightarrow h$; $\leftrightarrow h \in C$; $\leftrightarrow h \parallel AA'$
- 3) $\leftrightarrow i$; $\leftrightarrow i \in D$; $\leftrightarrow i \parallel AA'$
- 4) $\leftrightarrow j$; $\leftrightarrow j \in E$; $\leftrightarrow j \parallel AA'$
- 5) π , $\pi \in A' \wedge \pi \parallel ABCDE$
- 6) $B', B' \in \leftrightarrow g \cap \pi$
- 7) $C', C' \in \leftrightarrow h \cap \pi$
- 8) $D', D' \in \leftrightarrow i \cap \pi$
- 9) $E', E' \in \leftrightarrow j \cap \pi$
- 10) kosý hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$



Obrázek 63

Konstrukce řezu hranolu:

- 1) K ; $K \in DD' \wedge |DK| = |KD'|$
- 2) L ; $L \in A'E' \wedge |A'L| = |LE'|$
- 3) $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \in AL$
- 4) $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \in EE'$
- 5) T ; $T \in \leftrightarrow a \cap \leftrightarrow b$
- 6) $\leftrightarrow c$; $\leftrightarrow c \in TK$
- 7) M ; $M \in \leftrightarrow c \cap D'E'$

8) $\leftrightarrow d$; $\leftrightarrow d \in DE$

9) $U, U \in \leftrightarrow d \cap \leftrightarrow c$

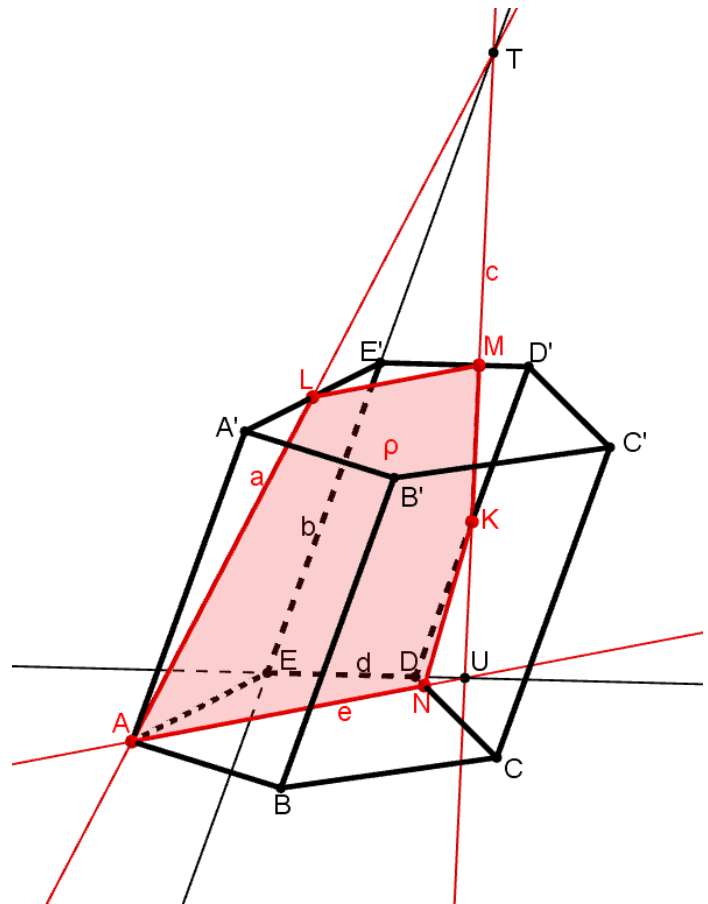
10) $\leftrightarrow e$; $\leftrightarrow e \in AU$

11) N ; $N \in \leftrightarrow e \cap CD$

12) $\rho(AKL)$

Závěr:

Řezem hranolu rovinou ρ je
pětiúhelník $ANKML$.



Obrázek 64

Průnik přímky s tělesem

Protíná-li přímka těleso, znamená to, že má s tělesem jeden společný bod nebo společnou úsečku. Je-li průnikem přímky s tělesem bod, pak hovoříme o bodu dotyku. Ve druhém případě může být průnikem přímky a tělesa úsečka, která je dána dvěma body, které leží v plášti tělesa.

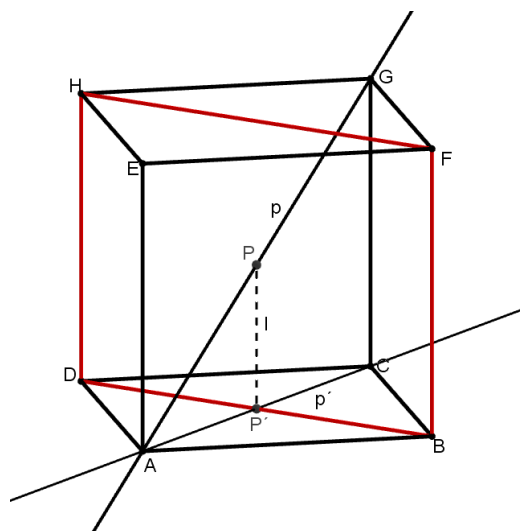
4.1 Průnik přímky s krychlí

Příklad 1:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky AG a roviny DBF .

Konstrukce

- 1) krychle $ABCDEFGH$
- 2) $\leftrightarrow p$; $\leftrightarrow p \in AG$
- 3) úsečky DB, FH
- 4) rovina $DBFH$
- 5) $\leftrightarrow p'$; $\leftrightarrow p' \in AC$
- 6) P' ; $P' \in DB \cap p'$
- 7) $\leftrightarrow l$; $\leftrightarrow l \in$
 $P',$ je kolmá k rovině ABC
- 8) P ; P je průsečík roviny DBF a
přímky AG



Obrázek 65

Při konstrukci jsme využívali kolmého průmětu přímky a bodu do roviny podstavy. Přímka p' je průmětem přímky p a bod P (hledaný průsečík) je vzorem pro průmět bodu P' . Poloha bodu P má jednu výjimečnou vlastnost vzhledem ke krychli. Je jejím středem.

Důkaz

To, že bod P , je středem krychle, lze dokázat jednoduchým způsobem. Úsečka AG , která náleží stejnojmenné přímce, je tělesovou úhlopříčkou krychle. Jestliže rovina DBF zahrnuje i vrchol H , pak můžeme tvrdit, že této rovině náleží i úsečky DF a BH .

Tyto úsečky jsou rovněž tělesovými úhlopříčkami krychle. V podstatě se tedy v bodě P protínají tři úhlopříčky výše zmíněné, což je důkaz toho, že bod P je středem tělesa.

Příklad 2:

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečnici rovin ACE a BHP , kdy bod P je středem hrany FG .

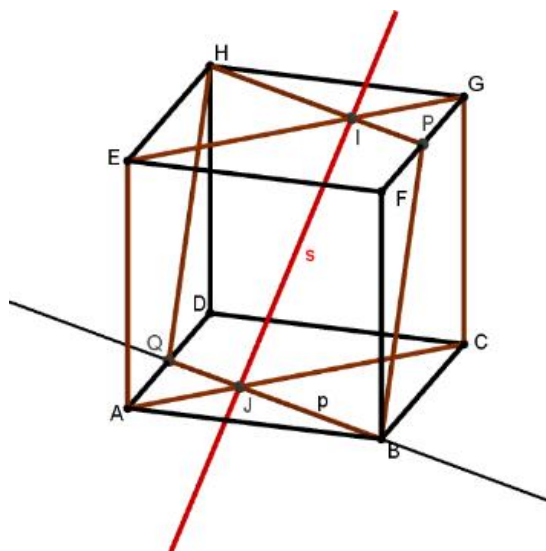
Konstrukce

- 1) krychle $ABCDEFGH$
- 2) P ; $P \in FG, |FP| = |PG|$
- 3) rovina $ACE \equiv$ čtyřúhelník $ACGE$
- 4) $\leftrightarrow p$; $\leftrightarrow p \in B \wedge \leftrightarrow p \parallel PH$
- 5) Q ; $Q \in AD \cap p$
- 6) rovina $QBPH$

V nákresu bylo třeba vyznačit, že rovina ACE je vlastně dána čtyřúhelníkem $ACGE$. Čtvrtý bod roviny BHP jsme zjistili tak, že jsme vedli rovnoběžku s přímkou PH bodem podstavy B . Tím vznikl čtyřúhelník $QBPH$, který udává druhou rovinu.

- 7) I ; $I \in EG \cap HP$
- 8) J ; $J \in QB \cap AC$
- 9) $\leftrightarrow s$; $\leftrightarrow s$ je průsečnice rovin

Hrany těchto čtyřúhelníků se protínají v horní a dolní podstavě. Tyto průsečíky nazveme I, J a jsou to body hledané průsečnice s .



Obrázek 66

4.2 Průnik přímky s hranolem

Při hledání průniku přímky s hranolem je zde jistá podobnost jako při hledání průniku přímky s krychlí. Nejčastěji volíme rovinu, která je rovnoběžná s pobočnými hranami hranolu. Tuto rovinu nazýváme *směrovou rovinou* a užíváme rovněž *směrových přímek*, což jsou přímky rovnoběžné s pobočnými hranami.

Příklad 1

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$. Sestrojte průnik přímky $p \equiv KL$ s tímto hranolem, víte-li:

- $A = (0, 0, 0), B = (4, 0, 0), |AA'| = v = 7 \text{ cm}$,
- $K \in s (s \in E'D') \wedge |D'K| = 2 \text{ cm}, K \text{ nenáleží hranolu}$
- $L = (-3, 0, 0)$

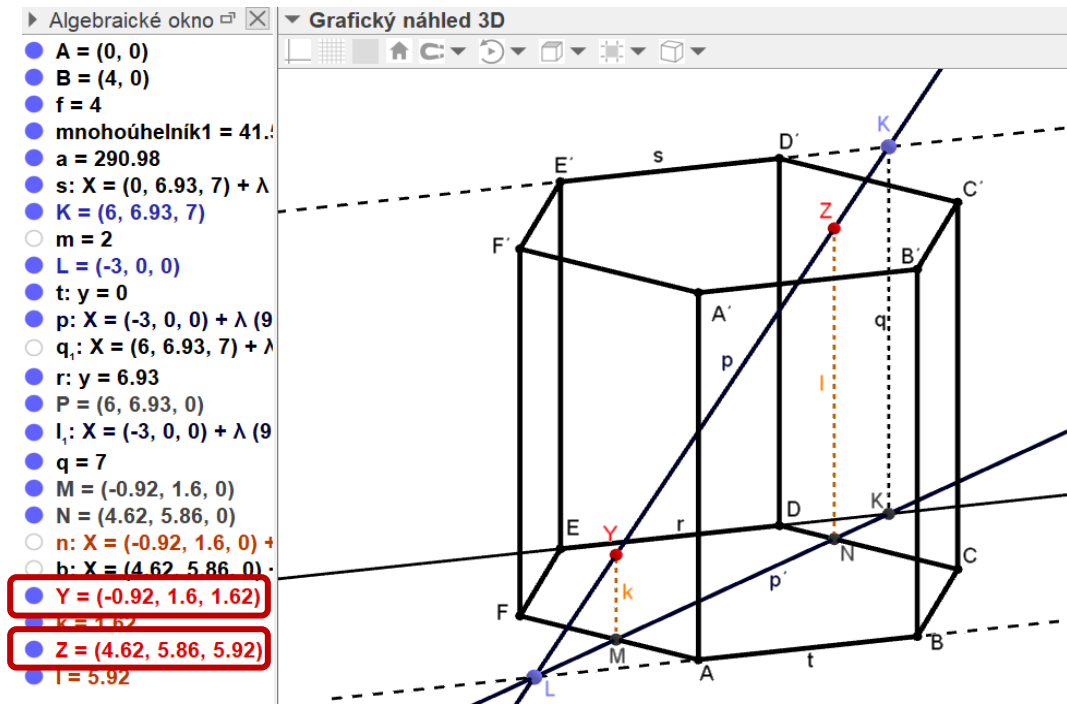
Konstrukce hranolu v programu 3D GeoGebra

Nejprve do algebraického okna vepíšeme známe body $A = (0, 0, 0)$ a $B = (4, 0, 0)$. Podstavou je pravidelný šestiúhelník, použijeme tedy nástroj „Pravidelný mnohoúhelník“, přičemž označíme body A, B a při dotázání na počet vrcholů zvolíme „6“. Dále použijeme nástroj „Vytažení do hranolu nebo válce“ a při dotázání na výšku hranolu zvolíme „7“.

Konstrukce průniku přímky s hranolem

- $\leftrightarrow s; \leftrightarrow s \in E'D'$
- $K; K \in \leftrightarrow s \wedge |D'K| = 2 \text{ cm} \wedge K \notin E'D'$
- $L; L \in \leftrightarrow s \wedge |D'K| = 2 \text{ cm} \wedge K \notin E'D'$
- $\leftrightarrow p; \leftrightarrow p \in KL$
- $\leftrightarrow q; \leftrightarrow q \in K \wedge \leftrightarrow q \perp ABCDEF$
- $\leftrightarrow r; \leftrightarrow r \in ED$
- $K'; K' \in \leftrightarrow q \cap \leftrightarrow r$
- $\leftrightarrow p'; \leftrightarrow p' \in LK'$
- $M; M \in \leftrightarrow p' \cap FA$
- $N; N \in \leftrightarrow p' \cap CD$

- 11) $\leftrightarrow k$; $\leftrightarrow k \in M \wedge \leftrightarrow k \perp ABCDEF$
- 12) $\leftrightarrow l$; $\leftrightarrow l \in N \wedge \leftrightarrow l \perp ABCDEF$
- 13) Y ; $Y \in \leftrightarrow k \cap \leftrightarrow p$
- 14) Z ; $Z \in \leftrightarrow l \cap \leftrightarrow p$



Obrázek 67

Závěr

Využitím kolmého průmětu přímky p do roviny podstavy ABC a nalezením vzoru bodů, které leží na hranách hranolu a zároveň na průmětu přímky p , jsme zjistili polohu bodů Y, Z , které vymezují úsečku, jež je průnikem přímky s hranolem. Tyto body leží ve stěnách hranolu $AA'F'F$ a $CC'D'D$ a přesné souřadnice bodů jsou označeny v algebraickém okně (Obrázek 67).

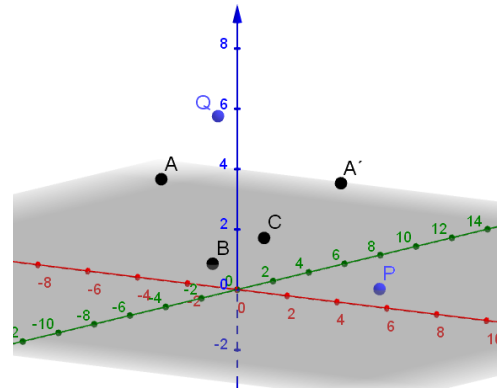
Příklad 2:

Zobrazte průsečíky přímky $a \equiv PQ$ [$P = (3,7; 2,8; 0)$, $Q = (-4; 4,5; 4,7)$] s kosým hranolem, jehož podstavou je rovnoběžník $ABCD$ [$A = (-5,2; ; 3; 2,7)$, $B =$

$(-3,5,; 3,5; 0), C = (0,; 1,5,; 1,5)]$ a pobočná hrana je AA' [$A' = (0; 5,8; 2,7)$] (Harant, 1965, str. 131).

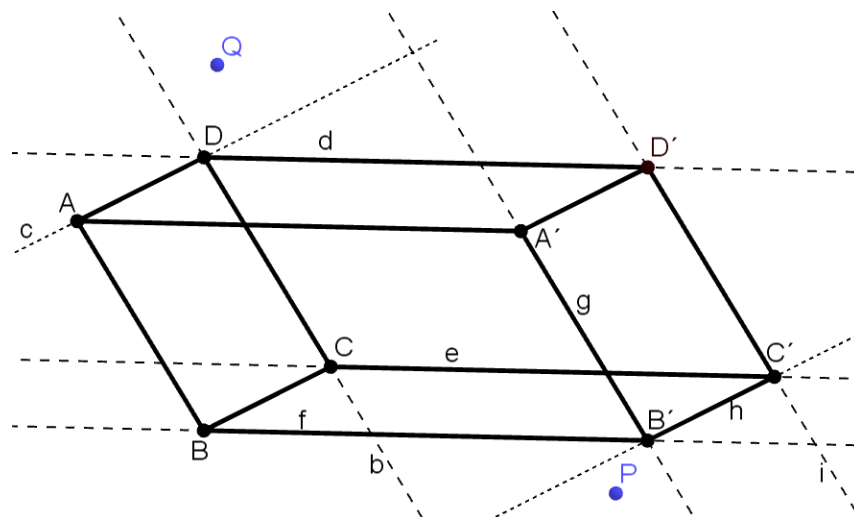
Konstrukce kosého hranolu:

Nákres vzniklý zapsáním bodů ze zadání do algebraického okna nám poskytl pouhou změř několika bodů (Obrázek 68), ze kterých je třeba vytvořit hranol.



Obrázek 68

- 1) úsečky AB, BC, AA'
- 2) $\leftrightarrow b; \leftrightarrow b \parallel AB \wedge \leftrightarrow b \in C$
- 3) $\leftrightarrow c; \leftrightarrow c \parallel BC \wedge \leftrightarrow c \in A$
- 4) $D; D \in \leftrightarrow b \cap \leftrightarrow c$
- 5) $\leftrightarrow d; \leftrightarrow d \parallel AA' \wedge \leftrightarrow d \in D$
- 6) $\leftrightarrow e; \leftrightarrow e \parallel \leftrightarrow d \wedge \leftrightarrow e \in C$
- 7) $\leftrightarrow f; \leftrightarrow f \parallel \leftrightarrow d \wedge \leftrightarrow f \in B$
- 8) $\leftrightarrow g; \leftrightarrow g \parallel AB \wedge \leftrightarrow g \in A'$
- 9) $B'; B' \in \leftrightarrow f \cap \leftrightarrow g$
- 10) $\leftrightarrow h; \leftrightarrow h \parallel BC \wedge \leftrightarrow h \in B'$
- 11) $C'; C' \in \leftrightarrow e \cap \leftrightarrow h$
- 12) $\leftrightarrow i; \leftrightarrow i \parallel CD \wedge \leftrightarrow i \in C'$
- 13) $D'; D' \in \leftrightarrow i \cap \leftrightarrow d$
- 14) hranol $ABCA'B'C'D'$



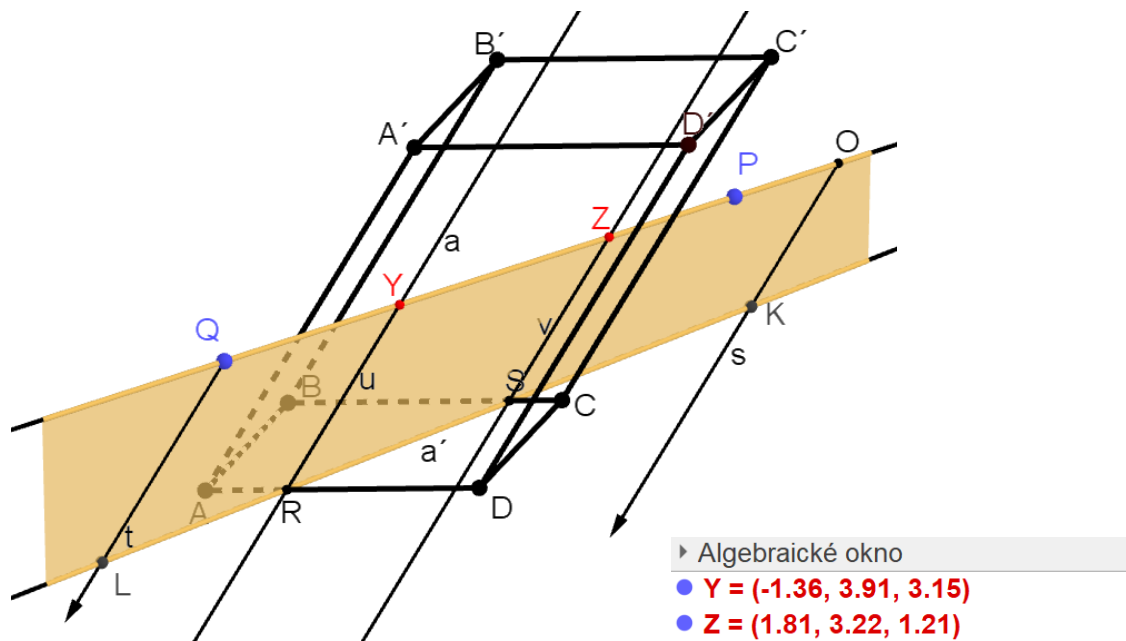
Obrázek 69

Konstrukce přímky a jejího průniku s hranolem:

- 1) $\leftrightarrow a; \leftrightarrow a \in QP$

Zvolíme rovinu, která je rovnoběžná s pobočnými hranami. Nazýváme ji směrovou rovinou. Přímký rovnoběžné s pobočnými hranami nazýváme směrové přímký. Na přímce a si zvolíme libovolný bod O , kterým vedeme směrovou přímký s . Přímký s protíná rovinu podstavy v bodě K . Dále:

- 2) $\leftrightarrow t$; $\leftrightarrow t \in Q \wedge \leftrightarrow t \parallel \leftrightarrow s$
- 3) L ; $L \in \leftrightarrow t \cap ABCD$
- 4) $\leftrightarrow a'$; $\leftrightarrow a' \in LK$
- 5) R ; $R \in \leftrightarrow a' \cap AD$
- 6) S ; $S \in \leftrightarrow a' \cap BC$
- 7) $\leftrightarrow u$; $\leftrightarrow u \in R \wedge \leftrightarrow u \parallel AA'$
- 8) $\leftrightarrow v$; $\leftrightarrow v \in S \wedge \leftrightarrow v \parallel AA'$
- 9) Y ; $Y \in \leftrightarrow u \cap \leftrightarrow a$
- 10) Z ; $Z \in \leftrightarrow v \cap \leftrightarrow a$



Obrázek 70

Závěr

Využitím směrových přímký a směrové roviny jsme graficky znázornili body Y a Z , které určují úsečku, jež je průnikem přímky a s kosým hranolem $ABCD A'B'C'D'$ (Obrázek 70).

4.3 Průnik přímky s jehlanem

Při konstrukci průniku přímky s jehlanem využíváme takzvané *vrcholové roviny*. Již z názvu je zřejmé, že tato rovina prochází vrcholem jehlanu a zároveň náleží přímce, jejíž průnik s jehlanem chceme nalézt. Dále využíváme *vrcholových přímek*, což jsou přímky vedené z vrcholu jehlanu libovolným bodem přímky, která jehlan protíná.

Příklad 1:

Zobrazte průsečíky přímky a s pláštěm pravidelného čtyřbokého jehlanu o čtvercové podstavě $ABCD$, vrcholu V a výšce v , jestliže je přímka dána body M, N . Určete souřadnice všech vrcholů jehlanu a souřadnice průsečíků, jsou-li nám známy tyto souřadnice:

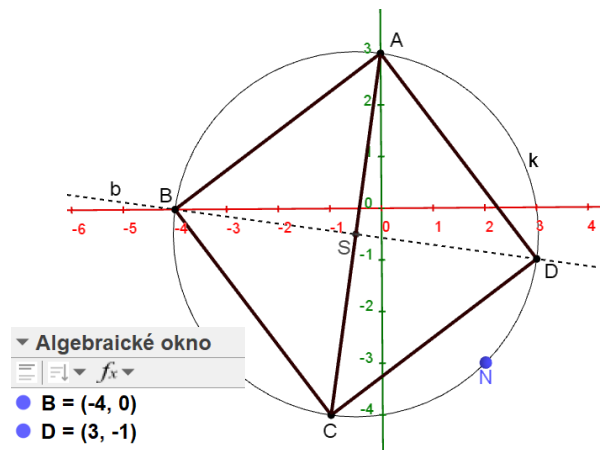
$$A = (0, 3, 0) \quad M = (-3, 3, 4) \quad v = 5 \text{ cm}$$

$$C = (-1, -4, 0) \quad N = (2, -3, 0)$$

Konstrukce jehlanu

GeoGebra 2D:

- 1) AC ; AC je úhlopříčka čtvercové podstavy
- 2) S ; S je středem úsečky AC
- 3) $\leftrightarrow b$; $\leftrightarrow b \perp AC \wedge \leftrightarrow b \in S$
- 4) k ; $k(S, r = SA)$
- 5) B ; $B \in k \cap \leftrightarrow b$
- 6) D ; $D \in k \cap \leftrightarrow b$
- 7) podstava $ABCD$
- 8) N ; $N = (2, -3, 0)$



Obrázek 71

GeoGebra 3D:

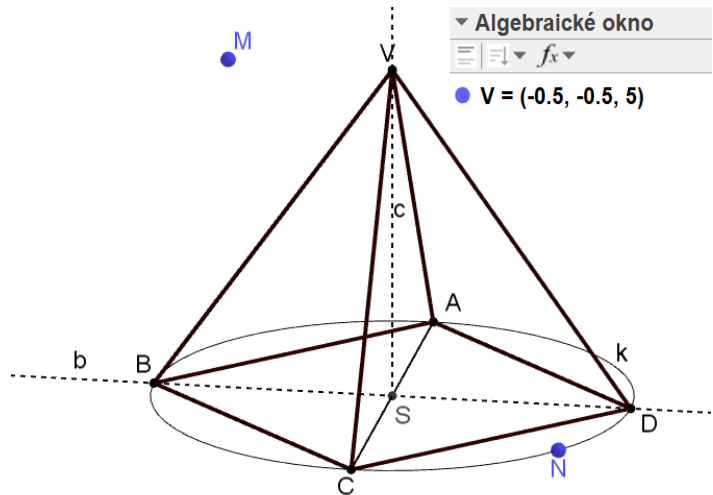
- 9) $\leftrightarrow x$; $\leftrightarrow x \perp ABCD \wedge \leftrightarrow x \in S$
- 10) V ; $V \in \leftrightarrow x \wedge z_V = 5$
- 11) M ; $M = (-3, 3, 4)$

Z algebraického okna lze vyčíst (Obrázek 71, 72):

$$B = (-4, 0, 0)$$

$$D = (3, -1, 0)$$

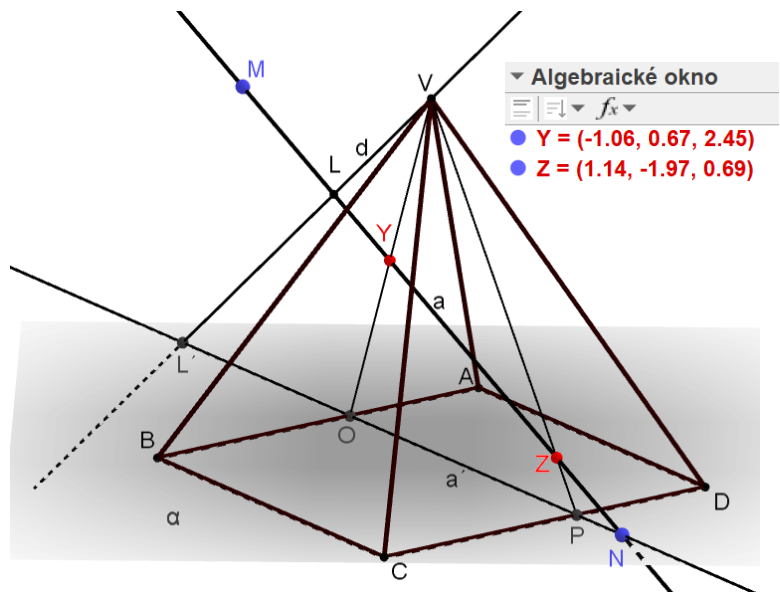
$$V = (-0,5; -0,5; 5)$$



Obrázek 72

Konstrukce průsečíků přímky s pláštěm jehlanu

- 1) $\leftrightarrow a$; $\leftrightarrow a \in MN$
- 2) α , α je rovina podstavy $ABCD$
- 3) L ; $L \in \leftrightarrow a$
- 4) $\leftrightarrow d$; $\leftrightarrow d \in VL$
- 5) L' ; $L' \in \leftrightarrow d \cap \alpha$
- 6) $\leftrightarrow a'$; $\leftrightarrow a' \in L'N$
- 7) O ; $O \in \leftrightarrow a' \cap AB$
- 8) P ; $P \in \leftrightarrow a' \cap CD$
- 9) úsečky VO, VP
- 10) Y ; $Y \in VO \cap \leftrightarrow a$
- 11) Z ; $Z \in VP \cap \leftrightarrow a$



Obrázek 73

Závěr

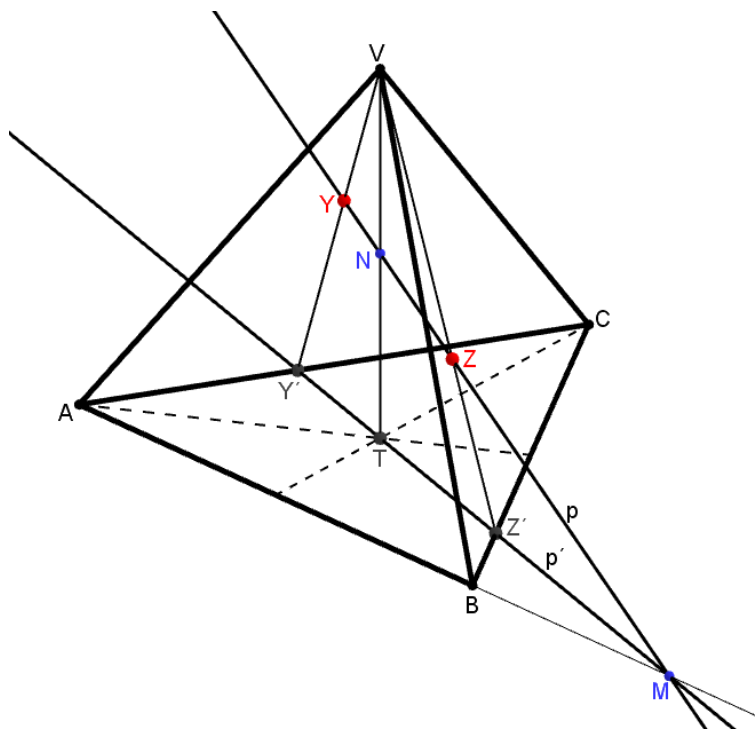
Využitím takzvané vrcholové přímky (přímka d), která prochází vrcholem jehlanu a protíná přímku a jsme našli vrcholovou rovinu $VL'N$, z které již bylo snadné zjistit hledané průniky přímky a a pláště jehlanu. Tyto body mají souřadnice $Y = (-1,06, 0,67, 2,45)$ a $Z = (1,14, -1,97, 0,69)$ (Obrázek 73).

Příklad 2:

Je dán pravidelný trojboký jehlan (pravidelný čtyřstěn) $ABCV$ a přímka $p \equiv MN$. Sestrojte průnik přímky a jehlanu, platí-li, že bod $M \in \leftrightarrow AB$, $|AM| = \frac{3}{2} |AB|$, bod N je středem úsečky VT , kde bod T je těžiště trojúhelníku ABC .

Konstrukce

- 1) jehlan $ABCV$
- 2) M ; $M \in \leftrightarrow AB \wedge |AM| = \frac{3}{2} |AB|$
- 3) T ; T je těžiště ΔABC
- 4) N ; N je středem úsečky VT
- 5) $\leftrightarrow p$; $\leftrightarrow p \in MN$
- 6) $\leftrightarrow p'$; $\leftrightarrow p' \in TM$
- 7) Y' ; $Y' \in \leftrightarrow p' \cap AC$
- 8) Z' ; $Z' \in \leftrightarrow p' \cap BC$
- 9) úsečky $Y'V$, $Z'V$
- 10) Y ; $Y \in Y'V \cap \leftrightarrow p$
- 11) Z ; $Z \in Z'V \cap \leftrightarrow p$



Obrázek 74

Závěr

Vrcholem V a přímkou p je určena vrcholová rovina, v níž leží i přímka p' , která je průsečnicí této roviny a roviny podstavy. Řezem jehlanu vrcholovou rovinou je trojúhelník $Y'Z'V$.

Průnikem přímky p s jehlanem $ABCV$ je úsečka daná body Y , Z .

4. Prostorové úlohy u přijímacích zkoušek

V některých přijímacích zkouškách z matematiky se čas od času vyskytne úloha, která je věnována stereometrii. V přijímacích zkouškách na čtyřleté střední školy je těchto otázek velmi poskrovnu, bylo obtížné vůbec některé nalézt. Matematika ale není založena jen na tom umět dobře a rychle sčítat, odčítat, násobit a dělit, vyřešit několika způsoby soustavy rovnic, řešit úlohy s přímou či nepřímou úměrou nebo znát nazpaměť všechny vzorečky pro obsah obrazců a objem těles. Matematika je zároveň věda, ve které je důležité rozvíjet a posléze též uplatnit lidskou prostorovou představivost, protože trojrozměrný prostor je něco, co nás obklopuje v běžném životě bez ohledu na to, zda jsme uvnitř budovy nebo venku v přírodě.

Více stereometrie nalezneme spíše v testech studijních předpokladů, které mívají 6 okruhů – verbální, numerický, okruh kritického a analytického myšlení, okruh kulturního přehledu a konečně okruh prostorové představivosti. Na základě úspěšnosti v jednotlivých okruzích testu je vyhodnoceno, zda má student dobré předpoklady pro studium na dané fakultě. Účelem stereometrické části u přijímacích zkoušek je zjistit, jak dobře žáci vnímají nejrůznější tvary těles, směry pohledu a vzdálenosti v prostoru. Pro technicky zaměřené školy je prostorová představivost velmi důležitým a žádaným kritériem a například studium architektury se bez ní neobejde [10].

Dobrá orientace v prostoru je velice praktická, ale není bohužel samozřejmostí u každého z nás. Využíváme ji v běžném životě v mnoha situacích – při zkracování si cesty skrz město, při orientaci ve velkých neznámých budovách, ale i v otevřené krajině.

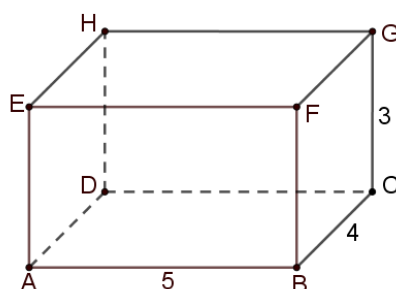
5.1 Vybrané úlohy pro žáky základních škol

V této kapitole je vybráno několik příkladů ze stereometrie určených pro žáky základních škol, které by mohly činit potíže. U každé úlohy jsou popsána různá úskalí či chyby, kterých by se žák mohl při řešení dopustit a zároveň jsou úlohy doplněny o správné řešení.

Úloha 1:

Na povrchu kvádrů vyznačte nejkratší cestu, po které se mravenec dostane z bodu A do bodu G [1].

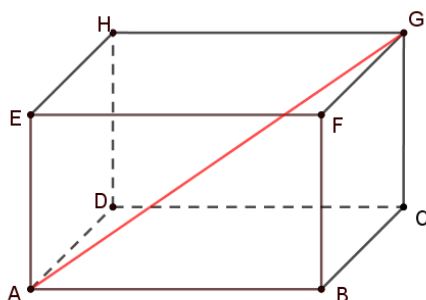
Rozměry kvádrů (v cm):



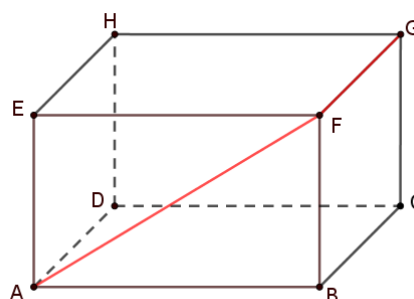
Obrázek 75

Chybné řešení:

Jedna z možností, jak by žáci řešili tuto úlohu, je, že by ji řešili stejně, jako by hledali vzdálenost dvou bodů v rovině. Spojili by tedy výchozí a koncový bod úsečkou a tím by pokládali úlohu za vyřešenou (Obrázek 76). Jiný způsob, jak by mohla být úloha řešena chybně je, že žáci by vedli cestu nejprve úhlopříčkou AF frontální stěny, poté by pokračovali přes hranu FG (Obrázek 77).



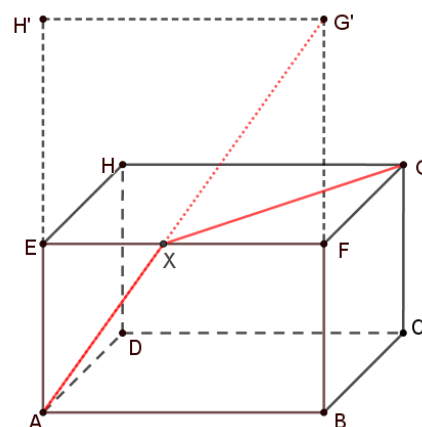
Obrázek 76



Obrázek 77

Správné řešení:

Nejkratší cestu nalezneme nejlépe tak, když si horní podstavu $EFGH$ představíme otočenou kolem hrany EF do frontální roviny (Obrázek 78). Vznikne obdélník $EFG'H'$. Jsou-li dodržena pravidla volného rovnoběžného promítání, tak platí: $|FG'| = 2 |FG|$, $|EH'| = 2 |EH|$.



Obrázek 78

Nyní spojíme body A, G' , protože oba leží ve frontální rovině. Na úsečce EF vznikne bod X , který náleží průniku AG' a EF . Tímto bodem nyní povede nejkratší cesta, která se skládá z úseček AX a XG .

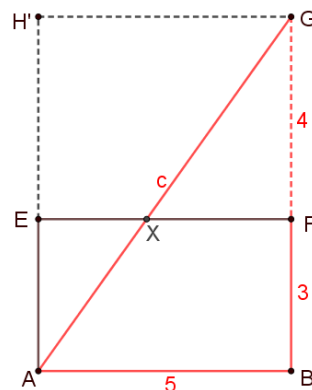
Ověření výpočtem:

Správnost řešení ověříme výpočtem podle Pythagorovy věty. Otočením horní podstavy kolem úsečky EF vznikl obdélník o jedné straně délky 5 cm , druhá strana je součtem délek zbylých hran kvádrů ($3 + 4\text{ cm}$), tj. 7 cm . Mravencova cesta c je přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami 5 cm a 7 cm (Obrázek 79). Platí tedy vztah:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

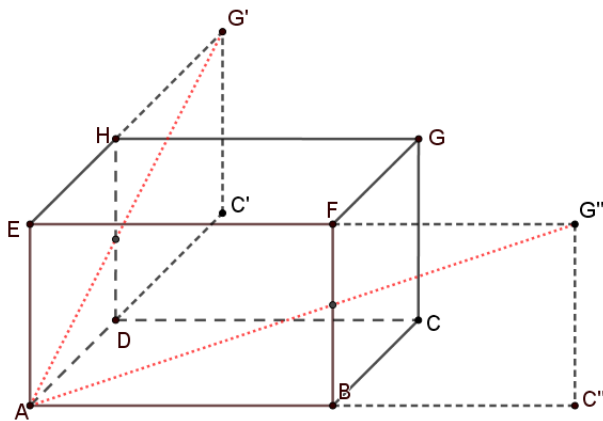
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \underline{\underline{\sqrt{74}\text{ cm}}}$$

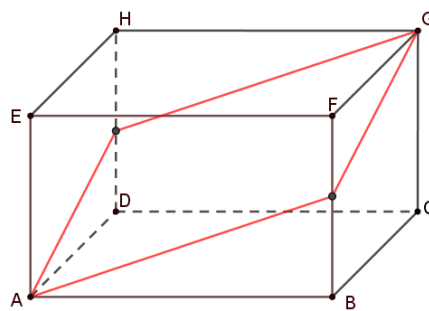


Obrázek 79

Kromě této varianty by se však mohlo zdát, že mravenec může „cestovat“ i po bočních stěnách kvádrů, a to dvěma způsoby, které jsou vyznačeny na následujících obrázcích. Dolní podstavu v potaz nebereme, protože předpokládáme, že na ní je překážka postavena.



Obrázek 80

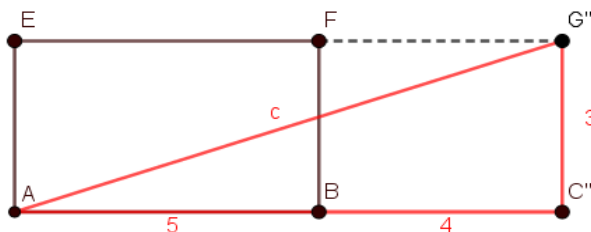


Obrázek 81

Ukážeme si, že tyto dvě cesty nejsou stejně krátké, jako předchozí varianta:

Ověření výpočtem:

Jako u předchozího případu nám vznikne obdélník tak, že otočíme pravou boční stěnu (resp. levou boční stěnu) kolem hrany se sousedící přední stěnou (resp. zadní stěnou).



Obrázek 82

Jedna strana obdélníka měří 3 cm, druhá strana je součtem délek zbylých hran kvádrů (5 + 4 cm), tj. 9 cm. Mravencova cesta c je přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami 3 cm a 9 cm. Počítáme dle Pythagorovy věty:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$c = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} \text{ cm}$$

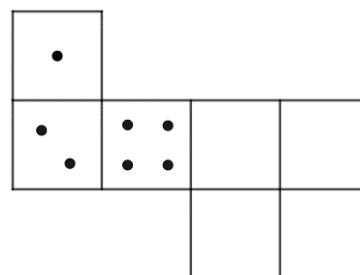
Rozdíl délek tras: $\sqrt{90} - \sqrt{74} \approx 0,8845 \text{ cm}$

Závěr:

Zjistili jsme, že cesta mravence přes přední a svrchní stěnu kvádrů měří $\sqrt{74} \text{ cm} \approx 8,602 \text{ cm}$. Zatímco cesty vedoucí přes boční stěny kvádrů měří $\sqrt{90} \text{ cm} \approx 9,467 \text{ cm}$. První varianta je tedy kratší přibližně o 0,8845 cm.

Úloha 2:

Doplňte síť hrací kostky tak, aby součet puntíků na každých dvou protilehlých stěnách kostky byl sedm [6].



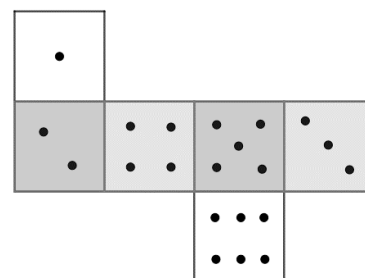
Obrázek 83

Řešení:

Tato úloha patří mezi ty snazší. Protože co se týče početní stránky, tak je velmi snadné zjistit, jaký počet puntíků bude na protější stěně hrací kostky. Co může však činit drobné problémy, je přijít na způsob, který odhalí protilehlé stěny.

Je třeba si uvědomit, že protilehlé stěny jsou vždy odděleny právě jednou stěnou a nemají žádnou společnou hranu. Vezmeme-li jako první v úvahu bílou stěnu úplně vpravo na síti, tak zbylé dvě bílé stěny jsou k ní přiléhající, a to poznáme tak, že mají společný jeden „růžek“, tedy vrchol krychle. Je tedy zřejmé, že jediná stěna, která bude protilehlá k bílé stěně vpravo, je stěna se 4 puntíky a prázdná stěna vpravo bude obsahovat $7 - 4$, tedy 3 puntíky.

Stěna se dvěma puntíky je oddělena s jejím protějškem stěnou se čtyřmi puntíky. Proto na druhé stěně zprava bude $7 - 2$, tedy 5 puntíků. Nyní už zbývá doplnit do spodní prázdné stěny $7 - 1$ puntíků, tedy 6.

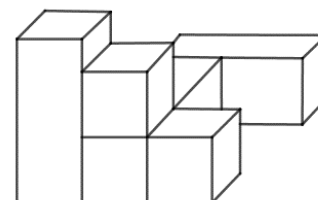


Obrázek 84

Úloha 3:

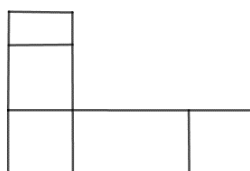
Na obrázku je schematicky znázorněna dekorativní zahradní sestava složená z dřevěných krychlí a kvádrů.

Z jakého pohledu byla pořízena tato fotografie dekorativní stěny?



Obrázek 85

- a) zezadu
- b) zepředu
- c) zleva
- d) zprava
- e) zhora



Obrázek 86

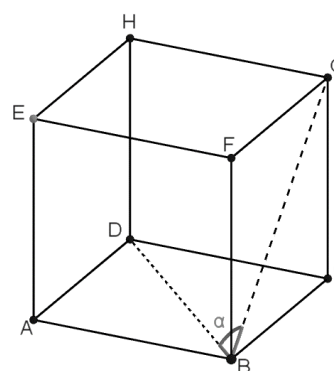
[11]

Řešení

S úlohami tohoto typu se nejčastěji setkáme v testech studijních předpokladů, kde je testována prostorová představivost žáků. Bystrý žák si všimne, že pohled zpredu určitě není řešením. Postupně vyloučí další směry pohledu. Nakonec je zřejmé, že fotografie je pořízena pohledem zprava.

Úloha 4:

V krychli je znázorněn úhel α při vrcholu B (viz Obrázek 87). Zjistěte jeho velikost.



Obrázek 87

Chybné řešení:

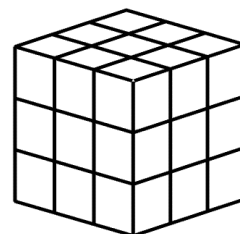
Častou chybou může být, že žák začne uvažovat, že jedno rameno úhlu α leží v pravé boční stěně krychle $BCGF$ a druhé leží v podstavě $ABCD$. Dále vychází ze skutečnosti, že tyto dvě stěny jsou na sebe kolmé. Proto odpovědí může být, že úhel α má velikost 90° .

Správné řešení:

Asi nejnáze lze demonstrovat správné řešení tak, že si vytvoříme pomyslnou úsečku DG . Nyní nám vznikl trojúhelník DBG tvořený rameny úhlu α a úsečkou DG . Důležité je si povšimnout, že všechny strany trojúhelníka leží na úhlopříčkách stěn krychle, proto jsou si délkou rovnocenné. A je-li trojúhelník tvořen třemi stejně dlouhými stranami, pak jde o rovnostranný trojúhelník a platí, že všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné a mají velikost 60° . Úhel α je jeden z vnitřních úhlů tohoto trojúhelníka, takže jsme dokázali, že úhel α má velikost 60° .

Úloha 5:

Kolik různě velkých krychlí a kolik různých kvádrů může vzniknout z krychle na obrázku, budeme-li uřezávat jednotlivé krychličky? Těleso musí být tvořeno více než jednou krychličkou a nemusí se spotřebovat všechny krychličky, Uvažujeme tak, že pro vytvoření nového tělesa máme vždy kompletní nerozřezanou krychli [6].



Obrázek 88

Chybné uvažování

Je důležité uvědomit si, jak definujeme krychli a kvádr. Může se stát, že žák bude uvažovat tak, že hledá všechny krychle o stejně dlouhých hranách $a \cdot a \cdot a$, což je správně, a všechny kvádry o různě dlouhých hranách $a \cdot b \cdot c$, což už správně není. Kvádr je vlastně těleso, jehož stěny tvoří čtverce či obdélníky. S velkou pravděpodobností si žák neuvědomí (nebo ani neví), že krychle je vlastně speciální případ kvádrů. Nalezne-li žák celkový počet kvádrů vyjma krychlí, bude mu výsledek nejspíše uznán. Naše řešení však uvažuje krychli jako speciální případ kvádrů.

Správné řešení

a) Počet krychlí:

V rámci krychlí je výběr omezený, protože hledáme třetí mocniny celých čísel, které jsou menší nebo rovny 27 (celkový počet krychliček velké krychle).

Řešení jsou tedy dvě. Krychle ze čtyř a dvaceti sedmi krychliček. Krychle o jedné krychličce se podle zadání nepočítá.

b) Počet kvádrů:

Počet všech kvádrů zjistíme výčtem všech jejich rozměrů:

1) $1 \cdot 1 \cdot 2$

2) $1 \cdot 2 \cdot 2$

3) $2 \cdot 2 \cdot 2$

4) $2 \cdot 2 \cdot 3$

5) $2 \cdot 3 \cdot 3$

6) $3 \cdot 3 \cdot 3$

7) $1 \cdot 2 \cdot 3$

Celkem jde sestavit sedm kvádrů.

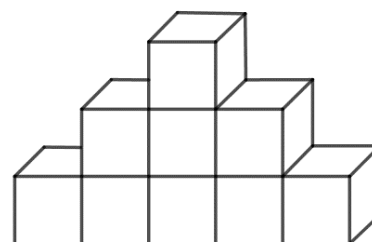
Závěr

Z krychle v zadání lze vytvořit dvě krychle a sedm kvádrů.

Úloha 6:

Těleso na obrázku je tvořeno malými kostkami. Má-li kostka viditelnou jednu stěnu, má hodnotu 1 bod. Má-li viditelné dvě stěny – 3 body, tři viditelné stěny – 5 bodů, čtyři viditelné stěny – 7 bodů. Je-li vidět 5 stěn, hodnota je 9 bodů.

Určete v bodech hodnotu celého tělesa [6].



Obrázek 89

Řešení

Tato úloha se řeší kombinací prostorové představivosti a binárních operací (sčítání, násobení). Nejpravděpodobněji žák udělá chybu při početní operaci. Asi nejjednodušeji můžeme uvažovat tak, že počet viditelných stěn každé kostky je 6 minus počet sousedních kostek. Devítibodové jsou tři kostky, sedmibodové dvě, pětibodové tři a třibodová je jedna „prostřední“ kostka. Vypočítáním výrazu $9 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1$ zjistíme výsledek 59.

Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo sestavit soubor prostorových úloh na téma odchylky, řezy těles a průniky přímky s tělesy, jenž tvoří převážnou část této práce. Tuto praktickou část jsem zároveň chtěla obohatit o teoretický základ umístěný do první kapitoly, abych čtenáře již na začátku seznámila se stereometrickými útvary, pojmy a konstrukcemi, se kterými v praktické části pracuji.

Rovněž jsem se zaměřila na problematiku řešení prostorových úloh žáky základních škol. Výuka stereometrie na základních školách je dle mého názoru spíše opomíjena, což má nemalý vliv na to, že žákům často chybí prostorová představivost. Proto výsledky ve stereometrickém okruhu u testů studijních předpokladů nebývají často příliš dobré. Ke zlepšení prostorové představivosti žáků by mohlo posloužit častější využívání programů pro 3D modelování ve výuce. Dost možná by se tímto stereometrie stala u žáků oblíbenější.

Téma práce jsem si vybrala z vlastní iniciativy, protože již na gymnáziu mne tato tematika zajímala a s úlohami jsem často pomáhala spolužákům. Za svůj osobní přínos považuji to, že díky psaní této práce jsem nabyla nové zkušenosti v kreslení v programu GeoGebra, v němž jsem vytvořila všechny obrazové přílohy úloh. Zároveň mi vytvoření práce poskytlo lepší orientaci v problematice stereometrie a prohloubilo moji vlastní prostorovou představivost.

Literatura

- [1] DUŠEK, František. *Matematické zájmové kroužky: v 7. - 9. ročníku základní devítileté školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971, 172 s. Odborná literatura pro učitele.
- [2] HARANT, Michal, Oldřich LANTA, Miroslav MENŠÍK a Alois URBAN. *Deskriptivní geometrie: pro II. a III. ročník SVVŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 284 s.
- [3] HOLÁŇ, Štěpán a Libuše HOLÁŇOVÁ. *Cvičení z deskriptivní geometrie II: Promítací metody*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 1998. Učební text. Vysoké učení technické v Brně. 113 s.
- [4] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia - Stereometrie*. Olomouc: Prometheus, 1995, 223 s. ISBN 80-7196-004-7.
- [5] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965, 365 s.
- [6] Testy z matematiky: Příprava na přijímací zkoušky na čtyřleté střední školy. Brno: Didaktis, 2007, 2008

Internetové zdroje

- [7] HAŠEK, Roman. *Promítací metody: DGI* [online]. [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/DG1/P2_Promitaci_metody.pdf
- [8] Jehlan-vzorce. www.aristoteles.cz [online]. [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <http://www.aristoteles.cz/matematika/stereometrie/jehlan.php>
- [9] Matematika starověkého Egypta. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematika_starov%C4%9Bk%C3%A9ho_Egypta

- [10] Přijímačky: Test studijních předpokladů. *www.muni.cz* [online]. [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <https://www.muni.cz/uchazeci/bakalarske-a-magisterske-studium/prijimacky>
- [11] Příprava na vysokou: Testy studijních předpokladů, Test prostorové představivosti. *Studuj na MUNI* [online]. [cit. 2019-04-07]. Dostupné z: <https://www.studujnamuni.cz/priprava-na-vysokou/tsp-prostorova-predstavivost>