Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Soustavy rovnic

Vypracovala: Marcela Zajíčková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Soustavy rovnic jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ….................... ………………………….

Marcela Zajíčková

Poděkování

Touto cestou bych ráda poděkovala panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za cenné rady, odborné připomínky a za ochotu při vedení mé bakalářské práce.

ANOTACE

Tato bakalářská práce Soustavy rovnic se zabývá řešením soustav rovnic, které se převážně probírají na základních a středních školách. V práci jsou nejprve zmíněny metody řešení různých druhů soustav rovnic, které jsou následně doplněné příklady se slovním komentářem.

V závěru práce jsou uvedené slovní úlohy, protože jsou pro vývoj studenta velmi důležité. Slovní úlohy jsou řešeny jednak pomocí soustav, které často řešitelům činí při sestavování rovnic velké obtíže, tak i prostřednictvím úsudku.

ANNOTATION

This bachelor thesis is focused on a System of Equations and solving a system of equations, which are mostly taught at high and middle schools. In this thesis firstly methods of solving different types of a system of equations are described, which are followed by additional examples with verbal comment.

At the end of this thesis word problems are shown because they are very important for student's development. Word problems are solved both with support of equations, which often make a lot of difficulties with formulation of equations, and through judgment as well.

Obsah

1 Úvod

Ve své bakalářské práci se zabývám studiem tématu Soustavy rovnic, ve které uvádím převážně soustavy lineární, probírající se na základních a středních školách. K těmto typům přidávám i soustavy nelineární, přesněji soustavy nejvýše druhého stupně.

Toto téma jsem si vybrala, protože soustavy rovnic patří k základním znalostem, které by měl student střední, a samozřejmě vysoké školy, ovládat. Podle mého názoru soustavy rovnic nás provází většinu studia matematiky. Začínají se vyučovat již v 9. ročníku, kdy se probírají základní a jednodušší typy lineárních soustav a jejich způsoby řešení. Postupně se během studia přidávají složitější a početně náročnější typy, s nimiž přibývají příslušné metody a vědomosti, např.: kvadratická rovnice, diskriminant, matice soustavy aj. Soustavy rovnic běžně využíváme i na vysoké škole, kde se student bez poznatků o soustavách rovnic rovněž neobejde.

Moje práce se skládá z teoretické a příkladové části, které se vzájemně prolínají. V teoretické části jsem se zaměřila na obecné pojetí soustav rovnic a jejich řešení, vycházející ze současných a starších učebnic matematiky. Také se snažím čtenáře odkázat na učebnice, ze kterých jsem čerpala. V příkladové části jsem tyto prameny využila k vytvoření úloh, které jsou doplňkem teoretické části.

Téma Soustavy rovnic je velmi rozsáhlé, jelikož zahrnuje různé typy soustav a možnosti řešení. Proto jsem se snažila vybrat a soustředit se na základní a nejdůležitější typy a metody, se kterými student může přijít do styku. Při řešení soustav se zaměřuji i na grafickou metodu, aby čtenář měl jistou představu o konkrétním řešení.

Na závěr práce přidávám i slovní úlohy, které jsou pro vývoj studenta velmi důležité. Student by měl zvládnout správně označit hledané neznámé, sestavit příslušnou soustavu rovnic a za pomoci znalostí dojít ke správnému řešení. Mnohem důležitější je však řešení pomocí úsudku. Tento způsob bývá v současné době často zanedbáván, i když rozvíjí logické myšlení žáka. Proto ve své práci odkazuji i na učebnice, ve kterých se tento typ řešení objevuje.

2 Rovnice

Pokud máme dva algebraické výrazy a položíme je do rovnosti, získáme rovnici. Algebraické výrazy jsou matematické formule, které se skládají z konstant a proměnných, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací a závorek vytvořeny smysluplné vztahy. Konstanty jsou prvky, které nemění svoji hodnotu, jedná se o čísla. Proměnné neboli neznámé vyjadřují neznámá čísla, které je třeba určit. Označují se písmeny a nabývají různých hodnot. Jsou to tedy libovolná čísla z určité číselné množiny, nazývající se obor proměnných neboli definiční obor výrazu. Pokud obor proměnných není jednoznačně určen, považujeme jej za množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž by ztrácel smysl. Řešením rovnice je pak množina čísel, která po dosazení do rovnice zachovává platnou rovnost. Každé takové číslo nazýváme *kořenem* nebo *řešením* dané rovnice. Také se říká, že čísla, která jsou řešením rovnice, tuto rovnici *splňují* nebo že jí *vyhovují*. (POLÁK, 2015)

Pro slovo *řešení* rovnic existují dva významy. Označuje se tím jednak samotný výsledek a jednak postup, který vede k hledanému výsledku.

„Používání proměnných odlišuje jazyk matematiky od běžného vyjadřování. Písmena jako symboly pro určité matematické objekty najdeme již v antických spisech. Euklides označoval písmeny například body, úsečky, rovinné útvary i čísla. Rozhodující krok v užití písmen pro zápis proměnných udělal však až francouzský matematik D. Viète (1540-1603). Termín proměnná zavedl G. W. Leibniz (1646-1716) koncem 17.století. Říká se právem, že zavedením proměnných získali matematici nástroj, který umožnil obrovský rozvoj jejich vědy.“ (SMIDA et al., 1985, s. 13)

2.1 Mnohočlen (polynom)

Tato kapitola vychází z Přehledu středoškolské matiky (POLÁK, 2015, s. 111-112).

Součet

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots .. a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \text{ , kde } a_n \neq 0,$$

je specifický případ výrazů nazývající se mnohočlen neboli polynom $n - tého$ stupně s proměnnou x. Jednotlivé sčítance jsou členy polynomu, konstanty $a_0, a_1, \dots .., a_n$ jsou koeficienty mnohočlenu z oboru reálných čísel a n je přirozené číslo nebo 0. Číslo a_0 se nazývá absolutní člen mnohočlenu a číslo n představuje stupeň mnohočlenu. Polynom s jedním členem se nazývá jednočlen, se dvěma členy dvojčlen, se třemi členy trojčlen atd. Pojem mnohočlen lze zobecnit i pro více proměnných.

Podle doporučených osnov stanovených rámcově vzdělávacím programem (dále jen RVP) by měl žák na konci 8. třídy rozumět pojmům proměnná, výraz s proměnnou, jednočlen a mnohočlen, popř. mnohočlen nejvýše druhého stupně.

2.2 Postup při řešení rovnice

Základní otázkou při řešení rovnic je – jakým postupem je možné určit množinu všech kořenů dané rovnice? Postup při řešení rovnic se může rozdělit na tyto základní kroky (HORÁČEK, 1980):

a) Jsou-li v rovnici nějaké neznačené a neprovedené početní výkony (násobení, mocnění, závorky apod.), provedou se nejprve tyto výkony. Jsou-li všechny koeficienty v rovnici násobky nějakého číslo m různé od nuly, pak se obyčejně dělí (krátíme) ještě před ostatními výkony číslem m.
b) Odstraní se zlomky, pokud se v rovnici vyskytují, tím, že se vynásobí obě strany nejmenším společným násobkem jmenovatelů.
c) Rovnice se upraví tak, aby členy s neznámou byly na jedné straně rovnice, členy bez neznáme na druhé straně, a každá strana se sečte.
d) Obě strany rovnice se vydělí koeficientem u neznámé, a tím se dostane kořen.
e) Po řešení je provedena zkouška dosazováním kořene zvlášť do levé a zvlášť do pravé strany původní rovnice a porovnáním se zjišťuje, zda je zápis pravdivý. Pravá strana rovnice bývá zpravidla označována písmenem P a levá strana písmenem L.

Zkouška je nutná součást řešení právě tehdy, když nebyly všechny úpravy ekvivalentní. I při ekvivalentních úpravách je vhodné provést zkoušku k tomu, aby se zjistilo, zda při výpočtu nedošlo k chybě.

2.2.1 Ekvivalentní úpravy

Pod tímto termínem se rozumí úpravy, které se vyznačují tím, že po použití nemění platnost rovnice. Cílem těchto úprav je převedení rovnice na jednodušší tvar, tj. na rovnici s ní *ekvivalentní*, ze které se dá snadno určit řešení. Tyto úpravy se při řešení nejčastěji píší za lomenou čáru na konec rovnice. Přehled nejdůležitějších ekvivalentních úprav rovnic podle Poláka (2015, s. 203):

a) Vzájemná výměna stran rovnice.
b) Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení rovnice.
c) Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice, k oběma stranám rovnice.
d) Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámou, který je definován a různý od nuly (tj. nabývá jen nenulových hodnot) v celém oboru řešení rovnice. (Stručně říkáme, že rovnici násobíme číslem, resp. výrazem.)
e) Umocnění obou stran rovnice týmž přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývá jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
f) Odmocnění obou stran rovnice týmž přirozeným odmocnitelem, jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývá jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
g) Zlogaritmování obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné (tj. nabývají jen kladných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.

Dle mého názoru jsou nejvíce využívány první čtyři úpravy rovnic, se kterými mají žáci možnost se setkat již na samém počátku, kdy pracují právě s jednoduššími typy rovnic, na něž lze tyto úpravy aplikovat. Potom, co se studenti seznámí s těmito základními úpravami, se k nim postupně přidávají další možné úpravy. Největší pravděpodobnost výskytu chyb je spojována s úpravami $c)$ a $d)$, kdy studenti zapomínají přičíst **k oběma** stranám stejné číslo nebo výraz (resp. vynásobit **obě strany** rovnice stejným číslem nebo výrazem) a pracují pouze s jednou stranou rovnice. Poté mylně určí řešení. Studenti se také často dopouštějí chyby tím, že převedou rovnici na takovou rovnici, jejímž řešením jsou pouze řešení některá, nikoliv všechna.

Příklady chybných postupů:

a)

$$\frac{x}{2} + 3 = 6 \quad / * (2)$$
$$x + 6 = 6$$
$$x = 0$$

Správně řešení:

$$\frac{x}{2} + 3 = 6 \quad / * (2)$$
$$x + 6 = 12$$
$$x = 6$$

b)

$$(x-2)(x-1) = (x-1) \quad / : (x-1)$$
$$x - 2 = 1$$
$$x = 3$$

Správně řešení:

$$(x-2)(x-1) = (x-1) \quad / -(x-1)$$
$$(x-2)(x-1) - (x-1) = 0$$
$$(x-1)(x-2-1) = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$
$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3$$

2.3 Algebraické rovnice

Na školách se studenti učí jak algebraické, tak i nealgebraické rovnice (např. $cosx = x$). Algebraická rovnice $\mathrm{n}-$ tého stupně jedné proměnné se nazývá každá rovnice ve tvaru:

$$\mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0} = 0,$$

kde $\mathrm{a_n, a_{n-1}, \ldots . a_2, a_1, a_0}$ jsou koeficienty algebraické rovnice a x je proměnná. Levá strana rovnice tohoto tvaru je mnohočlen $\mathrm{n}-$ tého stupně. Členy mnohočlenu se nazývají členy algebraické rovnice. Je-li $\mathrm{a_n} = 1$, říká se, že algebraická rovnice je v normovaném tvaru. (POLÁK, 2015)

Z algebraických rovnic se na druhém stupni základní školy probírají lineární rovnice a na středních školách studenti přijdou do styku i s kvadratickými rovnicemi.

2.3.1 Lineární rovnice

Pojem *lineární* označuje stupeň rovnice, který je roven jedné to znamená, že se v rovnici vyskytuje každá neznámá $x_1, x_2, \dots x_n$ nejvýše v první mocnině. Lineárními rovnicemi o n neznámých $x_1, x_2, \dots x_n$ s reálnými koeficienty $a_1, a_2, \dots a_n$, rozumíme rovnice ve tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, kde b je reálné číslo.

Poznámka: V případě rovnice se dvěma, resp. třemi neznámými se neznámé obvykle značí x, y resp. x, y, z.

Na základních školách jsou žáci v 8. třídě seznámeni s lineární rovnicí o jedné neznámé a v 9. třídě s lineární rovnicí o dvou neznámých. Žáci také umí vyřešit lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav. Na středních školách se přidávají rovnice o třech neznámých v souvislosti s řešením soustav tří rovnic o třech neznámých. Tyto poznatky jsou uvedeny například v učebnicích: Matematika pro 9. ročník základní školy (BUŠEK et al., 1996) a Matematika pro 8. ročník základní školy (ŠEDIVÝ et al., 1994) a Matematika pro I. ročník gymnázií (SMIDA et al., 1985).

a) Lineární rovnice s neznámou x je každá rovnice v základním tvaru $ax + b = 0$, kde b je libovolné reálné číslo a a je libovolné reálné číslo různé od 0. Pro řešení lineární rovnice mohou nastat tyto případy:
    1. Je-li $a \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže existuje právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.
    2. Je-li $a = b = 0$, existuje nekonečně mnoho řešení.
    3. Je-li $a = 0, b \neq 0$, nemá žádné řešení.

b) Lineární rovnice se dvěma neznámými se rozumí rovnice ve tvaru $ax + by = c$, kde $a, b, c \in R$ jsou koeficienty rovnice a x, y jsou neznámé. Řešením se rozumí uspořádaná dvojice čísel (x, y), po dosazení zpět do rovnice nastane platná rovnost.

c) Lineární rovnice se třemi neznámými je každá rovnice $ax + by + cz = d$, kde $a, b, c, d \in R$ jsou koeficienty rovnice a x, y, z jsou neznámé. Řešením je uspořádaná trojice čísel (x, y, z), po dosazení do rovnice se získá platná rovnost.

2.3.2 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice neboli rovnice druhého stupně se vyznačuje tím, že obsahuje neznámou x v druhé mocnině. S kvadratickou rovnicí a jejím způsobem řešení se student setká již v prvním ročníku střední školy. Učebnice: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice (CHARVÁT et al., 2005) se mimo jiné zabývá kvadratickými rovnicemi a tato kapitola z ní vychází.

Kvadratickou rovnicí se označuje každá rovnice ve tvaru:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, a je různé od nuly, ax^2 se nazývá kvadratický člen, a je koeficient kvadratického členu, bx se nazývá lineární člen, b je koeficient lineárního členu a c se nazývá absolutní člen. Rovnice tohoto tvaru se nazývá kvadratická rovnice v anulovaném tvaru, jelikož její pravá strana se rovná nule.

Řešení kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Výraz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se nazývá diskriminant kvadratické rovnice a označuje se písmenem D. Při řešení mohou nastat tyto tři případy:

- Je-li $D > 0$, rovnice má dva reálné různé kořeny
- Je-li $D = 0$, rovnice má jeden reálný dvojnásobný kořen
- Je-li $D < 0$, rovnice má dva imaginární kořeny (komplexně sdružená čísla)

Speciální případy kvadratické rovnice:

- Kvadratická rovnice bez absolutního členu

  Specifický případ kvadratické rovnice jejíž absolutní člen c se rovná 0, má základní tvar:

$$ax^2 + bx = 0$$

  Řešení pomocí vytýkání neznámé:

$$x(ax + b) = 0$$

Rovnice byla převedena do součinového tvaru dvou lineárních výrazů, pro které existují dva kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{b}{a}$.

- Ryze kvadratická rovnice

  Další případ kvadratické rovnice, v níž je lineární člen *b* roven nule, má tvar rovnice:

  $$ax^2 + c = 0$$

  Tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí:

  $$x^2 = -\frac{c}{a}$$

  Jestliže $-\frac{c}{a} < 0$ (čísla a, c mají stejná znaménka), nemá rovnice řešení. Pokud $-\frac{c}{a} > 0$ (čísla a, c mají různá znaménka) existuje řešení:

  $$|x| = \sqrt{\frac{c}{d}}$$

  $$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  Rovnice má tedy v případě $-\frac{c}{a} > 0$, dva kořeny $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ a $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Kvadratická rovnice může být uvažována i s více proměnnými, většinou s neznámými x, y. Rovnice tvaru:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y = b$$

je kvadratická rovnice se dvěma neznámými x, y. Číselné koeficienty $a_1, a_2, \dots . a_5$ jsou z oboru *R* a zároveň aspoň jeden z koeficientů $a_1, a_2, \dots . a_5$ je různý od nuly, *b* je konstanta z téhož číselného oboru. (POLÁK, 2015)

Podle Bartsche (1996, s. 238) lze každou rovnici druhého stupně v proměnných x, y *„považovat za analytické vyjádření funkce, jejímž grafem je kuželosečka (parabola, elipsa, hyperbola).“*

3 Soustavy rovnic s více neznámými

Soustavami rovnic s n neznámými se rozumí vzájemně si neodporující rovnice, které se řeší společně. Je zde snaha nalézt takovou kombinaci čísel z číselného oboru, kterou splňují zároveň všechny rovnice soustavy. Jednoduše řečeno, po dosazení za všechny neznámé nastává platná rovnost. Způsob řešení spočívá v tom, že se postupně eliminují rovnice a neznámé na jednu rovnici o jedné neznámé. Pomocí hodnoty této proměnné se postupně vypočítají zbývající hodnoty.

Při početním řešení soustav rovnic dochází k užívání ekvivalentních úprav soustavy rovnic, tj. takové úpravy, s nimiž se nemění řešení soustavy. Ekvivalentní úpravy pro soustavy rovnic podle Poláka (2015, s. 269):

a) Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení. Získává se zejména těmito dvěma ekvivalentními úpravami:
   i. K oběma stranám rovnice se přičte totéž číslo nebo výraz s neznámými který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
   ii. Obě strany rovnice se násobí týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší. (Stručné říkáme, že rovnici násobíme číslem, resp. výrazem.)

b) Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.

c) Dosazením libovolné rovnice nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

Jestliže se při řešení soustavy používají pouze ekvivalentní úpravy, tak se množina řešení soustavy nemění a zkouška není nutná část řešení.

3.1 Soustavy lineárních rovnic

„Pravidla řešení soustav lineárních rovnic formulovali již čínští matematici. Obecnou metodu vyloučení jedné neznáme ze dvou rovnic vypracoval v 17. století francouzský matematik P. Fermat a upřesnil ji L. Euler. Teorii řešení soustav lineárních rovnic s více neznámými jako první systematicky zpracoval koncem 17. století německý matematik a filosof G. Leibniz. Grafické metody nalezly uplatnění v 19. století. V současné době,

v souvislosti s využitím výpočetní techniky, však značně ztratily na svém významu a používají se jen k přibližnému odhadu.“ (SMIDA et al., 1985, s. 13)

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty, je soustava ve tvaru (HAŠEK, 2017):

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{gathered}
$$

kde $a_{11}, a_{12} \ldots a_{mn}$ a b_1, $b_2 \ldots b_m$ jsou koeficienty rovnice a $x_1, x_2 \ldots x_n$ jsou neznámé. Koeficienty u neznámých mají v zápise dva indexy, kde první index udává pořadí rovnice a druhý pořadí neznámé, u které se koeficient nachází.
Řešit soustavu m lineárních rovnic o n neznámých znamená, najít všechny uspořádané $n - tice$, které jsou řešením soustavy a po dosazení zpět mají všechny rovnice smysl.

Při řešení soustav lineárních rovnic se studentům nabízí několik metod, jak naleznout odpovídající $n - tici$. Na základních školách jsou to především metody: sčítací, dosazovací a jejich kombinace, srovnávací a grafická metoda. Na středních školách se tyto metody opakují, a navíc může být student seznámen s Gaussovou eliminační metodou. Na vysokých školách se přidávají poznatky o maticích, s nimiž souvisí Gauss-Jordanova eliminační metoda, Frobeniova podmínka aj.

Při řešení soustav mohou nastat následující situace:

a) Soustava má právě jedno řešení – existuje jedna uspořádaná $n - tice$
b) Soustava má nekonečně mnoho řešení – existuje nekonečně mnoho $n - tic$, které zapíšeme pomocí parametru
c) Soustava nemá řešení – neexistuje žádná uspořádaná $n - tice$

Při řešení soustav bývá často používán maticový zápis. Matice přispívají k zestručnění zápisu rovnic, jelikož pracují pouze s číselnými koeficienty a s pravou stranou rovnic. Tabulka těchto údajů uspořádaných do p řádků a q sloupců se nazývá matice. Koeficienty soustavy rovnic tvoří tzv. matici soustavy, pokud je rozšířena o sloupec pravých stran, dostáváme tzv. rozšířenou matici soustavy. Pro lepší přehlednost se užívá jiné označení pro matici rozšířenou. V zápise první index vždy udává pořadové číslo řádku a druhý index pořadové číslo sloupce. (POLÁK, 2015)

Matice soustavy A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy A^*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Pro řešitelnost soustav se může využívat i Frobeniova věta, kdy řešitele zajímá, zda pro soustavu existuje i netriviální řešení. Tyto poznatky o F. V. vycházejí z online přednášek Lineární algebry a geometrie (HAŠEK, 2017, s. 9-10).

Znění Frobeniovy věty: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti matice rozšířené, tj. $h(A) = h(A^*)$.

Při ověřování platnosti Frobeniovy podmínky můžou nastat následující situace:

a) $h(A) = h(A^*) = n$, soustava má jediné řešení
b) $h(A) = h(A^*) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení
c) $h(A) \neq h(A^*)$, soustava nemá řešení

Poznámka: Hodnost $h = h(A)$ matice A typu (m, n) je maximální počet lineárně nezávislých řádků, který je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců matice A. Kromě nulové matice, která má hodnost nula, mají ostatní matice hodnost alespoň jedna. Jestliže čtvercová matice A má hodnost $h = n$ $(\det A \neq 0)$, resp. hodnost $h < n$ $(\det A = 0)$ nazývá se regulární, resp. singulární. Obdélníková matice typu $m * n$ může nabývat hodnosti $h \leq (m, n)$. (BARTSCH, 1996)

Hodnost matice se vyčte z trojúhelníkového tvaru matice (tj. pod hlavní diagonálou samé nuly), odkud už je snadno vidět lineární závislost (resp. nezávislost) řádků.

Mohou se využívat tyto úpravy bez toho, aniž by byla změněna hodnost matice (BARTSCH, 1996, s. 183):

a) Napíšeme řady matice A v jiném pořadí.
b) Násobíme některou řadu matice A číslem $k \neq 0$.
c) Přidáme k matici A řadu, která je lineární kombinací ostatních řad této matice.
d) Vynecháme v matici A řadu, která je lineární kombinací ostatních řad této matice.
e) Přičteme k některé řadě matice A lineární kombinaci ostatních řad této matice.

Na vysokých školách se soustavy lineárních rovnic více specifikují na tzv. homogenní a nehomogenní soustavy rovnic. Homogenní soustavou se rozumí taková soustava rovnic, kde koeficienty $b_1 = b_2 \ldots\ldots = b_m = 0$, v jiném případě se jedná o nehomogenní soustavu. Pro homogenní soustavu je vždy splněna Frobeniova podmínka. Řešením každé homogenní soustavy je uspořádaná $n - tice$, která je tvořená samými nulami, jedná se tedy o triviální řešení. (HAŠEK, 2017)

3.2 Soustavy rovnic nejvýše druhého stupně

Na středních školách se ze soustav algebraických rovnic vyšších stupňů probírají právě soustavy rovnic nejvýše druhého stupně pro dvě neznámé. Tj. v soustavě rovnic se objevuje kromě lineární rovnice také rovnice kvadratická. Řešením soustavy nejvýše druhé stupně o n neznámých je vždy uspořádaná $n - tice$ čísel, která po dosazení zachovává platnou rovnost.

Soustava s lineární a kvadratickou rovnicí s neznámými x, y

Tímto termínem je nazývaná soustava tvaru:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y = b_1$$
$$a_1x + a_2y = b_2,$$

kde $a_1, a_2 \ldots a_5$ a b_1, b_2 jsou koeficienty rovnice.

Jestliže je jedna rovnice soustavy lineární a druhá kvadratická, je grafickým řešením přímka a kuželosečka, jejichž průsečíky jsou řešením této soustavy.

Soustava dvou kvadratických rovnic s neznámými x, y

Tímto termínem je označována soustava ve tvaru:

$$a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}xy + a_{14}x + a_{15}y = b_{11}$$
$$a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}xy + a_{24}x + a_{25}y = b_{21},$$

kde $a_{11}, a_{12} \dots a_{25}$ a b_1, b_2, b_{21} jsou koeficienty rovnice.

Jestliže jsou obě rovnice kvadratické, grafickým řešením jsou dvě kuželosečky. *„Souřadnice průsečíků (průsečík může být jeden nebo průsečíky mohou být dva až čtyři) udávají pak reálná řešení soustavy rovnic.“* (BARTSCH, 1996, s. 238)

4 Metody řešení soustav s více neznámými

Předchozí kapitola se věnovala obecným poznatkům o soustavách rovnic a nyní jsou zde představeny konkrétní typy soustav. Na následujících řádcích jsou popsány principy metod řešení těchto soustav, uvedeny řešené příklady a taktéž uvedeny možné situace, které zde nastávají.

4.1 Soustavy lineárních rovnic

4.1.1 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Tímto termínem bývá označována soustava ve tvaru:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ jsou koeficienty rovnice a x, y jsou hledané neznámé.

Řešit soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y znamená naleznout všechny uspořádané dvojice (x, y), které jsou řešením dané soustavy.

Tento typ soustavy umí vyřešit již žáci 9. třídy a při řešení můžou použít tyto metody:

- Metoda dosazovací
  Z jedné rovnice soustavy se vyjádří libovolná neznámá a toto vyjádření se dosadí do druhé rovnice. Čímž se z nich uvažovaná neznáme eliminuje a zároveň se získá lineární rovnici o jedné neznámé, kterou již žáci umí vyřešit.
- Metoda sčítací
  Je-li to nutné, rovnice dané soustavy se násobí vhodnými čísly tak, aby se po sečtení rovnic eliminovala jedna neznámá. Tento postup se použije i podruhé k vyloučení poslední neznámé.
- Kombinovaná metoda
  Je kombinace sčítací a dosazovací metody, kdy se nejprve provede sečtení rovnic za účelem vyloučení jedné neznámé a získaná hodnota se dosadí do libovolné rovnice soustavy. Tato metoda je častější než samotná sčítací metoda a často u žáků mylně uváděna za *sčítací metodu*.

- Srovnávací metoda

  Z obou rovnic se vyjádří stejná neznámá pomocí druhé neznámé a následně z obou vyjádření se sestaví příslušná lineární rovnice.
- Grafické řešení

  Každá lineární rovnice o dvou neznámých představuje v kartézském grafu souřadnic lineární přímku a při řešení hledáme množinu všech společných průniků. K sestrojení přímky stačí znát dva její body, proto z každé rovnice se vyjádří y ve tvaru $y = ax + b$. Za x se dosadí dvě libovolná čísla, vyšetří se hodnoty y a tímto se získají dva body, jimiž přímka prochází.

  Přímky se sestrojí v kartézském grafu souřadnic a nastane jedna ze tří možností:

  a) Různoběžné přímky, tj. právě jediné řešení
  b) Totožné přímky (jedna dvojnásobná přímka), tj. právě nekonečně mnoho řešení
  c) Rovnoběžné přímky, tj. žádné řešení

  Tato metoda při rýsování leckdy poskytuje jen přibližné výsledky, přesnost řešení závisí na přesnosti našeho rýsování. K přesnějšímu řešení můžeme také využívat i softwarové programy.

Tyto metody řešení soustav jsou například uvedené v učebnicích matematiky: Matematika pro nižší ročník víceletých gymnázií Rovnice a jejich soustavy (HERMAN et al., 1999) a Matematika pro 9. ročník základní školy (TREJBAL, 1999).

Příklady:

a) Řešte soustavu rovnic

$$4x + 3y = 6$$
$$2x + y = 4$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Z libovolné rovnice vyjádříme jednu neznámou, např. y z druhé rovnice.

$$4x + 3y = 6$$
$$y = 4 - 2y$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice a získáme rovnici.

$$4x + 3(4 - 2y) = 6$$
$$4x + 12 - 6x = 6$$
$$-2x + 12 = 6$$

$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

Tímto jsme získali hodnotu neznámé x, kterou dosadíme do rovnice: $y = 4 - 2x$ a vyšetříme hodnotu proměnné y.

$$y = 4 - 2 * 3$$
$$y = -2$$

Řešením zadané soustavy je pro $x = 3$, pro $y = -2$.

Poznámka: Je jen na nás, kterou neznámou vyjádříme pomocí druhé a kterou rovnici soustavy si k tomu vybereme.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

K eliminaci proměnné x, vynásobíme druhou rovnici mínus dvěma. Dostaneme:

$$4x + 3y = 6$$
$$-4x - 2y = -8$$

Po sečtení:

$$y = -2$$

Hodnotu x získáme po opětovném násobení a sečtení rovnic za účelem eliminovat y.

$$4x + 3y = 6$$
$$-6x - 3y = -12$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

Řešením této soustavy je pro $x = 3$, pro $y = -2$.

(3) <u>Kombinovaná metoda:</u>

Nejprve provedeme sčítací metodu a následně získanou hodnotu neznámé dosadíme do libovolné rovnice.

<u>Sčítací metoda:</u>

$$4x + 3y = 6$$
$$-4x - 2y = -8$$

Po sečtení:

$$y = -2$$

<u>Dosazovací metoda</u>*:*

Hodnotu $y = -2$ dosadíme do libovolné rovnice např. do rovnice: $2x + y = 4$.

$$2x - 2 = 4$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Řešením je dvojce čísel $(x, y) = (3, -2)$.

(4) <u>Srovnávací metoda:</u>

Z každé rovnice vyjádříme stejnou neznámou např. y . Z první rovnice: $y = 2 - \frac{4x}{3}$, z druhé rovnice: $y = 4 - 2x$. Tato vyjádření dáme do rovnosti.

$$2 - \frac{4x}{3} = 4 - 2x$$

$$6 - 4x = 12 - 6x$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Analogicky zjistíme hodnotu y. Z první rovnice $x = \frac{3}{2} - \frac{3y}{4}$, z druhé rovnice: $x = 2 - \frac{y}{2}$.

$$\frac{3}{2} - \frac{3y}{4} = 2 - \frac{y}{2}$$

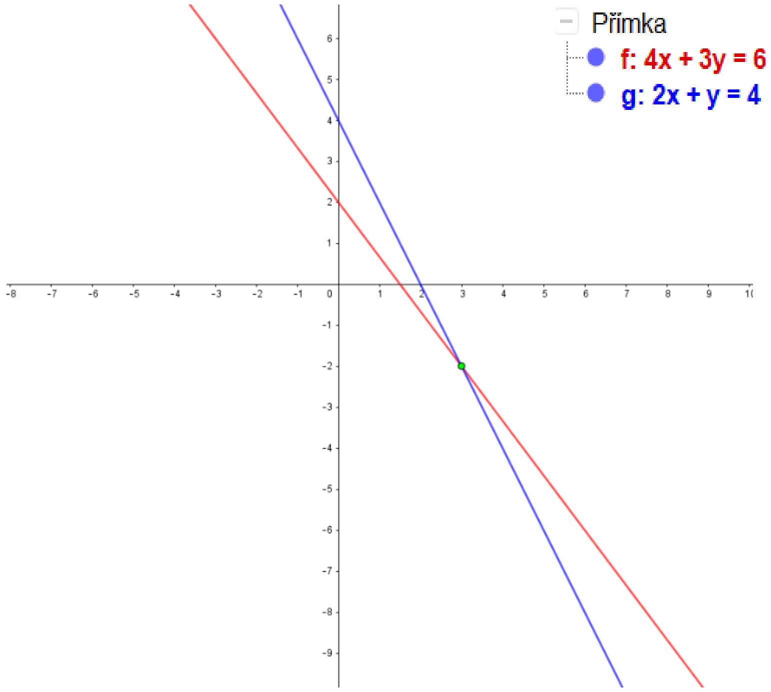
$$6 - 3y = 8 - 2y$$

$$y = -2$$

Řešením je dvojce čísel $(x, y) = (3, -2)$

(5) <u>Grafické řešení:</u>

Grafickým řešením jsou dvě různoběžné přímky, které se protínají v jediném bodě. To znamená, že tato soustava má jediné řešení a z obrázku vyčteme souřadnice tohoto průsečíku: $\mathrm{x} = 3,\ \mathrm{y} = -2$.



(6) <u>Zkouška:</u>

Přesvědčíme se, že získané výsledky vyhovují zadání.

$$L_1 = 12 - 6 = 6,\ P_1 = 6,\ L_1 = P_1$$

$$L_2 = 6 - 2 = 4,\ P_2 = 4,\ L_2 = P_2$$

Poznámka: Po dokončení příkladu vždy provedeme zkoušku, aniž bychom ji zmiňovali.

b) Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x}{2} + y = 3$$

$$2x + 4y = 5$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Vyjádříme z druhé rovnice proměnou y: $y = \frac{5-2x}{4}$ a následně dosadíme do první rovnice.

$$\frac{x}{2} + \frac{5 - 2x}{4} = 3$$

$$2x + 5 - 2x = 12$$

$$0x = -7$$

Pro tuto soustavu neexistuje řešení. Také říkáme, že dané dvě rovnice si odporují.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

První rovnici vynásobíme -4 a dostaneme:

$$-2x - 4y = -12$$

$$2x + 4y = 5$$

Sečteme obě rovnice a obdržíme jednu rovnici.

$$0x + 0y = -7 \sim 0 = -7$$

Neexistuje žádná dvojce čísel (x, y), která by vyhovovala zadané soustavě.

(3) <u>Srovnávací metoda</u>:

Z první rovnice získáme $y = 3 - \frac{x}{2}$ a z druhé rovnice $y = \frac{5}{4} - \frac{x}{2}$.

$$3 - \frac{x}{2} = \frac{5}{4} - \frac{x}{2}$$

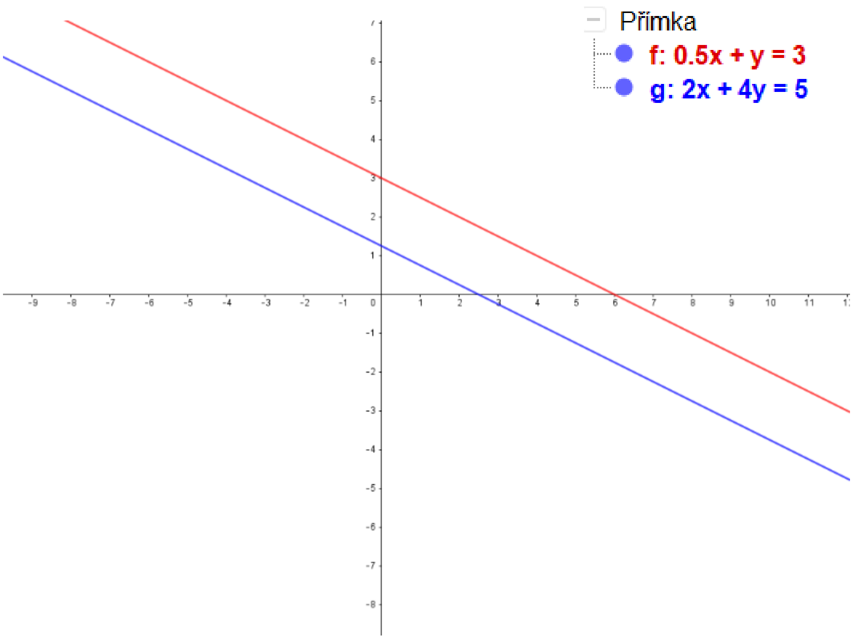
$$12 - 2x = 5 - 2x$$

$$0x = -7$$

Zadaná soustava nemá řešení.

(4) **<u>Grafické řešení:</u>**

Grafickým řešením jsou dvě rovnoběžné přímky, které se neprotínají ani v jediném bodě.



c) Řešte soustavu rovnic

$$4x - 16 = 12 + 5y$$

$$-5y - 26 = -8x + 5y + 30$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Nejprve zjednodušíme rovnice tím, že neznámé převedeme na jednu stranu rovnice a konstanty na druhou stranu.

$$4x - 5y = 28$$
$$8x - 10y = 56$$

Poté vyjádříme x z první rovnice: $x = \frac{28+5y}{4}$ a dosadíme do druhé.

$$8 * \frac{28 + 5y}{4} - 10y = 56$$
$$224 + 40y - 40y = 224$$
$$0 = 0$$

Řešením je každá uspořádaná dvojice čísel x a y, pro kterou je výraz $4x - 5y$ roven 28. Všechny takové dvojice nalezneme pomocí parametru, parametr může mít libovolnou hodnotu a označíme jej písmenem např. t. Jednu z neznámých (např. x) „nahradíme" parametrem a hodnotu druhé neznámé vyjádříme z rovnice $4t - 5y = 28$. Vyjde $y = \frac{4t-28}{5}$. Výsledek zapisujeme takto: $(x, y) = (t, \frac{4t-28}{5})$ nebo $(x = t, y = \frac{4t-28}{5})$, kde $t \in R$.

Poznámka: Parametr můžeme vyjádřit jakýmkoliv libovolným písmenem viz. sčítací metoda.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

Zjednodušíme rovnice.

$$4x - 5y = 28$$
$$8x - 10y = 56$$

První rovnici vynásobíme -2 a obdržíme dvě rovnice.

$$-8x + 10y = -56$$
$$8x - 10y = 56$$

Po sečtení vychází.

$$0x + 0y = 0$$

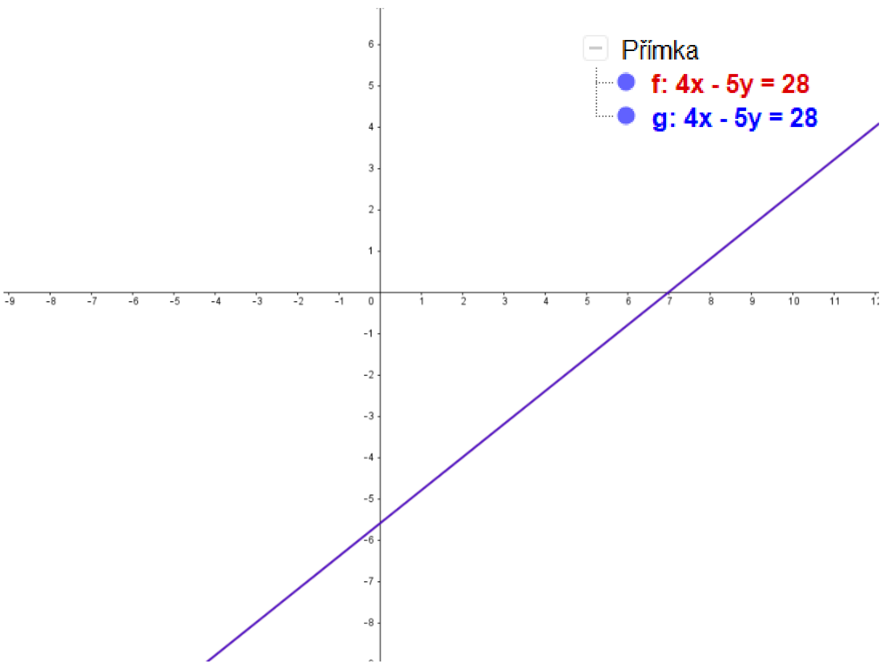
Pro zadanou soustavu existuje nekonečně mnoho řešení, vztah mezi neznámými zapíšeme pomocí parametru x, $(x, \frac{4x-28}{5})$ $x \in R$.

(3) <u>Srovnávací metoda:</u>

Při vyjádření x z první a z druhé rovnice dostaneme: $7 + \frac{5y}{4}$. Jelikož se jedná o dva stejné výrazy, nemá smysl tvořit příslušnou lineární rovnici. Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, odpovídá jí každá dvojice ve tvaru $(x, \frac{4x-28}{5})$, kde $x \in R$.

(4) <u>Grafické řešení:</u>

Obě rovnice představují analytické vyjádření dvou sobě odpovídajících si přímek. Jedná se o totožné přímky neboli o jednu dvojnásobnou přímku.



4.1.2 Soustava třech lineárních rovnic se třemi neznámými

Tímto termínem je označována soustava ve tvaru:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

kde $a_{i,}$ $b_{i,}$ c_i a $d_i, i = 1{,}2{,}3$ jsou koeficienty rovnice a x, y, z neznámé.

Řešit soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých x, y, z znamená naleznout všechny uspořádané trojice čísel (x, y, z), které jsou řešením první, druhé i třetí rovnice.

K řešení tohoto typu se mohou využívat různé metody, tato práce se zaměřuje na následující způsoby řešení soustav:

- Metoda dosazovací
  Vyjádřením libovolné neznámé z jedné rovnice soustavy dostaneme výraz, který dosadíme do zbývajících dvou rovnic. Tímto se uvažovaná neznámá eliminuje a získá se soustava dvou rovnic o dvou neznámých, která se řeší již známým způsobem.
- Metoda sčítací
  Rovnice soustavy se opět násobí vhodnými čísly tak, aby se po sečtení rovnic jedna neznámá eliminovala. Dostává se soustava dvou rovnic o dvou neznámých.
- Gauss-Jordanova eliminační metoda
  Při této metodě se pracuje pouze s číselnými koeficienty, které se zapíšou pomocí maticového schématu. Cílem Gauss-Jordanovy eliminační metody je pomocí vhodného násobení a sčítání řádků, převést rozšířenou matici soustavy na matici, kde na levé straně bude jednotková matice a na místě pravých stran řešení soustavy. (LITSCHMANNOVÁ, 2013)
  Poznámka. Jednotková matice je taková matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky, tzn. hlavní prvky jsou rovny jedné, a zbytek míst zaujímají samé nuly.

Rozšířená matice soustavy po provedení Gauss-Jordanovy eliminační metody:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array}\right),$$

kde každá jednička v řádku představuje jednu proměnnou a $d_{1,} d_2, d_3$ jsou odpovídající hodnoty neznámých.

Jak bylo uvedeno dříve v této práci, s touto metodou se studenti setkávají spíše až na vysokých školách. Na středních školách mohou studenti přijít do styku již s Gaussovou eliminační metodou, kdy se soustava převádí pouze na trojúhelníkový tvar. Vyšetří se hodnota třetí neznámé a zbylé proměnné se dopočítají dosazením této hodnoty do zbývajících rovnic.

- Grafické řešení

  Grafickým řešením lineární rovnice se třemi neznámými je rovina. Na rozdíl od grafu lineární rovnice není snadné a názorné tuto situaci geometricky interpretovat. V dnešní době existují softwary např. GeoGebra, které nám umožní znázornit tyto roviny a vidět jejich společné průniky. Grafickým řešením je pak množina společných bodů.

  V prostoru pak mohou nastat následující situace poloh rovin:

  1) Všechny tři roviny různoběžné a procházejí jedním bodem, tj. právě jediné řešení
  2) Všechny tři roviny různoběžné a procházejí průsečnicí, tj. nekonečně mnoho řešení
  3) Všechny tři roviny rovnoběžné, tj. žádné řešení
  4) Dvě roviny rovnoběžné a jedna k nim různoběžná, tj. žádné řešení
  5) Všechny tři roviny různoběžné a neprocházejí žádným společným bodem, tj. žádné řešení
  6) Všechny tři roviny totožné, tj. nekonečně mnoho řešení

Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice (CHARVÁT, 2005) je příkladem učebnice, kde se objevují tyto metody řešení. Navíc se zde zmiňuje i Gaussova eliminační metoda, teorie je uvedená na str. 109.

Příklady:

a) Řešte soustavu rovnic

$$x + 2y + z = 2$$
$$2x + 6y + z = 7$$
$$x + y + 4z = 3$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Např. z rovnice $x + y + 4z = 3$ si vyjádříme neznámou x: $x = 3 - y - 4z$. Výraz $3 - y - 4z$ dosadíme za x do zbývajících dvou rovnic a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$3 - y - 4z + 2y + z = 2$$
$$2(3 - y - 4z) + 6y + z = 7$$

Po úpravě:

$$y - 3z = -1$$
$$4y - 7z = 1$$

Tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých řešíme již známým způsobem. Vypočteme $y = 2$, $z = 1$ a dosadíme do libovolné rovnice a vyšetříme hodnotu x: $x = -3$

Tato soustava rovnice má jedno řešení, trojici čísel $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$.

(2) <u>Sčítací metoda (kombinovaná metoda):</u>

Snažíme se ze všech rovnic eliminovat libovolnou neznámou. Např. sečtením první a druhé rovnice a následným sečtením druhé a třetí rovnice vyloučíme neznámou x a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$2y - z = 3$$
$$4y - 7z = 1$$

Dále postupujeme stejnou metodou jako při řešení klasické soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kdy vyšetříme neznáme hodnoty: $y = 2$, $z = 1$ a dále dosadíme do libovolné rovnice a získáme hodnotu: $x = -3$.

Řešením je uspořádá trojice čísel $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$.

(3) Gauss-Jordanova eliminační metoda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\1&1&4&3\\2&6&1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&-1&3&1\\0&2&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&-1&3&1\\0&0&5&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

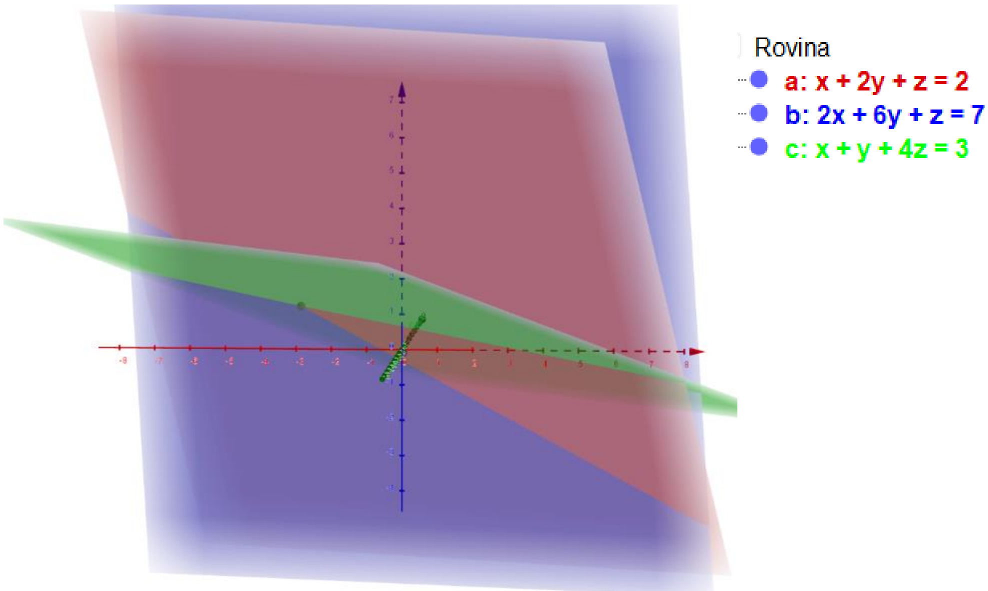
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

1. Krok: Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku.
2. Krok: K třetímu řádku přičteme dvojnásobek druhého řádku a třetí řádek vydělíme 5. Podle $FV.$: $h(A) = h(A^*), h = n,$ má soustava jedno řešení.
3. Krok: Od druhému řádku odečteme trojnásobek třetího řádku a vynásobíme -1.
4. Krok: Od prvního řádku odečteme třetí řádek a zároveň odečteme dvojnásobek druhého řádku.
5. Krok: Z matice vyčteme získané hodnoty: $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$

Poznámka: Další příklady řešené pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody budou bez slovního komentáře, řešíme analogicky.

(4) Grafické řešení:

Graficky se toto řešení interpretuje jako průsečík, který je společný všem třem rovinám, odpovídajících daným rovnicím. V našem případě jeho souřadnice jsou $(x, y, z) = (-3, 2, 1)$. To znamená, že zadaná soustava má právě jedno řešení.



b) Řešte soustavu rovnic

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x + y + 2z = 3$$

$$8x + 11y + z = 3$$

(1) Dosazovací metoda:

Vyjádříme si např.: z druhé rovnice $x, x = 3 - y - 2z$ a dosadíme do zbývajících dvou rovnic.

$$2(3 - y - 2z) + 3y - z = 1$$

$$8(3 - y - 2z) + 11y + z = 3$$

Po úpravě:

$$y - 5z = -7$$

$$3y - 15z = -21$$

Po vyřešení získáme:

$$0y + 0z = 0$$

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení, vztah mezi neznámými zapíšeme pomocí parametru z . Řešením je každá uspořádaná trojice čísel $(10 - 7z, 5\mathrm{z} - 7, \mathrm{z})$ $z \in R$.

(2) Sčítací metoda:

Sečtením prvních dvou rovnic a následném sečtení druhé a třetí rovnice eliminujeme proměnnou z a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$5x + 7y = 1$$

$$-15x - 21y = -3$$

Je patrné, že jedna rovnice je násobkem druhé, proto soustava má nekonečně společných bodů. Řešením je každá uspořádaná trojice čísel $(10 - 7z, 5\mathrm{z} - 7, \mathrm{z})$ $z \in R$.

(3) Gauss-Jordanova eliminační metoda:

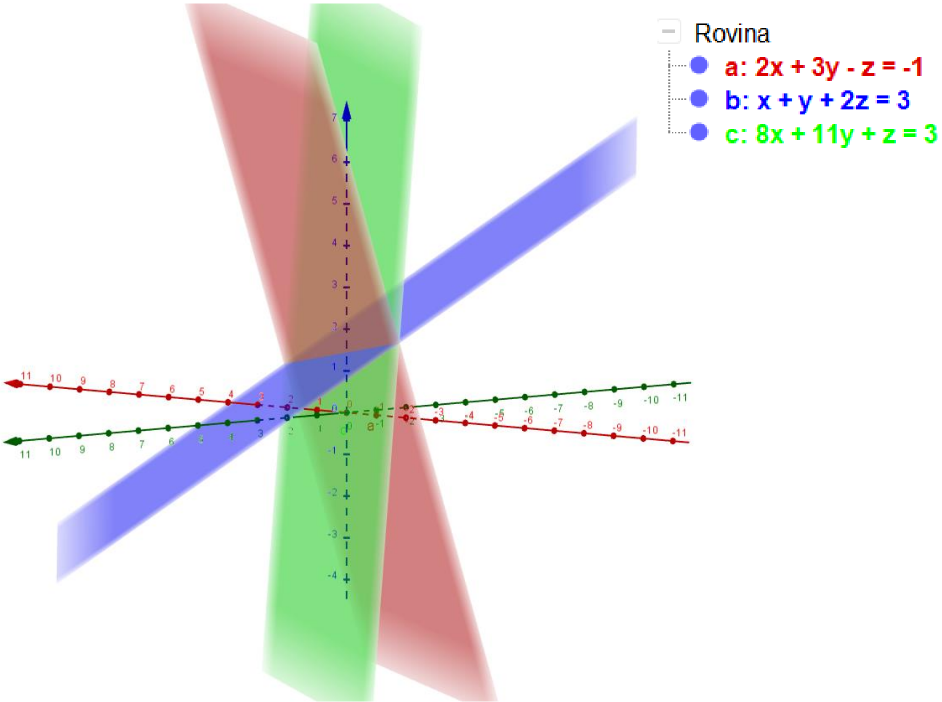
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 11 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 8 & 11 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podle $FV.: h(A) = h(A^*), h < n, h = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení.

Řešením je každá uspořádaná trojice čísel $(10 - 7z, 5\mathrm{z} - 7, \mathrm{z})$ $z \in R$.

(4) <u>Grafické řešení:</u>

Řešením je přímka společných bodů, která je průsečíkem všech tří různoběžných rovin a nazýváme jí průsečnicí.



c) Řešte soustavu rovnic

$$x + 2y + 6z = 3$$
$$\frac{x}{2} + y + 3z = 4$$
$$2x + 4y + 12z = -5$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Vyjádříme si x z první rovnice a dosadíme do zbývajících dvou rovnic.

$$\frac{3 - 2y - 6}{2} + y + 3z = 4$$
$$2(3 - 2y - 6z) + 4y + 12z = -5$$

Po úpravě:

$$0y + 0z = 5$$
$$2y + 6z = -11$$

Nelze vyřešit, daná soustava rovnic nemá řešení.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

Sečtením první a druhé rovnice, druhé a třetí rovnice, získáme soustavu rovnic.

$$0x + y + 0z = -5$$

$$0x + y + 0z = -21$$

Pro tuto soustavu neexistuje žádná trojce čísel (x, y, z), která by splňovala soustavu rovnic.

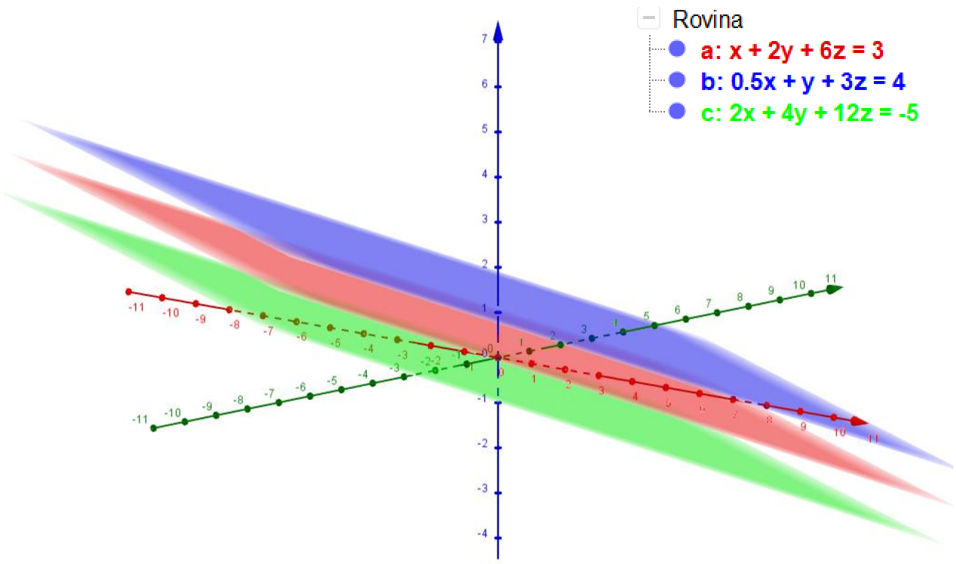
(3) <u>Gauss-Jordanova eliminační metoda:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 12 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & \frac{-5}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \end{array}\right)$$

Podle $F.V.: h(A) \neq h(A^*)$, pro tuto soustavu neexistuje řešení.

(4) <u>Grafické řešení</u>:

Grafickým řešením jsou tři rovnoběžné různé roviny. Nemají žádný společný bod, a proto tato soustava nemá řešení.



d) Řešte soustavu rovnic

$$2x + 4y + 12z = -5$$

$$x + 2y + 6z = 9$$

$$3x - 2y + 8z = 5$$

(1) Dosazovací metoda:

Vyjádříme neznámou x z druhé rovnice a dosadíme do zbývajících rovnic.

$$2(9-2y-6z)+4y+12z=-5$$
$$3(9-2y-6z)-2y+8z=5$$

Po úpravě dostaneme:

$$0y+0z=-23$$
$$-8y+10z=-22$$

Pro tuto soustavu neexistuje žádná trojce čísel (x,y,z), která by vyhovovala dané soustavě rovnic.

(2) Sčítací metoda:

Po sečtení prvních dvou rovnic dostaneme:

$$0x+0y+0z=-23$$

Proto pro zadanou soustavu neexistuje řešení.

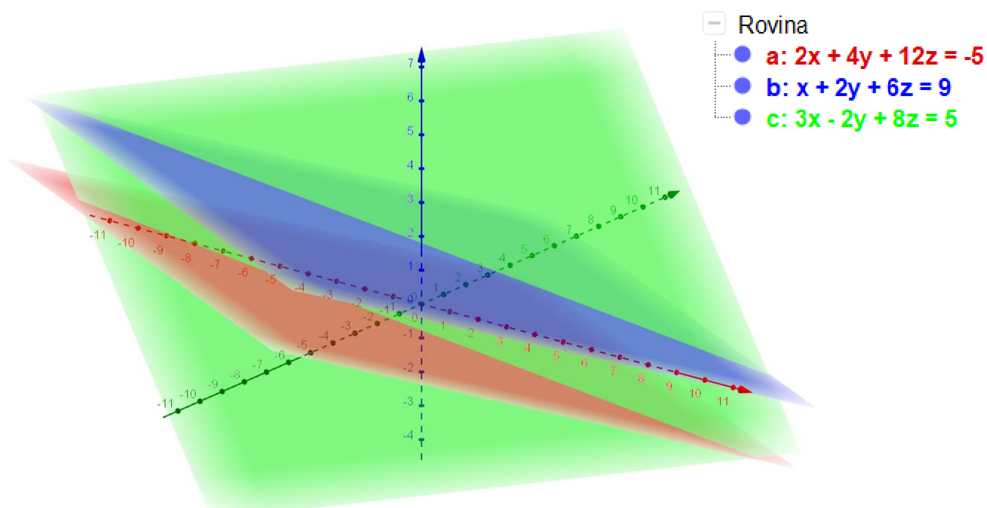
(3) Gauss-Jordanova eliminační metoda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 12 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \\ 3 & -2 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

Podle $F.V.: h(A) \neq h(A^*)$, pro tuto soustavu neexistuje řešení.

(4) Grafické řešení:

Grafickým řešením jsou dvě rovnoběžné roviny a třetí rovina je k nim různoběžná. Tyto tři roviny nemají společný průnik. To znamená, že tato soustava nemá řešení.



e) Řešte soustavu rovnic

$$x + 2y - 3 = 2 - 3z$$
$$2y - 3 = -x - z$$
$$x + 2y - 5z = 2$$

Nejprve zadanou soustavu zjednodušíme.

$$x + 2y + 3z = 5$$
$$x + 2y + z = 3$$
$$x + 2y - 5z = 2$$

(1) <u>Dosazovací metoda:</u>

Vyjádříme neznámou $z, z = 3 - x - 2y$ z druhé rovnice a dosadíme do zbývajících rovnic.

$$x + 2y + 3(3 - x - 2y) = 5$$
$$x + 2y - 5(3 - x - 2y) = 2$$

Po úpravě:

$$-2x - 4y = -4$$
$$6x + 12y = 17$$
$$0x + 0y = 5$$

Pro tuto soustavu neexistuje řešení.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

Po sečtení prvních dvou rovnic a sečtení první a třetí rovnice dostaneme soustavu rovnic, kde se vyskytuje jen jediná neznámá.

$$-z = -1$$
$$z = \frac{3}{8}$$

Po sečtení:

$$0z = -\frac{5}{8}$$

Pro zadanou soustavu neexistuje žádná trojice čísel (x, y, z), která by vyhovovala dané soustavě

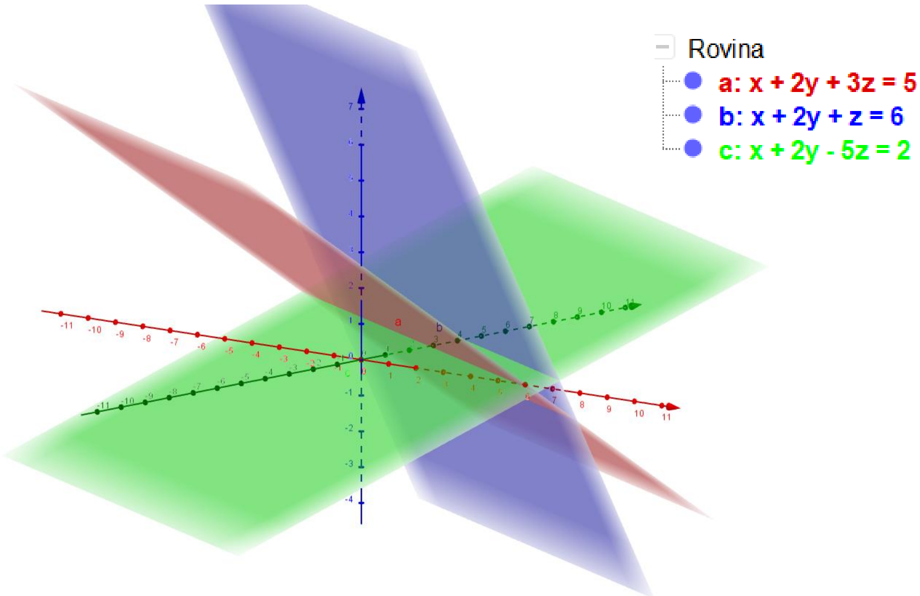
(3) Gauss-Jordanova eliminační metoda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 6\\ 1 & 2 & -5 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -8 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right)$$

Podle $F.V.: h(A) \neq h(A^*)$, pro tuto soustavu neexistuje řešení.

(4) Grafické řešení:

Grafickým řešením jsou tři navzájem různoběžné roviny, které se neprotínají ani v jediném bodě. To znamená, že tato soustava nemá řešení.



f) Řešte soustavu rovnic

$$2x - 4y + z = 3$$
$$x - 2y + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2}$$
$$-6x + 12y - 3z = -9$$

(1) Dosazovací metoda:

Z první rovnice vyjádříme neznámou z a dosadíme do druhé a třetí rovnice.

$$x - 2y + \frac{1}{2}(3 - 2x + 4y) = \frac{3}{2}$$
$$-6x + 12y - 3(3 - 2x + 4y) = -9$$

Po úpravě sečteme rovnice a dostaneme:

$$0x + 0y = 0$$

Pro zadanou soustavu existuje nekonečně mnoho trojic čísel $(x, y, z) = (x, y, 3 + 4y - 2x)$, kde $(x, y) \in R$, které vyhovují všem rovnicím.

(2) <u>Sčítací metoda:</u>

Po sečtení prvních dvou rovnic získáme rovnici $0x + 0y + 0z = 0$ a po sečtení druhé a třetí rovnice dostaneme opět $0x + 0y + 0z = 0$. Závěrem je, že soustava má nekonečně mnoho řešení $(x, y, 3 + 4y - 2x)$, kde $(x, y) \in R$.

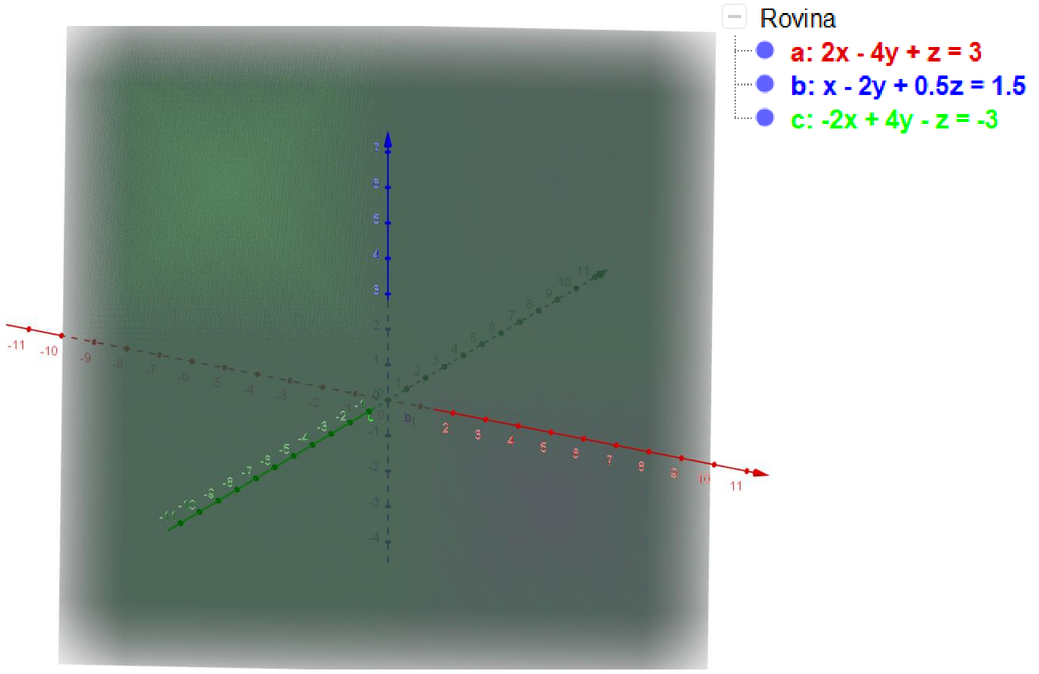
(3) <u>Gauss-Jordanova eliminační metoda:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & 12 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podle $FV.: h(A) = h(A^*), h < n, h = 1,$ zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení $(x, y, 3 + 4y - 2x)$, kde $(x, y) \in R$.

(4) <u>Grafické řešení:</u>

Grafickým řešením jsou tři totožné roviny, které mají všechny body společné. Což znamená, že tato soustava má nekonečně mnoho řešení.



4.1.3 Soustavy lineárních rovnic, kdy je zadáno více rovnic než neznámých

Tato kapitola vychází z online přednášek Lineární algebry a geometrie (HAŠEK, 2017, s. 122-128). Uvažují se soustavy o dvou a o třech neznámých.

Pokud tedy nastane situace, kdy je zadáno více rovnic než neznámých, tak ve většině případů zadaná soustava řešení nemá. Jestliže řešení existuje, v geometrické interpretaci se pak jedná o trsy a svazky prvního druhu.

1) Svazku přímek prvého druhu odpovídá množina všech přímek, které mají společný jeden bod. Tento bod lze označit jako střed svazku a musí splňovat soustavu všech rovnic.
2) Množina všech rovin z A_3, jejichž průnikem je bod, se nazývá trs rovin prvého druhu. A souřadnice hledaného společného bodu musí splňovat soustavu všech rovnic.
3) Množina všech rovin z A_3, jejichž průnikem je přímka, je nazývána svazek rovin prvého druhu a přímka označena jako průsečnice rovin.

Způsob řešení: Nejběžnější postup, jak vyřešit tyto soustavy, je nalézt řešení dvou (resp. tří) libovolných rovnic a přesvědčit se, zda tyto hodnoty odpovídají i zbývající rovnici. Pokud nastává platná rovnost, pro soustavu existuje řešení, v opačném případě soustava nemá řešení. Pro vyřešení soustav se používají libovolné zmíněné metody.

Příklady:

d) Řešte soustavu rovnic

$$7x + 5y = 29$$
$$x - 3y = 1$$
$$-7x + 8y = -39$$

(1) <u>Početní řešení:</u>

Sečtením první a třetí rovnice snadno získáme hodnotu $y, y = -\frac{10}{13}$ a po dosazení do jedné z těchto dvou rovnic vyšetříme hodnotu proměnné $x, x = \frac{61}{13}$.

Tyto získané hodnoty neznámých dosadíme do druhé rovnice, abychom se přesvědčili, že vyhovují i zbývající rovnici.

$$\frac{61}{13} + \frac{30}{13} = 1$$

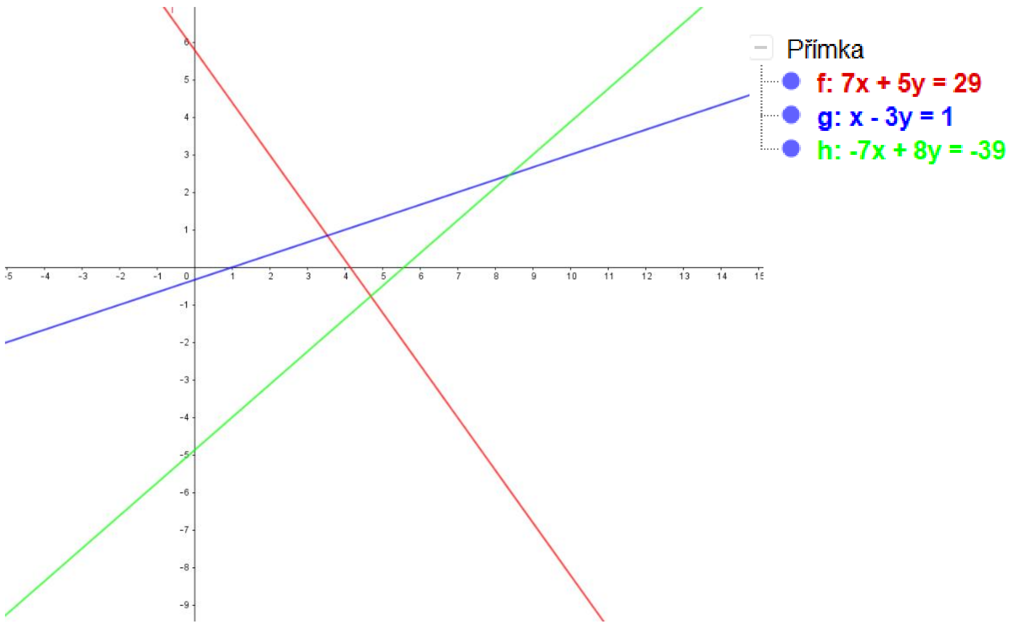
$$7 \neq 1$$

$$L \neq P$$

Uspořádaná dvojice $x = \frac{61}{13}, y = -\frac{10}{13}$ nenáleží druhé rovnici, a proto zadaná soustava nemá žádné společné řešení.

(2) <u>Grafické řešení:</u>

Grafickým řešením jsou tři navzájem různoběžné přímky, které se neprotínají v žádném společném bodě, přičemž každé dvě libovolné přímky mají společný průsečík.



e) Řešte soustavu rovnic

$$x + y = 11$$

$$-2x + 3y = -2$$

$$5x - 2y = 27$$

(1) <u>Početní řešení:</u>

Analogicky jako v předešlém příkladě počítáme soustavu dvou libovolných rovnic a získaný průsečík dosadíme do zbylé rovnice.

Při řešení prvních dvou rovnic libovolnou metodou, nalezneme jedno řešení, uspořádanou dvojici $x = 7, y = 4$. Tyto hodnoty dosadíme do třetí rovnice:

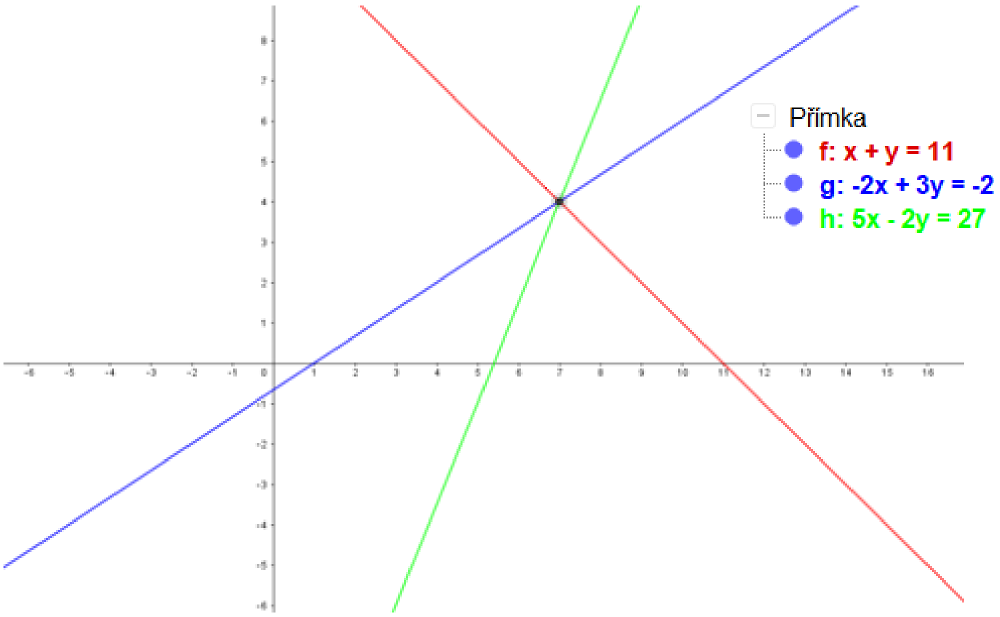
$$5 * 7 - 2 * 4 = 27$$

$$27 = 27$$

Přesvědčili jsme se, že uspořádaná dvojce $x = 7, y = 4$ náleží i třetí rovnici, a proto zadaná soustava má řešení.

(2) <u>Grafické řešení:</u>

Grafickou interpretací této soustavy jsou tři různoběžné přímky, které procházejí společným bodem. Souřadnice tohoto bodu lze vyčíst z obrázku, $x = 7, y = 4$. Takto vzájemnou polohu přímek nazýváme svazek přímek.



f) Řešte soustavu rovnic

$$3x + 4y - z = -6$$

$$x + 8y + z = -2$$

$$x + 2y - \frac{1}{5}z = -2$$

$$-x + 12y + 3z = 2$$

(1) Početní řešení:

Vybereme si tři rovnice, se kterými budeme pracovat, např.:

$$x + 8y + z = -2$$

$$x + 2y - \frac{1}{5}z = -2$$

$$-x + 12y + 3z = 2$$

Zvolíme dosazovací metodu, kdy z poslední rovnice vyjádříme neznámou $x, x = -2 + 12y + 3z$ a dosadíme do zbývajících rovnic. Získáme soustavu:

$$-2 + 12y + 3z + 8y + z = -2$$

$$-2 + 12y + 3z + 2y - \frac{z}{5} = -2$$

Po úpravě:

$$20y + 4z = 0$$

$$14y + \frac{14}{5}z = 0$$

Po vyřešení získáme:

$$0 = 0$$

Soustava tří rovnic o třech neznámých má nekonečně mnoho řešení. Řešení vyjádříme pomocí parametru x, $(x, -\frac{x}{3} - \frac{2}{3}, \frac{5x}{3} + \frac{10}{3})$ $x \in R$. Přesvědčíme se, zda toto řešení vyhovuje i zbývající rovnici.

$$3x + 4(-\frac{x}{3} - \frac{2}{3}) - (\frac{5x}{3} + \frac{10}{3}) = -6$$

$$3x + -\frac{4x}{3} - \frac{8}{3} - \frac{5x}{3} - \frac{10}{3} = -6$$

$$\frac{9x}{3} - \frac{9x}{3} - \frac{18}{3} = -6$$

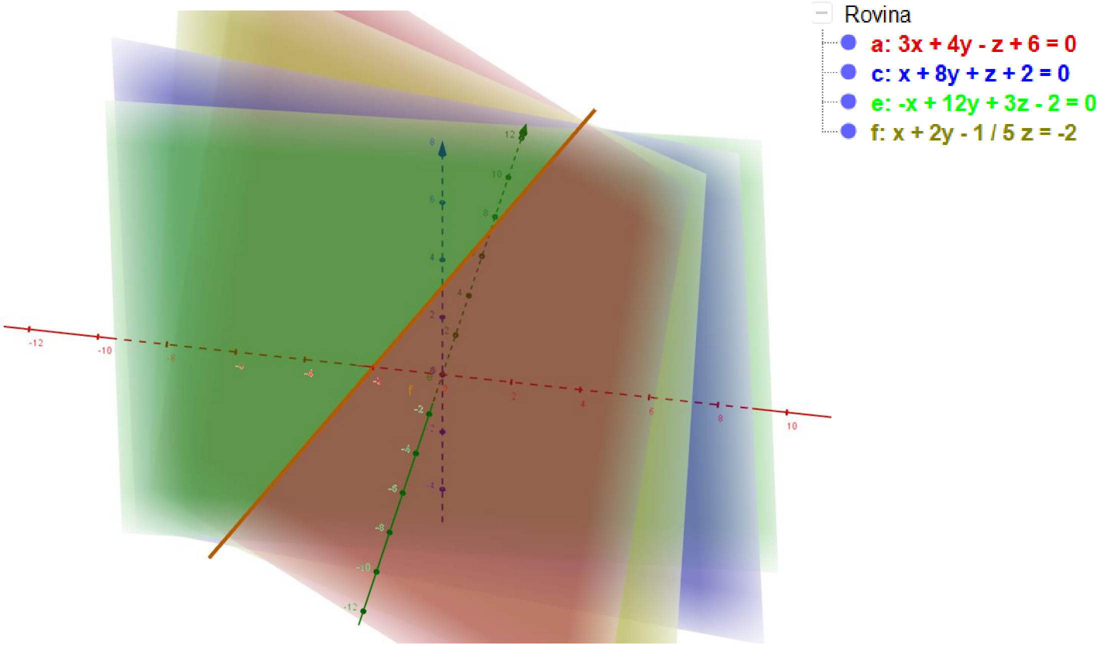
$$-6 = -6$$

$$L = R$$

Řešení $\left(x, -\frac{x}{3}-\frac{2}{3}, \frac{5x}{3}+\frac{10}{3}\right)$ $x \in R$ vyhovuje všem rovnicím, a proto soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

(2) <u>Grafické řešení:</u>

Grafická interpretace ukazuje, že řešením jsou čtyři různoběžné roviny, jejichž společným průnikem je přímka. Tuto situaci lze pojmenovat jako svazek rovin prvého druhu.



g) Řešte soustavu rovnic

$$6x + 15y + 5z = 75$$
$$8x + y - 6z = 5$$
$$-14x - 5y + 13z = 3$$
$$2x + 3y - 2z = 1$$

1) <u>Početní řešení:</u>

Vybereme si tři rovnice, se kterými budeme pracovat, např.:

$$2x + 3y - 2z = 1$$
$$6x + 15y + 5z = 75$$
$$8x + y - 6z = 5$$

Zvolíme např.: Gauss-Jordanovu eliminační metodu a vyřešíme soustavu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 15 & 5 & 75 \\ 8 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 71 \\ 0 & 6 & 11 & 72 \\ 0 & -11 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 71 \\ 0 & 6 & 11 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 71 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$x = 5, y = 1, z = 6$$

Přesvědčíme se, zda hodnoty x, y, z vyhovují i zbývající rovnici.

$$-14 * 5 - 5 * 1 + 13 * 6 = 3$$

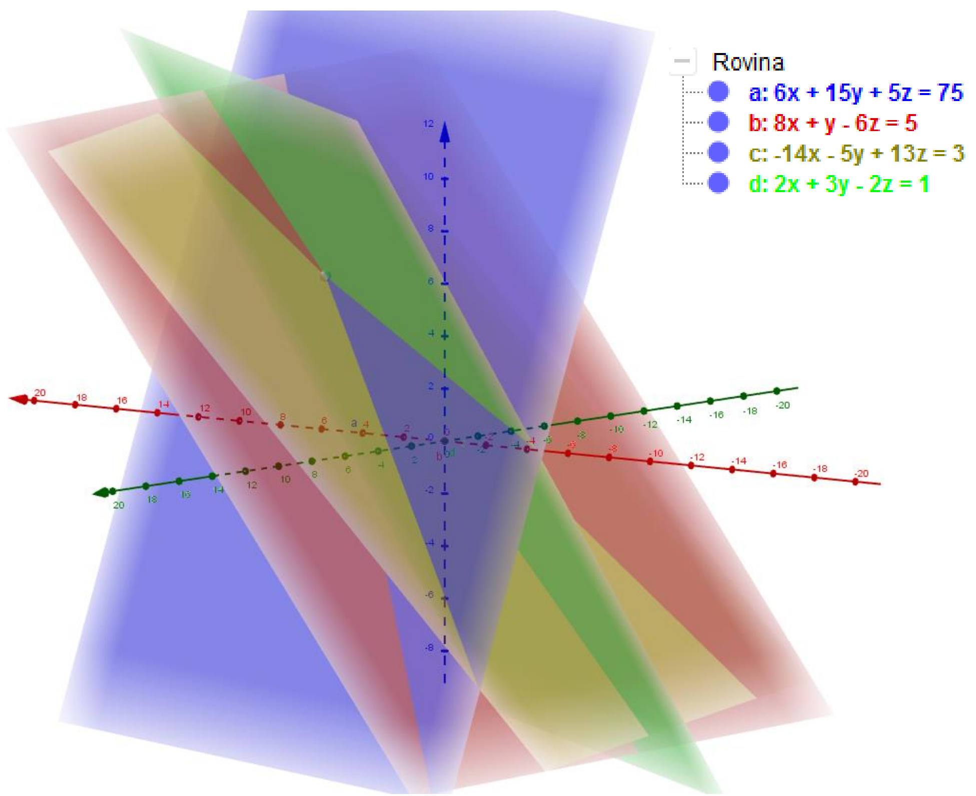
$$3 = 3$$

$$L = R$$

Ověřili jsme, že získané hodnoty náleží i zbylé rovnici, a proto zadaná soustava má právě jedno řešení $x = 5, y = 1, z = 6$.

2) **Grafické řešení:**

Grafickým řešením jsou různoběžné roviny, které procházejí jediným společným bodem. Tuto situaci lze interpretovat jako trs rovin prvého druhu.



4.2 Soustavy rovnic nejvýše druhého stupně

4.2.1 Soustava s lineární a kvadratickou rovnicí s neznámými x, y

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y = b_1$$
$$a_1x + a_2y = b_2,$$

kde $a_1, a_2 \dots a_5$ a b_1, b_2 jsou koeficienty rovnice.

Řešení: Řešení těchto soustav se hledá pomocí dosazovací metody. Z lineární rovnice se vyjádří libovolná neznámá, a toto vyjádření se dosadí do rovnice kvadratické. Jestliže získaná kvadratická rovnice o jedné neznámé bude mít dva kořeny, nesmí se zapomenout k oběma kořenům dopočítat hodnotu druhé neznámé. Využít se může také grafické metody, kdy jsou hledány průsečíky přímky a kuželosečky.

Příklady:

a) Vyšetřete souřadnice průsečíků kružnice $x^2 + y^2 = 25$ a přímky $2x + y = 5$.

1) <u>Početní řešení</u>:

Z poznatku víme, že souřadnice hledaných průsečíků musí splňovat rovnice obou křivek. Proto si vytvoříme soustavu rovnic a za pomocí dosazovací metody nalezneme hledané souřadnice.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$2x + y = 5$$

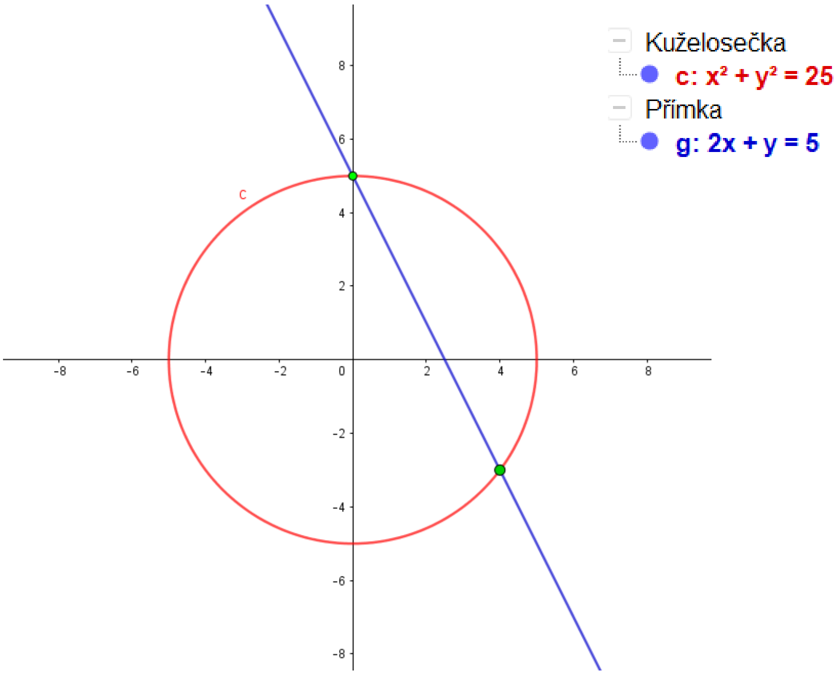
Vyjádříme si y: $y = 5 - 2x$ a dosadíme do rovnice kružnice a získáme kvadratickou rovnici bez absolutního členu.

$$x^2 + (5 - 2x)^2 = 25$$
$$x^2 + 25 - 40x + 4x^2 = 25$$
$$5x^2 - 40x = 0$$
$$x(5x - 40) = 0$$
$$x_1 = 0\,, x_2 = 4$$

Jednotlivé kořeny rovnice dosadíme do libovolné rovnice a získáme hodnoty y: $y_1 = 5\,, y_2 = -3$.

Přímka je sečnou kružnice, proto existují dva průsečíky, jejich souřadnice jsou $x_1 = 0, y_1 = 5$ a $x_2 = 4, y_2 = -3$.

2) **Grafické řešení:**



b) Vyšetřete souřadnice průsečíku kružnice $(x-8)^2+(y-4)^2=8$ a přímky $-x+y=-8$.

1) **Početní řešení:**

$$(x-8)^2+(y-4)^2=8$$

$$-x+y=-8$$

Vyjádříme si $y=x-8$ a dosadíme do rovnice kružnice.

$$(x-8)^2+(x-8\ -4)^2=8$$

Zjednodušíme a získáme kvadratickou rovnici.

$$x^2-16x+64+x^2-24x+144=8$$
$$2x^2-40x+200=0$$
$$x^2-20x+100=0$$

Neznámou x nalezneme pomocí diskriminantu.

$$D=400-400=0$$

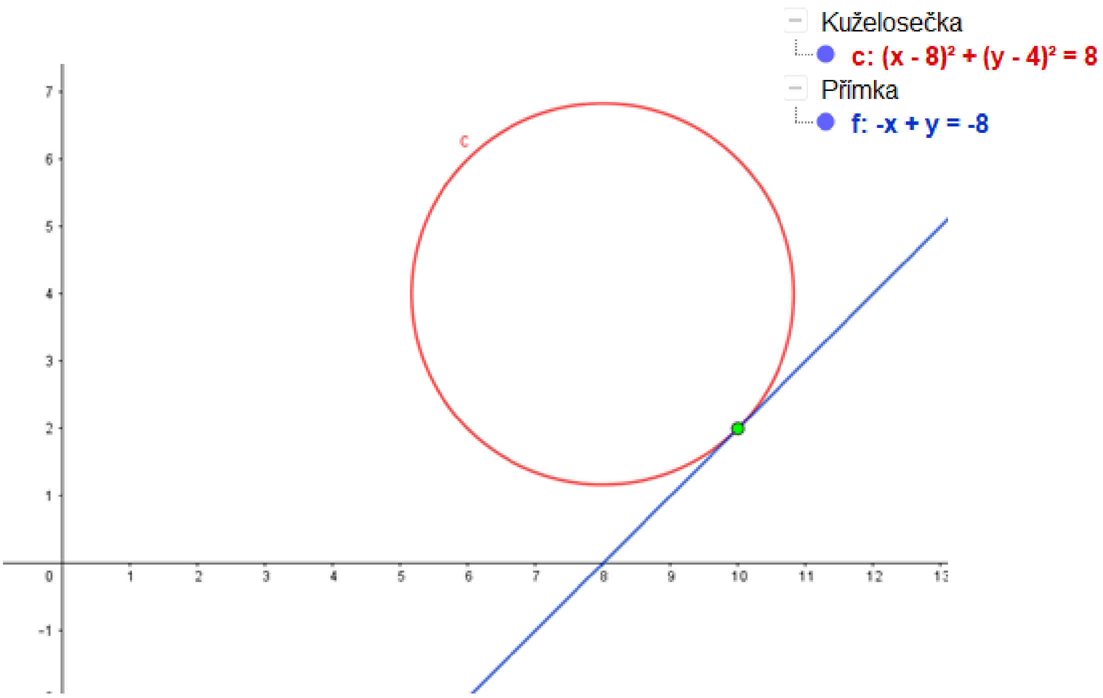
Z toho usuzujeme, že existuje právě jeden průsečík.

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

$$y = 10 - 8 = 2$$

Souřadnice hledaného průsečíku jsou $x = 10, y = 2$, jedná se o dvojnásobný průsečík a přímka je tečnou kružnice.

2) <u>Grafické řešení</u>:



c) Vyšetřete souřadnice průsečíku kružnice $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 13$ a přímky $-2x + 3y = 28$.

1) <u>Početní řešení:</u>

$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 13$$

$$-2x + 3y = 28$$

Vyjádříme si y: $y = \frac{28+2x}{3}$ a dosadíme do rovnice kružnice.

$$(x+4)^2 + \left(\frac{28+2x}{3} - 1\right)^2 = 13$$

Upravíme rovnici.

$$(x+4)^2 + \left(\frac{2x}{3} + \frac{25}{3}\right)^2 = 13$$

$$x^2 + 8x + 16 + \frac{4x^2}{9} + \frac{100x}{9} + \frac{625}{9} = 13$$

$$9x^2 + 72x + 144 + 4x^2 + 100x + 625 = 119$$

$$13x^2 + 172x + 650 = 0$$

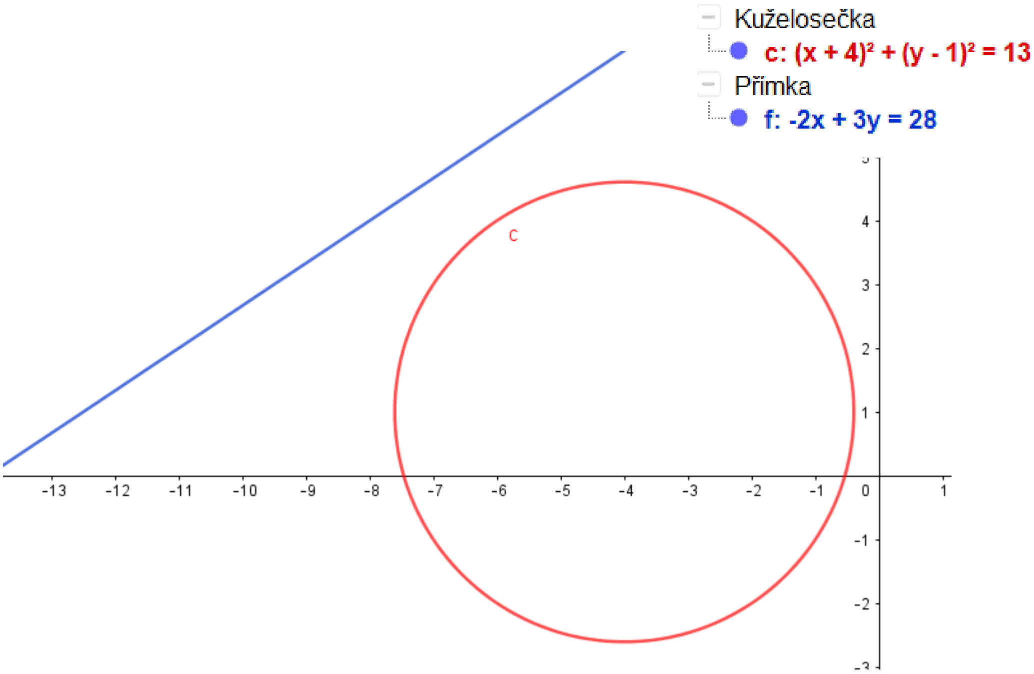
Pomocí diskriminantu nalezneme průsečíky.

$$D = 29584 - 33800$$

$$D = -4216$$

V reálných číslech neexistuje řešení, proto kružnice a přímka nemají společný průsečík. Přímka je nesečnou kružnice.

2) <u>Grafické řešení</u>:



d) Vyšetřete souřadnice průsečíku paraboly $(y-1)^2 = 10(x+\frac{1}{10})$ a přímky $-5x - 6y = 0$.

$$(y-1)^2 = 10\left(x+\frac{1}{10}\right)$$
$$-5x - 6y = 0$$

1) <u>Početní řešení:</u>

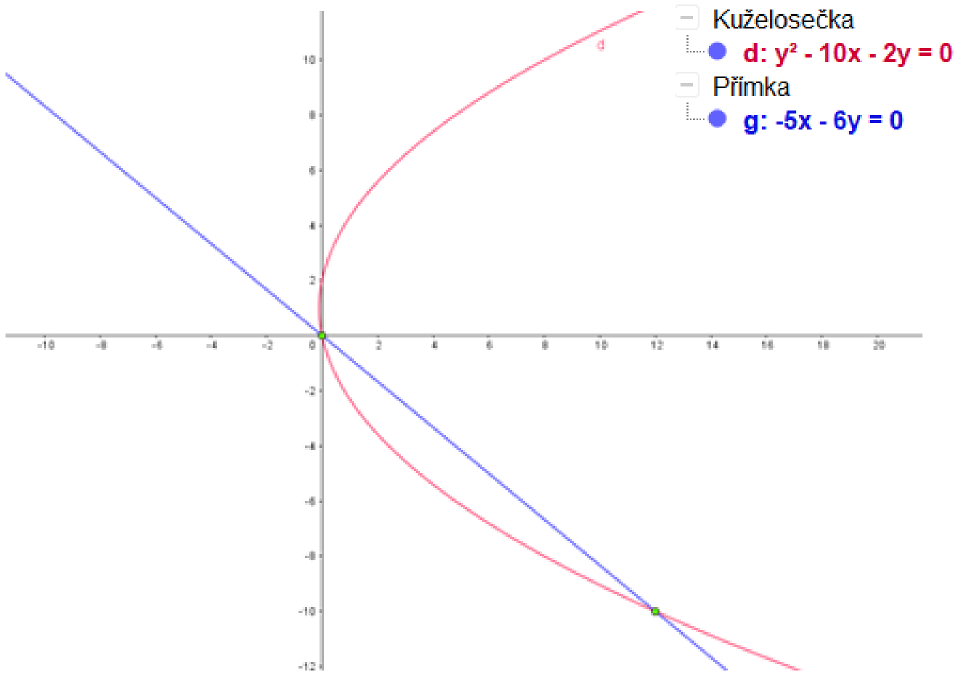
Vyjádříme x: $x = \frac{-6y}{5}$ a dosadíme do rovnice paraboly.

$$(y-1)^2 = 10\left(\frac{-6y}{5}+\frac{1}{10}\right)$$
$$y^2 - 2y + 1 = -12y + 1$$
$$y^2 + 10y = 0$$
$$y(y+10) = 0$$
$$y_1 = 0, y_2 = -10$$

Dosadíme do rovnice a získáme příslušné hodnoty x: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-6*(-10)}{5} = 12.$

Přímka s parabolou má dva průsečíky, jejich souřadnice jsou $x_1 = 0, y_1 = 0$ a $x_2 = 12, y_2 = -10.$

2) <u>Grafické řešení</u>:



4.2.2 Soustava dvou kvadratických rovnic s neznámými x, y

$$a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}xy + a_{14}x + a_{15}y = b_{11}$$

$$a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}xy + a_{24}x + a_{25}y = b_{21},$$

kde $a_{11}, a_{12} \dots a_{25}\ a\ b_{11}, b_{21}$ jsou koeficienty rovnice.

Řešení: Pro řešení dvou kvadratických rovnic se využívá jak sčítací, tak dosazovací metody. Dosazovací metoda je početně náročná, jelikož se často získává rovnice čtvrtého stupně, proto bývá častěji uplatňována kombinace sčítací a dosazovací metody. Při výběru postupu velmi záleží na složitosti zadání, u složitějších soustav mohou vypomoci i různé softwary. Využít se může také geometrické interpretace, kde se nalézají průsečíky dvou kuželoseček.

Příklady:

a) Vyšetřete souřadnice průsečíku kružnice $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 13$ a kružnice $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 10$.

$$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 13$$

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = 10$$

1) <u>Početní řešení:</u>

Vyjádříme si celý výraz $(x-7)^2 = 10 - (y+3)^2$ a dosadíme do první rovnice

$$10 - (y+3)^2 + +(y+4)^2 = 13$$

Zjednodušíme a dostaneme:

$$y = -2$$

Dosadíme do rovnice.

$$(x-7)^2 = 10 - (-2+3)^2$$

$$x^2 - 14x + 49 = 9$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$

Za pomocí diskriminantu nalezneme hodnoty neznáme x.

$$D = 196 - 160 = 36$$

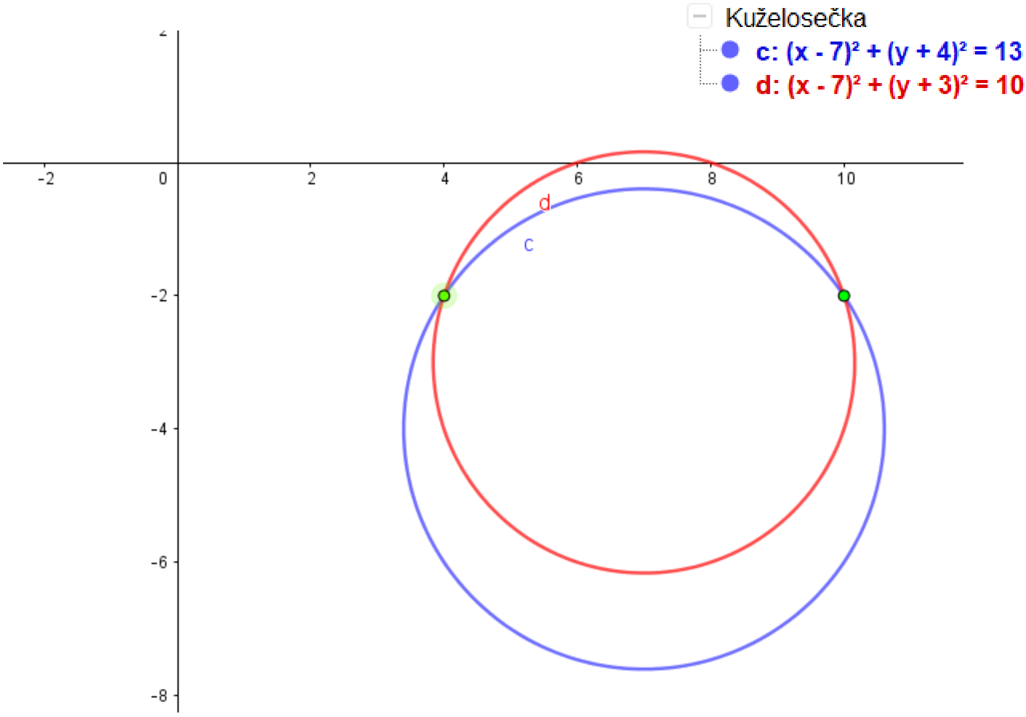
$$\sqrt{D} = 6$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 4$$

Dvě kružnice se protínají ve dvou bodech, souřadnice průsečíků jsou $x_1 = 10$, $y_1 = -2$ a $x_2 = 4, y_2 = -2$.

2) Grafické řešení:



b) Vyšetřete průsečík hyperboly $x^2 + 2xy + y = 0$ a hyperboly $2x^2 + 4xy + 2x - y = -2$.

$$x^2 + 2xy + y = 0$$
$$2x^2 + 4xy + 2x - y = -2$$

1) Početní řešení:

Použitím sčítací metody se eliminuje neznámá x v druhé mocnině a součin xy.

$$2x - 3y = -2$$

$$y = \frac{2x + 2}{3}$$

Získaný výraz dosadíme do libovolné rovnice, např. do rovnice první.

$$x^2 + 2x\left(\frac{2x + 2}{3}\right) + \frac{2x + 2}{3} = 0$$

$$3x^2 + 2x(2x + 2) + 2x + 2 = 0$$

$$3x^2 + 4x^2 + 4x + 2x + 2 = 0$$

$$7x^2 + 6x + 2 = 0$$

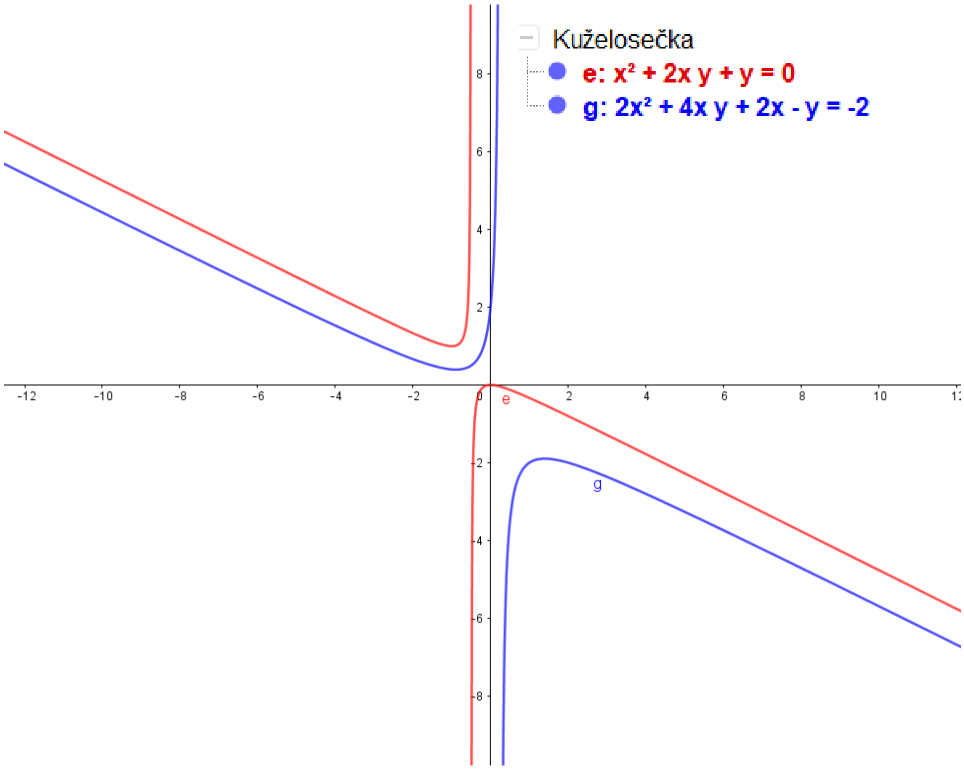
Využitím diskriminantu nalezneme kořeny kvadratické rovnice.

$$D = 36 - 56$$

$$D = -20$$

V reálných číslech neexistuje řešení, proto dvě hyperboly nemají společný průsečík.

2) Grafické řešení:



c) Vyšetřete průsečík kružnice $x^2 + y^2 - 14x + 8y = -52$ a kružnice $x^2 + y^2 - 10x + 2y = 0$.

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y = -52$$
$$x^2 + y^2 - 10x + 2y = 0$$

1) <u>Početní řešení:</u>

Pomocí sčítací metody eliminujeme neznáme x a y v mocninném tvaru.

$$-4x + 6y = -52$$

Odtud vychází: $x = \frac{3y}{2} + 13$ a toto vyjádření dosadíme do libovolné rovnice.

$$\left(\frac{3y}{2} + 13\right)^2 + y^2 - 14\left(\frac{3y}{2} + 13\right) + 8y = -52$$
$$\frac{9y^2}{4} + 39y + 169 + y^2 - 21y - 182 + 8y = -52$$
$$9y^2 + 156y + 676 + 4y^2 - 84y - 728 + 32y + 208 = 0$$
$$13y^2 + 104y + 156 = 0$$
$$y^2 + 8y + 12 = 0$$

Využijeme diskriminant k nalezení kořenů kvadratické rovnice.

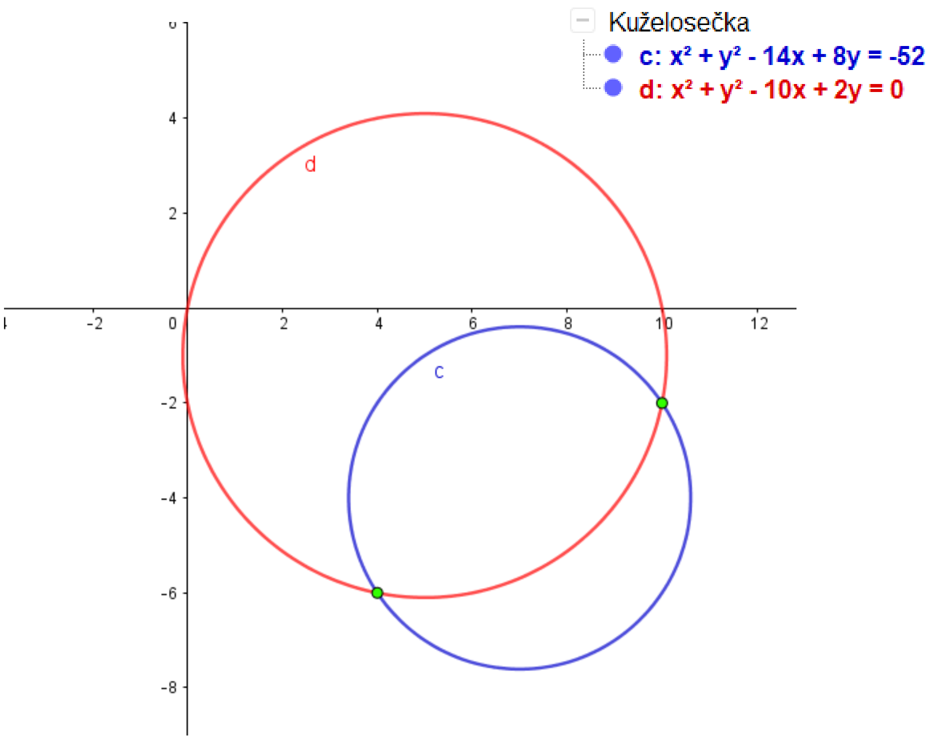
$$D = 64 - 48 = 16$$
$$\sqrt{D} = 4$$
$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{2}$$
$$y_{1,} = -2, y_2 = -6$$

Dopočítáme příslušné hodnoty x, dosazením do rovnice: $x = \frac{3y}{2} + 13$.

$$x_1 = \frac{3*(-2)}{2} + 13 = 10$$
$$x_2 = \frac{3*(-6)}{2} + 13 = 4$$

Tyto dvě kružnice se protínají ve dvou bodech, souřadnice průsečíků jsou $x_1 = 10, y_1 = -2$ a $x_2 = 4, y_2 = -6$.

2) **Grafické řešení:**



d) Vyšetřete souřadnice hyperboly $4x^2 - 5y^2 = -322$ a hyperboly $-48x^2 + 25y^2 = -1200$.

$$4x^2 - 5y^2 = -322$$
$$-48x^2 + 25y^2 = -1200$$

1) **Početní řešení:**

Využitím sčítací metody vyloučíme neznámou x. První rovnici násobíme 12 a dostaneme.

$$48x^2 - 60y^2 = -3840$$
$$-48x^2 + 25y^2 = -1200$$

Po sečtení.

$$-35y^2 = -5040$$
$$y^2 = 144$$
$$y_{1,2} = \pm 12$$

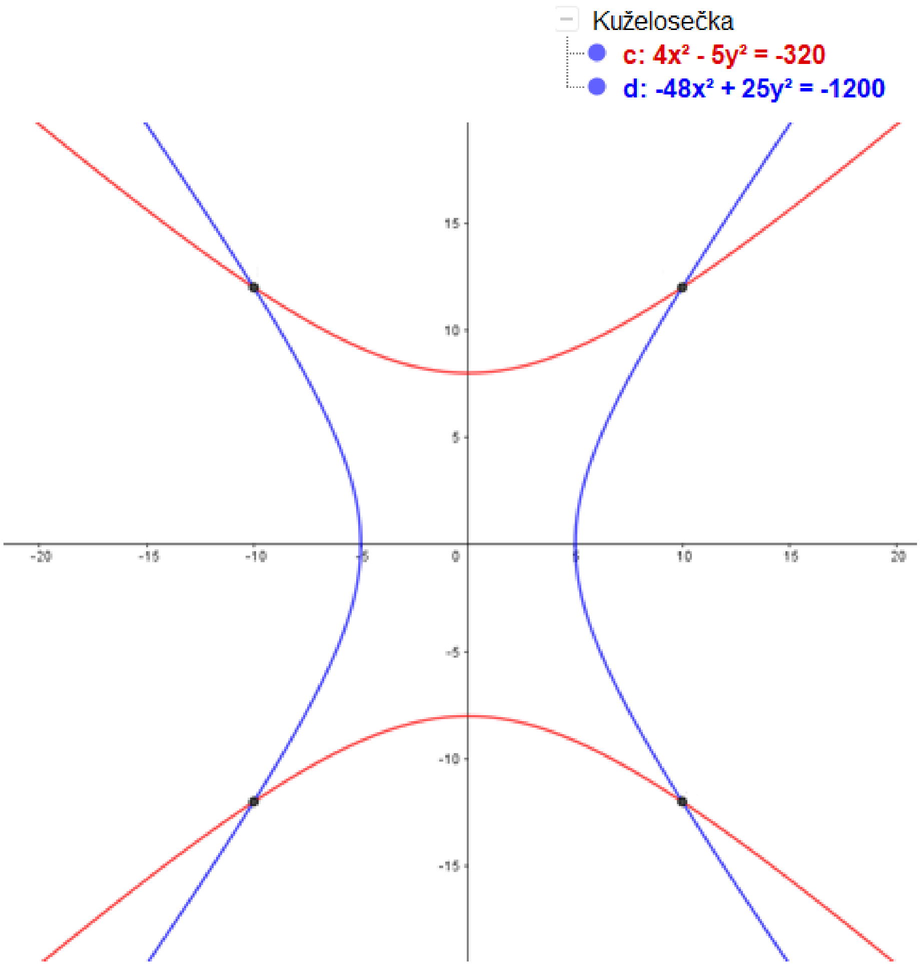
Dopočítáme příslušné hodnoty x dosazením do rovnice: $4x^2 - 5y^2 = -322$

$$y_1: 4x^2 - 5 * 12^2 = -322$$
$$4x^2 = 398$$
$$x_{11,12} = \pm 9{,}975 \cong \pm 10$$

$$y_2: 4x^2 - 5 * (-12)^2 = -322$$
$$4x^2 = 398$$
$$x_{21,22} = \pm 9{,}975 \cong \pm 10$$

Dvě hyperboly se protínají ve čtyřech bodech. Souřadnice průsečíků jsou $(x_{11}, y_1) = (10{,}12)$, $(x_{12}, y_1) = (-10{,}12)$, $(x_{21}, y_2) = (10, -12)$ a $(x_{22}, y_2) = (-10, -12)$.

2) <u>Grafické řešení:</u>



5 Slovní úlohy

Přechod od určité reálné situace k jejímu matematickému vyjádření se nazývá matematizace reálné situace. Poznatky o soustavách rovnic umožňují řešit různé druhy matematických i nematematických úloh. Při řešení těchto úloh se postupuje takto (SMIDA et al., 1985):

a) Reálná situace se „překládá“ do matematického jazyka, zformuluje se jako matematická úloha.
b) Matematická úloha (soustava rovnic) se vyřeší.
c) Získaný výsledek řešení matematické úlohy se interpretuje v reálné situaci a ověří se, zda splňuje podmínky reality. Tzn. vyberou se ta řešení, která jsou řešením dané reálné situace.

Při slovních úlohách je nejobtížnější částí sestavení rovnice podle textu úlohy, ve které se studenti dopouštějí četných chyb. Také často chybují i při řešení konkrétní soustavy rovnic. Zde jsou zmiňovány zásady, které je potřeba dodržet při řešení slovní úlohy (TREJBAL, 1999 a HORÁČEK, 1980):

a) Nejprve pozorně přečíst text úlohy, aby bylo jasné, co je dáno a co se má vypočítat.
b) Vypsání nejdůležitějších údajů a rozhodnutí, které z nich jsou neznámé. Uváží se, zda výsledek bude číslo s jednotkou (kg, m, Kč apod.) a o jaké jednotky jde.
c) Každou z podmínek vyjádříme dvěma výrazy, jejichž hodnoty jsou si rovny. Vztah mezi oběma výrazy vyjádříme rovnicí.
d) Obě rovnice zapíšeme ve tvaru soustavy.
e) O správnosti se přesvědčíme zkouškou.
f) Ověřený výsledek vyjádříme slovní odpovědí.

Mimo způsobu řešení slovních úloh pomocí soustav rovnic, se využívá i řešení pomocí úsudku. Tento způsob používají hlavně žáci, kteří doposud nebyli seznámeni s tématem o soustavách rovnic a úsudkem hledají řešení slovní úlohy. Tento způsob řešení rozvíjí a podporuje myšlení žáka, a i přes to tato metoda bývá na školách často opomíjena. Ve své práci uvádím pár příkladů, které řeším pomocí úsudku a pomocí soustav rovnic.

Příklady:

a) Tři čokolády a dva balíčky oříšků stojí 46 Kč a dvě čokolády a tři balíčky oříšků stojí 49 Kč. Kolik stojí jedna čokoláda a jedno balení oříšků? Tento příklad vychází z učebnice: Matematika pro nižší ročník víceletých gymnázií Rovnice a jejich soustavy (Herman et al., 1999, s. 75-85).

(1) <u>Úsudek:</u>

Jestliže v obou nákupech budeme mít stejný počet čokolád, bude příklad jednodušší. Abychom tento případ získali vynásobíme první nákup dvěma a druhý nákup třemi. Získáme:

6 čokolád a 4 balíčky oříšků stojí 92 Kč.

6 čokolád a 9 balíčků oříšků stojí 147 Kč.

Druhý nákup je dražší, protože kupujeme o pět balíčků oříšků více, a proto platíme o 55 Kč více. Proto stačí, když počet balíčků oříšků vydělíme od rozdílu cen a získáme cenu jednoho balíčku oříšků. Jeden balíček oříšků stojí $55:5 = 11$ Kč. Dopočítat cenu jedné čokolády je již snadné, jelikož známe cenu jednoho balení oříšků. Cenu čokolády vypočteme z jakéhokoliv nákupu.

Cena čokolády činí $8\ Kč$ a balíček oříšků stojí $11\ Kč$.

(2) <u>Soustava rovnic:</u>

K řešení je vhodné zvolit dvě neznámé x a y.

Cenu čokolády označíme písmenem x.

Cenu balení oříšků označíme písmenem y.

Známé údaje pak vyjádříme dvěma rovnicemi.

$$3x + 2y = 46$$
$$2x + 3y = 49$$

Za pomocí kombinované metody nalezneme řešení soustavy. Nejprve uvažujeme dvojnásobek první rovnice a trojnásobek druhé rovnice.

$$6x + 4y = 92$$
$$6x + 9y = 146$$

Následně odečteme od druhé rovnice první rovnici, a tím eliminujeme neznámou x, dostaneme:

$$5y = 55$$

$$y = 11$$

Dopočítáme neznámou x dosazením hodnoty y do jedné z rovnic.

$$3x + 22 = 46$$

$$x = 8$$

Cena čokolády činí 8 Kč a balíček oříšků stojí 11 Kč.

b) Ve družině je 42 žáků, přičemž chlapců je o 4 více než děvčat. Kolik je ve družině dívek a kolik chlapců? Zdrojem je učebnice: Matematika pro 8. ročník základní školy (ŠEDIVÝ et al., 1994, s. 172).

(1) <u>Úsudek:</u>

Rozdíl $42 - 4$ určuje počet žáků, z něhož víme, že polovina jsou děvčata. Proto dívek je $(38{:}\,2) =\ 19$ a chlapců je o 4 více, tj. 23.

(2) <u>Soustava rovnic:</u>

K řešení opět využijeme dvě neznámé x a y.

Počet chlapců označíme písmenem x.

Počet děvčat označíme písmenem y.

Známé údaje vyjádříme soustavou rovnic.

$$x + y = 42$$

$$x - y = 4$$

Využijeme kombinované metody, kdy nejprve provedeme sečtení rovnic.

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Hodnotu x dosadíme do první rovnice.

$$20 + y = 37$$

$$y = 17$$

Ve družině je 20 chlapců a 17 děvčat.

c) U babičky na zahradě jsou slepice a kočky. Celkem je zde jedenáct hlav a třicet dva noh. Kolik je slepic a kolik je koček?

(1) <u>Úsudek</u>

1 slepice a 1 kočka = 6 noh a 2 hlavy

2 slepice a 2 kočky = 12 noh a 4 hlavy

3 slepice a 3 kočky = 18 noh a 6 hlav

4 slepice a 4 kočky = 24 noh a 8 hlav

5 slepic a 5 koček = 30 noh a 10 hlav

Zbývají dvě nohy a jedna hlava, proto na zahradě je šest slepic a pět koček.

(2) <u>Soustava rovnic:</u>

Počet slepic označíme písmenem x.

Počet koček označíme písmenem y.

Pomocí známých údajů vytvoříme dvě rovnice. První rovnice představuje celkový počet zvířat a druhá rovnice představuje celkový počet nohou.

$$x + y = 11$$

$$2x + 4y = 32$$

Pomocí libovolné metody nalezneme hodnoty x a y, $x = 6$ a $y = 5$.

Na zahradě je šest slepic a pět koček.

d) Jirka si zakládá sbírku pavouků a brouků. Zatím jich má dohromady jen osm. Na otázku, kolik má brouků, odpověděl s úsměvem: „Celá moje sbírka má 54 nohou“ Kolik má Jirka pavouků a kolik brouků? Zadání je převzaté z učebnice matematika pro 8. ročník základní školy (ŠEDIVÝ et al., 1994, s. 186).

(1) <u>Úsudek:</u>

1 pavouk a 1 brouk = 14 noh a 2 hlavy

2 pavouci a 2 brouci = 28 noh a 4 hlavy

3 pavouci a 3 brouci = 42 noh a 6 hlav

Zbývají dvě hlavy a 12 noh, proto zastoupení pavouka už nepřipadá k úvahu, a proto máme o dva brouky více než pavouků. Jirka má ve sbírce tři pavouky a pět brouků.

(2) <u>Soustava rovnic:</u>

Počet brouků označíme písmenem x.

Počet pavouků označíme písmenem y.

Vytvoříme příslušnou soustavu rovnic.

$$x + y = 8$$

$$6x + 8y = 54$$

Pomocí libovolné metody nalezneme hodnoty x a y, $x = 5$ a $y = 3$.

Ve sbírce Jirky je pět brouků a tři pavouci.

e) Otec je o 24 let starší než jeho syn. Před šesti lety byl otec třikrát tak starý jako syn. Kolik let je letos otci a kolik synovi? Zadání převzato z učebnice Matematika pro I. ročník gymnázií (SMIDA et al.,1985, s. 109).

(1) <u>Řešení:</u>

Věk otce označíme písmenem x.

Věk syna označíme písmenem y.

Sestavíme příslušnou soustavu rovnic.

$$x = y + 24$$

$$x = 3y$$

Vyřešíme soustavu a získáme hodnoty x a y, $y = 12$ a $x = 36$.

Je důležité si pozorně přečíst zadaní a uvědomit si, že otec byl před **šesti** lety třikrát tak starý jako syn. Proto každému musíme ještě přičíst šest let, $x = 42$ a $y = 18$. Otci je letos 42 let a synovi 18 let.

f) Úloha z počátku 13. století připisována L. Fibonaccimu (1180-1240). Zadání nalezeno v učebnici: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice (CHARVÁT et al., 2005, s. 116).

Kdosi koupil 30 ptáků za 30 penízů. Za tři vrabce platil jeden peníz, za dvě hrdličky též jeden peníz, za jednoho holuba dva peníze. Kolik ptáků každého druhu koupil?

(1) <u>Řešení:</u>

Počet vrabců označíme písmenem x.

Počet hrdliček označíme písmenem y.

Počet holubů označíme písmenem z.

Vytvoříme příslušnou soustavu rovnic, kde první rovnice představuje cenu a druhá rovnice počet ptáků.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 30$$

$$x + y + z = 30$$

Z druhé rovnice vyjádříme např.: x, $x = 30 - (y + z)$ a toto vyjádření dosadíme do první rovnice:

$$\frac{30 - (y + z)}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 30$$

$$60 - 2y - 2z + 3y + 12z = 180$$

$$y + 10z = 120$$

$$y = 120 - 10z$$

$$y = 10(12 - z)$$

Uvažujme dvě rovnice:

$$x = 30 - (y + z)$$

$$y = 10(12 - z)$$

Hodnotu z zvolíme odhadem a zároveň musíme uvažovat v přirozených číslech. Hodnota z nemůže být větší než 12, jelikož y by nabývalo záporných hodnot.

Pokud z se rovná 12 je pro $y = 0$ a pro $x = 18$.

Pokud z se rovná 11 je pro $y = 10$ a pro $x = 9$.

Pokud z se rovná 10 je pro $y = 20$ a pro $x = 0$.

Hodnota z nemůže být menší než 10, jelikož x by nabývalo záporných hodnot.

Pro tuto slovní úlohu vyhovují tři trojice čísel: $(x, y, z) = (18,0,12), (9,10,11), (0,20,10)$.

Pokud předpokládáme, že od každého druhu koupil aspoň jednoho ptáka, je řešením pouze trojice (9,10,11), tj. koupil celkem 9 vrabců, 10 hrdliček a 11 holubů.

g) Jestliže zvětšíme čitatele zlomku o 3 a jmenovatele zlomku o 4, vznikne zlomek hodnoty $\frac{2}{3}$. Naopak zmenšíme-li jmenovatele o 1 a čitatele o 3, vznikne číslo 1. Který je to zlomek? Inspirováno učebnicí: Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ (HUDCOVÁ, 1994).

(1) Řešení:

Čitatele označíme písmenem x.

Jmenovatele označíme písmenem y.

$$\frac{x+3}{y+4}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-1}{y-3}=1$$

Eliminujeme zlomky.

$$3x+9=2(y+4)$$

$$x-1=y-3$$

Upravíme na jednodušší tvar.

$$3x-2y=-1$$

$$y=x+2$$

Využijeme dosazovací metody.

$$3x-2(x+2)=-1$$

$$3x-2x-4=-1$$

$$x=3$$

Dosadíme hodnotu za x.

$$y=3+2=5$$

Hledaný zlomek je $\frac{3}{5}$.

h) Tři vesnice K, L, M jsou rozloženy tak, že cesta z K do M přes L je rovna 12,5 km, z L do K přes M 15,5 km a z M do L přes K je 9 km. Určete vzdálenosti mezi jednotlivými vesnicemi. Zadání převzato z učebnice: Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ (HUDCOVÁ, 1994, s.208).

(1) Řešení:

$$(K+L)+(L+M)=12{,}5$$

$$(L+M)+(M+K)=15{,}5$$

$$(M+K)+(K+L)=9$$

$K + L$ označíme písmenem x

$L + M$ označíme písmenem y

$M + K$ označíme písmenem z

Nahradíme závorky neznámými:

$$x + y = 12{,}5$$

$$y + z = 15{,}5$$

$$z + x = 9$$

Využijeme dosazovací metody, kdy z poslední rovnice vyjádříme x: $x = 9 - z$ a dosadíme do první rovnice: $9 - z + y = 12{,}5$. Z této rovnice vyjádříme y: $y = 3{,}5 + z$ a dosadíme do druhé rovnice a vyřešíme.

$$3{,}5 + z + z = 15{,}5$$

$$z = 6$$

Tutu hodnotu dosadíme do posledních dvou rovnic a získáme hodnotu neznámé x a y, $x = 3$ a $y = 9{,}5$.

Vzdálenost z K do L jsou 3 km, z L do M 9,5 km a z M do K 6 km.

6 Závěr

Cílem teoretické části práce bylo obecné pojetí o soustavách rovnic a jejich způsoby řešení, probírané na základních a středních školách. Navíc jsem čtenáře seznámila i s možností řešení soustav pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody a s tím spojený maticový zápis.

Cílem příkladové části bylo představit řešené příklady, na které jsem aplikovala všechny metody, uvedené v teoretické části. U řešených příkladů bylo možné vidět srovnání obtížnosti a časové náročnosti všech metod, doplněné slovním komentářem. Proto si čtenář může zvolit metodu pro řešení soustav, která mu nejvíce vyhovovala. Závěrem byly prezentované slovní úlohy, protože žákům často činí při sestavování rovnic velké obtíže. Některé z nich byly řešené jak s použitím soustav, tak i pomocí úsudku.

Při zkoumání doporučených osnov stanovených rámcově vzdělávacím programem jsou soustavy rovnic, dle mého názoru, na školách probírány v dostatečném rozsahu. Dále se domnívám, že by má bakalářská práce mohla být nápomocna při výuce tohoto tématu na základních a středních školách.

7 Literatura

BARTSH, H. - J. (1996). *Matematické vzorce*, 3. revidované vydání, Praha: Mladá fronta.

BUŠEK, I., KUBÍNOVÁ, M., NOVOTNÁ, J. (1996). *Matematika pro 9. ročník základní školy 1. díl*, 1. vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

HAŠEK, R. (2017). *Lineární algebra a geometrie* [online]. © 14. 2. 2017 [cit. 2019-02-16]. Dostupné z:http://home.pf.jcu.cz/~hasek/LA2/LAG_TextPrednasek_2017_1.pdf.

HERMAN, J., CHRÁPAVÁ, V., JANČOVIČOVÁ, E., ŠIMŠA, J. (1999). *Matematika pro nižší ročník víceletých gymnázií Rovnice a jejich soustavy*, 1.vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

HORÁČEK, R. (1980). *Algebra pro 9. ročník,* 7. vydání, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p.

HUDCOVÁ, M., KUBIČKOVÁ, L. (1994). Sbírka úloh z matematiky pro střední odborná učiliště a střední odporné školy, 1. vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

CHARVÁT, J., THOUF, J., BOČEK, L. (2005). *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*, 3. vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

LITSCHMANNOVÁ, M. (2013). *Lineární algebra pro IT* [online]. [cit. 2019-03-04]. Dostupné z:https://homel.vsb.cz/~lit40/LA/PDF/GJM_p.pdf.

POLÁK, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky*, 10.vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

SMIDA, J., LUKATŠOVÁ, J., ŠEDIVÝ, J., VOCELKA, J. (1985). *Matematika pro I. Ročník gymnázií,* 1. vydání, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p.

ŠEDIVÝ, O., KŘIŽALKOVIČOVÁ, M., MACHÁČEK, V., ŽIDEK, S. (1994). *Matematika pro 8. ročník základní školy 1. díl,* 2. vydání, Praha: Prometheus, s.r.o.

TREJBAL, J. (1999). *Matematika pro 9. ročník základní školy 2. díl,* 2.vydání, Praha: SPN-pedagogické nakladatelství, a.s.