



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Kuželosečky okolo nás

Conics around us

Vypracovala: Denisa Šafářová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Kuželosečky okolo nás jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 23. dubna 2019.

Denisa Šafářová

Anotace

Tato bakalářská práce je zaměřená na křivky „okolo nás“. Především klade důraz na kuželosečky a jejich výskyt v reálném světě. Ty se mohou vyskytovat například v architektuře, technice nebo v přírodě. V první části práce jsou definované jednotlivé kuželosečky a jejich základní vlastnosti. Dále jsou zde uvedeny definice vybraných algebraických křivek. Text je proložen názornými obrázky, které jsou vytvořeny v programu GeoGebra. Druhá část práce spočívá v identifikaci kuželoseček a vybraných křivek na fotografiích pomocí programu GeoGebra. U některých fotografiích je využito teoretických poznatků z první části, tzn. algebraického důkazu, že se jedná o danou kuželosečku.

Klíčová slova

Kuželosečky, elipsa, hyperbola, parabola, křivky.

Abstract

This Bachelor's thesis is focused on curves around us. Primarily emphasizes conics and their presence in the real world. They can appear for example in architecture, engineering or nature. Individual conics and their properties are defined in the first part. There are also definitions of chosen algebraic curves. The text is interleaved by pictures made in GeoGebra. The second part is based on identification of conics and chosen curves on photographs using GeoGebra. The theoretical knowledge like algebraic proof that it is a given conic is used for some photographs.

Keywords

Conics, ellipse, hyperbole, parabola, curves.

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za cenné rady, odborné připomínky a za ochotu při vedení mé bakalářské práce. Velké poděkování také patří mé rodině a kamarádům za podporu při studiu.

Obsah

1	Úvod	8
1.1	Východiska práce	8
2	Kuželosečky definované jako řezy na kuželové ploše	9
3	Kuželosečky	13
3.1	Elipsa	13
3.1.1	Definice	13
3.1.2	Vlastnosti	13
3.1.3	Bodová konstrukce elipsy	14
3.1.4	Proužková konstrukce elipsy	16
3.1.5	Zahradnická konstrukce elipsy	18
3.1.6	Analytické vyjádření	18
3.2	Hyperbola	21
3.2.1	Definice	21
3.2.2	Vlastnosti	21
3.2.3	Bodová konstrukce hyperboly	22
3.2.4	Analytické vyjádření	25
3.3	Parabola	27
3.3.1	Definice	27
3.3.2	Vlastnosti	27
3.3.3	Bodová konstrukce paraboly	28
3.3.4	Analytické vyjádření	30
4	Další algebraické křivky	32
4.1	Cykloida	32
4.1.1	Definice	32
4.1.2	Vlastnosti	32
4.1.3	Parametrické vyjádření	32

4.2	Hypocykloidy	33
4.2.1	Definice	33
4.3	Epicykloidy	34
4.3.1	Definice	34
4.4	Klotoida	35
4.4.1	Definice	35
5	Kuželosečky okolo nás	36
5.1	Úvod	36
5.2	Využití kuželoseček	36
5.2.1	Elipsy	37
5.2.2	Hyperboly	43
5.2.3	Paraboly	49
5.3	Využití křivek	54
5.3.1	Cykloidy	54
5.3.2	Hypocykloidy a epicykloidy	57
5.3.3	Klotoidy	58
6	Závěr	59
	Seznam použité literatury a zdrojů	60
	Seznam obrázků	62
	Zdroje obrázků	65

1 Úvod

1.1 Východiska práce

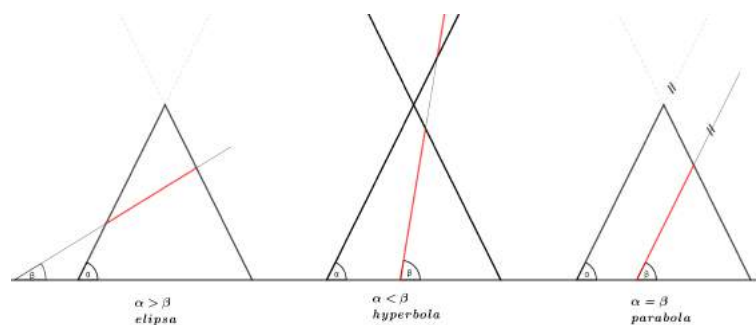
Ve své bakalářské práci se zabývám kuželosečkami a vybranými křivkami. Hlavním cílem této práce je poukázat na propojení geometrie a světa „okolo nás“. Dalším cílem bylo vytvořit práci, která může sloužit jako doplňkový výukový materiál pro studium kuželoseček.

První část práce je zaměřena na teoretické poznatky z oblasti kuželoseček. Kladu zde veliký důraz na názornost tak, aby byl text pro jakéhokoliv čtenáře srozumitelný a snadno pochopitelný v získávání nových poznatků v oblasti kuželoseček. Každá kuželosečka je popsána z geometrického i algebraického hlediska. Text doprovází obrázky vytvořené v programu GeoGebra. Dále se zde snažím alespoň částečně nastínit vybrané druhy algebraických křivek, které jsou zajímavé, velmi podobné rozebíraným kuželosečkám a lze je snadno naléznout v běžném životě.

Druhá, hlavní část se zabývá využitím kuželoseček „okolo nás“. Tato část je tvořena identifikací křivek na fotografiích. S kuželosečkami se můžeme setkat v architektuře, v přírodě, v umění, v průmyslu atd. S eliptickým nebo hyperbolickým typem se v praxi setkáváme nejčastěji, ale nalézt objekty parabolického typu, není tak snadné, protože se vyskytují velmi zřídka. Také se v této části práce objevují obrázky, na kterých jsou identifikovány již zmiňované algebraické křivky.

2 Kuželosečky definované jako řezy na kuželové ploše

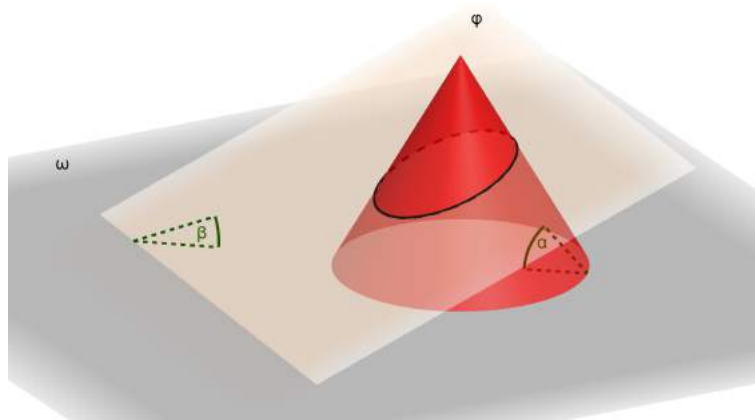
Kuželosečky je možné vyjádřit analyticky nebo geometricky. Analytické vyjádření, pomocí algebraických rovnic, je pro mnohé více nepochopitelné, proto je lepší pro názornost použít geometrické vyjádření. Toto vyjádření spočívá, jak název Kuželosečky vypovídá, v řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem. Výsledný tvar kuželosečky je závislý na úhlu protnutí roviny β s kuželovou plochou α . Na obrázku níže jsou ilustrovány tři případy, které mohou nastat.



Obrázek 1: Řezy kuželové plochy

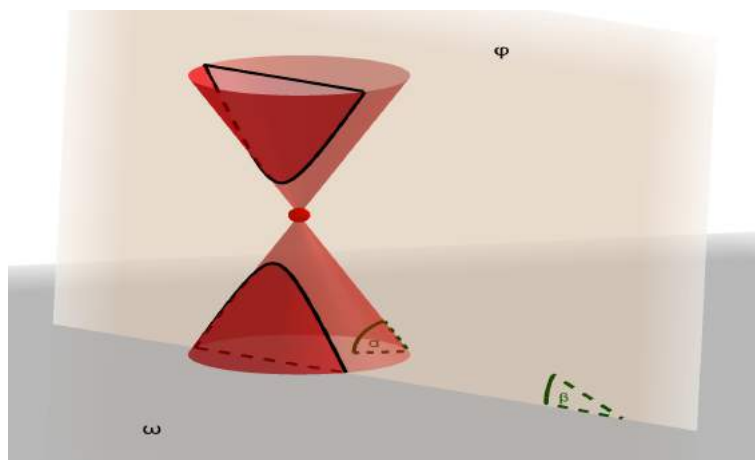
Na následujících obrázcích je lépe znázorněno tvrzení vyplývající z Obrázku (1), tzn. řezy kuželové plochy ve 3D. Při tvoření obrázků jsem využila programu GeoGebra a jeho funkce „Grafický náhled 3D“.

Na druhém obrázku je vyobrazen řez plochy rovinou, jehož průnikem je elipsa. Velikost úhlu β sevřeného rovinou ω a rovinou řezu φ je menší než velikost úhlu α . V tomto případě, $\alpha > \beta$, se jedná o eliptický řez kuželovou plochou.



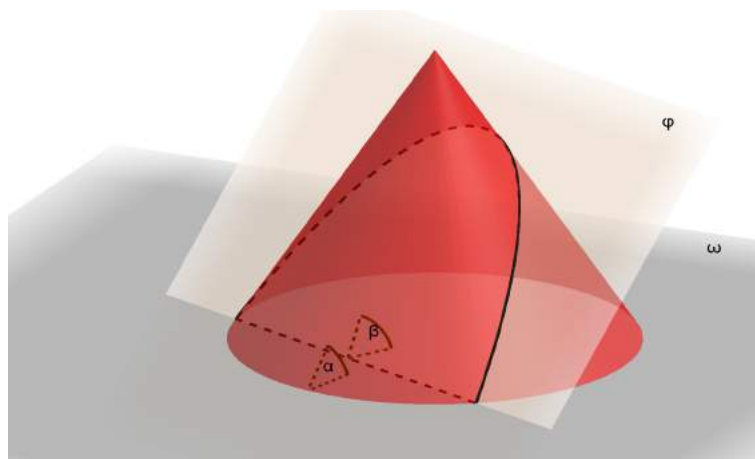
Obrázek 2: Řez plochy - elipsa

Na třetím obrázku je vyobrazen řez plochy rovinou, jehož průnikem je hyperbola. Velikost úhlu β sevřeného rovinou ω a rovinou řezu φ je větší než velikost úhlu α . V tomto případě, $\alpha < \beta$, se jedná o hyperbolický řez kuželovou plochou.



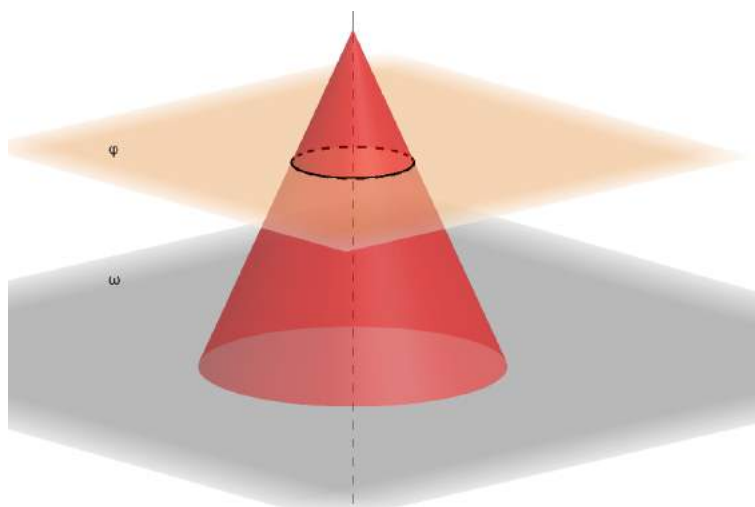
Obrázek 3: Řez plochy - hyperbola

Na čtvrtém obrázku je vyobrazen řez plochy rovinou, jehož průnikem je parabola. Velikost úhlu β sevřeného rovinou ω a rovinou řezu φ je shodný s velikostí úhlu α . V tomto případě, $\alpha = \beta$, se jedná o parabolický řez kuželovou plochou.



Obrázek 4: Řez plochy - parabola

Na pátém obrázku je vyobrazen zvláštní případ řezu plochy rovinou, jehož průnikem je kružnice. Pokud je rovina ω rovnoběžná s rovinou řezu φ je průnikem těchto dvou rovin kružnice.



Obrázek 5: Řez plochy - kruh

Quételetova-Dandelinova věta

Rovina σ , která neprochází vrcholem kuželové plochy a která svírá s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy úhel β menší než je úhel α , který svírají povrchové přímky kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace, protíná

2 KUŽELOSEČKY DEFINOVANÉ JAKO ŘEZY NA KUŽELOVÉ PLOŠE

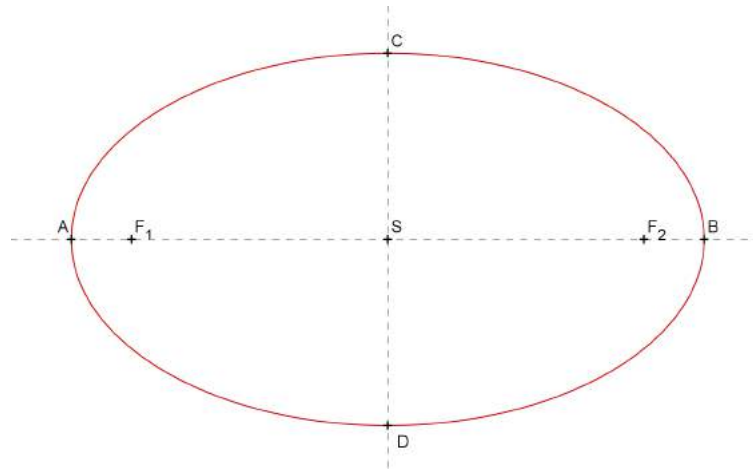
kuželovou plochu v elipse. Je-li úhel α roven úhlu β , potom rovina σ protíná kuželovou plochu v parabole. Je-li úhel β větší než úhel α , potom řezem roviny σ a kuželové plochy je hyperbola. Ohniska F' a F'' popř. ohnisko F v případě paraboly, jsou body dotyku kulových ploch κ' , κ'' vepsaných kuželové ploše, které se zároveň dotýkají roviny řezu σ . [1]

3 Kuželosečky

3.1 Elipsa

3.1.1 Definice

Elipsa je množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní. [1]



Obrázek 6: Elipsa

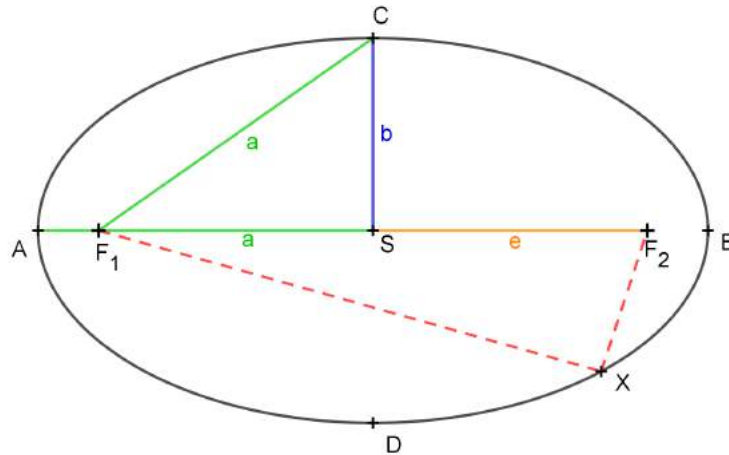
Body A, B nazýváme hlavními vrcholy a body C, D vedlejšími vrcholy elipsy. Body F_1, F_2 jsou ohniska elipsy a bod S nazýváme středem elipsy. Úsečka $|F_1F_2|$ je hlavní osou elipsy.

3.1.2 Vlastnosti

$|SA| = |SB| = a$, kde a nazýváme hlavní osou. $|SC| = |SD| = b$, kde b nazýváme vedlejší osou. $|XF_1|, |XF_2|$ nazýváme průvodiči elipsy a platí pro ně tato rovnost:

$$|XF_1| + |XF_2| = a$$

Pro vztah vedlejších vrcholů a ohnisek platí, že $|CF_1| = |CF_2| = |DF_1| = |DF_2| = a$.



Obrázek 7: Vlastnosti elipsy

Pravoúhlý trojúhelník F_1CS nebo F_2CS nazýváme charakteristickým trojúhelníkem elipsy a pro jeho strany platí vztah $a^2 = b^2 + e^2$, kde e je excentricita neboli výstřednost elipsy. Excentricita je vzdálenost ohnisek od středu elipsy. Popřípadě, že by $e = 0$, jedná se o kružnici. To znamená, že se obě ohniska staly jedním bodem a to středem S .

3.1.3 Bodová konstrukce elipsy

Rozbor

Na úsečce omezené ohnisky F_1, F_2 si zvolíme pomocný bod I . Sestrojíme kruhový oblouk k_1 o poloměru $r_1 = |AI|$ a k_2 o poloměru $r_2 = |BI|$ se středy v ohniscích. V průsečících oblouků dostáváme body elipsy K, L, M, N . Z vlastností elipsy je zřejmé, že pro tyto body platí, že

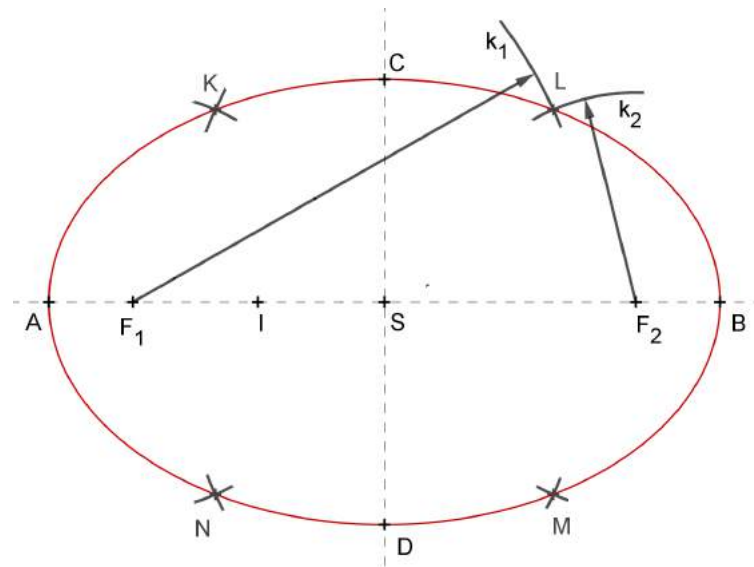
$$|KF_1| + |KF_2| = |AI| + |BI| = |AB| = 2a$$

$$|LF_1| + |LF_2| = |AI| + |BI| = |AB| = 2a$$

$$|MF_1| + |MF_2| = |AI| + |BI| = |AB| = 2a$$

$$|NF_1| + |NF_2| = |AI| + |BI| = |AB| = 2a$$

Součet průvodičů je pokaždé roven $2a$. To znamená, že tyto body náležejí elipse s vrcholy A, B .



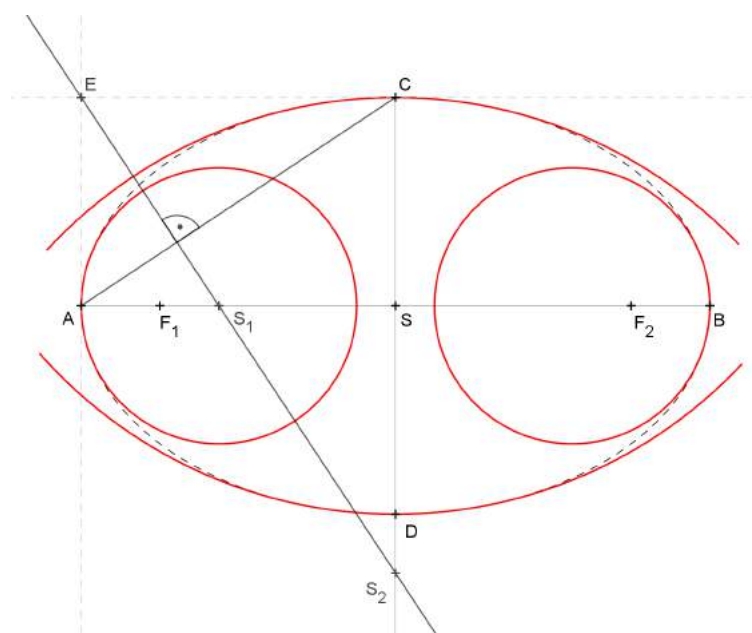
Obrázek 8: Konstrukce elipsy

Postup

- 1) $I; I \in F_1F_2$
- 2) $k_1; k_1(F_1, |BI|)$
- 3) $k_2; k_2(F_2, |AI|)$
- 4) $L; L \in k_1 \cap k_2$

Ze čtyř bodů elipsu nevytvoříme. Proto je nutné tento postup několikrát opakovat, to znamená zvolit další pomocné body I_2, I_3 atd. Abychom docílili co nejpřesnějšího tvaru elipsy, museli bychom použít mnoho pomocných bodů. Při klasickém rýsování by výsledek byl velmi nepřehledný, proto nahrazuje elipsu v okolí hlavních vrcholů pomocí tzv. oskulačních kružnic. Tyto kružnice svým tvarem nejlépe nahrazují tvar elipsy.

Pomocí kolmic vytvoříme obdélník ASCE. Bodem E vedeme kolmici na úsečku AC. Průsečík této kolmice s hlavní osou označíme S_1 a průsečík s vedlejší osou S_2 . Tyto průsečíky jsou středy oskulačních kružnic.



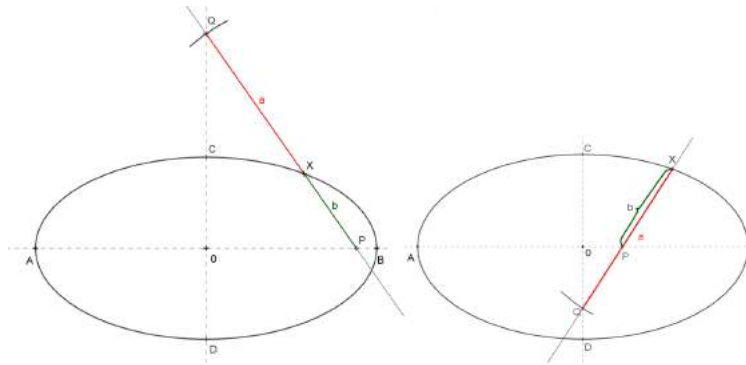
Obrázek 9: Oskulační kružnice

3.1.4 Proužková konstrukce elipsy

Dalším způsobem jak zkonstruovat elipsu je tzv. proužková konstrukce elipsy. Jak název napovídá, tato konstrukce je založena na pohybu proužku papíru.

Tato metoda má dvě možné proužkové konstrukce, součtovou a rozdílovou. Úsečka PQ , jejíž délka je $a + b$, se při součtové konstrukci pohybuje po dvou na sebe kolmých přímkách. Bod X dělí úsečku PQ v poměru $a : b$. Tento bod opisuje elipsu o poloosách a, b .

Úsečka PQ , jejíž délka je $a - b$, se při rozdílové konstrukci pohybuje po dvou na sebe kolmých přímkách. Bod X je od P vzdálen b a od Q a . Tento bod opisuje elipsu o poloosách a, b .



Obrázek 10: Součtová a rozdílová konstrukce elipsy

Toto tvrzení lze snadno dokázat. Předpokládejme, že body mají tyto souřadnice $P[p,0]$, $Q[0,q]$, $X[x,y]$.

Podle Pythagorovi věty

$$(a + b)^2 = p^2 + q^2$$

Z podobnosti trojúhelníku platí

$$\frac{x}{a} = \frac{p}{a + b}, \quad \frac{y}{b} = \frac{q}{a + b}$$

Pokud dosadíme do Pythagorovi věty, dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{p^2}{(a + b)^2} + \frac{q^2}{(a + b)^2} = \frac{p^2 + q^2}{(a + b)^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)^2} = 1$$

Odtud je zřejmé, že se jedná o rovnici elipsy a bod X je jejím bodem - pohybuje se po ní. Obdobně by se provedl důkaz pro rozdílovou konstrukci elipsy.

3.1.5 Zahradnická konstrukce elipsy



Obrázek 11: Zahradnická konstrukce

Elipsa se běžně používá v klasické nebo také zahradnické architektuře. Při úpravě zahradních prostorů, například pro vytvoření zajímavé skalky se využívá tzv. zahradnické konstrukce elipsy.

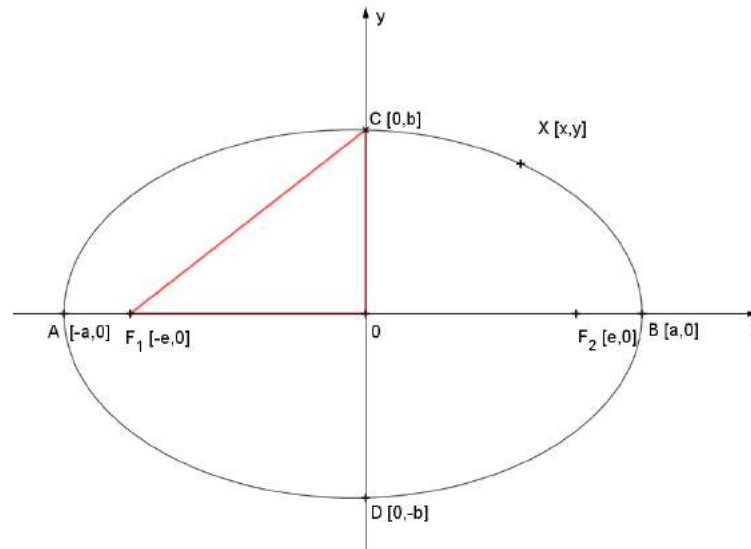
Tato metoda konstrukce je velmi snadná, protože využívá pouze definici elipsy. Upevníme-li dva kolíky od sebe libovolně vzdálené a mezi tyto kolíky natáhneme provázek delší než vzdálenost kolíků, tak aby byl stále napnutý, potom při pohybu hrotu opisujeme elipsu.

3.1.6 Analytické vyjádření

Samozřejmě, jako každý rovinný útvar, je možné elipsu vyjádřit analyticky.

Rovnice pro elipsu zní

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Obrázek 12: Obecná rovnice elipsy - grafické znázornění

Důkaz je velice jednoduchý. Budeme využívat vlastností, které jsme si definovali výše. První z nich plyne z definice elipsy

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a \quad (1)$$

Dále si zdefinujeme v kartézské soustavě souřadnic střed $S[0,0]$, ohniska $F_1[-e,0]$ a $F_2[e,0]$ a vrcholy $A[-a,0]$, $B[a,0]$, $C[0,b]$, $D[0,-b]$. Pokud na úsečku XF_1 budeme nahlížet jako na vektor $\overrightarrow{XF_1}$, můžeme zápis pro velikost úsečky nahradit zápisem pro vektor. To samé platí pro úsečku XF_2 . Do rovnice (1) dosadíme velikosti $\overrightarrow{XF_1}$ a $\overrightarrow{XF_2}$ a dostáváme rovnici

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \quad (2)$$

Poté pomocí ekvivalentních úprav rovnici (2) upravíme.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ (x+e)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 \\ x^2 + 2xe + e^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xe + e^2 + y^2 \\ 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xe \\ a^2(x^2 - 2xe + e^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 \\ a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 \end{aligned}$$

Jak je již výše zmíněno, elipsa obsahuje tzv. charakteristický trojúhelník. V tomto případě se jedná o trojúhelník F_1CO . Tento trojúhelník je pravoúhlý. Jeho odvěsny jsou strany b , e a přeponou je strana a . V dokazování využijeme Pythagorovi věty

$$b^2 = a^2 - e^2 \tag{3}$$

Rovnici upravíme tak, abychom mohli po vytknutí společných neznámých dosadit rovnici (3)

$$\begin{aligned} a^2x^2 + a^2y^2 - x^2e^2 &= a^4 - a^2e^2 \\ x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 &= a^2 \cdot (a^2 - e^2) \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme vztah,

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

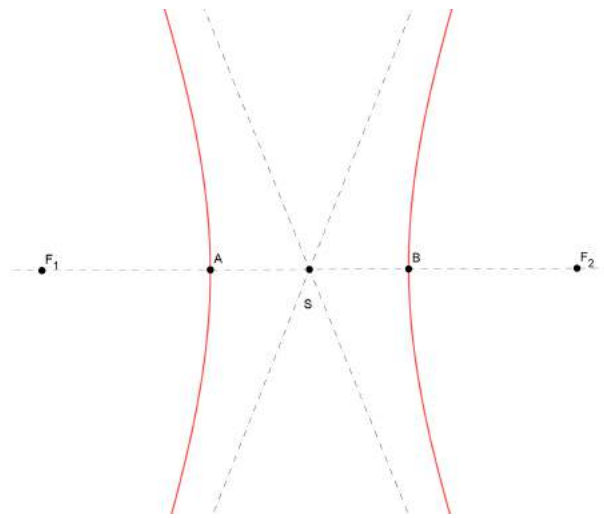
který jednoduše upravíme. Výsledkem je právě naše obecná rovnice elipsy.

$$\begin{aligned} \frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

3.2 Hyperbola

3.2.1 Definice

Hyperbola je množina bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od daných bodů F_1, F_2 je konstantní. [1]



Obrázek 13: Hyperbola

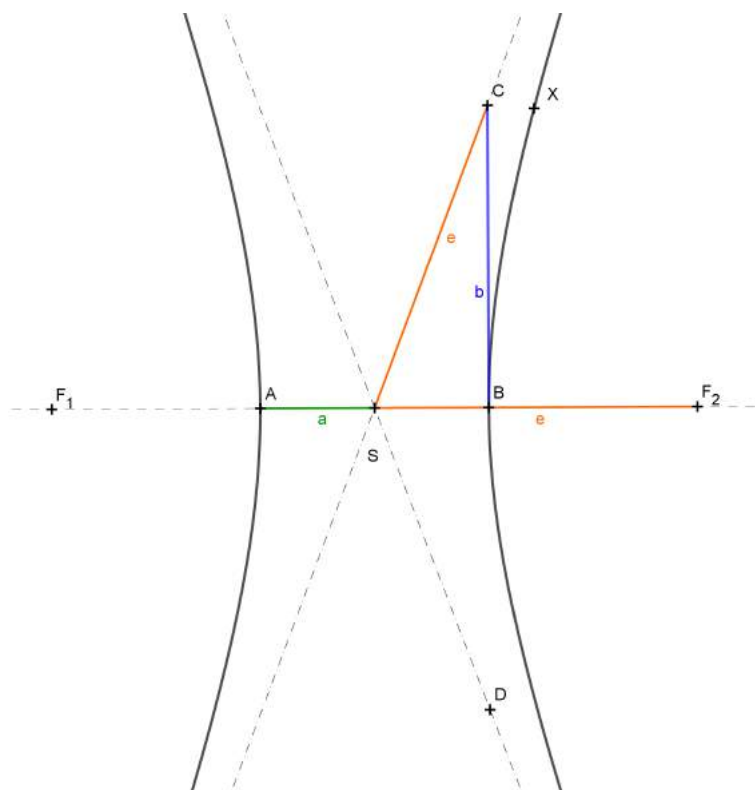
Body A, B nazýváme hlavními vrcholy a body C, D vedlejšími vrcholy hyperboly. Body F_1, F_2 jsou ohniska hyperboly a bod S nazýváme středem hyperboly. Úsečka $|F_1F_2|$ je hlavní osou hyperboly.

3.2.2 Vlastnosti

$|SA| = |SB| = a$, kde a nazýváme hlavní osou. $|BC| = |BD| = b$, kde b nazýváme vedlejší osou. $|XF_1|, |XF_2|$ nazýváme průvodiči hyperboly a platí pro ně tato rovnost:

$$|XF_1| - |XF_2| = a$$

Pravoúhlý trojúhelník BCS nazýváme charakteristickým trojúhelníkem hyperboly a pro jeho strany platí vztah $e^2 = a^2 + b^2$, kde e je excentricita neboli výstřednost hyperboly. Excentricita je vzdálenost ohnisek od středu hyperboly.



Obrázek 14: Vlastnosti hyperboly

Přímky a_{s1} , a_{s2} nazýváme asymptotami hyperboly. Asymptoty procházejí středem hyperboly S a s hlavní osou svírají úhel φ , pro který platí $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{b}{a}$. Pokud by $e = a \cdot \sqrt{2}$, tak asymptoty této hyperboly jsou na sebe vzájemně kolmé a hyperbola se nazývá rovnosá.

3.2.3 Bodová konstrukce hyperboly

Rozbor

Na úsečce opačné k F_1F_2 si zvolíme pomocný bod R . Sestrojíme kruhový oblouk k_1 o poloměru $r_1 = |AR|$ a k_2 o poloměru $r_2 = |BR|$ se středy v ohniscích. V průsečících oblouků dostáváme body hyperboly K, L, M, N . Z vlastností hy-

perboly vyplývá, že pro tyto body platí, že

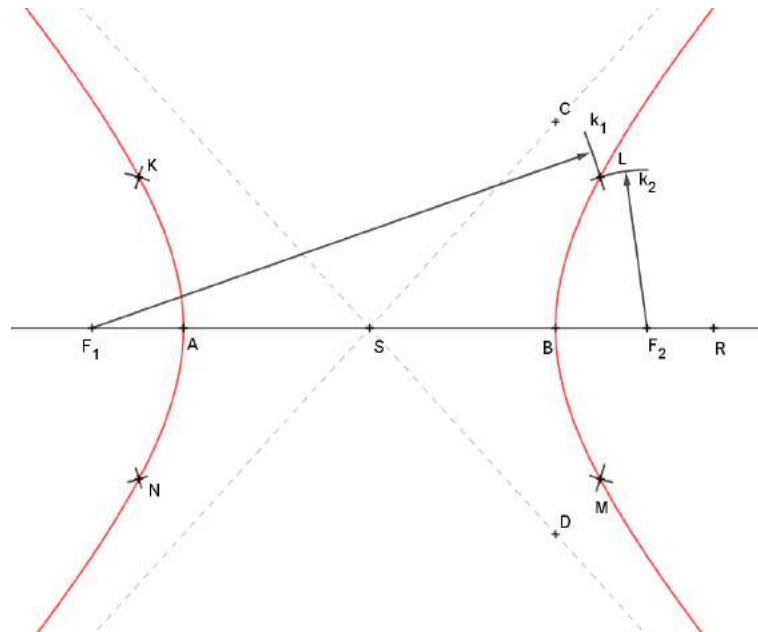
$$|KF_1| - |KF_2| = |AR| - |BR| = |AB| = 2a$$

$$|LF_1| - |LF_2| = |AR| - |BR| = |AB| = 2a$$

$$|MF_1| - |MF_2| = |AR| - |BR| = |AB| = 2a$$

$$|NF_1| - |NF_2| = |AR| - |BR| = |AB| = 2a$$

Rozdíl průvodičů je pokaždé roven $2a$. To znamená, že tyto body náležejí hyperbole s vrcholy A, B.



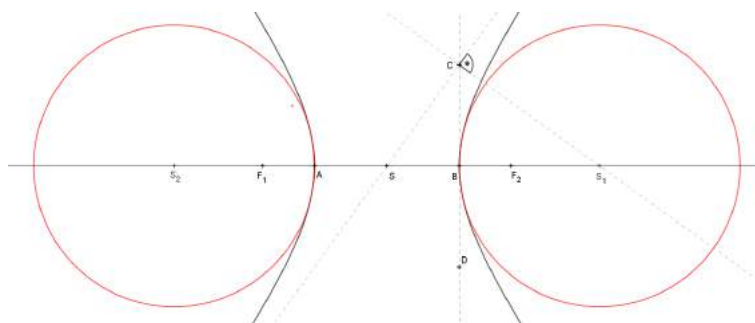
Obrázek 15: Konstrukce hyperboly

Postup

- 1) R ; R leží vně F_1F_2
- 2) k_1 ; $k_1(F_1, |BR|)$
- 3) k_2 ; $k_2(F_2, |AR|)$
- 4) L ; $L \in k_1 \cap k_2$

Je zcela zřejmé, že hyperbolu stejně jako elipsu z pouhých čtyř bodů nese-
strojíme. Je nutné tento postup několikrát opakovat, tedy zvolit další pomocné
body R_2, R_3 atd. Pokud bychom chtěli co nejpřesnější tvar hyperboly, museli
bychom použít mnoho těchto pomocných bodů. Při počítačovém zpracování by
to problém nebyl, ale při klasickém rýsování by výsledek byl velmi nepřehledný.
Proto stejně jako u elipsy v okolí hlavních vrcholů nahradíme tvar hyperboly
pomocí oskulačních kružnic.

Jedním z vrcholů vedeme kolmici na přímku F_1F_2 . Ze středu S sestrojíme
kružnici m . Průnik kolmice a kružnice jsou vedlejší vrcholy C, D . Bodem C ve-
deme kolmici na přímku SC . Průsečík této kolmice s hlavní osou označíme S_1 .
Pomocí středové souměrnosti podle středu S dostaneme S_2 . Tyto průsečíky
jsou středy oskulačních kružnic.

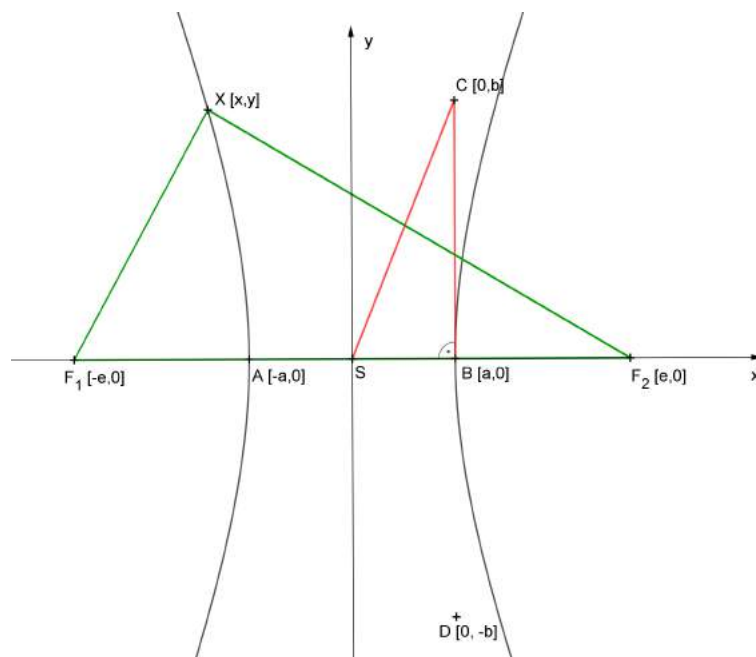


Obrázek 16: Oskulační kružnice

3.2.4 Analytické vyjádření

Stejně jako elipsu i hyperbolu můžeme vyjádřit analyticky. Rovnice hyperboly zní

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Obrázek 17: Obecná rovnice hyperboly - grafické znázornění

Důkaz je obdobný jako u elipsy. Budeme opět vycházet z definice, kde

$$|XF_1| - |XF_2| = 2a.$$

Pokud si střed, ohniska i vrcholové body zadefinujeme v kartézské soustavě souřadnic se souřadnicemi podle obrázku (17), tzn. střed $S[0,0]$, ohniska $F_1[-e,0]$ a $F_2[e,0]$ a vrcholy $A[-a,0]$, $B[a,0]$, $C[0,b]$, $D[0,-b]$. Na úsečky XF_1 , XF_2 budeme nahlížet jako na vektory $\overrightarrow{XF_1}$, $\overrightarrow{XF_2}$ dostaneme vztah

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \quad (4)$$

Pomocí ekvivalentních úprav rovnici (4) upravíme

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+e)^2+y^2} &= 2a + \sqrt{(x-e)^2+y^2} \\ (x+e)^2+y^2 &= 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2 \\ x^2+2xe+e^2+y^2 &= 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2+y^2} + x^2-2xe+e^2+y^2 \\ 4xe-4a^2 &= 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2+y^2} \\ x^2e^2-2a^2xe+a^4 &= a^2(x^2-2xe+e^2+y^2) \\ x^2e^2-2a^2xe+a^4 &= a^2x^2-2a^2xe+a^2e^2+a^2y^2\end{aligned}$$

Hyperbola stejně jako elipsa obsahuje charakteristický trojúhelník. V tomto případě se jedná o trojúhelník BSC . Tento trojúhelník je pravoúhlý. Jeho odvěsny jsou strany a , b a přeponou je strana e . V dokazování využijeme opět Pythagorovi věty

$$b^2 = e^2 - a^2 \tag{5}$$

Výraz upravíme tak, abychom mohli dosadit rovnici(5)

$$\begin{aligned}x^2e^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2e^2 - a^4 \\ x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2 \cdot (e^2 - a^2)\end{aligned}$$

Dostáváme vztah

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

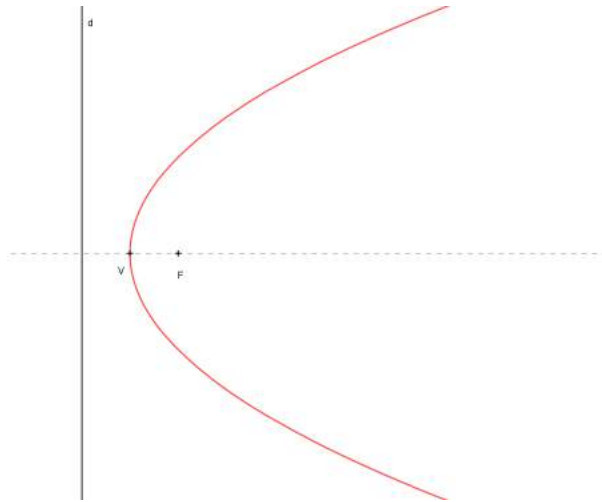
který po jednoduché úpravě dokáže tvrzení obecné rovnice hyperboly.

$$\begin{aligned}\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

3.3 Parabola

3.3.1 Definice

Parabola je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu F a dané přímky d stejnou vzdálenost. [1]



Obrázek 18: Parabola

Přímku d nazýváme řídicí přímkou paraboly. Bod V nazýváme vrcholem a bod F nazýváme ohniskem paraboly. Úsečka $|VF|$ je hlavní osou paraboly.

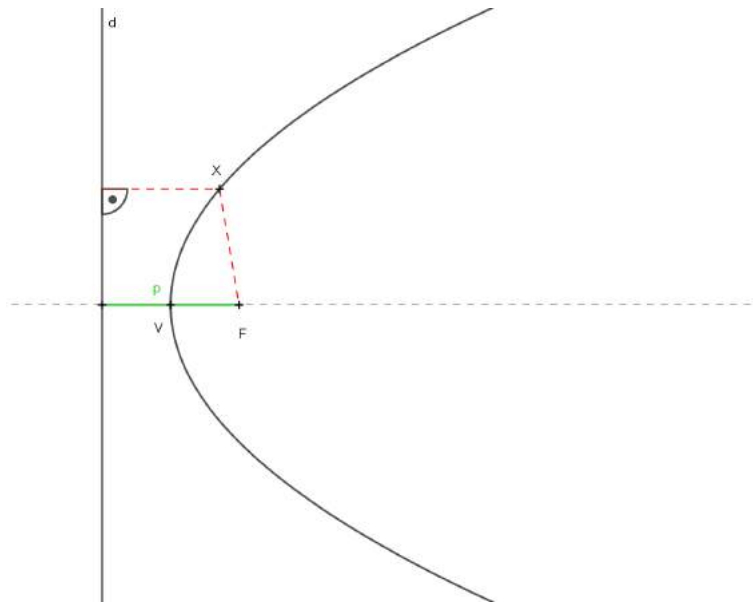
3.3.2 Vlastnosti

Průvodiče bodu X jsou spojnice s ohniskem F a libovolným bodem X paraboly a přímka kolmá na řídicí přímku procházející bodem X . Průvodičem bodu X rozumíme tedy vzdálenost $|XF|$ případně $|Xd|$. Z definice vyplývá, že

$$|XF| = |Xd|$$

Vzdálenost ohniska od řídicí přímky označujeme jako parametr p . U paraboly rozlišujeme vnitřní a vnější body. Bod Y nazveme vnějším bodem paraboly, jestliže

$$|YF| > |Yd|.$$



Obrázek 19: Vlastnosti paraboly

Vnitřním bodem nazveme Y , platí-li

$$|YF| < |Yd|.$$

3.3.3 Bodová konstrukce paraboly

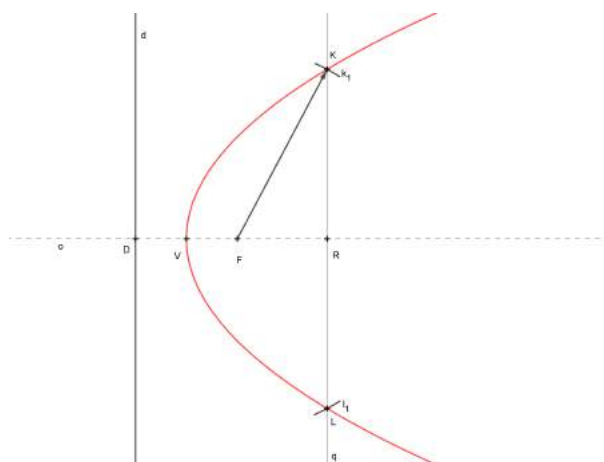
Rozbor

Na ose o si zvolíme pomocný bod R . Tímto bodem vedeme kolmici. Z ohniska F sestrojíme kruhový oblouk k_1 a l_1 o poloměru $r = |DR|$. V průsečících oblouků dostáváme body paraboly K, L . Z vlastností paraboly vyplývá, že pro tyto body platí, že

$$|Kd| = |FK| = |DR|$$

$$|Ld| = |FL| = |DR|$$

To znamená, že tyto body náleží parabole s vrcholem V .



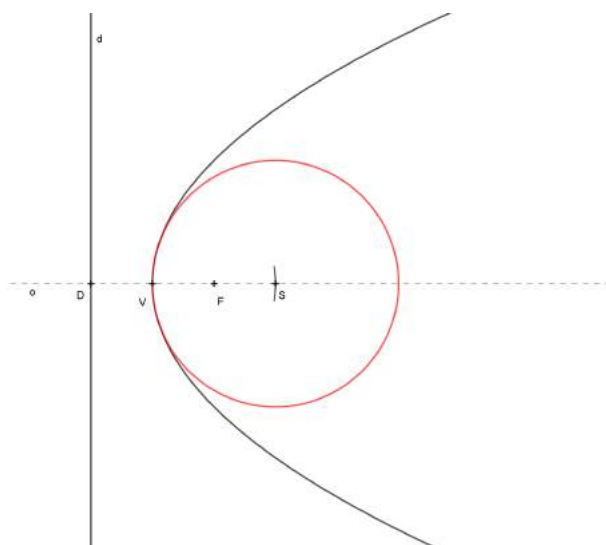
Obrázek 20: Konstrukce paraboly

Postup

- 1) $R; R \in o$
- 2) $k_1; k_1(F, |DR|)$
- 3) $K; K \in k_1 \cap q$
- 4) $l_1; l_1(F, |DR|)$
- 5) $L; L \in l_1 \cap q$

Parabolu jako předešlé křivky není možné sestrojít jen ze dvou bodů. Proto musíme zvolit několik dalších libovolných bodů R_2, R_3 atd. Přesného tvaru při rýsování docílíme pomocí oskulační kružnice.

Z vrcholu V sestrojíme kružnici s poloměrem $|DF|$. Tím dostaneme bod S , který je středem oskulační kružnice.

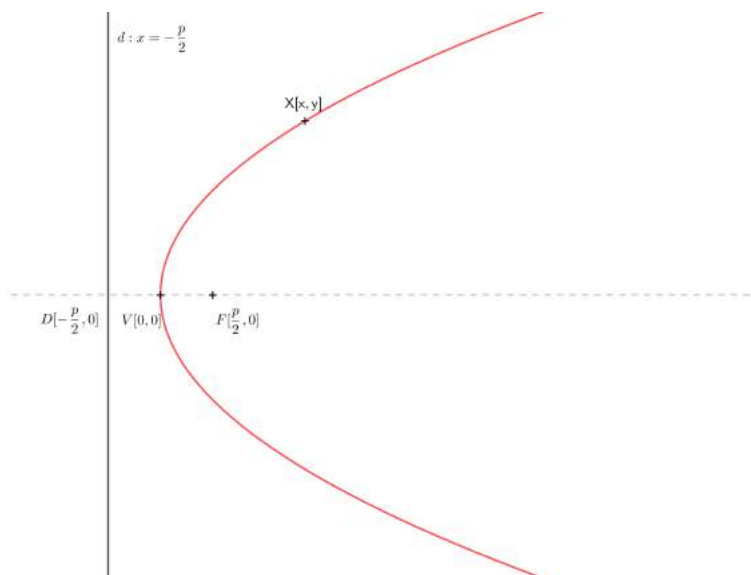


Obrázek 21: Oskulační kružnice

3.3.4 Analytické vyjádření

Je zcela zřejmé, že parabolu můžeme stejně jako předchozí křivky vyjádřit analyticky. Rovnice paraboly je

$$y^2 = 2px$$



Obrázek 22: Obecná rovnice paraboly - grafické znázornění

Důkaz je opět velice jednoduchý. Využijeme vlastností definovaných výše.

První z nich plyne z definice elipsy

$$|XF| = |Xd| \quad (6)$$

Dále si zdefinujeme v kartézské soustavě souřadnic ohnisko $F[\frac{p}{2}, 0]$, vrchol $V[0, 0]$, bod $X[x, y]$, bod $D[-\frac{p}{2}, 0]$ a rovnici řídící přímky $d : x = -\frac{p}{2}$. Pokud na úsečku XF nahlížíme jako na vektor \overrightarrow{XF} , můžeme zápis pro velikost úsečky nahradit zápisem pro vektor. Do rovnice (6) dosadíme velikosti \overrightarrow{XF} a dostáváme rovnici

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}| \quad (7)$$

Poté pomocí ekvivalentních úprav rovnici (7) upravíme.

$$\begin{aligned} (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ x^2 - px + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

Po upravení výrazu dostáváme naší obecnou rovnici paraboly.

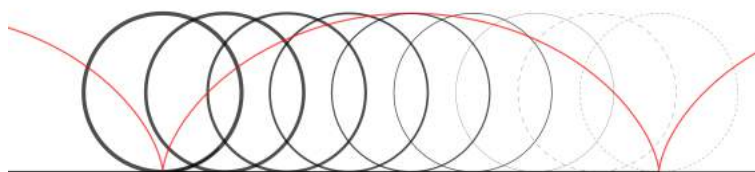
$$y^2 = 2px$$

4 Další algebraické křivky

4.1 Cykloida

4.1.1 Definice

Cykloida je transcendentní cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se kutálí po přímce. [2]



Obrázek 23: Cykloida

4.1.2 Vlastnosti

Cykloida má tvar nekonečně se opakujících oblouků.

4.1.3 Parametrické vyjádření

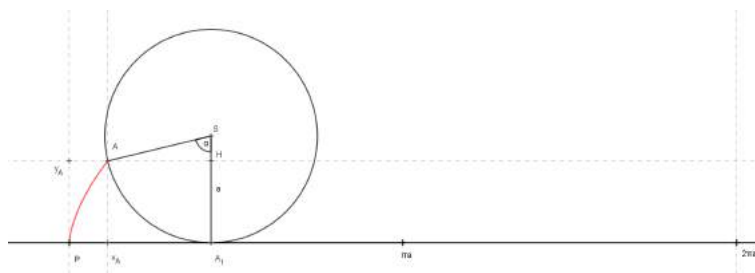
Cykloidu na rozdíl od kuželoseček vyjadřujeme pomocí parametrické rovnice

$$x = r \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

$$y = r \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

Tato rovnice se dá odvodit pro všechny čtyři kvadranty. Pro názornost ukáží odvození pomocí prvního kvadrantu, tzn.

$$\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



Obrázek 24: Parametrické vyjádření

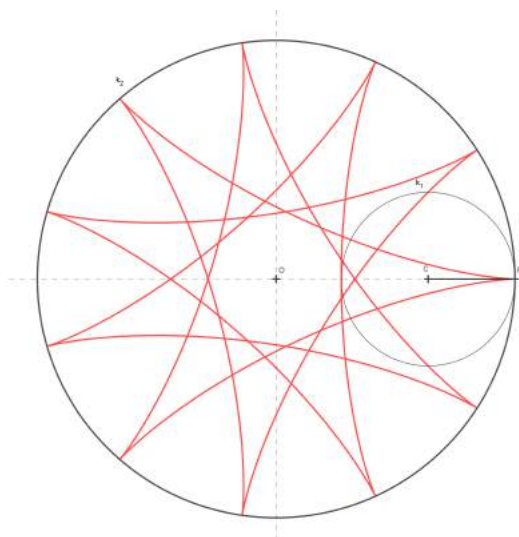
$$x_A = |PA_1| - |AH| = r \cdot (\alpha) - r \cdot \sin(\alpha) = r \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$$

$$y_A = |HA_1| = r - |SH| = r - r \cdot (\cos(\alpha)) = r \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

4.2 Hypocykloidy

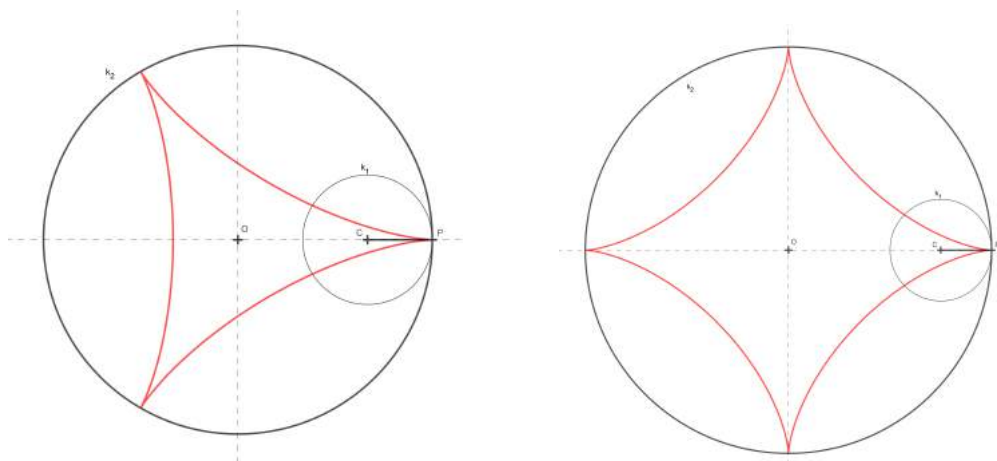
4.2.1 Definice

Hypocykloida je rovinná křivka opisovaná bodem pohyblivé kružnice k_1 , která se beze skluzu kutálí zevnitř po větší kružnici k_2 . [3]



Obrázek 25: Hypocykloida

Mezi zvláštní případy hypocykloidy patří Steinerova hypocykloida (vlevo) a asteroida (vpravo).

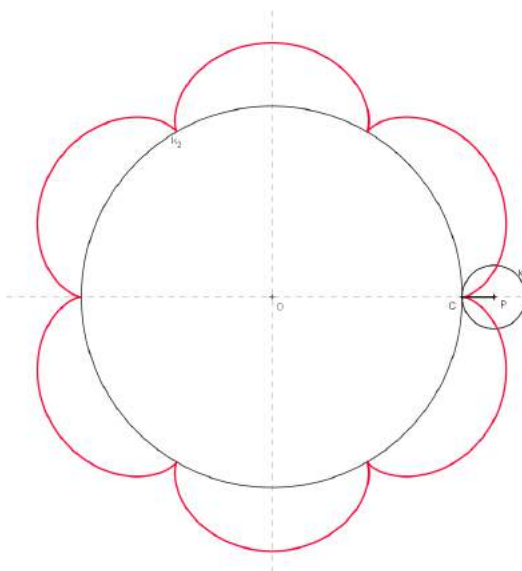


Obrázek 26: Zvláštní případy hypocykloidy

4.3 Epicykloidy

4.3.1 Definice

Epicykloida je rovinná křivka vzniklá jako trasa pevně zvoleného bodu menší kružnice k_1 , která se kutálí po vnější straně druhé, větší kružnice k_2 .

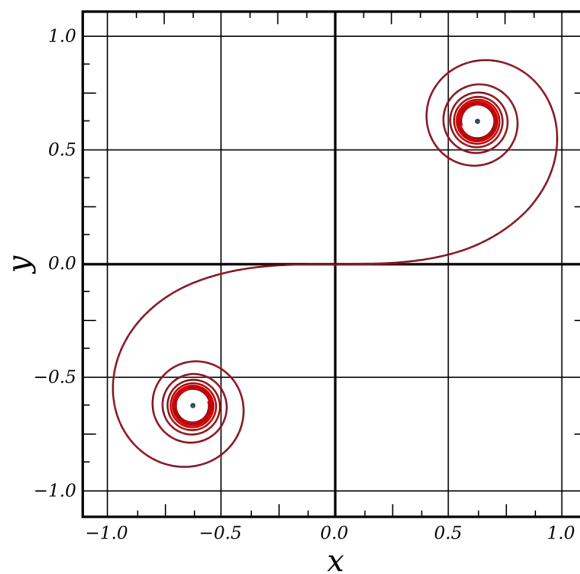


Obrázek 27: Epicykloida

4.4 Klotoida

4.4.1 Definice

Klotoida, také Cornuova nebo Eulerova spirála, je křivka, u které je křivost v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku. [4]



Obrázek 28: Klotoida [1]

5 Kuželosečky okolo nás

5.1 Úvod

V této části, jak napovídá název, se budu zabývat kuželosečkami, které se vyskytují okolo nás. Kuželosečky jsou jedním ze základních pilířů architektury. Pokud je člověk pozorný, lze je najít prakticky všude.

Budu se zabývat identifikací křivek, jimž předchází sběr fotografií a obrázků. Téměř všechny obrázky jsou převzaty z internetu.

Tyto fotografie jsou následně zpracovány v dynamickém programu GeoGebra. To z toho důvodu, aby byly kuželosečky lépe poznatelné. Pro lepší představu, si dovolím citovat z manuálu, co je program GeoGebra.

„GeoGebra je dynamický matematický software pro všechny úrovně vzdělávání, který spojuje geometrii, algebru, tabulkový procesor, grafy, statistiku a analýzu do jednoho snadno použitelného balíčku. GeoGebra je rychle rostoucí komunita milionů uživatelů žijících prakticky ve všech zemích světa. GeoGebra se stala špičkovým poskytovatelem dynamického matematického software podporujícího vědu, technologii, inženýrství a matematiku.“ [5]

GeoGebra je volně dostupný program, který má sloužit především učitelům a studentům. Pomocí funkce „Kuželosečka daná pěti body“ je možné na fotografii vykreslit kuželosečku, která je v ní ukryta.

5.2 Využití kuželoseček

Na obrázcích níže v této kapitole se budu snažit co nejlépe vykreslit kuželosečky, jež se na obrázcích vyskytují. K tomu, abychom mohli kuželosečku ideálně vykreslit použijeme, v již zmíněném programu Geogebra, tento postup. Nejprve obrázek musíme zkopírovat do programu. V nabídce „Úpravy“ využijeme funkce „Vložit obrázek z“. Poté využijeme již zmíněné funkce „Kuželosečka daná pěti body“. Pokud rovnoměrně umístíme pět bodů kuželosečky, program nám vykreslí kuželosečku.

Výhodou tohoto programu je to, že je vybaven funkcí posouvání bodů po nákresně, takže je možné po vyobrazení křivky s celou křivkou ještě hýbat. Tím docílíme, že kuželosečka, kterou jsme potřebovali zobrazit, má ideální tvar a pouhým okem není možné vidět pokud křivka není dokonale překryta.

Samozřejmě funkce „Kuželosečka daná pěti body“ není jedinou možností, jak kuželosečku vykreslit. Lze to i pomocí odhadnutí rovnice kuželosečky.

5.2.1 Elipsy

První fotografie je pořízena v cukrárně a kavárně U Růženky, ve které pracuji. Jedná se o oblíbený zákusek, likérovou špičku, ve formě dortíku.



Obrázek 29: Likérová špička

Jak je z obrázku zřetelné, zákusek je ve tvaru elipsy. Zákusky vytváříme ve formách, které mají dokonale eliptický tvar. V GeoGebře pomocí funkce „Kuželosečka daná pěti body“ jsem docílila toho, že zákusek orámovala kuželosečka vytvořená programem.



Obrázek 30: Likérová špička tvořená pěti body

Takto vytvořená kuželosečka má velmi složitou rovnici. Rovnici jsme zjistili, v programu GeoGebra, v „Algebraickém okně“. Rovnice kuželosečky z obrázku (30) zní

$$-0,45x^2 + 0,05xy - 1,37y^2 - 0,15x - 1,13y = 0. \quad (8)$$

I když je zřejmé z předchozích obrázků, že se jedná o elipsu, můžeme si to ověřit ještě pomocí velkého a malého determinantu. Z hodin geometrie víme, že transformační rovnice kuželosečky je

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Pomocí trojúhelníkového pravidla vypočítáme velký determinant matice.

Matici sestrojíme z rovnice (8).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,45 & 0,025 & -0,075 \\ 0,025 & -1,37 & -0,565 \\ -0,075 & -0,565 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(0 + 0,00106 + 0,00106) - (-0,0077 - 0,144) = 0,00212 + 0,1517 = 0,15382$$

Pokud se podíváme na výsledek velkého determinantu, zjistíme, že se nerovná nule, tzn. kuželosečka je regulární.

$$\Delta \neq 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,45 & 0,025 \\ 0,025 & -1,37 \end{vmatrix} = 0,6165 - 0,000625 = 0,615875$$

Malý determinant je větší jak nula, z toho usuzujeme, že kuželosečka je středová a je eliptického tvaru.

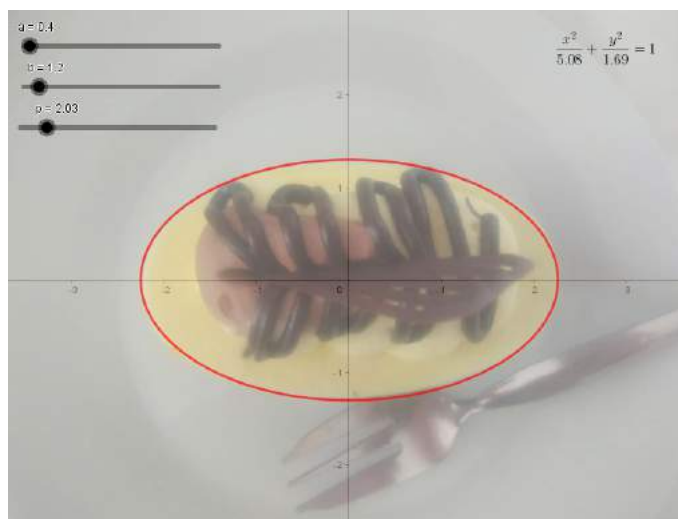
$$\delta > 0$$

Naše kuželosečka je tedy opravdu elipsa.

Jak již jsem zmiňovala, lze kuželosečku vytvořit i odhadnutím rovnice. Funkci „Vstup“ na dolní liště programu využijeme k vepsání rovnice

$$ax^2 + by^2 = p.$$

Hodnoty a, b, p vytvoříme pomocí funkce „Posuvník“, to z toho důvodu, abych si ušetřila práci s formováním kuželosečky, která bude co nejvíce vyhovovat předloze obrázku. Abych docílila co největší přesnosti, nastavila jsem, pro všechny hodnoty a, b, p, krok posuvníku na jednu setinu.



Obrázek 31: Likérová špička tvořená rovnicí

Červeně znázorněná kuželosečka na obrázku (31) byla programem vykreslena přímo po vepsání rovnice. Střed kuželosečky je v bodě $[0,0]$, tedy v počátku. Rovnice této kuželosečky je

$$\frac{x^2}{5,08} + \frac{y^2}{1,69} = 1. \quad (9)$$

Na obrázku (30) a (31) není pouhým okem vidět rozdílnost křivky, ale na jejich rovnicích (8) a (9) zřetelný rozdíl je.

Na tomto obrázku je vidět, že pokud dobře ukrojíme šišku salámu, její uříznutý kus bude mít tvar elipsy. Takto se dá nakrájet bageta, rohlík, salátová okurka nebo třeba také železná trubka. Shrnu-li poslední větu, vše co má válcový tvar, se dá ukrojit, rozříznout do tvaru elipsy.



Obrázek 32: Salám nakrájený do tvaru elipsy

Na dalších obrázcích jsou vidět různé architektonické stavby ve tvaru elipsy.



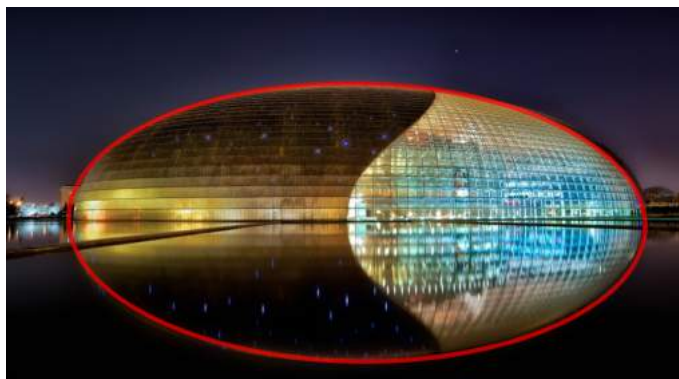
Obrázek 33: Centrála Mauritius Commercial Bank [2]



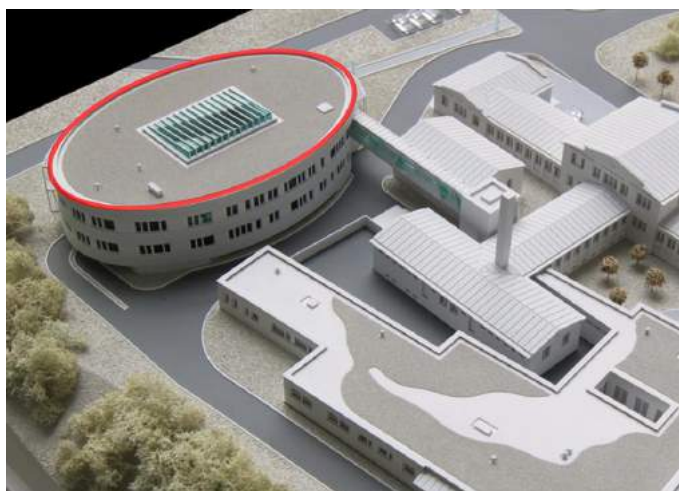
Obrázek 34: Plánovaná stavba fotbalového stadionu v Brně [3]



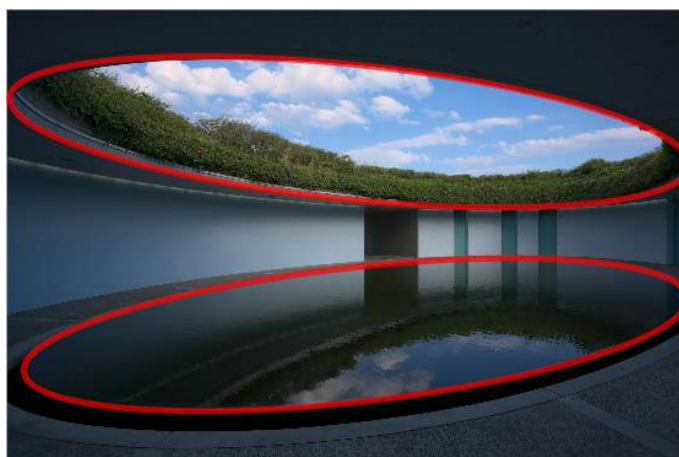
Obrázek 35: Římské koloseum [4]



Obrázek 36: Národní centrum interpretačního umění v Číně [5]



Obrázek 37: Pavilon Z7 Institutu Klinické a Experimentální Medicíny [6]



Obrázek 38: Japonský umělecký ostrov Naoshima [7]

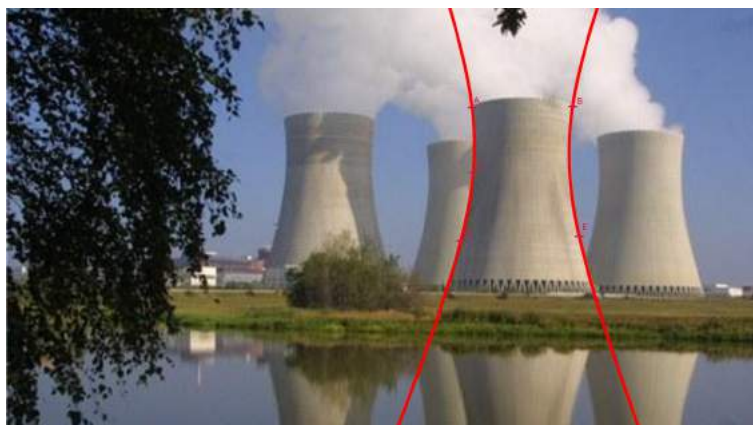
5.2.2 Hyperboly

Dalším z obrázků je Jaderná elektrárna Temelín. Její chladicí věže jsou typickým příkladem využití hyperboly. Chladicí věž je zařízení, instalované zpravidla v tepelných elektrárnách, ale i v jiných průmyslových komplexech (hutě, chemičky a rafinérie). Slouží k ochlazování použité chladicí vody nebo jiné kapaliny na teplotu až 23°C , pro nižší teploty je pak doporučován jiný způsob chlazení. Zpravidla se jedná o velké komíny tvaru rotačního hyperboloidu, které mohou mít až 100 metrů v průměru. Typické jsou pro jaderné elektrárny, protože ty pracují s menší účinností než tepelné a vyrábějí v dané lokalitě víc energie. [6]



Obrázek 39: Chladicí věže elektrárny Temelín [8]

Nejjednodušším způsobem v tomto případě bude definovat kuželosečku pomocí funkce „Kuželosečka daná pěti body“. Výslednou kuželosečkou je hyperbola, jak je možné vidět na obrázku (40).



Obrázek 40: Chladicí věže elektrárny Temelín tvořeny pomocí pěti bodů

Rovnice kuželosečky na obrázku (40) je

$$-50,44x^2 + 1,28xy + 8,04y^2 + 1443,65x + 5,98y = 10268,84.$$

Vypočítáme si velký a následně malý determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -50,44 & 0,64 & 721,825 \\ 0,64 & 8,04 & 2,99 \\ 721,825 & 2,99 & -10268,84 \end{vmatrix} = -17271,546$$

$$\delta = \begin{vmatrix} -50,44 & 0,64 \\ 0,64 & 8,04 \end{vmatrix} = -405,947$$

$$\Delta \neq 0$$

$$\delta < 0$$

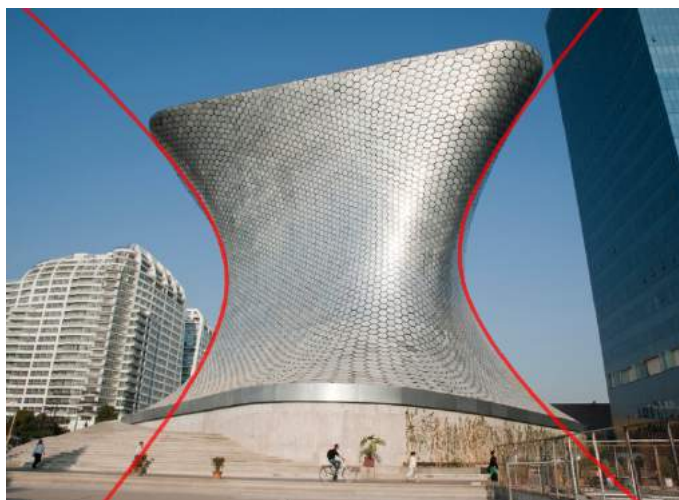
Velký determinant se nerovná nule, takže naše kuželosečka je regulární. Malý determinant je menší jak nula, z toho usuzujeme, že kuželosečka je středová a je hyperbolického tvaru.

Naše kuželosečka je tedy opravdu hyperbolou.

Na dalších obrázcích jsou vidět různé architektonické stavby ve tvaru hyperboly.



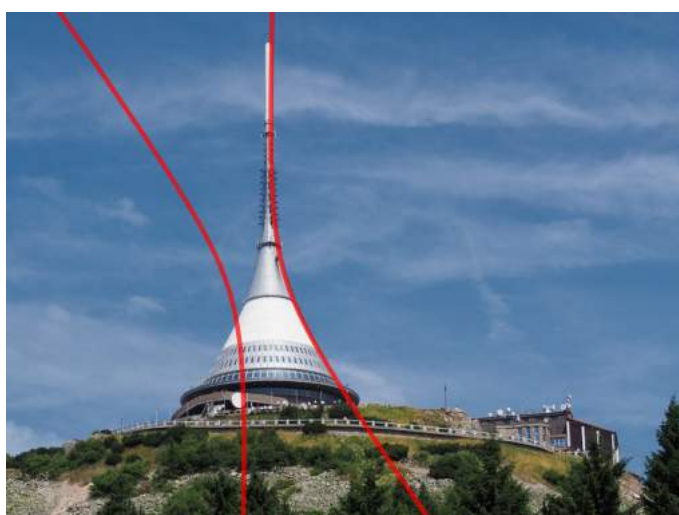
Obrázek 41: Katedrála Zjevení Panny Marie v Brazílii [9]



Obrázek 42: Soumaya Muzeum v Mexico City [10]



Obrázek 43: Vinarium Tower ve Slovinsku [11]



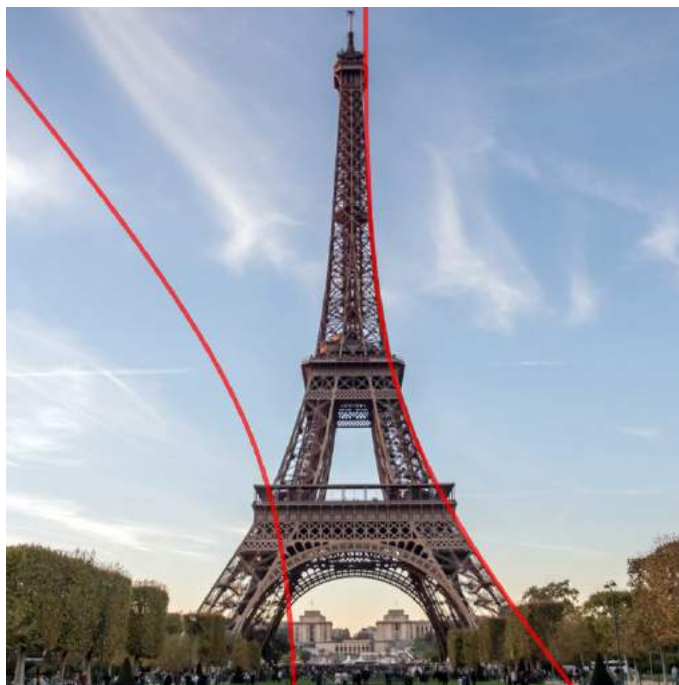
Obrázek 44: Rozhledna Ještěd proložena částí hyperboly [12]



Obrázek 45: Vodárenská věž Möglingen v Německu [13]



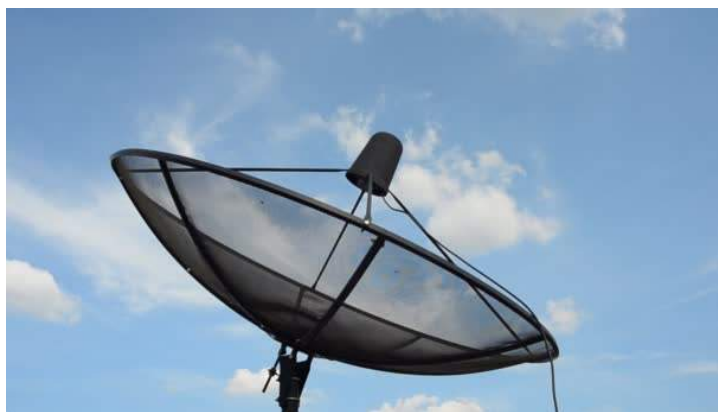
Obrázek 46: Přístavní věž v Kobe, Japonsko [14]



Obrázek 47: Eiffelova věž proložena částí hyperboly [15]

5.2.3 Paraboly

Ve třetím příkladu se budeme zabývat parabolickou anténou. Parabolická anténa odráží přijímaný signál do svého ohniska, ve kterém je buď přijímač – anténa a vnější jednotka s nízkošumovým zesilovačem (LNB), nebo jen anténa. Čím je větší plocha paraboly, tím silnější signál bude přijímačem v jejím ohnisku detekován. Má tedy větší zisk, roste tím ale její směrovost a tím i nároky na přesné nastavení. Vhodná volba velikosti antény závisí na EIRP a energetických zónách (vyzařovací diagram satelitu, který chceme přijímat). [7]



Obrázek 48: Parabolická anténa [16]

Kuželosečku budeme definovat již známou funkcí „Kuželosečka daná pěti body“. Kuželosečka, jež se nám zobrazí má tvar paraboly.

Abychom měli stoprocentní jistotu, že je anténa opravdu parabolou, ověříme si to pomocí funkce „vstup“. Obrázek antény natočíme tak, aby její střed byl v počátku. V kapitole 3.3.4 jsme si definovali rovnici paraboly. Pro lepší názornost, ale rovnici převedeme na inverzní funkci, tzn. otočíme ji v kartézské soustavě souřadnic směrem vzhůru. Tuto rovnici

$$x^2 = 2py$$

následně zapíšeme do funkce „Vstup“.



Obrázek 49: Parabolická anténa tvořena pěti body

Pro hodnotu p jsem nastavila posuvník s krokem jedna tisícina. Posuvník opět vytvářím proto, aby kuželosečka byla co nejvíce identická s obrázkem. Po nějaké chvíli se nám podaří vytvořit co nejvíce shodný obraz.



Obrázek 50: Parabolická anténa tvořena funkcí vstup

Tato kuželosečka je tedy opravdu parabolou, která má rovnici

$$y = 0,12x^2.$$

Využití paraboly, na různých objektech, je vidět na obrázcích níže.



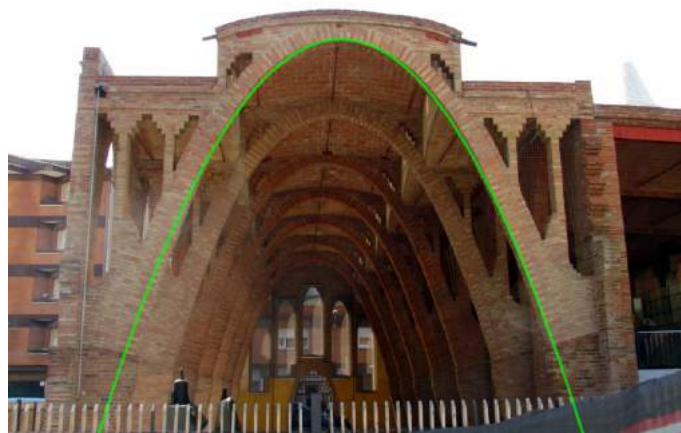
Obrázek 51: Gateway Arch, St. Louis Missouri [17]



Obrázek 52: Parabolický proud vody ve fontáně [18]



Obrázek 53: Logo McDonalds [19]



Obrázek 54: Parabolické oblouky, Celler de Sant Cugat [20]



Obrázek 55: Parabolický tvar banánu [21]



Obrázek 56: Parabolický skok delfína [22]



Obrázek 57: Náklon baterky na zeď

5.3 Využití křivek

5.3.1 Cykloidy

I když se objevují různé názory, zdá se že se jako první cykloidou roku 1599 nebo 1600 zabýval sám velký Galileo Galilei. Všiml si její krásy a navrhl ji jako tvar vhodný pro oblouky mostů. Nepodrobil ji důkladnějšímu matematickému zkoumání, to nechal až na svých následnících. Nejen během celého 17. století byla cykloida jednou z nejpopulárnějších, nejsledovanějších a nejzkoumanějších křivek. [8]



Obrázek 58: Písecký most [23]



Obrázek 59: Písecký most tvořený cykloidou

Na dalších obrázcích jsou patrné cykloidy v architektonických stavbách.



Obrázek 60: Využití cykloidy [24]

Další využití cykloidy si všiml Pascal. Točící se kola vozů a kočárů byly v 17. století častým obrazem ulic. Konce paprsků kol vykreslovali pro pozorné oko tisíce cykloid denně.



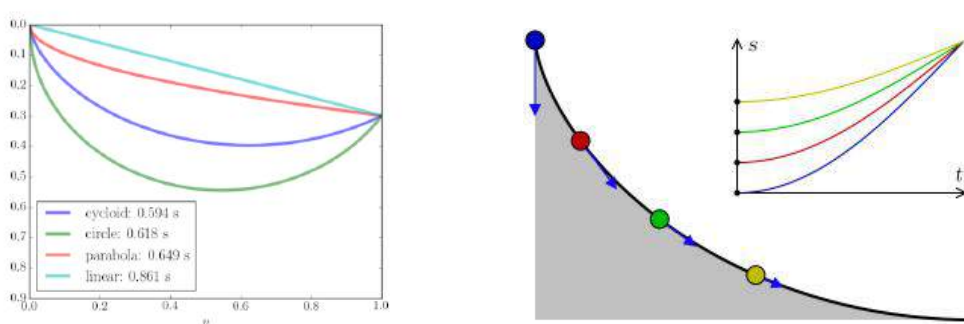
Obrázek 61: Koňské spřežení [25]

Nejzajímavější a nejdůležitější využití této fascinující křivky je brachistochrona a tautochrona.

Brachistochrona (z řeckého brachistos = nejkratší, chronos = čas), označovaná také jako křivka nejkratšího spádu, je křivka spojující dva body, po které se hmotný bod dostane z počátečního klidu v jednom bodě do druhého působením homogenního gravitačního pole za nejkratší dobu. [9]

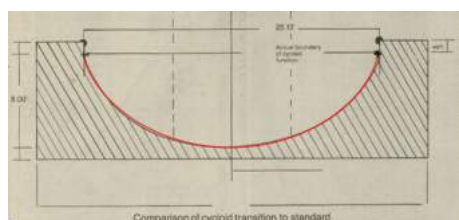
Tautochróna (z řeckého *tauto* = stejný, *chronos* = čas) je křivka spojující dva body, po které se objekt dostane z počátečního bodu do druhého, bez tření, v jednotné gravitaci za stejný čas. [10]

Na obrázku vlevo je názorně vidět, co vyplývá z definice brachistochrony. Pokud bychom do počátku položili kuličku dostala by se do požadované pozice nejrychleji pomocí cykloidy, nikoliv pomocí kruhové výseče, paraboly nebo přímky. Vpravo je naopak vidět co plyne z definice tautochrony.



Obrázek 62: Problém brachistochrony a tautochrony [26]

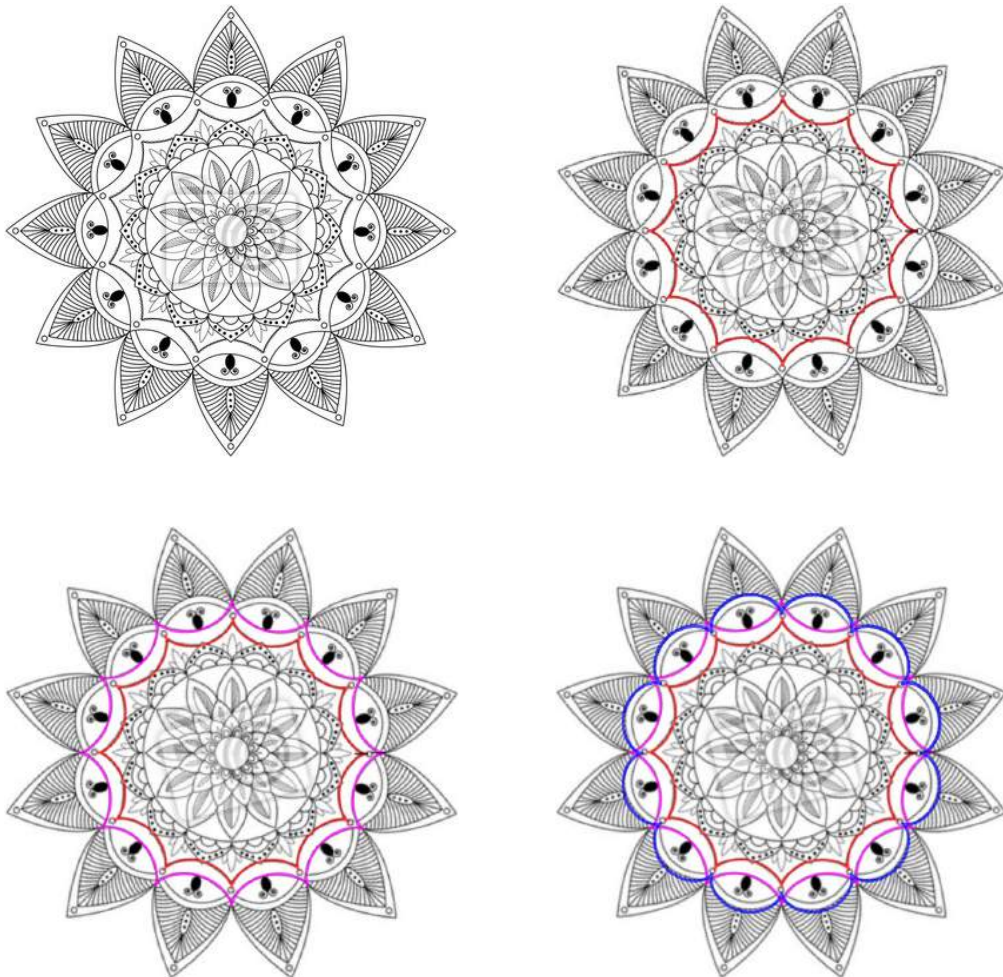
Tato zajímavá vlastnost se využívá například při tvorbě skokanských můstků nebo u-ramp. U skokanských můstků se využívá nejkratší spád, naopak u u-ramp se využívá vlastnost stejného času.



Obrázek 63: Využití brachistochrony a tautochrony [27]

5.3.2 Hypocykloidy a epicykloidy

Využití hypocykloidy a epicykloidy je například při tvoření mandal. Mandala znamená kruh nebo dokonce magický kruh. Ačkoli toto slovo pochází z východu, samotná mandala je nadkulturním symbolem jednoty a rovnováhy vyskytující se ve všech dobách, kulturách i náboženstvích. Mandaly jsou staré jako lidstvo samo, což dokazuje i fakt, že nejstarší obrazce tohoto druhu se vyskytují už v paleolitu. Mandaly se dají najít také v půdorysu staveb ze starého Egypta, Babylónu a Jávy. V moderních dějinách je mandala dle posvátné geometrie (semeno života) půdorysem nejvyšší budovy světa v Dubaji. [11]



Obrázek 64: Využití hypocykloidy a epicykloidy [28]

5.3.3 Klotoidy

Část této křivky se využívá například při stavbách horských drah. Také se využívá při stavění silnic. Nejčastěji se s klotoidou setkáme při tvorbě zatáček nebo podjezdů a nadjezdů na dálnicích. To z toho důvodu, že využíváme základní vlastnost klotoidy, a to pozvolné zatočení spirály.



Obrázek 65: Využití klotoidy [29]

6 Závěr

Bakalářská práce pojednává o kuželosečkách a dalších algebraických křivkách „okolo nás“. První část se zabývá teoretickými poznatky z oblasti kuželoseček. Těmito poznatky se rozumí základní vlastnosti. Druhá část je o identifikaci kuželoseček a křivek na fotografiích. U každé kuželosečky je jeden obrázek algebraicky ověřen.

S problematikou kuželoseček by měli být seznámeni studenti již na střední škole. To z toho důvodu, že kuželosečky jsou jeden z krásných příkladů, jak matematiku využít v praxi a to žáky zajímá. Tato práce je nejen názorně popsána pomocí teorie, ale také pomocí obrázků. Většina obrázků je převzata z internetu. Jedná se o známe objekty, takže by žákům mohlo být toto téma velmi blízké. Z toho důvodu by tato práce mohla sloužit jako doplňkový materiál při studiu kuželoseček.

Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] PECH, Pavel. Kuželosečky. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004, ISBN 80-7040-755-7.
- [2] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Cykloida>>
- [3] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Hypocykloida>>
- [4] ucitele.sci.muni.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <http://ucitele.sci.muni.cz/materialy/139_1.pdf>
- [5] Geogebra. Manuál programu Geogebra [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<http://www.geogebra.org/about>>
- [6] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Chladic%C3%AD_v%C4%9B%C5%BE#cite_note-1>
- [7] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Parabolick%C3%A1_ant%C3%A9na>
- [8] p-mat.sk [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <https://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2004/013Cykloida_exod.pdf>
- [9] mathcurve.com [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<https://mathcurve.com/courbes2d.gb/brachistochrone/brachistochrone.shtml>>
- [10] wikipedia.org [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve>
- [11] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Mandala>>

- [12] HAŠEK, Roman a Pavel PECH. Kvadratické plochy a jejich prezentace v programu Maple. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, 2010, ISBN 978-80-7394-271-7.
- [13] theses.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <https://theses.cz/id/a8adjl/bakalarska_prace_petr_knezinek.pdf>
- [14] is.muni.cz [online]. [cit. 2019-04-01]. Dostupný na WWW: <<https://is.muni.cz/th/fqzwo/bakalarka.pdf>>

Seznam obrázků

1	Řezy kuželové plochy	9
2	Řez plochy - elipsa	10
3	Řez plochy - hyperbola	10
4	Řez plochy - parabola	11
5	Řez plochy - kruh	11
6	Elipsa	13
7	Vlastnosti elipsy	14
8	Konstrukce elipsy	15
9	Oskulační kružnice	16
10	Součtová a rozdílová konstrukce elipsy	17
11	Zahradnická konstrukce	18
12	Obecná rovnice elipsy - grafické znázornění	19
13	Hyperbola	21
14	Vlastnosti hyperboly	22
15	Konstrukce hyperboly	23
16	Oskulační kružnice	24
17	Obecná rovnice hyperboly - grafické znázornění	25
18	Parabola	27
19	Vlastnosti paraboly	28
20	Konstrukce paraboly	29
21	Oskulační kružnice	30
22	Obecná rovnice paraboly - grafické znázornění	30
23	Cykloida	32
24	Parametrické vyjádření	33
25	Hypocykloida	33
26	Zvláštní případy hypocykloidy	34
27	Epicykloida	34
28	Klotoida [1]	35

29	Likérová špička	37
30	Likérová špička tvořená pěti body	38
31	Likérová špička tvořená rovníci	39
32	Salám nakrájený do tvaru elipsy	40
33	Centrála Mauritius Commercial Bank [2]	41
34	Plánovaná stavba fotbalového stadionu v Brně [3]	41
35	Římské koloseum [4]	41
36	Národní centrum interpretačního umění v Číně [5]	42
37	Pavilon Z7 Institutu Klinické a Experimentální Medicíny [6]	42
38	Japonský umělecký ostrov Naoshima [7]	42
39	Chladicí věže elektrárny Temelín [8]	43
40	Chladicí věže elektrárny Temelín tvořeny pomocí pěti bodů	44
41	Katedrála Zjevení Panny Marie v Brazílii [9]	45
42	Soumaya Muzeum v Mexico City [10]	45
43	Vinarium Tower ve Slovinsku [11]	46
44	Rozhledna Ještěd proložena částí hyperboly [12]	46
45	Vodárenská věž Möglingen v Německu [13]	47
46	Přístavní věž v Kobe, Japonsko [14]	48
47	Eiffelova věž proložena částí hyperboly [15]	48
48	Parabolická anténa [16]	49
49	Parabolická anténa tvořena pěti body	50
50	Parabolická anténa tvořena funkcí vstup	50
51	Gateway Arch, St. Louis Missouri [17]	51
52	Parabolický proud vody ve fontáně [18]	51
53	Logo McDonalds [19]	52
54	Parabolické oblouky, Celler de Sant Cugat [20]	52
55	Parabolický tvar banánu [21]	53
56	Parabolický skok delfína [22]	53
57	Náklon baterky na zeď	53
58	Písecký most [23]	54

59	Písecký most tvořený cykloidou	54
60	Využití cykloidy [24]	55
61	Koňské spřežení [25]	55
62	Problém brachistochrony a tautochrony [26]	56
63	Využití brachistochrony a tautochrony [27]	56
64	Využití hypocykloidy a epicykloidy [28]	57
65	Využití klotoidy [29]	58

Zdroje obrázků

- [1] wikipedia.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Klotoida#/media/File:Cornu_Spiral.svg>
- [2] archiportal.sk [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://www.archiportal.sk/2012/11/09/podivuhodn-elipsa/>>
- [3] blesk.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://www.blesk.cz/galerie/regiony-brno-brno-zpravy/675634/stadion-jaky-cesko-nevidelo-brno-postavi-novy-fotbalovy-stanek-za-dve-miliardy?foto=0>>
- [4] fm3b.blog.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://fm3b.blog.cz/galerie/dejiny-vytvarne-kultury/anticky-rim-a-etruskove/obrazek/80304676>>
- [5] casopisharmonie.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://www.casopisharmonie.cz/reportaze/je-opera-v-cine-luxus.html>>
- [6] stavbaweb.dumabyt.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://stavbaweb.dumabyt.cz/pavilon-z7-elipsa-v-prazskem-ikem-10773/clanek.html>>
- [7] edition.cnn.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://edition.cnn.com/travel/article/naoshima-japan-art-island/index.html>>
- [8] idnes.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <https://www.idnes.cz/ceske-budejovice/zpravy/elektrarna-temelin-vyroba-elektriny-nejmene-2016.A170105_2296680_budejovice-zpravy_mbe>

- [9] daniellaondesign.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <https://www.daniellaondesign.com/uploads/7/3/9/7/7397659/4981846_orig.jpg>
- [10] foursquare.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://ru.foursquare.com/v/museo-soumaya/4ce6da96f3bda1435864aee4?openPhotoId=518d1b9b7dd2958195c25de4>>
- [11] structurae.net [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://structurae.net/structures/vinarium-tower>>
- [12] alena.ilcik.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://www.alena.ilcik.cz/1707-jizerky-jested.php>>
- [13] eber.se [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://www.eber.se/torn/ebers/ebers-de-e.htm#11-7-e>>
- [14] japonsko.tripzone.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://japonsko.tripzone.cz/fotogalerie/osaka-vez-tstenkaku-7901>>
- [15] toureiffel.paris [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <https://www.toureiffel.paris/themes/custom/tour_eiffel/img/picto_myGoogleBusiness_1.jpg>
- [16] depositphotos.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://cz.depositphotos.com/57680411/stock-video-satellite-dish-hd.html>>
- [17] wikipedia.org [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=639544>>
- [18] rete.comuni-italiani.it [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://rete.comuni-italiani.it/foto/2008/14990>>

- [19] dez.at [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://www.dez.at/en/gastronomy/gastronomy/mcdonalds/?location=p545-98>>
- [20] googleusercontent.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://lh5.googleusercontent.com/NL5Wl4dMo5g/UfUH5KIbwuI/AAAAAAAAAeuc/fCf9fTmY8dk/s1600/11C%25C3%25A8sarMartinellBrunet-Bodega%2520Cooperativa%2520Sant%2520Cugat.JPG?gl=ES>>
- [21] 21stoleti.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://21stoleti.cz/2017/04/01/vedci-konecne-vedi-proc-banany-cernaji/>>
- [22] 4everstatic.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<http://4everstatic.com/obrazki/zwierzeta/-zycie-podwodne/skaczacy-delfin,-zachod-slonca-nad-morzem-159319.jpg>>
- [23] kudyznudy.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://www.kudyznudy.cz/aktivity-a-akce/aktivity/kamenny-most-v-pisku-nejstarsi-pamatka-sveho-dru.aspx>>
- [24] docplayer.cz [online]. str. 163 [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <<https://docplayer.cz/38759043-Pracovni-listy-z-matematiky.html>>
- [25] depositphotos.com [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW: <https://st2.depositphotos.com/4155025/6075/v/950/depositphotos_60752707-stock-illustration-horse-and-carriage.jpg>
- [26] [cit. 2019-04-08] scipython.com [online]. Dostupný na WWW: <<https://scipython.com/blog/the-brachistochrone-problem/>> wikipedia.org [online]. Dostupný na WWW: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve#/media/File:Tautochrone_curve.gif>

[27] [cit. 2019-04-08]

mathcurve.com [online]. Dostupný na WWW: <<https://mathcurve.com/courbes2d.gb/brachistochrone/brachistochrone.shtml>>

zamberk.cz [online]. Dostupný na WWW: <<http://www.zamberk.cz/presentatione/images/fotografie/0578f73012bae8.dtl.jpg>>

[28] myloview.cz [online]. [cit. 2019-04-08]. Dostupný na WWW:

<<https://img.myloview.cz/fototapety/mandala-vektor-proti-stresu-pro-omalovanky-mandala-vettoriale-proti-stresu-barveni-400-105639385.jpg>>

[29] [cit. 2019-04-08]

spolcs.cz [online]. Dostupný na WWW:
<http://www.spolcs.cz/storage/201710231917_horsk%C3%A1%20dr%C3%A1ha.png>

ervpojistovna.cz [online]. Dostupný na WWW:
<<https://www.ervpojistovna.cz/cs/nejvetsi-horske-drahy>>

pixabay.com [online]. Dostupný na WWW:
<https://cdn.pixabay.com/photo/2017/05/02/15/30/streets-2278471_960_720.jpg>

www.idnes.cz [online]. Dostupný na WWW:
<https://1gr.cz/fotky/idnes/12/051/org/JB42ebe2_mica_d1.jpg>