Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita
Pedagogická fakulta
Katedra pedagogiky a psychologie

Diplomová práce

Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1.stupni ZŠ

Vypracovala: Zuzana Löffelmannová
Vedoucí práce: doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D.
České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 20. prosince 2018 ....

Zuzana Löffelmannová

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat doc. PhDr. Aleně Hošpesové, Ph.D. za trpělivé vedení mé práce a odborné rady. Další poděkování patří vedení, učitelům a učitelkám na 10. ZŠ v Plzni za to, že mi poskytli příjemné prostředí pro vyzkoušení výukových experimentů. Žákům této školy děkuji za nadšení a pozitivní zpětnou vazbu.

Abstrakt

Diplomová práce řeší problematiku zařazování badatelsky orientované výuky do hodin matematiky na 1. stupni základní školy. V rámci řešení tohoto problému jsme definovali pojem badatelsky orientovaná výuka a nalezli specifické znaky této výuky v hodinách matematiky. V učebnicích nakladatelství Fraus jsme nalezli úlohy, které vedou k bádání a vytvořili jsme přípravy na jednotlivé vyučovací hodiny. Vybrané lekce jsme vyzkoušeli a zjistili jsme, zda je možné je v praxi využít. Výsledky a hodnocení těchto hodin jsou popsány v evaluační části. Uvedené poznatky umožňují učitelům matematiky na 1. stupni ZŠ zařazovat badatelsky orientovanou výuku do vyučování.

Klíčová slova: badatelsky orientovaná výuka, matematika a její aplikace, 1. stupeň, základní škola, aktivizační metody

Abstract

This diploma thesis is focused on incorporating inquiry based mathematics education in lower primary school. The term inquiry based education has been defined and specific signs of this education in mathematics have been found. Some tasks leading to inquiry have been identified with the help of textbooks of Fraus publishing. These tasks have been used to create lesson plans for this kind of education. Chosen lesson plans have been applied in practice and the decision about their usability has been made. Results of these lessons have been described in the evaluation. Stated findings lay the ground for primary teachers to involve inquiry based mathematics education in their lessons.

Key words: inquiry based education, mathematics, lower primary school, activation methods

Obsah

1 Úvod

Ve školství se můžeme setkat s přístupem, kdy učitel požaduje reprodukování poznatků v matematice tak, jak je on sám žákům sdělil. Tato metoda může být považována za rychlou a efektivní. Žáci si mohou informaci zapamatovat, avšak tato znalost bývá často povrchní a pomíjivá. Je důležité, aby si žáci osvojili co největší množství informací a vzorečků, které pro ně budou v budoucím životě nevyužitelné? Nebo bychom je měli učit nad věcmi přemýšlet, hloubat a bádat?

Odpovědí na naše otázky nám může být současný pohled na školství. Společnost volá po zlepšování vzdělávání, odborníci přicházejí s novými a inovativními metodami výuky. Mezi takové metody patří také badatelsky orientovaná výuka (BOV), na kterou se zaměřuje tato diplomová práce.

Motivací pro napsání této práce nám byly sympatie k badatelsky orientované výuce matematiky (BOVM). Diplomová práce se zaměřuje na problematiku zařazování této metody do hodin matematiky na 1. stupni ZŠ. Rádi bychom naší prací pomohli učitelům a učitelkám 1. stupně základní školy nahlédnout do problematiky BOV.

1.1 Cíle práce a použité metody

Naším hlavním cílem je zpřístupnit BOV učitelkám a učitelům prvního stupně. Pro dosažení tohoto hlavního cíle jsou plněny cíle dílčí, a to:

- podrobně charakterizovat BOVM,
- prostudovat RVP ZV v rámci hledání vhodných témat pro uplatnění BOVM,
- zpracovat podrobné přípravy na vyučování,
- realizovat pět výukových experimentů zaměřených na vyzkoušení vybraných příprav v praxi,
- popsat výhody a úskalí takto chápané výuky.

Diplomová práce je zpracována ve třech částech - teoretické, praktické a evaluační.

Teoretická část obsahuje detailní charakteristiku BOV, která byla zpracována na základě studia odborné literatury. V rámci této části jsme hledali návaznost BOV na kurikulární dokumenty a to především v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2017). Předmětem další studie byly učebnice matematiky nakladatelství Fraus, kde byly vyhledávány úlohy vedoucí k bádání.

Praktická část obsahuje podrobně rozpracované přípravy na vyučování. Ty vycházejí z úloh profesora Hejného. Tyto přípravy byly využity jako podklad pro výukové experimenty, které proběhly na 10. ZŠ v Plzni ve 4. a 5. ročníku.

Evaluační část obsahuje reflexi úskalí takto chápané výuky. Úvaha nad pozitivy a negativy této metody proběhla na základě vyzkoušených lekcí.

2 Teoretická část

2.1 Přístup učitele k výuce matematiky

Česká škola má za sebou dlouhou cestu. V jejím průběhu byla ovlivňována různými vlivy, které se promítají i do dnešního pojetí výuky. Tradiční vyučování má stále své výhody, ale výuka se více přizpůsobuje dnešnímu dítěti. V současné škole se čím dál více prosazují nové metody vyučování. Frontální výuka již není považována za jedinou metodu vytváření sítí poznatků, především ne v matematice. Žáci touží poznávat svět sami. Rolí učitele by mělo být jim tuto možnost poskytnout a zprostředkovat. V současné škole se využívají aktivizační metody práce s žáky. Ti se aktivně zapojují do výukových aktivit, výuka se pro ně stává atraktivnější a zajímavější.

Hejný a Kuřina (2015, s. 119) jsou toho názoru, že bychom měli omezit takové vyučovací hodiny, ve kterých probíhá poznání bez hlubšího porozumění. Tradiční výuka je soustředěná na popis hotové struktury. My bychom ale naopak měli u žáků rozvíjet umění vidět, počítat, konstruovat, abstrahovat, argumentovat a dokazovat (tamtéž, s. 188-189).

2.2 Obecně o BOV

„*Pokusy nejisté, aby se uplatnila pozornost a nastala nám nutnost zkoumat věci hlouběji.*“ Jan Amos Komenský

2.2.1 Co je badatelsky orientovaná výuka?

Badatelsky orientovaná výuka (BOV, angl. Inquiry Based Education - IBE) je aktivizující metoda. Jak uvádí ve svém článku Dostál (2013a, s. 85-86), teorie BOV není v České republice ještě zcela ukotvena. Pohledy na BOV se liší podle autorů, každý tento pojem chápe nepatrně jinak. V současnosti je metoda užívaná především v přírodních vědách.

Artigueová a Blomhøj (2013) jsou toho názoru, že práce žáků v této metodě je podobná práci vědců a matematiků. Takovou činnost můžeme do výuky začleňovat více či méně. Termín badatelsky orientovaná výuka podle autorů naznačuje, že je smysluplné využít ji jako hlavní rys vyučovacího programu. Proces bádání je zde založen na souhře známého a neznámého v situacích, kdy jedinec nebo skupina čelí výzvě. Tyto situace jsou považovány za podnětné nebo dokonce lehce fascinující.

V projektu Fibonacci Baptist (2012) uvádí, že bádání pomáhá zapojit matematické myšlení a porozumět základním metodám. Nezačíná se s formulacemi a pravidly, ty se mohou uvádět na konci vyučovacího procesu.

Při badatelsky orientované výuce se vytváří takové situace, které podporují žákovu zvídavost. V tomto projektu se také objevuje myšlenka, že pomocí předchozích zkušeností s řešením problémů můžeme vyřešit problém související. Některé kroky můžou vést k rozebrání a znovupostavení nové a obsáhlejší myšlenky. Žák by měl mít vlastní zkušenosti, které mu umožní porozumět různým aspektům světa. Důležité je vypěstovat si dovednosti, které by žáci využili při ověřování svých nápadů. Mezi takové patří např. kladení otázek, předvídání, pozorování, tlumočení, schopnost komunikace a reflexe.

Dostál (2015) říká, že při BOV se žáci učí více než jen přijímat informace na základě aktivní činnosti. Žák si nejen osvojuje poznatky, které si osvojit má, ale zároveň přijímá badatelské postupy a myšlení. Na základě podrobné analýzy jednotlivých prací zabývajících se BOV vytvořil autor vymezení pojmu badatelsky orientovaná výuka:

„Badatelsky orientovaná výuka je činnost učitele a žáka zaměřená na rozvoj vědomostí, dovedností a postojů žáka na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečnosti, kterou se sám učí objevovat a objevuje.“ (Dostál, 2015, s. 54)

O bádání se zmiňují také Hejný a Kuřina (2015, s. 21-23), kteří vědeckou činnost připodobňují k dětskému osvojování si mateřského jazyka. Stejně jako vědci nikdo nesděluje nové poznatky, tak i dítě si význam slov osvojuje na základě vlastních zkušeností. Bádání je podle nich *„proces hledání odpovědí na aktuální otázky“*.

2.2.2 Kořeny badatelské výuky

Badatelsky orientovaná výuka má kořeny v dávné minulosti. Její základní myšlenky zpracoval Dewey (1938). K nalezení původu této výuky můžeme jít ale ještě dál - a to do 5. století př.n.l. k řeckému filozofovi Sokratovi. Jeho dialogická metoda tázání (též sókratovská, maieutická) je založená na principu vylučování nevhodných hypotéz.

Dále bychom se mohli zastavit v 19. století. Zde se objevují další náznaky badatelské výuky. Můžeme zmínit pedagogy Pestalozziho, Fröbela a přírodovědce Humboldta.

Postupně se badatelsky orientovaná výuka dostala i do České republiky. Stalo se tak na základě několika evropských projektů. Z těchto bychom jmenovali ty zaměřené jak na přírodovědné předměty, tak i na matematiku. Samková et al. (2015, s. 95) uvádí tyto projekty:

- FIBONACCI (2010–2013), www.fibonacci-project.eu,
- ASSIST-ME (2013–2016), assistme.ku.dk,

- MaSciL (2013–2016), www.mascil-project.eu.

V odborné literatuře se také mluví o přístupu konstruktivistickém. Základy konstruktivismu položil švýcarský psycholog Piaget. Podle Stehlíkové a Cachové (2006) se v didaktice matematiky o konstruktivistickém přístupu mluví od 80. let minulého století, především v rovině teoretické. V jeho vývoji můžeme najít několik přívlastků, např. radikální, sociální, didaktický aj. Nás zajímá především konstruktivismus sociální, jehož základy podal psycholog Vygotskij. Zde se objevuje myšlenka, že při konstruování poznatků hraje nezastupitelnou roli sociální interakce.

Dále bychom mohli mluvit o metodě heuristické (z řec. heuréka = objevil jsem, nalezl jsem). Jedná se o metodu, která využívá lidského rysu poznávat a odhalovat, tedy činnosti řešení problémů. V základu jde o to, že učitel žákům poznatky nesděluje, ale poskytuje jim možnost samostatného osvojování (Maňák, Švec, 2003, s. 113). Učitel aktivně řídí žákovo zkoumání, předkládá žákům problémy a kroky v jejich řešení. V ohledu k úrovním bádání (viz kapitola 2.2.3) je touto metodou realizováno strukturované a nasměrované bádání (Dostál, 2015).

2.2.3 Úrovně bádání

Při badatelsky orientované výuce by měl učitel dbát na zkušenosti žáků. Čím více jsou s bádáním obeznámeni, tím více prostoru jim může ponechat. V odborné literatuře můžeme najít vymezené úrovně bádání (Dostál, 2015; Votápková, 2013). Tyto úrovně jsou sestaveny podle míry zapojení žáka do bádání a to od nejmenšího k plnému zapojení.

Potvrzující bádání je nejmenší míra zapojení žáka. Bádání je řízeno učitelem, který poskytuje otázku, postup i výsledky. Úkolem žáků je podle učitelova podrobného návodu tyto výsledky ověřit nebo potvrdit. Nedochází zde přímo k bádání, přesto se rozvíjí pozorovací, experimentální a analytické schopnosti. Jde o seznámení s procesem bádání.

Strukturované bádání je ve větší míře také řízeno učitelem. Oproti předchozí úrovni ale žáci zde znají pouze otázku a postup. Učitel je nabádá k vyřešení problému pomocí kladení otázek. Není zde veliký prostor pro samotné tvoření žáků. Ti hledají řešení a vysvětlují na základě shromážděných důkazů. Rozvíjí se zde schopnosti pro vyšší úrovně bádání.

Nasměrované bádání si již více řídí žáci sami. Učitel je průvodcem jejich bádání. Na základě spolupráce s žáky stanoví problém, je v roli pomocníka a rádce. Žáci navrhují postupy, ověřují a řeší výzkumné otázky. Velkou měrou se zde rozvíjí samostatnost.

Otevřené bádání je poslední úrovní bádání, která se přibližuje vědeckému bádání. Učitel zde do bádání nezasahuje. Žáci sami stanovují problém, postup, zkoumají i sestavují výsledky. Tato úroveň má značné kognitivní nároky.

2.3 BOV v matematice

Velké množství lidí má zkreslenou představu o matematice. Když se řekne matematika, představí si definice, vzorce a jejich aplikaci na příklady. Příčinou tohoto názoru je transmisivní způsob výuky matematiky ve školách. Matematika je ale něco více, než jen čísla a útvary (Baptist, 2012).

2.3.1 Kroky BOV

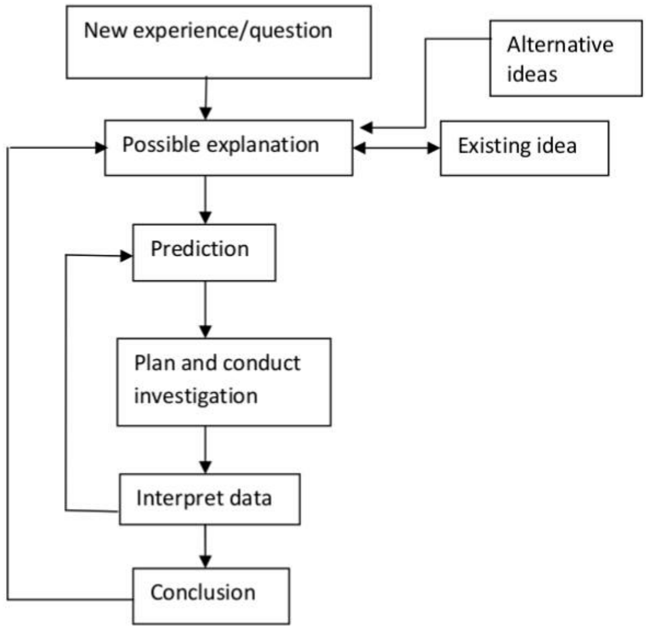
Dostál (2015) uvádí, že bádání se skládá z jednotlivých kroků, jaké můžeme najít i při vědeckém bádání. Některé tyto kroky se shodují s popisem bádání, jak ho podávají Artigueová a Blomhøj (2013). Na základě studia těchto zdrojů můžeme popsat jednotlivé kroky badatelsky pojatého vyučování. Patří sem:

- problém/otázka,
- vytvoření hypotézy a možných vysvětlení problému,
- předvídání,
- experimenty, ověřování hypotézy, sběr dat a jejich analýza,
- formulace závěru,
- prezentace, objevení nových problémů/otázek.

Artigueová a Blomhøj(2013) jsou toho názoru, že bádání je velmi zřídka lineární proces. I přes to, že má lineární strukturu, obsahuje několik cyklů. Může dojít k přepracovávání předchozích kroků, existují zde interakce mezi jednotlivými složkami bádání.

Pro srovnání s bádáním v matematice a přírodovědě můžeme využít graf bádání (obr. 1) podle autorky Harlenové (2010). Bádání začíná problémem nebo otázkou. K tomuto problému vytváříme hypotézy, jež mohou být založeny na našich předchozích zkušenostech nebo na nových nápadech. Předvídáním odhadujeme funkčnost a užitečnost našich hypotéz. V následujícím kroku shromažďujeme a analyzujeme důkazy, které porovnáváme s našimi předpoklady. Pokud se hypotéza potvrdí, formulujeme závěry našeho bádání. Je ale možné, že hypotéza se projeví jako nefunkční. V tomto případě využijeme alternativní nápady, které testujeme stejným způsobem, jako ty prvotní.

Jak můžeme vidět, mezi bádáním v matematice a v přírodovědných předmětech není velký rozdíl, pokud na bádání nahlížíme spíše jako na vědeckou



Obrázek 1: Graf bádání dle Harlenové, 2010, s. 2

činnost, než jako na pouhé řešení problému.

2.3.2 Využívané metody a přístupy

„Aktivizující metody jsou postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně-vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž důraz se klade na myšlení a řešení problémů." (Jankovcová et al. in Maňák, Švec, 2003, s. 105)

V rámci BOV je možné využít širokou škálu metod. Jejich volba záleží na cíli bádání, úloze, zkušenosti žáků, osobnosti žáků a učitele, prostředí a klimatu třídy a dalších faktorech. Některé z možných metod jsou uvedeny níže.

Pokud nahlédneme do klasifikace metod podle Maňáka a Švece (2003) můžeme v bádání využít různé metody. Z klasických jsou to metody slovní (práce s textem, rozhovor), názorně-demonstrační (předvádění a pozorování) a dovednostně-praktické (napodobování, manipulování, experimentování). Z aktivizujících metod jsou vhodné metody diskusní, heuristické a řešení problémů.

Lerner (1986) uvádí jiné dělení metod. Z nich můžeme v BOV využít metodu problémového výkladu, heuristickou a výzkumnou. V metodě problémového výkladu učitel vytyčuje problém a objasňuje postup při jeho řešení.

Žáci se soustřeďují na posloupnost a kontrolu řešení problému (tamtéž, s. 103). Tato metoda by odpovídala nejnižší úrovni bádání, tedy potvrzujícímu bádání. V heuristické metodě učitel tvoří a prezentuje úkoly a plánuje kroky řešení. Žáci samostatně řeší část úkolu a provádějí sebekontrolu. My bychom ji připodobnili k strukturovanému bádání. Poslední metoda je výzkumná. Učitel tvoří a prezentuje problémové úkoly. Žáci si problém uvědomují, plánují etapy i způsoby zkoumání, reprodukují průběh zkoumání a své výsledky zdůvodňují (Lerner, 1986, s. 104). Metoda by odpovídala nasměrovanému bádání.

Jak je popsáno v předchozích odstavcích, některé rysy BOV můžeme najít v různých metodách. V následujících řádcích popisujeme podobnost mezi BOV a metodou řešení problémů podrobněji.

Jak uvádí ve svém článku Papáček (2010), základem BOV je způsob získávání poznatků prostřednictvím řešení problémů. Učitel učivo nepředává v hotové podobě, ale vede žáka k tomu, aby na základě své vlastní činnosti znalosti získal. Učitel využívá systému kladených otázek (komunikačního aparátu). Dostál (2015) předkládá myšlenku, že při problémovém výkladu k bádání nedochází, ale tato metoda by se dala považovat za přípravu k bádání. Žák si tedy konstruuje poznatky sám na základě bádání.

Artigueová a Blomhøj (2013) popisují propojení mezi BOV a řešením problémů. Žák čelí neobvyklému a podněcujícímu problému, rozvíjí své vlastní strategie a techniky, zkoumá, předkládá domněnky, experimentuje a hodnotí. Je vystaven velké matematické zodpovědnosti a povzbuzován k vlastnímu vytváření otázek a k zobecňování získaných výsledků.

Ačkoliv se v něčem tyto dvě metody shodují, najdou se zde i odlišnosti. Např. Hošpesová (2016) uvádí některé rozdíly mezi badatelskou výukou a učením řešením problémů. Metoda řešení problémů u žáků rozvíjí kompetenci řešení problémů bez ohledu na učivo, jak tomu u BOV není. Ta naopak plní cíle a obsahy výuky. Stejně tak Dostál (2015, s. 54-55) ve své publikaci uvádí diagram průniku dvou množin - badatelsky orientované výuky a problémové výuky (obr. 2). Ze schématu vyplývá, že společné pro tyto dvě metody je *„řešení problémových úloh objevováním nových postupů a využitím neobvyklých prostředků; objevování nových výsledků řešení.“* Zásadním rozdílem je původní úloha. U badatelsky orientované výuky je to řešení badatelských úloh, u problémové výuky úloh problémových. Ne všechny badatelské úlohy spočívají v řešení problému. Například u potvrzujícího bádání žáci znají postup řešení i cíl a platnost skutečnosti ověřují známými postupy.

Obrázek 2: Schéma podobnosti BOV a problémové výuky (Dostál, 2015, s. 55)

2.3.3 Role učitele

V takto pojaté výuce je role učitele jiná než v klasické výuce. Podle Votápkové (2013) by měl učitel zaujmout roli průvodce, zprostředkovatele, koordinátora. Měl by tedy plánovat výuku tak, aby se do činnosti zapojila celá třída. Do činnosti žáků příliš nezasahuje, měl by jejich práci pouze korigovat správným směrem.

Jak uvádí Hošpesová (2016, s. 121), činnost učitele zahrnuje zadávání, vysvětlování (z podnětu učitele i žáků), monitorování, dotazování sloužící k usměrnění a požadující vysvětlení, hodnocení (povšechné i adresné), propojení získaných poznatků s již dříve naučenými.

Zároveň by učitel měl provést podpůrná opatření, která žáka podporují v bádání. Mezi takové patří např.: vytvoření příležitostí, materiální vybavení (pomůcky, technika) a změna učebních stylů (Dostál, 2013b).

Zásadní otázkou v roli učitele při badatelsky orientované výuce je, zda on sám je na takto pojatou výuku připraven. Dostál (2015) uvádí některé kompetence, které by učitel měl mít pro správné vedení BOV. Tyto kompetence jsou v publikaci rozděleny do tří oblastí - kompetence k plánování a přípravě BOV, kompetence k provádění BOV a kompetence k rozvoji žáka prostřednictvím BOV.

V první oblasti by měl učitel správně zvolit a zařadit badatelské aktivity a k nim získat pomůcky nezbytné pro realizaci těchto aktivit. Dalším hlediskem je připravovat tyto aktivity s ohledem na RVP, ŠVP, potřeby jednotlivých žáků, prostředí a v souladu s předpisy a nařízeními. BOV by měla také spojit činnosti s praktickým životem.

Druhá oblast obsahuje kompetence při provádění BOV. Učitel by měl zohlednit dosavadní znalosti žáků, využít mezipředmětové vztahy a k bádání motivovat. BOV by se měla využít jak při prezentaci nového učiva, tak i k jeho upevnění a prověřování. Při bádání by ve třídě mělo být příznivé klima. Důraz by měl být kladen i na individuální potřeby jednotlivých žáků, na bezpečnost a propojení praxe s teorií.

Třetí a poslední oblast je zaměřená na vývoj žáků. Mělo by docházet k rozvoji myšlení, vnímání, představivosti, samostatného objevování a schopnosti prezentovat výsledky. Není zde opomenuta ani sociální sféra, tedy komunikace, spolupráce a profesní orientace. BOV by měla rozvíjet aktivitu a zájmy žáků. Učitel by měl prostřednictvím této výuky vytvářet pojmy a své dojmy a poznatky sdílet s ostatními pedagogy. Sám u sebe by měl dbát na odborný rozvoj za účelem zdokonalení výuky.

Z toho vyplývá, že ačkoliv by práce učitele mohla vypadat zdánlivě jednoduše, není tomu tak. Badatelsky orientovaná výuka je pro pedagoga velmi náročná jak na přípravu, tak na předmětovou odbornost.

2.3.4 Role žáka

V projektu Badatelé.cz (Votápková, 2013) je popsána činnost žáka při bádání. Míra zapojení do bádání závisí na učiteli. Čím déle žáci bádají a čím více zkušeností mají, tím více zodpovědnosti za svou práci mohou přebírat. Žák klade otázky, sbírá informace, provádí šetření a na konci bádání formuluje výsledky své práce.

Žák je uváděn do rozporu s dosavadními znalostmi a zkušenostmi. Přirozeně chce daný stav vyřešit a představy přepracovat do rovnováhy s okolním světem. Tím je veden a aktivován k bádání. Tyto situace mohou být uměle vytvořené a nebo jejich vznik zapříčiní vnitřní pohnutky. Měly by být vytvořeny takové podmínky, které podněcují k potřebě poznávat. Za takovýchto okolností nemůže žák známými způsoby vyřešit úlohu a musí hledat nové způsoby řešení. Tímto aktivním poznáváním okolního světa dochází k rozvoji myšlení a k učení. Takto pojaté učení bývá označováno jako badatelské (Dostál, 2015, s. 65-66).

Objevení problémové situace je prvopočátkem uvažování žáka. Vnímání tohoto problému je provázeno pocity zvědavosti a obtíží. Žák by měl umět tento problém specifikovat a zabývat se jím. Není pravidlem, že každý člověk problém vnímá. Pokud tomu tak není, ztěžuje se jeho role při odstraňovaní problému. Žák, který problém vnímá, se může dostat do situace, kdy není ochotný se tímto problémem zabývat. Na tuto situaci můžeme narazit při nedostatečné motivaci, popřípadě pokud žák pociťuje nepříjemný pocit obtíží a situace mu umožňuje uniknout. Ochota řešit problém může být také závislá na přístupnosti údajů pro jeho řešení. Zde opět může učitel vhodnou motivací k řešení problému žáka postrčit (Dostál, 2015, s. 72-74).

2.4 Kurikulární dokumenty

Je badatelsky orientovaná výuka v souladu s požadavky na vzdělávání v ČR? Odpověď na tuto otázku můžeme hledat dokumentech, jako je např. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (2017) a Bílá kniha (Kotásek et al., 2001), která již není oficiálně platná, ale přesto obsahuje jisté myšlenky, které jsou pro současné vzdělávání stále aktuální.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV, 2017, s. 8) je uveden požadavek na takovou úroveň vzdělávání, která by svým charakterem a metodami motivovala žáky k dalšímu učení. Badatelská výuka splňuje i některé základní cíle definované v RVP ZV (2017, s. 8-9). Takto chápaná výuka motivuje pro celoživotní učení, podněcuje k tvořivému myšlení, logickému uvažování a vede k řešení problémů.

Kromě těchto obecně definovaných cílů rozvíjí BOV také klíčové kompetence, a to kompetence k učení, pracovní a k řešení problémů. Přínos BOV v poslední zmiňované oblasti vidíme v následujících cílech. Na konci vzdělávání žák:

- *„vnímá nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpozná a pochopí problém, přemýšlí o nesrovnalostech a jejich příčinách, promyslí a naplánuje způsob řešení problémů a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností,*
- *vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému,*
- *samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy,*
- *ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů."* (RVP ZV, 2017, s. 11)

Badatelsky orientovaná výuka splňuje požadavky i Bílé knihy. Ta zdůrazňuje, že základem výuky by měly být takové činnosti, při kterých žák získává zkušenosti, ptá se, hledá, projevuje vlastní názor, chybuje, tvoří, objevuje a nalézá, řeší problémy (Kotásek et al., 2001, s. 48).

2.4.1 Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (2017) můžeme najít rozdělení učiva do devíti vzdělávacích oblastí. Zaměření této práce se promítá výhradně do oblasti Matematika a její aplikace. V předchozí kapitole jsme uvedli argumenty, které dokazují oprávněnost zařazování BOV do výuky. Předmětem následujícího úseku je hledání konkrétních oblastní učiva, ve kterých bychom bádání mohli zařadit.

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je rozdělena do čtyř tematických okruhů, a to: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Při správném přístupu učitele bychom BOV mohli využít ve všech těchto rovinách. Nejvhodnější z nich se nám jeví oblast Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Úlohy využitelné v této oblasti by se měli prolínat všemi tematickými okruhy a zároveň mohou být nezávislé na klasických postupech školské matematiky (RVP ZV, 2017, s. 34).

2.5 Hejného matematika a BOV

„Tradiční výuka je založena na myšlence, že učitel, coby nositel moudra, ukáže dětem vzorec, postup, děti si ho osvojí, procvičí a už ho umí. Protože je to jen na paměťové úrovni, tak to mnozí zapomenou. Tady je to jinak. Tady žádné vzorečky, žádné postupy učitel nedává. Děti pouze řeší úlohy. A když podobnou úlohu řeší potřetí, počtvrté, najednou řeknou: vždyť je to totéž. To, co tady děláme, to se dělá takhle. A to dítě vymyslí ten „vzoreček“. Ostatní děti to od něj přebírají, nejrychleji ti, kteří se také podíleli na tom objevování a takovýmto způsobem je ta matematika jeden celek. (...) Podstatné je, že učitel věří, že děti skoro celou matematiku samy objeví ve vzájemných diskusích. Nechat je, ať oni povídají.“ (Hejný, 2014)

V rámci hledání úloh, které vedou k bádání, jsme prostudovali učebnice nakladatelství Fraus (Hejný et al., 2010a; Hejný et al., 2011) pro 4. a 5. ročník základní školy. Učebnice profesora Hejného jsme zvolili především z toho důvodu, že jsou značně odlišné od jiných učebnic matematiky. Jak sám autor říká v úvodním citátu této kapitoly, v rámci jeho metody učitel žákům nesděluje vzorečky ani postupy. To naznačuje jistou souvislost s BOV. Pro nás je zde důležité to, že děti samy objevují a vymýšlejí postupy k řešení úloh. Učitel by měl věřit v to, že děti dokážou téměř celou matematiku objevit samy (Hejný, 2014).

Řešení úloh probíhá v různých prostředích. Tyto úlohy mohou při správném přístupu učitele vést k bádání. Náročnost úloh se postupně zvyšuje, nevedou tedy ke stereotypu. V dalších kapitolách je provedena analýza *a priori* vybraných úloh.

Analýza každé úlohy obsahuje následující části:

- **Název úlohy**
  Sekce obsahuje charakteristiku úlohy, její pravidla a možná omezení.

- **Cíl**
  Zde popisujeme směřování úlohy. Ve všech úlohách kromě Tangramů jsou cíle převzaty od autorů (Hejný et al., 2010b).

- **Možné varianty zadání**
  Způsob, jakým úlohu můžeme žákům zadat. Nám se nabízí převážně zadávání vizuální.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Odhad času, který je pro úlohu nutné vyhradit. Doba řešení se bude

měnit na základě věku, zkušeností ale i např. podle využité organizační formy.

- **Pomůcky**
  Věci, které jsou potřeba k řešení úlohy. Pomůcky, které žák nemá běžně k dispozici, poskytuje učitel.

- **Možná řešení**
  Náhledy na možné způsoby řešení úloh. Tato část je zásadní zejména proto, aby učitel nebyl v hodině zaskočen neočekávaným řešením úlohy. V takové situaci by mohl řešení nebo postup nesprávně vyhodnotit.

- **Obtížné body řešení**
  Části úlohy, se kterými by žáci mohli mít obtíž a které by mohly komplikovat řešení.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Období, kdy by bylo možné úlohu zařadit a v jakém tematickém celku by se dala využít - a to u zavádění učiva i jeho procvičování a opakování.

- **Způsob hodnocení**
  Návrhy pro učitele, jak hodnotit řešení. U všech úloh se nabízí hodnocení formativní - tedy takové, které poskytuje žákovi zpětnou vazbu o jeho vlastním učení. U správně řešených úloh je prostor pro sebehodnocení.

2.5.1 Hadi

Úloha je založená na principu postupného počítání příkladů. Zadání se v každé úloze liší nejen v zadaných číslech, ale i jejich pozicí v Hadovi.

- **Cíl**
  Poznávání vazeb souborů čísel, která vystupují jak v roli vztahu, tak v roli operátoru. Zobecňování konkrétních poznatků. Rozvíjení schopnosti řešit soustavu dvou rovnic metodou pokus-omyl (Hejný et al., 2010b, s. 8).

- **Možné varianty zadání**
  Úloha je zadávána vizuálně (natištěná v učebnici, na pracovním listu, popř. napsaná na tabuli). Slovní zadávání by bylo možné pouze v pří-

padě, kdyby žáci měli zadané první číslo v Hadovi a následně by učitel diktoval operace. V jiných případech by slovní zadání pouze komplikovalo řešení úlohy.
Jiný úhel pohledu na možnost zadání může spočívat v tom, která políčka jsou předem dána. Z tohoto pohledu je úloha velmi flexibilní. Obecně mohou být zadané operandy, nebo operace, popř. jejich kombinace. Jednotlivá políčka by měla být zadaná tak, aby k vyplnění celého Hada bylo nutné políčka počítat a využívat logického myšlení. Pokud by zadání nesplňovalo tuto podmínku, mohlo by dojít k situaci, že si žáci budou řešení domýšlet. V učebnicích nakladatelství Fraus je tato úloha ztížena jedním zásadním faktorem, a to směrem šipek. Tímto problémem se podrobněji zabýváme v bodu Obtížné body řešení.
V prostředí mohou také sami žáci zadání vymýšlet. Zde je můžeme omezovat např. oborem, ve kterém má zadání být, nebo můžeme zadat jiné podmínky.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Úloha není příliš časově náročná. Pokud žáci pochopí princip úloh, předpokládáme, že by ji mohli vyřešit během několika minut. Doba řešení úlohy také závisí na délce Hada nebo směru šipek.

- **Pomůcky**
  K řešení úlohy nejsou třeba speciální pomůcky. Žáci by měli mít k dispozici psací potřeby a sešit, popř. papír.

- **Možná řešení**
  Pokud je úloha zadána jednoznačně, je pouze jedno možné řešení. Jednoznačně je úloha zadaná tehdy, kdy je jisté jedno pevné číslo (operand) a všechny operace. Pokud má úloha tři operandy a dvě operace, je tedy nutné zadat alespoň jeden operand a obě operace (obr. 3a). Operace nemusí být zadány tehdy, pokud jsou známá dvě pevná čísla vedle sebe (obr. 3c) nebo pokud tato čísla lze ze zadání vypočítat (obr. 3b). Vzhledem k zadání jednotlivých úloh se mohou měnit i možnosti řešení.
  Pokud žáci budou vymýšlet úlohy vlastní, mají nekonečně mnoho možností, které jsou omezené pouze případnými podmínkami. Těmi může být obor, ve kterém je úloha zpracována, daná operace, číslo na určitém políčku atd.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Flexibilita Hadů se projevuje i v této oblasti. Úloha může být jakko-

liv přizpůsobena jednotlivým ročníkům a znalostem žáků. V prvním ročníku mohou být oborem zadání např. kladná celá čísla do 10, resp. do 20 a známé binární operace s nimi (tedy sčítání a k němu inverzní odčítání). Čím více zkušeností a znalostí žák má, tím širší tato škála může být. Ve vyšších ročnících může být tedy obor řešení rozšířen např. o zlomky či desetinná čísla.

- **Obtížné body řešení**
  Úloha je jednoduchá na vyřešení. Problém se vyskytuje, pokud je směr šipky opačný a určuje tak operaci zprava doleva. Pokud je směr šipky zleva doprava, pro žáka je jednoduché určit další číslo podle operace nebo operaci podle dalšího čísla. Pokud je šipka naopak a číslo na levé straně, žák musí provést inverzní operaci k zadané. To vyžaduje dobrou schopnost orientace v příkladu a pochopení vztahu inverzních operací.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Úloha je přizpůsobitelná různým početním oborům. Ve 4. ročníku by mohla být úloha zařazena do tematického okruhu Číslo a početní operace, konkrétně při práci s čísly v oboru do 1 000 000 nebo se zlomky. V 5. ročníku můžeme prostředí využít ve stejném tematickém okruhu při práci s desetinnými čísly a zápornými čísly.
  Hady je možné využít i při sčítání a odčítání do 1000, příkladů z velké násobilky, písemném násobení jedno, dvou a trojciferným činitelem, písemném dělení jednociferným dělitelem beze zbytku, řešení rovnic s jednou neznámou.

- **Způsob hodnocení**
  Při hodnocení tohoto typu úloh považujeme za důležité to, zda žák pochopil jejich princip. Při řešení se mohou vyskytnout aritmetické chyby, tedy chyby ve výpočtu, nebo žák nepoužije správnou operaci. Při hodnocení je nutné tyto chyby rozlišovat, aby žák dostal o povaze chyby odpovídající zpětnou vazbu. Můžeme použít slovní hodnocení, případně úlohu ohodnotit známkou.

2.5.2 Výstaviště

Úloha ve čtvercové síti různých velikostí. V síti jsou zadaná čísla, která určují pořadí navštívených místností. Po Výstavišti je možné se pohybovat pouze vodorovně nebo svisle, každá místnost se může navštívit pouze jednou. Úloha rozvíjí orientaci v prostoru, propojuje geometrii a aritmetiku.

(a) (b) (c)

Obrázek 3: Ukázka úlohy Hadi (Hejný et al., 2010a)

- **Cíl**
  Orientace v prostředí, které vzájemně propojuje geometrii a číselnou řadu. Rozvoj schopnosti vzájemně propojovat různé řešitelské strategie (Hejný et al., 2010b, s. 8).

- **Možné varianty zadání**
  Úloha může být zadávána vizuálně (natištěná v učebnici, na pracovním listu, popř. napsaná na tabuli). Zajímavým způsobem je takové zadávání, kdy každý žák ve třídě dostane jedno číslo z Výstaviště a to pokládá na zvětšenou plochu.
  Ve Výstavišti jsou zadaná různá políčka. Ne vždy je zadaná první nebo poslední navštívená místnost. Jednotlivé úlohy mohou mít jedno i více řešení. Náročnost prostředí lze diferencovat počtem zadaných polí, jejich umístěním a velikostí tabulky. V učebnicích se také objevují Výstaviště s více podlažími, přechody mezi nimi jsou vyznačeny barevnými poli.
  I u tohoto typu úloh mohou žáci vymýšlet vlastní možnosti.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Tento druh úloh je podle našeho názoru časově náročnější než předchozí. Žáci, kteří nemají u této úlohy žádné řešitelské strategie mají větší pravděpodobnost neúspěchu při prvním pokusu o vyřešení. Tím se doba řešení prodlužuje. Předpokládáme, že doba vyřešení jednoho Výstaviště by mohla být přibližně několik minut.

- **Pomůcky**
  Psací potřeby, sešit, popř. papír. Pokud žáci úlohu řeší ve zvětšené podobě, je nezbytnou pomůckou zvětšené Výstaviště (nejlépe na podlaze či koberci) a jednotlivá čísla pro žáky.

- **Možná řešení**
  Žáci mohou použít různé strategie řešení. Pokud je zadaný počátek

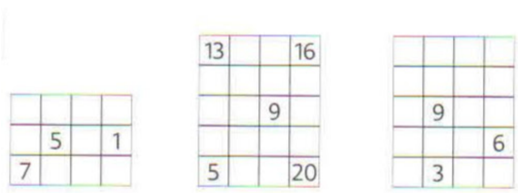
cesty Výstavištěm, žáci budou nejspíše postupovat od této první místnosti. Pokud první místnost zadaná není, budou se pravděpodobně snažit zjistit, kde cesta začíná příp. končí.
Předpokládáme, že žáci budou úlohu řešit metodou pokus-omyl. Při častějším setkávání s tímto typem úloh si mohou vyvinout své vlastní řešitelské strategie.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Úloha nevyžaduje specifické předchozí znalosti.

- **Obtížné body řešení**
  V učebnici pro pátý ročník (Hejný et al., 2011, s. 19) se objevuje Výstaviště, které nemá uvnitř žádná čísla, ale má dvě barevná pole. Možnosti jsou uvedené v zadání. Další specifikum této úlohy je v tom, že žáci mají určené, na jakou světovou stranu mají z Výstaviště vyjít. Takto definované zadání může být pro některé žáky značně problematické. Nutné je, abychom si s žáky připomenuli světové strany.
  Zpočátku by žáci mohli být nejistí při přesouvání po Výstavišti. U běžných typů těchto úloh by problematickým bodem mohlo být nalezení počátku cesty. V případě, že žák úlohu řeší metodou pokus-omyl, může zapomenout předchozí neúspěšnou cestu a tu opakovat. V tomto případě bychom doporučovali neúspěšná řešení zaznamenávat.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Úloha může být zařazena do tematického celku Nestandardní aplikační úlohy a problémy. V rámci mezipředmětových vztahů bychom tímto typem úloh mohli zpestřit učivo o orientaci v prostoru. Zajímavý by mohl být přístup, kdy by se žáci po Výstavišti navzájem navigovali.

- **Způsob hodnocení**
  Správné vyřešení můžeme hodnotit slovně, jedničkou nebo tzv. „za hvězdičku“. Přihlédnout bychom měli také ke strategii řešení.



Obrázek 4: Ukázka úlohy Výstaviště (Hejný et al., 2010a)

2.5.3 Parkety

K úloze Parkety se využívá čtvercová síť a vystříhané „parkety". Žák parkety na podložku pokládá a tím plochu vyplňuje.

- **Cíl**
  Získávání zkušeností s analýzou a syntézou skupiny rovinných tvarů, z nichž některé mohou být obohaceny o číselné údaje (Hejný et al., 2010b, s. 8). Úloha připravuje žáky na měření obsahu, tj. vyplňování měřeného útvaru „jednotkou".

- **Možné varianty zadání**
  Úloha je zadávána vizuálně. Vhodné je, aby měl žák zpočátku možnost přímé manipulace s parketami. Pokud není možnost manipulace, vyřešení úlohy vyžaduje od žáků prostorovou představivost, tj. schopnost osvojovat si vědomosti a dovednosti na základě myšleného konstruování prostorových obrazů a operování s nimi (Divíšek, 1989, s. 163).

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Vzhledem k variabilitě úlohy se mění i potřebný čas k vyřešení. Zde odhadujeme, že vyřešení některých úkolů (obzvláště těch, ve kterých žák hledá všechna možná řešení) může trvat až polovinu vyučovací hodiny.

- **Pomůcky**
  Podkladová plocha, vystřižené jednotlivé parkety.

- **Možná řešení**
  Počet možných řešení je v každé úloze jiný. To se také odvíjí od výběru podkladu a parket. V některých úlohách mají žáci pokrýt podlahy pouze jedním typem parket nebo tak, aby se jim ani jedna parketa neopakovala. Počet řešení ovlivňuje i to, zda se parkety mohou různě otáčet a překlápět.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Úloha nevyžaduje žádné specifické znalosti. Úspěšnost v řešení je pozitivně ovlivněna zkušeností žáka s takovýmto typem úloh.

- **Obtížné body řešení**
  Jako obtížný bod řešení považujeme situaci, kdy žák nemá možnost manipulace s parketami. Jak je uvedeno v bodu Možné varianty zadání - úloha vyžaduje určitý stupeň prostorové představivosti a to může být

pro některé žáky problematické.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Úloha se může zařadit do libovolného ročníku v rámci tematického okruhu Geometrie v rovině a prostoru. Konkrétně by se úloha dala využít v rámci učiva o mnohoúhelnících nebo měření obsahu.

- **Způsob hodnocení**
  Hodnotit můžeme správnost vyřešení, počet nalezených řešení. Zajímavé by bylo hodnotit použitou strategii - od jakých tvarů žák začínal (pravidelných či nepravidelných).

Obrázek 5: Ukázka úlohy Parkety (Hejný et al., 2010a)

2.5.4 Algebrogramy

Algebrogramy jsou zápisy rovnosti, ve kterých jsou čísla nahrazena písmeny. V jiných zdrojích se můžeme setkat se zadáním s obrázky. Algebrogram je vyřešený tehdy, jsou-li písmena nebo jiné znaky nahrazeny čísly tak, aby rovnost platila. V učebnicích Fraus vždy jedno písmeno odpovídá jedné číslici, tzn. v úloze může být konkrétní písmeno nahrazeno pouze jednou číslicí.

Algebrogramy budují porozumění v desítkové soustavě a umožňují odhalovat hlubší souvislosti aritmetiky. Rozvíjejí i kombinatorické myšlení a schopnost argumentace (Hejný, 2014). Je to jedna z nejnáročnějších úloh, se kterými se žák na 1. stupni setká. Jsou to v podstatě šifry.

- **Cíl**
  Řešení Algebrogramů odhaluje žákům některé hlubší souvislosti arit-

metiky. Řeší je zkoušením (Hejný et al., 2010b, s. 9).

- **Možné varianty zadání**
  Úloha může být zadána vizuálně nebo slovně. Vizuální zadání dává žákům prostor úlohu zkoumat a dlouhodobě sledovat. Slovní zadání by mohlo být pro některé žáky matoucí.
  Úlohy mají většinou v příkladu umístěné číslo, které pomáhá k řešení - např. výsledek. Objevují se ale i úlohy, které jsou zadané pouze písmeny bez čísel.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  První řešení bude pro žáky časově náročnější. Čas řešení jednotlivých úloh odhadujeme na několik minut.

- **Pomůcky**
  Psací potřeby, sešit nebo papír.

- **Možná řešení**
  V prvních pokusech o vyřešení bude pravděpodobně žák využívat metodu postupného dosazování. Jednotlivá písmena bude nahrazovat číslicemi 0 - 9 a sledovat, kdy rovnosti platí a kdy ne. Pokud žáci mají s úlohami zkušenost, mohou je řešit úvahou.
  Jednotlivé úlohy mohou mít jedno nebo více řešení. S přibývající praxí žák založí své pokusy na uvažování o možnostech, které úloha nabízí.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Řešení Algebrogramů vyžaduje alespoň elementární dovednost provádět aritmetické operace a využívat znalostí o vlastnostech operací. Další příklady se odvíjí od momentálních znalostí a dovedností. Např. ve 4. ročníku využívají úlohy sčítání do 1 000, v 5. ročníku se objevují Algebrogramy pro násobení, dělení nebo opakované sčítání.

- **Obtížné body řešení**
  Problematické může být porozumění tomu, že písmeno ukrývá pouze jednu číslici. Pokud jsou dvě stejná písmena v zápisu za sebou, značí to dvojciferné číslo se stejnou číslicí v řádu jednotek i desítek. Tedy pokud A = 4, pak AA = 44. Někteří žáci mohou tento zápis špatně pochopit a čísla sčítat nebo násobit, tedy AA $= 4 + 4 = 8$, popř. AA $= 4 \cdot 4 = 16$.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Úlohy se v upravené podobě mohou objevit ve všech ročnících 1. stupně

ZŠ. Ve 4. ročníku můžeme úlohy zařadit do tematického okruhu Číslo a početní operace, a to např. při výuce rovnic a nerovnic. V 5. ročníku je můžeme využít ve stejném tematickém okruhu např. při násobení a dělení mimo obor malé násobilky.

- **Způsob hodnocení**
  Stejně jako u ostatních úloh, správnost řešení můžeme ohodnotit slovně, známkou nebo „hvězdičkou“.

a) AA = 50 + A
b) B · B = B + B + B
c) CD – DC = D8
d) AAC – BA = AB

Obrázek 6: Ukázka úlohy Algebrogramy (Hejný et al., 2010a)

2.5.5 Šipkový graf

Šipkový graf (diagram) je úloha podobná Hadovi stočenému do klubíčka. V těchto úlohách mohou být zadaná pevná čísla nebo operace.

- **Cíl**
  Šipkový diagram je grafický zápis rovnice, který vede žáka k tomu, aby neznámé číslo (v horním levém kroužku) hledal experimentováním (Hejný et al., 2010b, s. 8).

- **Možné varianty zadání**
  Úloha je zadávána vizuálně. Oproti Hadům zde není možnost slovního zadávání.
  V učebnicích pro 4. a 5. ročník ZŠ se většinou objevují Šipkové grafy tvaru čtyřúhelníku se čtyřmi políčky, v jednom případě s osmi. V učebnicích se také objevují trojúhelníkové Šipkové grafy. U trojúhelníkových úloh bývá zadán specifický úkol. U těchto diagramů může být např. specifikováno, jak některé děti úlohu řešily. Zde je úkolem žáků tyto metody vyzkoušet, potvrdit a objasnit.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Úloha není časově náročná. Potřebný čas k řešení pozitivně ovlivňují zkušenosti jak s Hady, tak se Šipkovými grafy. U jednoznačných zadání

předpokládáme kratší čas řešení než u těch, kde je třeba k vyřešení využít metody pokus-omyl.

- **Pomůcky**
  Psací potřeby, sešit nebo papír. Vhodné je mít grafy natištěné, aby se žáci zbytečně nesoustředili na jejich překreslování.

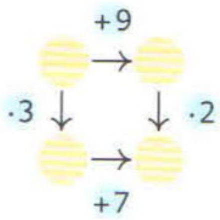
- **Možná řešení**
  Úlohy mají jedno řešení. Pokud jsou zadané pouze operace, první číslo se hledá metodou pokus-omyl.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Pro řešení je nutná dobrá úroveň zvládnutí binárních operací v oboru do 100. Také proto se Šipkové grafy objevují poprvé v učebnici pro 3. ročník.

- **Obtížné body řešení**
  Některé úlohy mají zadaná pevná čísla, ale žák neví, na kterých pozicích. Úkol je ztížen také tím, že má zadané operace (např. dvakrát operaci násobení a dvakrát sčítání). Vzhledem k tomu, že řešení spočívá v dosazování čísel, úloha by se měla pohybovat v oboru celých kladných čísel do 100. Pokud by hledané číslo bylo vyšší a žák postupoval od 1, mohlo by ho dlouhodobé zkoušení čísel bez úspěchu demotivovat.
  Dalším obtížným bodem mohou být speciální úkoly u trojúhelníkových diagramů. Žáci zkoumají jiná řešení, hledají souvislosti a triky k řešení úloh.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Šipkové diagramy mohou být zadávány v rámci tematického okruhu Číslo a početní operace. Podobně jako u prostředí Hadi můžeme měnit obor řešení podle ročníku a zkušeností žáků.

- **Způsob hodnocení**
  Hodnotíme strategie řešení a jejich úspěšnost. Vzhledem k tomu, že se jedná o náročnější úlohu, volili bychom takový druh hodnocení, který má pro žáky větší váhu.



Obrázek 7: Ukázka úlohy Šipkový graf (Hejný et al., 2010a)

2.5.6 Tangramy

Oblíbený druh úloh. Jednotlivé díly Tangramu jsou části čtverce. Z těchto geometrických tvarů se mohou skládat libovolné útvary. Hlavolam je pro děti atraktivní svou širokou škálou možných sestavených tvarů. V učebnicích žáci zjišťují obsah jednotlivých dílků, vytváří další útvary pomocí přikládání dvou částí Tangramu. Tangramy jsou využívány k různým úlohám. Pro výpočet obsahu jsou jednotlivé dílky umístěné ve čtvercové síti. Žáci mají zadaný obsah jednoho dílku a mají zjistit ostatní. V jiné úloze mají zadané útvary, které mají vzniknout slepením dvou dílků.

- **Cíl**
  Úloha rozvíjí představivost a logické myšlení.

- **Možné varianty zadání**
  Úloha je zadávána vizuálně. Tangramy lze využít na širokou škálu různých úloh. Žáci mohou skládat z jednotlivých částí libovolné obrazce, tvary podle zadání, dané geometrické útvary. Tangramy se také využívají k výpočtům obsahu, jako v učebnicích Fraus. K řešení úloh je nezbytná manipulace s jeho díly. Žáci mohou svá vlastní řešení zakreslovat na připravené papíry.
  V knihkupectvích lze zakoupit přenosnou hru Tangramy. Díly jsou připevněny na desku pomocí magnetu, součástí je blok s ukázkou skládaných tvarů. Na jedné straně je černý stín útvaru, který má dítě složit. Z druhé strany je nakresleno řešení - lze tedy poznat, kde jaké díly leží.

- **Čas potřebný k řešení úlohy**
  Časová náročnost úlohy se mění v závislosti na tom, jaký je úkol. Při výpočtu obsahu jednotlivých dílů ve čtvercové síti předpokládáme čas řešení několik minut. Delší doba bude potřeba při skládání libovolných nebo zadaných tvarů. Podle volby aktivit a úkolů může řešení trvat celou vyučovací jednotku, i déle.

- **Pomůcky**
  U úkolů na výpočet obsahu žáci potřebují tužku, papír, čtvercovou síť a v ní vhodně umístěné díly Tangramu. Na skládání tvarů žák potřebuje k dispozici jednotlivé díly Tangramu, se kterými může manipulovat. K dispozici je vhodné mít ukázky možných tvarů a případně jejich řešení.

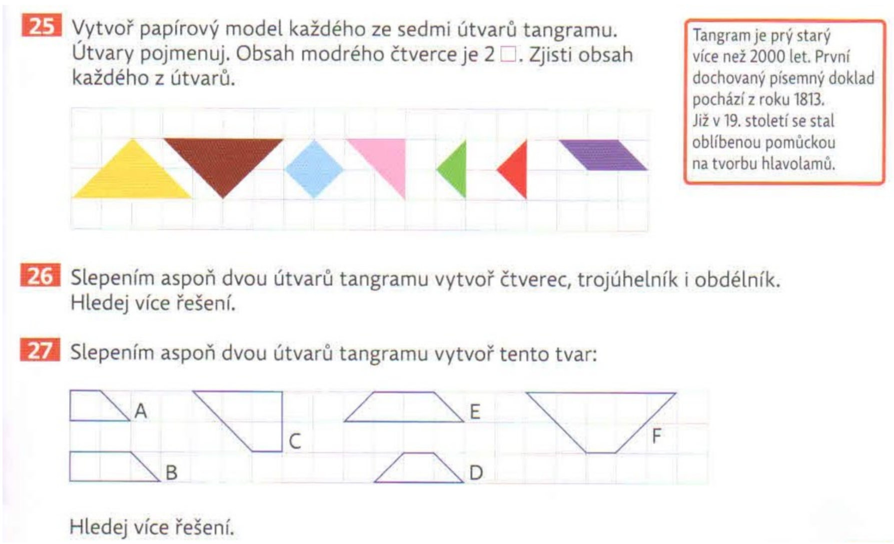
- **Možná řešení**
  Úlohy na výpočet obsahu mají jedno řešení, to se může měnit na základě poměru čtvercové sítě a dílů Tangramu. Při skládání tvarů je škála možných řešení velmi široká. Posuzování správnosti řešení je individuální.

- **Znalosti potřebné k řešení**
  Pro pouhé skládání tvarů není třeba specifických znalostí. Potřebné znalosti se mění podle zvolených aktivit, např. znalost výpočtu obsahu ve čtvercové síti.

- **Obtížné body řešení**
  Při skládání tvarů žák musí pochopit, že jednotlivé díly se musí dotýkat, a to vrcholy, nebo stranami. Jednotlivé díly nelze vzájemně překrývat. U výpočtů obsahu to může být např. nepochopení principu vypočítání obsahu útvaru ve čtvercové síti.

- **Návaznost na probíranou látku**
  Jednotlivé aktivity s Tangramy můžeme zařadit do tematického okruhu Geometrie v rovině a v prostoru. Úkoly se mohou využít v učivu o mnohoúhelnících nebo při výpočtu obsahu útvarů.

- **Způsob hodnocení**
  Hodnocení výpočtu obsahu jednotlivých částí je jednoznačné. Skládané útvary bude hodnotit každý učitel individuálně podle zadaných cílů - např. zda se žákovi podařilo složit určitý útvar nebo vymyslet svůj vlastní.


25 Vytvoř papírový model každého ze sedmi útvarů tangramu. Útvary pojmenuj. Obsah modrého čtverce je 2 □. Zjisti obsah každého z útvarů.

Tangram je prý starý více než 2000 let. První dochovaný písemný doklad pochází z roku 1813. Již v 19. století se stal oblíbenou pomůckou na tvorbu hlavolamů.

26 Slepením aspoň dvou útvarů tangramu vytvoř čtverec, trojúhelník i obdélník. Hledej více řešení.

27 Slepením aspoň dvou útvarů tangramu vytvoř tento tvar:

Hledej více řešení.

Obrázek 8: Ukázka úlohy Tangramy (Hejný et al., 2010a)

3 Praktická část

Praktická část je zpracovaná jako zásobník příprav pro učitele, kteří by chtěli do své výuky zařadit badatelsky orientovanou výuku. Připravené lekce mohou také sloužit jako inspirace pro tvorbu vlastních hodin BOV.

3.1 Přípravy na vyučování

V následující části najdete vypracované přípravy na vyučovací jednotky. Ty nejsou závazné. Každý učitel může lekce upravit podle vlastních potřeb, nebo použít jen samostatné úkoly pro zpestření výuky. Pro větší přehlednost je struktura všech příprav stejná. U každé lekce najdete:

- **Ročník**
  Úlohy jsou tvořeny primárně pro 4. a 5. ročník základní školy, některé lze využít v ročnících vyšších, případně nižších. Každý učitel zná svou třídu nejlépe a měl by objektivně zhodnotit, zda je lekce pro jeho žáky zvládnutelná.

- **Cíle**
  Cíl vyučovací jednotky nebo bloku. Cíl specifikuje, co by se žáci při lekci měli naučit, co by si měli uvědomit a odnést.

- **Časová náročnost**
  Náš odhad doby realizace jednotlivých příprav. Čas je pouze orientační. Doba řešení úloh se může v jednotlivých třídách a ročnících lišit, a to na základě věku a zkušeností žáků. Obecně lze předpokládat, že ve třídě nadaných žáků bude mít lekce kratší trvání. Doporučujeme, aby každý učitel před realizací zvážil zdatnost třídy, ve které by chtěl přípravu realizovat.

- **Pomůcky**
  Sekce obsahuje soupis všech pomůcek, které budeme potřebovat. Ty z nich, které nemají žáci běžně k dispozici, zajišťuje učitel. Některé pomůcky si mohou žáci sami vyrobit např. v hodině výtvarné výchovy nebo pracovních činností.
  Učitel by měl žákům poskytnut i čisté papíry na popis jejich postupů a nápadů.

- **Organizace**
  Doporučený způsob uspořádání podmínek v hodině. Většina lekcí je

realizována skupinově, je tedy nutné upravit prostředí třídy před začátkem hodiny. Je na každém učiteli, jakým způsobem si třídu uspořádá. Za nutné ale považujeme, aby všichni členové jedné skupiny seděli u jednoho stolu a měli dostatek pracovního místa a prostoru pro pohyb ve třídě.

- **Práce učitele**
  Popis práce učitele, jeho činnosti v hodině a role v bádání. Ke své roli by měl učitel individuálně přistupovat podle schopností jeho žáků. Mladší nebo méně zkušení žáci budou pravděpodobně potřebovat větší míru řízení.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**
  Popis samotné učební jednotky krok po kroku. Mohou zde být obsaženy i popisy činností žáků nebo obtížnosti, na které mohou při bádání narazit. V některých úlohách jsou žáci nabádáni, aby své postupy popsali. Psát budou přímo do pracovního listu, popř. mohou využít zadní stranu pracovního listu nebo prázdný papír, který se přiloží k pracovnímu listu. Pokud žáci nepíší přímo k úkolu, je nutné, aby jasně označili, ke které z úloh se vyjadřují. Tyto popisy mohou probíhat také ústně.

- **Hodnocení**
  Doporučený způsob hodnocení práce žáků. V závěru hodiny je vhodné si s žáky ujasnit, co se naučili.

3.1.1 Hadi 1

Příprava Hadi 1 je zaměřena na binární operace a jejich vlastnosti, především inverzitu.

- **Ročník**
  Úlohu je možné využít ve 4. i 5. ročníku základní školy. Lekce Hadi 1 je spíše vhodná do 4. ročníku.

- **Cíle**
  Žák na základě pozorování induktivně vyvodí pravidla pro úlohu Hadi.
  Žák prohlubuje své pochopení zvratnosti operací.

- **Časová náročnost**
  1 vyučovací hodina.

- **Pomůcky**
  Tabule (nebo interaktivní tabule), pracovní listy, psací potřeby.

- **Organizace**
  Skupinová práce (skupiny po 3-4 žácích), samostatná práce.

- **Práce učitele**
  V této hodině je učitel převážně v pozici průvodce a pomocníka žáků. Představuje úlohy žákům a usměrňuje jejich činnost, aby vedla k cílům hodiny.
  Před samotnou hodinou si učitel připraví znázornění Hadů na tabuli, příp. může pracovní list ukázat na interaktivní tabuli, pokud je ve třídě k dispozici.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**
  Vyučovací jednotka je realizována v několika krocích. V prvním a třetím kroku žáci na základě pozorování a indukce definují obecné pravidlo pro úlohu. Jeho správnost a platnost si samostatně ověřují v úkolech 2 a 4.

  1. **Úkol 1**
     V první fázi se žáci seznámí s Hady a na základě pozorování se pokusí objevit systém fungování tohoto typu úloh. Práce probíhá ve skupinách, které jsou vytvořené podle celkového množství žáků a jejich matematické zdatnosti.

Učitel na tabuli znázorní jednoduchého Hada s vyplněnými poli. Žáci na základě pozorování popíší systém vyplňování polí. Bylo by vhodné požádat jednoho žáka, aby popsal vlastními slovy úlohu. Předpokládáme, že tento úkol by měl být splněný během pár minut.

2. **Úkol 2**
   Po úvodní fázi by žáci měli chápat princip jednoduchého Hada se směrem šipek zleva doprava. Žáci samostatně řeší několik úloh. Ve skupině může probíhat diskuse řešení. Dobrovolníci vyřeší úlohy na tabuli a popíší postup.

3. **Úkol 3**
   Pozorování Hada s opačnou šipkou. Dochází ke konfrontaci dřívějších zjištění. Žáci si uvědomí, že operace probíhá po směru šipky. Předpokládáme, že žáci budou řešení argumentovat dvojím způsobem, a to:
   – „Něco krát tři je devět. Tři krát tři je devět. Do prvního políčka patří číslo 3.“
   – „Něco krát tři je devět. To je stejné jako devět děleno třemi a to jsou 3.“
   U druhé možnosti si žáci uvědomili, že k řešení je možné využít inverzní operaci, v naší úloze to je dělení, které je inverzní k násobení.

4. **Úkol 4**
   Obdoba druhé fáze, tentokrát žáci řeší úlohy se šipkami v různých směrech. Po několika minutách můžeme začít diskutovat o tom, jak který žák Hada řešil. Pokud dojde ke konfrontaci výsledků, je třeba dát každému žákovi prostor obhájit jeho řešení. U špatných řešení by si žáci měli uvědomit, kde udělali chybu a především co jí způsobilo. Správné řešení opět znázorníme na tabuli.

- **Možná rozšíření**
  Jako náročnější verzi úloh pro nadané žáky můžeme zadat takové Hady, u kterých známe pouze operace a žádné pevné číslo. Žáci ví, že součet pevných čísel je např. 100 a z toho vychází při svém řešení.

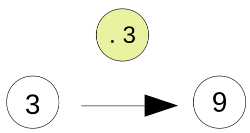
- **Hodnocení**
  V průběhu hodiny učitel hodnotí práci jednotlivých skupin nebo jednotlivců a poskytuje jim zpětnou vazbu o úspěchu jejich činnosti. U úspěš-

ných badatelů můžeme využít sebehodnocení. Další možností je hodnocení ve skupině. Každý člen by měl mít prostor se vyjádřit k tomu, jak skupina pracovala, kdo nejvíce přispíval svými nápady a kdo by naopak mohl být aktivnější.

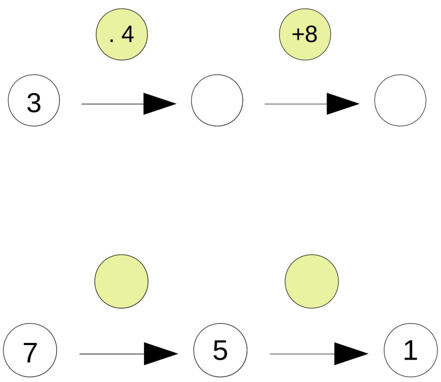
Jméno řešitele:
Třída:

Hadi 1 - zadání pro žáky

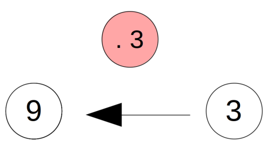
1. **Úkol**
   Pozorně si prohlédni Hada. Pokus se popsat, jak je tato úloha řešena.



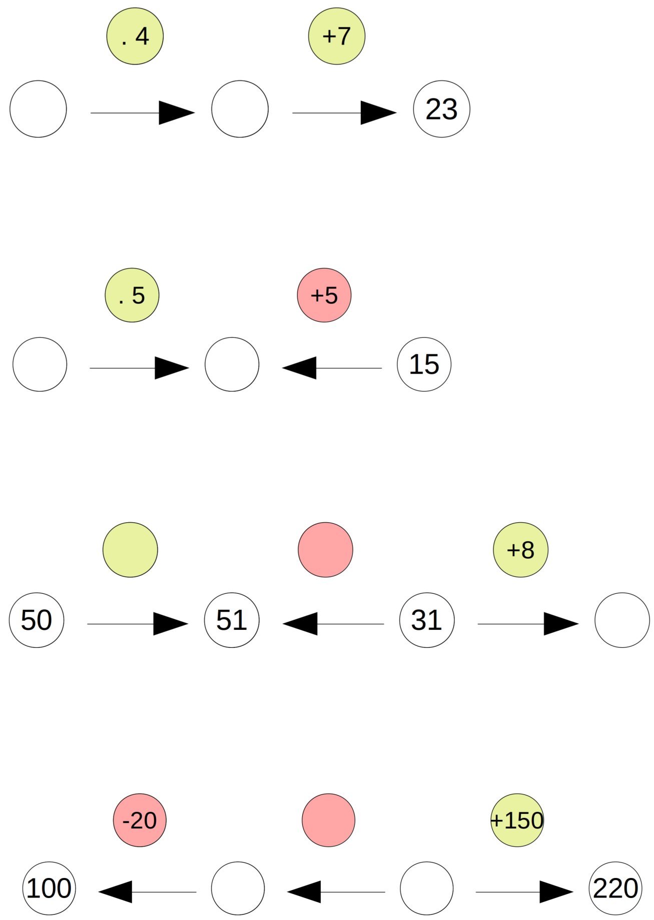
2. **Úkol**
   Samostatně nebo ve skupině řeš Hada.



3. **Úkol**
   Opět pozoruj Hada. Ve skupině svými slovy popište, v čem se Had liší od prvního a zkuste popsat, jak byste úlohu řešili.



4. **Úkol**
Řeš úlohu. Dávej pozor na směr šipek. Argumentuj, proč je tvé řešení správné.



3.1.2 Hadi 2

Úkoly v přípravě Hadi 2 mohou být pro některé žáky velmi náročné. Ve třídě průměrných žáků doporučujeme zadávat vybrané příklady jednotlivě a každému věnovat dostatek času. Pro nadané žáky můžeme využít přípravu jako celek.

- **Ročník**
  Přípravu je možné využít ve 4. i 5. ročníku základní školy. Lekce Hadi 2 je spíše vhodná do 5. ročníku.

- **Cíle**
  Žák řeší jednoduchou rovnici s jednou neznámou.
  Žák chápe souvislost mezi rovnicí a Hadem, dokáže rovnici převést do Hada a naopak.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme přibližně 2 vyučovací hodiny.

- **Pomůcky**
  Tabule, pracovní listy, prázdné listy na výpočty, psací potřeby.

- **Organizace**
  Párová nebo skupinová práce (skupiny po 3-4 žácích), samostatná práce.

- **Práce učitele**
  Role učitele je velmi podobná jako v přípravě Hadi 1. Učitel je v pozici pomocníka a rádce. Pokud budou žáci o svých řešeních diskutovat, učitel se ujímá role vedoucího této diskuse a žáky usměrňuje.
  Stejně jako v Hadech 1, před začátek hodiny si učitel na tabuli (příp. na interaktivní tabuli) připraví znázornění úloh.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     V úvodu lekce se žáci seznámí s prostředím Hadi. Je vhodné, aby lekce Hadi 2 navazovala na Hady 1, nebo aby alespoň žáci byli s tímto prostředím seznámeni v předcházející hodině matematiky. Vzhledem k tomu, že se nejedná o náročný typ úloh, žáci pravděpodobně princip Hadů pochopí rychle. Není tedy třeba dlouhého vysvětlování.

2. **Úkol 1**
   První fáze samotného bádání je pozorování, obdobně jako v přípravě Hadi 1. Žáci mají zadanou rovnici s jednou neznámou a jednoduchého Hada. Na základě pozorování a diskuse ve skupině hledají podobnost mezi Hadem a rovnicí. Při společné diskusi by mělo zaznít, že neznámá, tedy x, odpovídá prázdnému poli v Hadovi.

3. **Úkol 2**
   V druhém úkolu žáci převádějí rovnici do Hada. Je možné, že některým žákům bude bližší postup opačný (tedy přepis Hada do rovnice). Měli by proto dostat volbu začít takovým úkolem, který je jim bližší. Přirozeně tak vklouznou do problému a další úkol by pro ně měl být jednodušší.

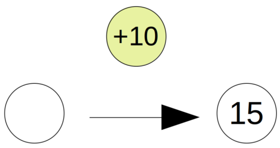
4. **Úkol 3**
   Poslední úkol, ve kterém žáci převádějí Hada do podoby rovnice. Úkoly 2 a 3 jsou volně zaměnitelné. Své výsledky dobrovolníci představí u tabule. Je vhodné zaznamenat i chybná řešení a společně objevit příčinu nezdaru. Ideální situace nastává tehdy, kdy původ chyby objeví sám žák.

- **Hodnocení**
  Hodnocení práce probíhá velmi podobně jako v Hadech 1. Na konci vyučovací jednotky může proběhnout hromadná diskuse, kde se žáci vyjádří k proběhnuté lekci. Mohou zde posoudit svou úspěšnost při bádání, přidat návrhy na zlepšení. Vhodné by bylo shrnutí učitelem, aby si žáci objasnili, co se v hodině dozvěděli.

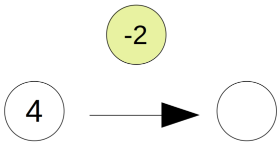
Jméno řešitele:
Třída:

Hadi 2 - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Prohlédni si Hada a rovnici. Myslíš, že mezi sebou mají nějakou spojitost? Co znamená písmeno x? Své nápady si sdělte ve skupině a nápady napište.



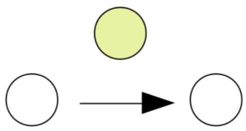
$x + 10 = 15$



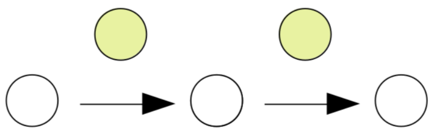
$x = 4 - 2$

2. **Úkol**
   Máš zadané rovnice. Tvým úkolem je převést tyto příklady do podoby Hada. Pokud je pro tebe tento postup těžší, můžeš začít úkolem 3 a k tomuto se vrátit.
   Pod své řešení jednoduše popiš, jak jsi postupoval. Můžeš napsat i co ti dělalo potíže.

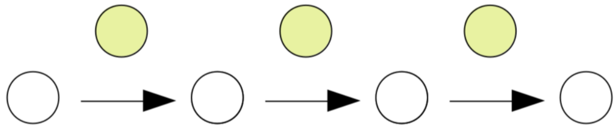
$x + 2 = 12$



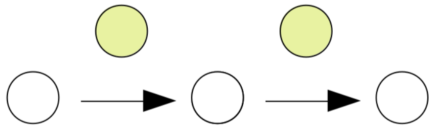
$2x + 10 = 20$



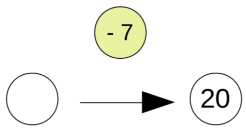
3x + 6 + 5 = 20

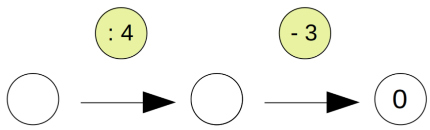


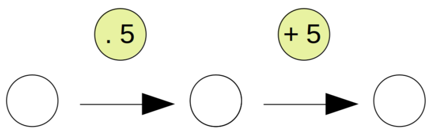
3x + 2 = 20



3. **Úkol**
   Převeď Hada do podoby rovnice. Svůj postup jednoduše popiš.







3.1.3 Výstaviště

- **Ročník**
  Příprava je využitelná ve 4. i 5. ročníku. Jednoduchá Výstaviště jsou využitelná již na počátku školní docházky pro prohloubení znalosti číselné řady.

- **Cíle**
  Žák je schopen systematicky najít cestu Výstavištěm.

- **Časová náročnost**
  1 vyučovací hodina.

- **Pomůcky**
  Pracovní listy, psací potřeby.

- **Organizace**
  Samostatná práce.

- **Práce učitele**
  V začátku hodiny učitel frontálně úlohu představí a definuje pravidla pohybu po Výstavišti. V dalších fázích individuálně přistupuje k žákům, radí a podněcuje k bádání.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     V úvodu si ujasníme pravidla pohybu po Výstavišti. Můžeme chodit pouze vodorovně a svisle, musíme navštívit každou místnost a zároveň žádnou nesmíme navštívit vícekrát. Pokud pravidla pohybu dělají žákům problém, můžeme argumentovat tím, že v rozích místnosti obvykle dveře nebývají.
     Cestu Výstavištěm žáci zaznamenávají celými kladnými čísly. Číslice 1 značí počátek trasy. Nejvyšší číslo zaznamenává konec cesty, příp. přechod do dalšího patra Výstaviště. V případě vícepatrového Výstaviště žák v dalších patrech pokračuje číslem o jedno větší, než bylo nejvyšší číslo předchozího patra.

  2. **Úkol 1**
     Žáci samostatně řeší jednopodlažní Výstaviště. Pokud je to nutné, připomeneme pravidla pohybu po Výstavišti. Úlohu není nutné

frontálně kontrolovat, žáci by měli sami objektivně posoudit, zda úkol splnili nebo ne. Pokud si nebudou jisti, zda dodrželi definovaná pravidla, mohou svou cestu vyznačit čárou spojující čísla od nejmenšího po největší (příp. naopak). Tato čára by měla procházet pouze stranami a nikdy ne vrcholy čtverců.
První Výstaviště má dvě řešení, druhé čtyři a třetí má pouze jedno řešení.

3. **Úkol 2**
   Žáci řeší dvoupodlažní a třípodlažní Výstaviště. Šedá pole označují přechody mezi patry. Učitel upozorní žáky na to, že v číselné řadě pokračují dokud neprojdou všechny místnosti. Je možné, že někteří žáci by v druhém podlaží začínali číslicí 1.
   První podlaží dvoupodlažního Výstaviště má dvě různá řešení, zatímco druhé podlaží lze projít pouze jedním způsobem. První i druhé patro třípodlažního Výstaviště lze projít pouze jedním způsobem, třetí podlaží má dvě řešení.

4. **Úkol 3**
   V poslední úloze mají žáci zadané jedno Výstaviště. Jejich úkolem je najít co nejvíce řešení. Největší počet možných řešení je pět.

- **Možné rozšíření**
  U těchto úloh můžeme využít prostor pro vlastní tvůrčí činnost žáků. Ti mohou samostatně vytvořit vlastní Výstaviště a to poté zadat svým spolužákům. Pro koncept mohou využít prázdný papír a do pracovního listu znázornit hotové zadání. Tvořivosti se meze nekladou, Výstaviště může mít libovolnou velikost i tvar. Je ale vhodné žáky omezit alespoň na počet místností (např. do 100). Počet zadaných čísel v tabulce se odvíjí od její velikosti, doporučovali bychom alespoň dvě zadaná čísla na 10 místností.

- **Hodnocení**
  U prvních dvou úloh můžeme hodnotit rychlost vyřešení Výstaviště, u třetího úkolu počet nalezených řešení. Pokud přistoupíme k rozšíření, je nutné hodnotit funkčnost vytvořené úlohy. I u této přípravy se nám nabízí sebehodnocení.

Jméno řešitele:
Třída:

Výstaviště - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Vyřeš Výstaviště. Pohybovat se můžeš jen svisle nebo vodorovně.

a)

			5
	11		

b)

	11	
	8	
	4	

c)

	18				
	2				

2. **Úkol**
   Řeš dvoupatrové a třípatrové Výstaviště. Šedá pole označují přechody mezi patry.

			7
		15	
	13		
1			

			32
		22	
	24		
26			

3			
	13		

	19		

	43		

3. **Úkol**
Hledej co nejvíce možných cest po tomto Výstavišti.

		3	
	13		

		3	
	13		

		3	
	13		

		3	
	13		

		3	
	13		

		3	
	13		

3.1.4 Parkety

Lekce je zaměřená na rozvoj schopnosti analýzy a syntézy rovinných tvarů. Žák si vytvoří základy pro výpočet obsahu čtverce a obdélníku. Při řešení úloh se rozvíjí kombinatorické myšlení.

- **Ročník**
  Příprava je využitelná ve 4. i 5. ročníku.

- **Cíle**
  Žák provádí analýzu a syntézu rovinného tvaru.
  Žák si uvědomí, že obsah celku se rovná součtu obsahů jeho částí.
  Žák zjistí, že pro spočítání obsahu pravoúhelníku ve čtvercové síti stačí zjistit počet jednotkových čtverců, které vyplňují daný útvar.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme 1 vyučovací hodinu.

- **Pomůcky**
  Čtverečkovaný papír, podklad na pokládání parket 3×4 a parkety do každé dvojice, pracovní listy, psací potřeby, pastelky.
  Je vhodné, aby pomůcky byly z tvrdšího papíru, případně zalaminované. Prodloužíme tím životnost kartiček.

- **Organizace**
  Práce ve dvojicích.

- **Práce učitele**
  Úloha s parketami je méně náročná. Žáci tedy pracují relativně bez vedení učitele a ten může věnovat pozornost těm žákům, kteří jeho pomoc potřebují. V závěru lekce hodnotí práci žáků.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     Lekce je motivovaná krátkým úvodem. Žáci by měli bez vysvětlování úkol pochopit.

  2. **Úkol 1**
     První úkol považujeme za jednoduchý. Pokud žáci hledají více možností doporučujeme, aby své objevy zakreslovali. Vyhneme se

tak opakování stejných kombinací. Za jedno řešení považujeme položené parkety přímo shodné, tedy i otočené o 90°, 180°nebo 270°. Parkety, které jsou nepřímo shodné, tedy zrcadlové, považujeme za dvě různá řešení.

3. **Úkol 2**
   Náročnější úkol, který vyžaduje myšlenkovou činnost. Žák by si měl uvědomit, že pokud bude využívat menší parkety, bude jich potřebovat více než větších. Na tomto základě by měli dospět ke správnému výsledku. Nejmenší počet parket pro položení koupelny 3×4 jsou 3 - čtyřka a obě elka.
   Největší počet možných položených parket jsou 4. Kombinace mohou být různé.

4. **Úkol 3**
   Žáci pokládají parkety tak, aby vždy byla položená čtyřka, a to na jakékoliv pozici. Možné kombinace jsou: čtyřka + mono + elko + ji; čtyřka + růžek + elko + mono; čtyřka + obě elka; čtyřka + ji + růžek + duo.

5. **Úkol 4**
   Do koupelny můžeme položit pouze takové parkety, jejichž součet obsahů se rovná obsahu podlahy, tedy 12m^2.

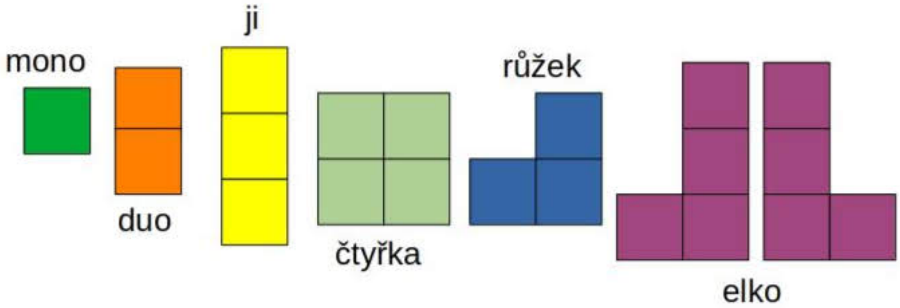
6. **Úkol 5**
   Parkety stačí pouze na jednu a část koupelny. Součet obsahů všech parket je 21m^2. Pro pokrytí dvou stejných koupelen bychom potřebovali ještě jednu parketu s obsahem 3m^2.

- **Hodnocení**
  Hodnocení úloh je náročnější z toho hlediska, že některé úkoly mají několik možných řešení. Doporučovali bychom na tabuli možnosti řešení zakreslovat, abychom se vyhnuli jejich opakování. Hodnotit můžeme počet řešení u úloh 2 a 3. Ocenit je třeba i správnost řešení u úkolů 4 a 5.

Jména řešitelů:
Třída:

Parkety - zadání pro žáky

Táta se rozhodl, že vymění podlahu v koupelně o velikosti 3×4 m. Ve stavebninách zrovna probíhal výprodej, na skladě už zbylo pouze 7 parket. Na pokrytí koupelny stačí, táta ale potřebuje pomoci s tím, jak parkety v koupelně rozložit. Na skladě měli tyto tvary parket: mono, duo, ji, čtyřka, růžek a dvě elka. Jeden čtverec v parketě má obsah $1m^2$.



1. **Úkol**
   Pokus se pokrýt podlahu parketami tak, aby nikde nezbylo volné místo a ani nikde parkety nepřečnívaly. Kolik parket jsi použil?

2. **Úkol**
   Jaký je nejmenší počet parket, které můžeš použít na podlahu? Jaké to jsou?
   Kolik jich můžeš použít nejvíce? Různé možnosti můžeš zakreslovat do čtvercové sítě.

3. **Úkol**
   Mamka se rozhodla, že na podlaze chce mít čtyřku. Kolik možností má táta k položení parket? Jaké to jsou?

4. **Úkol**
   Táta přišel na to, jak zjistit, zda se mu parkety do koupelny vejdou aniž by s nimi manipuloval. Zkus přijít na to, jak to udělal.

5. **Úkol**
   Mohl by táta jen těmito parketami pokrýt dvě stejné koupelny? Jak jsi na to přišel?

3.1.5 Šipkový graf

Úkoly pro tuto přípravu jsou převzaté z učebnice Fraus pro 5. ročník (2011, s. 24). Za předpokladu, že tuto lekci použijete v návaznosti na Hady, není nutné příliš úlohu představovat. Žáci si na základě předchozích zkušeností uvědomí, že operace provádějí po směru šipek.

- **Ročník**
  Úloha je vhodná spíše do 5. ročníku.

- **Cíle**
  Žák na zadání odhadne, jak schéma pracuje.
  Žák svůj odhad ověří na dalších úlohách.
  Žák formuluje zadání úloh.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme jednu vyučovací hodinu.

- **Pomůcky**
  Pracovní listy, psací potřeby, listy na výpočty příp. kalkulačky.

- **Organizace**
  Doporučovali bychom práci ve dvojicích nebo v malých skupinách. Nadaní žáci mohou pracovat sami.

- **Práce učitele**
  V této lekci je učitel především v roli pomocníka. V úvodu žákům představí prostředí. Pokud jsou žáci seznámeni s prostředím Hadi, učitel může sdělit, že Šipkový graf je Had stočený do klubíčka. Bez dalších nápověd žáci pochopí způsob řešení úlohy.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     Pokud je to nutné, v úvodu žákům představíme Šipkový graf. V prvním úkolu se žáci seznámí s nápadem na zjednodušení příkladu. Vlastními příklady ověřují jeho platnost. V následujícím, druhém, úkolu se pokusí stejnou ideu aplikovat na podobný typ příkladů. Pracovní list pro žáky obsahuje pouze dva úkoly. V případě, že je žáci vyřeší rychle, můžeme čas využít pro hledání vysvětlení Martinovy teorie. Pro rozšíření můžeme také žákům zadat

takové příklady, u kterých podobný postup není možný, jako je např. $(72 \cdot 7) : 9$. Žáci mohou zjišťovat, v jakých situacích lze trik využít a v jakých ne.

2. **Úkol 1**
   V prvním úkolu si žáci přečtou úvodní příběh, ve kterém je prezentovaný trik pro řešení příkladu na násobení a dělení (Hejný et al., 2011, s. 24). Úkolem žáků je ověřit platnost této teorie. Následný zápis do Šipkového grafu prezentuje, jakou operací žáci nahradili dvě původní operace. V příběhu žák Martin vymyslel, že pokud číslo vynásobí 6 a následně vydělí 3, vyjde mu stejný výsledek, jako když původní číslo vynásobí dvěma. Původní dvě operace nahradil jednou.
   Žáci platnost teorie vyzkouší na výchozích číslech, která si sami zvolí. Předpokládáme, že po přibližně třech nebo čtyřech úspěšných pokusech budou považovat nápad za funkční. Žáci mají prostor své vlastní příklady zapisovat přímo do pracovního listu. Někteří se mohou pokusit zjistit, jak na tento trik Martin přišel.

3. **Úkol 2**
   Druhá úloha je koncipovaná tak, že žáci aplikují Martinovu teorii z úkolu 1 na jiné příklady. Všechny zadané rovnice lze podobnou metodou vyřešit. Žáci mohou postupovat tak, že vypočítají zadané příklady a poté budou hledat správnou operaci. Někteří si mohou uvědomit, že stačí druhá dvě čísla vydělit. V novém příkladu využijí tu operaci, u které bylo v původním příkladu větší číslo. Na příkladu bychom to vysvětlili takto:
   Pokud řešíme příklad $(33 \cdot 4) : 2$, nejprve vydělíme druhé a třetí číslo, což nám vyjde 2. V původním příkladu jsme násobili 4 a dělili 2. U násobení je větší číslo, proto využijeme tuto operaci. Vznikne příklad $33 \cdot 2 = 66$. Pokud vypočítáme původní příklad tak, jak je zadaný, vyjde nám také 66.

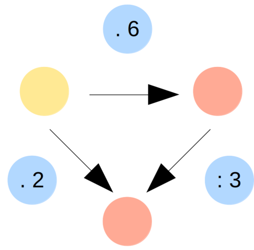
- **Hodnocení**
  V této lekci bychom doporučovali využít sebehodnocení. Žáci mohou říci, co se jim dařilo nebo naopak nedařilo. Mohou také přednést návrhy, jak být úspěšnější. Ocenit bychom měli především to, zda se žákům podařilo aplikovat teorii na jiné příklady.

Jméno řešitele:
Třída:

Šipkový graf - zadání pro žáky

1. **Úkol**

   Vypočítej zpaměti $(41 \cdot 6) : 3 =$

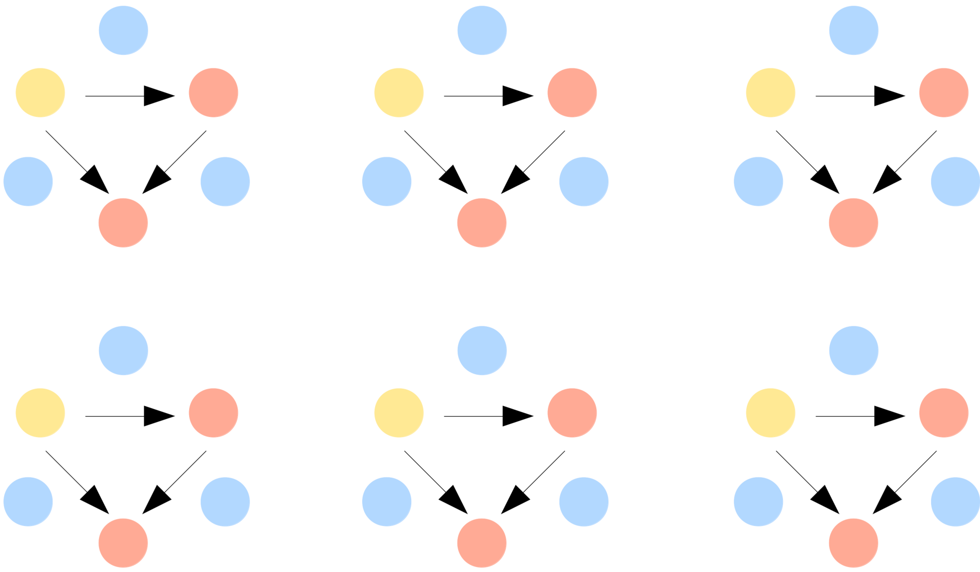
   

   Martin se na úlohu podíval a hned řekl výsledek 82. Pak vysvětlil, že vynásobit číslo šesti a pak ho vydělit 3 je totéž, jako původní číslo násobit 2. Nakreslil trojúhelníkový graf a řekl, ať dám do žlutého pole jakékoliv číslo Č, bude pokaždé $(Č \cdot 6) : 3 = Č \cdot 2$. Prověř Martinův trik pro několik čísel.

2. **Úkol**

   Zkus Martinův trik na těchto příkladech a zapiš do Šipkového grafu.

$(33 \cdot 4) : 2$	$(21 : 3) \cdot 9$	$(54 : 3) \cdot 6$
$(20 \cdot 9) : 3$	$(72 : 6) \cdot 3$	$(54 \cdot 3) : 6$



3.1.6 Algebrogramy 1

Každý Algebrogram obsahuje zašifrované číslice v písmena. Za každé písmeno lze dosadit jen jednu číslici. To znamená, že pokud máme Algebrogram A + AB = 23, za písmeno A můžeme dosadit jednu číslici a za písmeno B jinou. V tomto případě jsou to A = 2, B = 1, tedy pokud dosadíme číslice do Algebrogramu, dostaneme příklad 2 + 21 = 23.
Žáci mohou úlohy řešit metodou pokus-omyl. Pravděpodobně budou také vycházet ze svých znalostí aritmetické operace. Za každé písmeno lze dosadit pouze 10 možností (čísla 0, 1, 2, …9).

- **Ročník**
  Přípravu je možné využít ve 4. i 5. ročníku základní školy.

- **Cíle**
  Žák si prohloubí pochopení dělení se zbytkem.
  Žák si uvědomí, že zbytek musí být menší než dělitel.
  Žák řeší Algebrogramy s využitím poznatků o vlastnostech dělení a odčítání.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme 1 vyučovací hodinu.

- **Pomůcky**
  Tabule, pracovní listy, psací potřeby a papír nebo sešit.

- **Organizace**
  Práce ve dvojicích nebo ve skupinách po 3.

- **Práce učitele**
  V začátku hodiny učitel frontálně představí Algebrogramy a na základě spolupráce s třídou stanoví pravidla. Při skupinové nebo párové práci se jeho role stává pasivnější, naopak žáci jsou aktivní. Během hodnocení je učitel jakýsi moderátor, který vyzývá jednotlivce nebo skupiny k vysvětlování, argumentování a hodnocení. Během bádání je nutné, aby učitel procházel třídu, měl přehled o úspěšnosti jednotlivých skupin.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     Jako první fázi seznámíme žáky s pojmem Algebrogramy a vysvětlíme princip jejich fungování. Pravidla je vhodné viditelně zapsat např. na tabuli. Jsou to tato:
     - jedno písmeno = jedna číslice,
     - za písmena dosazujeme pouze číslice od 0 do 9,
     - první číslice dvojciferného nebo víceciferného čísla nesmí být 0.

     Pravidla vysvětlíme na příkladu, např. AA = 50 + A. Jako první věc si musíme uvědomit, že všechna písmena A skrývají stejnou číslici. Úloha má jednoznačné řešení, protože na místě jednotek i desítek je stejná číslice. Proto za písmeno A můžeme dosadit pouze číslici 5.
     Zda žáci principu těchto úloh porozuměli můžeme ověřit na příkladu $B \cdot B = B + B + B$. Jedna možnost řešení je postupné dosazování písmen. Lepší možnost řešení je úvaha. Hledáme takové číslo, jehož druhá mocnina se rovná třem součtům. Touto úvahou snadno dojdeme k řešení, že $B = 3$. Pro žáky je náročnější druhý příklad především proto, že je ve veliké míře abstraktní.

  2. **Úkol 1**
     Algebrogramy zaměřené na dělení se zbytkem. V úvodu úkolu je nutné tento typ dělení zopakovat, pokud to nebylo náplní nedávných hodin matematiky. Příklady by neměly být pro žáky příliš náročné, pokud správně aplikují pravidla na dělení se zbytkem. Pravidly myslíme především to, že zbytek nemůže být větší nebo roven děliteli. Při aplikaci tohoto pravidla má první úkol jednoznačné řešení, protože jediné číslo může být zbytkem, a to 1. Řešení je tedy $11 : 2 = 5$ (1). U druhé úlohy máme možnosti zbytku tři, a to čísla: 1, 2 a 3. Dělenec tedy může být 11, 22 nebo 33. V našem příkladu rovnost platí pouze pro druhou možnost, tedy řešení je $22 : 4 = 5$ (2).
     Pokud jsou žáci zvyklí na jiný zápis zbytku, např. $11 : 2 = 5$ zb. 1, bylo by vhodné příklady upravit, aby odpovídaly jejich znalostem. Jiný zápis by mohl být matoucí.

3. **Úkol 2**
   Žáci ve dvojicích nebo skupinách řeší úlohu: CD - DC = D8. Pro její vyřešení je nutné si uvědomit, že číslice zašifrovaná v písmenu C musí být větší než číslice za písmenem D. Pokud by tato podmínka nebyla splněna, výsledek by vycházel v záporných číslech a tudíž by rovnost nemohla platit. Druhým krokem je najít taková čísla, jejichž rozdíl je 8. Zde pravděpodobně žáci budou automaticky odečítat větší od menšího. Vzhledem k tomu, že C >D, musí se tedy k rozdílu 8 přejít přes desítku.
   Na tuto úlohu je třeba poskytnout dostatek času. Žáci se úlohu nejprve pokusí vyřešit a poté popíší postup, jaký využili. Skupiny, které došly k nějakému výsledku, ať už úspěšnému či neúspěšnému, prezentují své nápady. Druhé skupiny kriticky posoudí, zda řešení je nebo není možné, příp. kde skupina mohla chybovat. Chyby jedné skupiny mohou pomoci ke správnému řešení skupiny jiné.

- **Hodnocení**
  U prvního úkolu bychom mohli hodnotit logické uvažování žáků. Není nutné, aby dospěli ke správnému výsledku, pokud pochopili princip Algebrogramů a překonali obtíže popsané v prvním odstavci úkolu 1. U druhého úkolu naopak můžeme hodnotit správnost výpočtu.

Jména řešitelů:
Třída:

Algebrogramy 1 - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Vyřešte Algebrogramy na dělení se zbytkem. Jednoduše popište váš postup.

AA : 2 = B (A)	A =	B =
AA : 4 = B (A)	A =	B =
AA : 6 = B (A)	A =	B =
AA : 8 = B (A)	A =	B =
AA : 5 = B (A)	A =	B =

2. **Úkol**
   Ve dvojici nebo skupině vyřešte zadaný Algebrogram. Vlastními slovy pod příklad popište, jak jste postupovali.

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{CD} \\ -\boldsymbol{DC} \\ \hline \boldsymbol{D}\mathbf{8} \end{array}$$

3.1.7 Algebrogramy 2

Náročnější úlohy s Algebrogramy. Lekci je možné využít ve stejné třídě v návaznosti na Algebrogramy 1. Při využití jen druhé přípravy doporučujeme převzít úvod z přípravy Algebrogramy 1 pro seznámení s nimi.

- **Ročník**
  Přípravu je možné využít ve 4. i 5. ročníku základní školy.

- **Cíle**
  Žák rozumí principu Algebrogramů.
  Žák kriticky hodnotí správnost svého výsledku.
  Žák řeší Algebrogramy s využitím poznatků o vlastnostech sčítání.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme 1 vyučovací hodinu.

- **Pomůcky**
  Tabule, pracovní listy, psací potřeby a papír nebo sešit.

- **Organizace**
  Práce ve dvojicích nebo ve skupinách po 3.

- **Práce učitele**
  Práce učitele je velmi podobná jako v Algebrogramech 1. V úvodu je učitel aktivní při vysvětlování principu úloh a vyvozování pravidel. Po zadání úkolu se přesouvá do role poradce a usměrňuje práci žáků. I zde je nutný pohyb učitele po třídě a kontrola jednotlivých skupin. Pokud žáci potřebují pomoci nebo poradit, učitel musí být k dispozici.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     Pokud se žáci s tímto druhem úloh nikdy nesetkali, učitel je třídě představí a vyvodí pravidla (viz příprava Algebrogramy 1). Pokud žáci úlohy znají, stačí pravidla připomenout.

  2. **Úkol 1**
     V prvním úkolu žáci řeší jednodušší Algebrogramy na sčítání jednociferného a dvojciferného čísla. Tento úkol by mohl být vyřešený během několika minut. Správnost výpočtů frontálně ověříme, můžeme

jednomu dobrovolníkovi dát prostor pro vysvětlení postupu.

3. **Úkol 2**
   V úkolu 2 žáci řeší opět součtové Algebrogramy, tentokrát ale tří čísel. Úlohy jsou náročnější než předchozí. Předpokládáme, že žáci začnou úlohu řešit metodou pokus-omyl. Je možné, že touto metodou rychle dospějí k výsledku. Ze svého řešení mohou vypozorovat nějaké pravidlo, které by jim mohlo pomoci při řešení druhého a třetího příkladu.
   Při řešení prvního příkladu LMN + LM + L = 136 je možnou metodou úvaha. Žáci si uvědomí, že za písmeno v řádu stovek, tedy L, mohou dosadit pouze číslici 1. Následně tuto číslici doplní za všechna písmena L. Podobnou metodou pokračují i v řádu desítek.

4. **Úkol 3**
   Třetí úkol se poněkud liší od předchozích dvou. Algebrogram nemá jedno řešení, ale čtyři. Úkolem není najít všechna řešení, ale zjistit platnost výroku. Žáci si mohou při tomto úkolu uvědomit, že při sčítání dvou stejných čísel, ať už sudých nebo lichých, vyjde vždy číslo sudé. Na toto zjištění je možné navázat při jiné hodině matematiky, kdy žáci mohou toto pravidlo ověřovat i na jiných číslech.

- **Hodnocení**
  U těchto úloh doporučujeme hodnotit zvolenou taktiku řešení. Pokud žáci řešili úlohy pouze metodou pokus-omyl, pravděpodobně nad možnostmi úlohy příliš neuvažovali. Ti, co objevili vlastní postup, byli pravděpodobně při bádání úspěšnější a možná i rychlejší. Takové postupy je třeba ocenit, např. zavedeným bonusovým hodnocením ve třídě.

Jména řešitelů:
Třída:

Algebrogramy 2 - zadání pro žáky

Řeš Algebrogramy na sčítání. U každého úkolu se nejprve pokus Algebrogramy vyřešit, poté popiš svou taktiku.

1. **Úkol**

A + AB = 23	A =	B =
C + CD = 34	C =	D =
E + EF = 35	E =	F =
G + GH = 41	G =	H =

2. **Úkol**

LMN + LM + L = 136	L =	M =	N =
PQR + PQ + P = 139	P =	Q =	R =
STU + ST + S = 260	S =	T =	U =

3. **Úkol**
   Je pravdivý tento výrok?
   Algebrogram AA + AA = BB má více řešení, ale B je vždy sudé.

3.1.8 Tangramy

- **Ročník**
  Úlohu je možné využít ve 4. i 5. ročníku základní školy.

- **Cíle**
  Žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě.
  Žák si uvědomí, že obsah obrazce při změně tvaru zůstává stejný.
  Žák zjistí, že obsah útvaru se rovná součtu obsahů jeho částí.

- **Časová náročnost**
  Předpokládáme, že realizace této přípravy by neměla přesáhnout jednu vyučovací hodinu.

- **Pomůcky**
  Čtvercová síť (viz příloha 3) pro každého žáka, nejméně však do dvojic, Tangram (viz příloha 4), geometrické tvary k úkolu 2 (viz příloha 5), pracovní listy, barevné pastelky.
  Je vhodné, aby pomůcky byly z tvrdšího papíru, případně zalaminované. Prodloužíme tím životnost kartiček.

- **Organizace**
  Žáci budou pracovat samostatně a ve skupinách. Doporučujeme žáky rozdělit do skupin tak, aby byly pokud možno vyrovnané. Diskuse mohou probíhat ve skupinách nebo hromadně.

- **Práce učitele**
  Učitel je zde organizátorem a pomocníkem při práci žáků. Poskytuje zpětnou vazbu o úspěšnosti a pomáhá žákům směřovat ke správnému řešení.

- **Rozvržení hodiny a jednotlivé úkoly**

  1. **Úvod**
     V úvodu lekce by bylo vhodné žáky seznámit s Tangramem, který se využívá pro tvorbu hlavolamů. Žáci mají před sebou k manipulaci jednotlivé části, tedy: dva větší, jeden střední a dva menší trojúhelníky, jeden čtverec a rovnoběžník.
     Čtvercovou síť je nutné natisknout z obou stran papíru, aby žáci jednu stranu mohli využít pro pokládání a druhou pro zakreslování úkolu 2.

2. **Úkol 1**
   Žáci mají části Tangramu a čtvercovou síť. Pomocí vhodného umisťování útvarů do čtvercové sítě spočítají počet celých zakrytých čtverců - tedy jejich obsah. Žáci úkol řeší samostatně nebo si mohou pomáhat v rámci skupiny. Předpokládáme, že alespoň některé z dětí bude vědět jak útvary do sítě umístit tak, aby obsah šel určit jednoznačně. Ostatní žáci by taktiku mohli převzít a napodobit u dalších útvarů. Pokud je většina žáků hotova, dáme jim prostor pro zveřejnění svých výsledků. Doporučujeme si pozvat jednoho dobrovolníka k tabuli, aby viditelně ukázal vhodné umístění tvarů do sítě. Vypočítané obsahy zapíšeme viditelně na tabuli.

3. **Úkol 2**
   Žáci mají zadané n-úhelníky ve čtvercové síti - ty je možné ukázat na interaktivní tabuli nebo dát každé skupině natištěné. Způsobem zadání těchto tvarů můžeme i individualizovat výuku - nadaní žáci mohou skládat do prázdné čtvercové sítě, zatímco méně nadaní žáci přímo do předlohy. Úkolem je složit ze dvou nebo více částí Tangramu shodný n-úhelník. Žáci to budou pravděpodobně zkoušet a zjišťovat na základě manipulace, je ale možné, že někdo řešení „uvidí“ bez nutnosti zkoušení. Řešení žáci zakreslí do čtvercové sítě, přičemž jednou barvou znázorní obrys zadaného geometrického útvaru a jinou barvou (příp. tužkou) zakreslí své řešení. Jednotlivá řešení žáků není nutné v hodině kontrolovat, předpokládáme, že žáci sami dokážou posoudit, zda se jim útvar podařilo správně složit.
   Některé tvary lze vyplnit různými způsoby. Můžeme tedy rychleji hotové žáky požádat, aby hledali i jiná řešení. Ta mohou zaznamenat na stejnou předlohu, ale jinou barvou.

4. **Úkol 3**
   Nyní mají žáci prostor pro fantazii. Ze všech částí Tangramu vytvoří svůj vlastní útvar, který umístí do čtvercové sítě. Na počítání obsahu tohoto útvaru pravděpodobně využijí několik taktik, a to:
   - Postupně budou počítat zakryté a částečně zakryté čtverce. Tato taktika je zdlouhavá a nepřesná.
   - Uvědomí si, že obsahy jednotlivých částí již znají a postupně budou sčítat obsahy tvarů jeden za druhým, dokud nedospějí k výsledku.

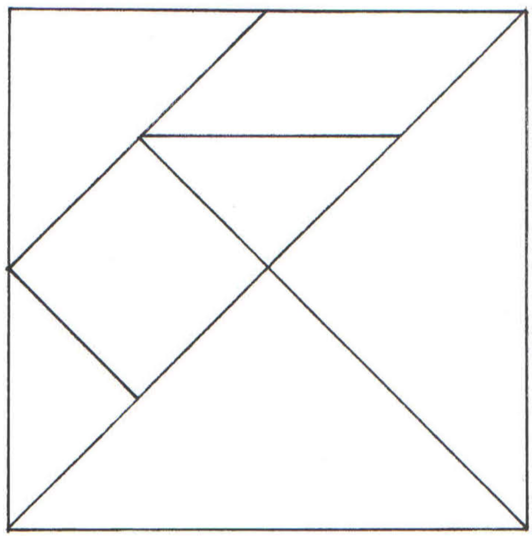
Následuje společná část, kdy si necháme od žáků sdělit, jaký obsah vypočítali. Pokud byli žáci úspěšní, pravděpodobně často zazní číslo 16. Žáci nejspíš budou překvapeni, že tolik z nich má stejný obsah. Požádáme je tedy, aby složili jiný tvar ze všech částí a poté opět vypočítali počet zakrytých čtverců. Celý proces opakujeme, opět by se často mělo opakovat číslo 16. Je možné, že už u druhého opakování někdo z žáků nebude obsah počítat, ale rovnou bude křičet číslo 16. Pokud na to někdo přijde, dáme mu prostor pro argumentaci.

- **Hodnocení**
  Pozitivně bychom hodnotili především zjištění, že obsah útvaru se nemění - pokud k takovému zjištění ve třídě došlo. Dále můžeme hodnotit taktiku při zjišťování obsahu Tangramu.

Jméno řešitele:
Třída:

Tangramy - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Máš k dispozici jednotlivé části Tangramu a čtvercovou síť. Zjisti počet čtverců, které vyplní jednotlivé části Tangramu. Zjištěné číslo zapiš přímo do Tangramu. Měřit můžeš sám, nebo se poraď ve skupině.



2. **Úkol**
   Pozorně si prohlédni znázorněné obrazce. Pokus se vytvořit stejné geometrické tvary pomocí dvou nebo více dílů Tangramu. Dávej pozor na to, aby jednotlivé tvary zakrývaly stejný počet čtverečků, jako na znázornění. Řešení zakresli do čtvercové sítě.

3. **Úkol**
   Zapoj svou fantazii a slož ze všech částí Tangramu libovolný tvar. Může to být budova, postava, zvíře, cokoliv. Použij všechny části. Ty se musí dotýkat vrcholy, nebo stranami. Žádná nesmí ležet mimo.
   Vypočítej, kolik celých čtverců tvůj útvar zakrývá. Popiš svou taktiku. Překvapilo tě něco? Co jsi zjistil?

4 Evaluační část

V rámci této poslední části diplomové práce byly vybrané přípravy realizovány v praxi. Jejich funkčnost byla objektivně hodnocena námi a vyučujícími z daných tříd. Výukové experimenty probíhaly na 10. ZŠ v Plzni ve čtvrtých a pátých ročnících. Pro náš experiment nám byla poskytnuta jedna vyučovací hodina na každou vybranou přípravu, proto jsme zvolili ty časově méně náročné.

Vyučovací lekce Hadi 1 a Výstaviště byly realizovány ve třídě 4.A, lekce Parkety ve 4.B a přípravy Algebrogramy 2 a Tangramy v 5.A. Vyučující jednotlivých tříd žákům s předstihem sdělili, že je čeká nestandardní hodina matematiky.

V následující části detailně rozebíráme proběhlé experimenty. Výukové jednotky jsou za sebou řazeny ve stejném pořadí, v jakém byly zkoušeny.

4.1 Realizace přípravy Algebrogramy 2

Příprava Algebrogramy 2 byla realizována v páté třídě. Přítomno bylo 24 žáků, kteří pracovali ve dvojicích. Před samotným začátkem hodiny jsme si připravili veškeré pomůcky. Na tabuli jsme viditelně napsali pravidla na řešení Algebrogramů tak, aby si je žáci kdykoliv během hodiny mohli připomenout.

V úvodu hodiny jsme se žáků zeptali, zda už někdy slyšeli pojem Algebrogramy. Pouze jeden žák se již s pojmem setkal. Bylo tedy nutné pojem vysvětlit. Žákům jsme objasnili pravidla napsaná na tabuli. Jejich porozumění jsme frontálně ověřili na jednoduchém příkladu $A + B = 4$. Žáci rychle podávali návrhy a společně jsme našli všechna čtyři řešení. Zazněl také návrh $2 + 2 = 4$. Bohužel si nikdo z žáků sám neuvědomil, že tuto možnost nelze do příkladu dosadit. Až po upozornění na tento nápad si žáci uvědomili, že za A a B musí dosadit jiné číslo. Podobným způsobem jsme postupovali také u příkladu $AA = 50 + A$. Žáci automaticky dosazovali čísla menší než 5. Ke správnému výsledku jsme došli ale až po několika různých návrzích. Řešení Algebrogramu $B \cdot B = B + B + B$ nalezl jeden žák hned po zadání.

Poté, co jsme se ujistili, že žáci chápou princip úlohy, přešli jsme k prvnímu úkolu v pracovním listu. Všechny dvojice se snažily nějakým způsobem úlohy vyřešit. Necelé polovině třídy se podařilo najít řešení. Po několika minutách práce jsme požádali jednoho úspěšného řešitele, aby své řešení popsal u tabule. Žák dosadil čísla do rovnice, bohužel ale nedokázal slovně reprodukovat způsob svého objevu. U některých žáků nastal „AHA“ moment. Zajímavé bylo sledovat, že žáci postupně více pronikali do problematiky Algebrogramů a v jejich řešení byli úspěšnější. Některé dvojice postupně dosazovaly do rovnice čísla, jiné hádaly. Jedna dvojice si výsledek rozdělila na desítky a jednotky, díky čemuž si uvědomili, že za písmeno A mohou dosadit pouze číslice 1 nebo 2, na výsledek přišli dosazením těchto dvou čísel a dopočítáním čísla skrytého za písmenem B. Některé dvojice měli problém si uvědomit, že za stejná písmena musí dosazovat stejné číslice. Jako řešení uváděli tedy např. $5 + 18 = 23$.

Druhý úkol byl pro žáky na první pohled náročnější. Překvapením pro nás bylo, jak rychle úkol někteří žáci vyřešili. Bohužel opět nebyli schopni popsat taktiku, jakou postupovali.

Třetí úkol poskytl žákům větší prostor pro tvoření vlastních příkladů. Pět dvojic objevilo všechna řešení Algebrogramu AA + AA = BB, čímž tedy mohli potvrdit platnost první části výroku. Čtyři dvojice našly alespoň jedno řešení a tři dvojice nenašly žádné řešení. Oproti předchozím úkolům někteří žáci pociťovali třetí úkol jako nejlehčí.

Při realizaci této lekce jsme narazili na několik obtíží. Jednou z nich bylo, že třída nebyla příliš schopná pracovat ve dvojicích. Žáci často pracovali samostatně, o svých nápadech nediskutovali. Dalším problémem bylo, že nikdo z žáků nebyl ochotný nebo schopný sdílet své nápady, proto jsme neměli možnost proniknout do jejich způsobu myšlení.

Žáci byli v průběhu hodiny roztržití a v druhé polovině lekce bylo náročné je usměrňovat k práci. Více energie jsme věnovali usměrňování žáků, na zhodnocení hodiny a ujasnění tedy nezbylo moc času. Proběhlou hodinu hodnotíme průměrně. Příprava se projevila jako funkční. U méně matematicky zdatných žáků bychom doporučovali odebrat jeden nebo dva příklady, aby v závěru hodiny byl větší prostor pro ujasnění si zvládnutí cílů hodiny.

4.2 Realizace přípravy Hadi 1

Příprava Hadi 1 byla realizována ve 4. třídě. V den experimentu bylo přítomno 22 žáků. Žáci pracovali v šesti skupinách po 3 a v jedné skupině po 4. Příprava na lekci probíhala před samým začátkem hodiny. Žáci byli upozorněni, že bude probíhat netradiční výuka matematiky a velmi se na ní těšili.

V úvodu hodiny jsme se žáků zeptali, zda již někdy viděli podobnou úlohu. Někteří odpověděli kladně, s úlohou se setkali např. v knihách se zábavnou matematikou. Poté jsme žáky rozdělili do skupin a vysvětlili, že budou pracovat každý sám, ale ve skupině mohou sdílet své nápady nebo potíže. Z toho byli žáci nadšení.

První úkol byl pro žáky velmi jednoduchý. Při žádosti o vysvětlení, jak byla úloha řešena, byli žáci aktivní a nacházeli různé interpretace. Převládal jednostranný pohled na Hada, jako na úlohu $3 \cdot 3 = 9$.

Následující úkol žáci řešili samostatně. Pomocí různých postupů vyplňovali prázdná pole. Samotné Hady vyplňovali několik minut. Vzhledem k rychlosti řešení jsme měli čas věnovat se různým interpretacím. Prvního Hada všichni řešili jako příklad $3 \cdot 4 + 8$. Druhého Hada také vyřešili bez váhání. Žáci automaticky určili, že od prvního pole musí odčítat. Dva žáci z jedné skupiny napsali do první operace +2, přičemž chybu si sami uvědomili a řekli, že si neuvědomili směr šipky. Jako operaci k polím 5 a 1 všichni žáci napsali -4. Překvapilo nás, že žádný z žáků nevyužil dělení. Po upozornění na možnost, že by v poli mohla být jiná operace žáci rychle objevili možnost dělení.

Rozdíl mezi prvním a třetím Hadem žáci poznali velmi snadno. Úlohu by řešili postupem zprava jako $3 \cdot 3 = 9$ nebo inverzním dělením jako příklad $9 : 3 = 3$. Největší obtíže se projevili ve čtvrté úloze. Žáci často počítali automaticky a nevěnovali dostatečnou pozornost směru šipek. Pouze 9 žáků vyplnilo všechny čtyři Hady správně. Objevovaly se chyby především v nerespektování provádění operace po směru šipek, ale také i chyby aritmetické (např. $8 \cdot. 4 = 30$).

Zajímavé byly některé postupy žáků. Většina z nich u prvního Hada v příkladu 4 postupovala zprava doleva a s inverzními operacemi. Překvapil nás ale jeden neobvyklý a jedinečný postup, kdy si žák říkal násobky 4 a hledal takový, ke kterému když přičte sedm, vyjde 23. Druhého Hada žáci řešili postupem zprava doleva příkladem $15 + 5$. Došli k číslu 20. Poté někteří počítali inverzní operací, tedy $20 : 5 = 4$, někteří si řekli, že něco $\cdot\ 5 = 20$ a také dospěli ke správnému výsledku. U třetího příkladu první šipka byla bez problému. U druhé šipky si někteří neuvědomili změnu směru a napsali -20. Poslední příklad žáci začínali řešit zleva nebo zprava. Opět se zde projevila nedbalost a někteří opomenuli směr šipek. Zajímavá situace nastala, když jeden z žáků popisoval svůj postup na tabuli. Ve chvíli, kdy vyplňoval první prázdné pole číslem 120, skupina žákyň se ohradila, že jeho postup není správný. Žák se nenechal zmást, vyplnil Hada podle svého postupu a poté děvčatům popsal své stanovisko.

V závěru hodiny zbylo více času na hodnocení a shrnutí hodiny. Vzhledem k většinové úspěšnosti jsme zvolili sebehodnocení. Více než polovina žáků svou práci hodnotila pozitivně. Někteří se přiznali, že v hodině mohli pracovat více. Žáci sami usoudili, že při řešení těchto typů úloh by měli více pozornosti věnovat směru šipek, aby se vyvarovali chyb.

Přípravu hodnotíme jako funkční. Ve třídě s nadanými žáky bychom mohli navýšit náročnost úloh nebo jejich počet. Pozitivní bylo, že žáci se aktivně zúčastňovali diskusí o správnosti řešení a své chyby si rychle uvědomovali.

4.3 Realizace přípravy Parkety

Realizace vyučovací jednotky Parkety proběhla ve čtvrté třídě. Žáci byli předem obeznámeni s naším příchodem. Přítomno bylo 23 žáků, práce tedy probíhala v 10 dvojicích a jedné skupině po 3. Před hodinou proběhla příprava pomůcek.

V úvodu hodiny jsme rozdělili žáky do pracovních týmů, rozdali jsme pracovní listy, parkety a společně přečetli úvodní příběh. Celou hodinu žáci pracovali samostatně podle vlastního tempa. Některé skupiny zvládli splnit pouze dva úkoly, některé všechny. Žáci výjimečně požádali o pomoc při interpretaci zadání. V prvním úkolu některé skupiny hledaly více možností. Každý pochopil, že při pokládání se parkety nemohou překrývat.

V druhém úkolu až na jednu dvojici všichni objevili nejmenší možný počet použitých parket. Největší možný počet zjistilo a do pracovního listu zapsalo šest skupin. S použitím *čtyřky*, ve třetím úkolu, žáci našli jednu, dvě nebo tři možnosti, pouze jedna skupina objevila všechny možnosti. Někteří žáci řešení nezapsali nebo zapsali takové řešení, ve kterém nepoužili *čtyřku*, ale *růžek* a *mono*.

Čtvrtý úkol považovali žáci za nejobtížnější. Bohužel žádná skupina nezjistila, jakou taktiku táta použil. Jeden žák byl objevu nejblíže ve chvíli, kdy navrhl spočítat si počet čtverců na podkladu. Nikomu ve třídě to nevnuklo nápad, takže tento úkol jsme nechali otevřený. V takové situaci bychom doporučovali se po nějaké době k aktivitě vrátit.

Ty skupiny, které se dostaly k poslednímu úkolu, objevily řešení bez problému. V závěru dokonce žáci navrhovali, že bychom museli přidat *růžek* nebo *ji*, abychom dvě koupelny mohli pokrýt.

V závěru hodiny jsme společně vyhodnotili některé úkoly. Žáci byli aktivní, předkládali své nápady. Třídě se lekce líbila a svou práci hodnotila pozitivně.

Z našeho pohledu potřebuje tato příprava více času na realizaci, ideálně dvě po sobě jdoucí vyučovací hodiny. Nám tato možnost při experimentu poskytnuta nebyla, proto některé úlohy byly hodnoceny pouze povrchně. Za vhodné bychom považovali, pokud by žáci měli možnost přednést své možnosti řešení u tabule. K tomu bychom využili zvětšený model parket, který by byl dostatečně viditelný i pro žáky v zadních lavicích.

Příprava se projevila jako funkční a pro žáky atraktivní, především z hlediska možnosti přímé manipulace s parketami.

4.4 Realizace přípravy Tangramy

Lekce Tangramy byla realizována v pátém ročníku. Přítomno bylo 24 žáků, práce probíhala ve čtyřech skupinách po 3 a ve třech skupinách po 4. Žáci byli obeznámeni s tím, že pracují každý do svého pracovního listu, ale mohou se kdykoliv ve skupině poradit.

V úvodu jsme žákům představili Tangram a rozdali jsme pomůcky. První úkol nebyl třeba vysvětlovat, žáci již měli zkušenosti s měřením obsahu pomocí čtvercové sítě. První pokusy byly u žáků rozdílné. Někteří rychle zjistili, že pokud útvar zakrývá dvě poloviny čtverce, dohromady to dá jeden čtverec. Někteří naopak nevěděli, jak správně tvar položit, aby mohli počet čtverců jednoznačně určit. Doba objevení jejich obsahu byla tedy rozdílná. Po chvíli práce jsme požádali žáky, aby nám sdělili výsledky svého měření na žlutém trojúhelníku. Odpovědi byli rozdílné, ale všichni žáci odhadovali obsah do čtyř čtverců. Jeden z úspěšných řešitelů spolužákům ukázal, jakým způsobem položil trojúhelník do čtvercové sítě. Méně úspěšní řešitelé jeho postup převzali a pokusili se jej aplikovat u jiných trojúhelníků. Všichni žáci si uvědomili, že obsah hnědého trojúhelníku zjišťovat nemusí, protože je shodný s trojúhelníkem žlutým. U následujících útvarů se navyšoval počet správných výsledků, ačkoliv někteří stále tápali. Všechny obsahy správně spočítalo 12 žáků, alespoň jeden správný mělo 10 žáků a dva žáci neobjevili ani jeden obsah. Správné výsledky jsme zapsali na tabuli.

Druhý úkol byl pro žáky jednodušší než první. Pro náš experiment jsme zvolili jednodušší variantu zadávání, proto žáci skládali přímo do čtvercové sítě. Při řešení se žáci potýkali s problémem, že jednotlivé části Tangramu nechávali ležet na objevených tvarech. Brzy si uvědomili, že některé útvary musí použít více než jednou. Všechny útvary se podařilo složit 13 žákům, 10 žáků objevilo alespoň jeden a jedna žákyně do pracovního listu nezakreslila ani jedno možné řešení.

Třetí úkol byl pro žáky zdánlivě nejtěžší. První část je velmi bavila a skládali různé tvary. Jedna žákyně složila Tangram do původního čtvercového tvaru. Po zadání druhé části úkolu byly reakce různé. Někteří začali přemýšlet, jak by mohli zjistit počet čtverců, aniž by je počítali. Někteří začali čtverce počítat a pár jedinců svůj útvar přeskládalo tak, aby útvary lépe ležely ve čtvercové síti. Po malé chvíli se začaly objevovat první odhady. Překvapilo nás, že přibližně polovina třídy dospěla na první pokus k číslu 16. Jedna skupina spočítala 14 čtverců a někteří žáci si s řešením nevěděli rady. Žákům jsme zadali stejný úkol s jiným tvarem. Několik jedinců složilo nový útvar a bez dalšího přemýšlení hlásilo výsledek 16. V této fázi bylo nutné žáky ztišit. Žákyně, která nejrychleji přišla na výsledný obsah popsala třídě svou taktiku. Podle jejích slov si uvědomila, že když použila všechny útvary, stačilo jí sečíst čísla z prvního úkolu. Podobnou taktiku zvolilo 10 dalších žáků.

Po ukončení třetího úkolu jsme zhodnotili proběhlou hodinu. Dle reakcí žáků můžeme říci, že je aktivity velmi bavily. V závěrečném rozhovoru jsme se žáků zeptali, co jsme během hodiny zjišťovali. Odpovědi byly různé a slovo obsah zaznělo až v naprostém závěru diskuse. I přesto, že si žáci neuvědomili spojitost mezi počítáním počtu čtverců v útvaru a pojmem obsah, cíle vyučovací jednotky byly naplněny. Přípravu hodnotíme jako efektivní.

4.5 Realizace přípravy Výstaviště

Příprava Výstaviště byla realizována ve čtvrtém ročníku. Přítomno bylo 22 žáků. Práce probíhala samostatně a podle individuálního tempa.

V úvodu lekce jsme žáky seznámili s úlohou Výstaviště. Definovali jsme pravidla pohybu, která jsme viditelně zapsali na tabuli. Pro podporu pojmů svisle a vodorovně jsme přidali šipky směru. S takovýmto typem úloh se žáci setkali poprvé. Někteří se do řešení ponořili rychle.

První Výstaviště žáci řešili déle, než druhé a třetí. Většina žáků neměla problém dodržovat pravidla pohybu. První úkol úspěšně vyřešilo celkem 16 žáků, alespoň jedno správné řešení měli 3 žáci a ani jedno správné neměli také 3 žáci. Z toho vyplývá, že úkol pro žáky nebyl příliš náročný. Postupy řešení byly různé. U prvního Výstaviště jedna žákyně postupovala od čísla 11, ke kterému hledala číslo 10. Odtud snadno našla cestu k číslu 5. Po chvíli váhání doplnila čísla do 1 a uvědomila si, že v prázdném poli bude číslo 12. Jiná častá taktika byla najít co nejnižší číslo a odhadovat, kde bude číslo 1.

Druhý úkol naopak žákům dělal značné potíže. Většina třídy si neuvědomila, že v prvním patře musí svou cestu ukončit na šedém poli a v dalším poschodí zde cestu začít. Řešení těchto patrových Výstavišť našli pouze 3 žáci, alespoň jedno Výstaviště vyřešili 2 žáci. Ani jedno řešení nenalezlo 17 žáků. V tomto případě bychom doporučovali se k takovému typu úloh vrátit, jeden z úspěšných žáků by mohl popsat svou taktiku.

Třetí úloha byla pro žáky lehčí než druhá, přesto bylo náročné hledat různá možná řešení. 10 žáků nenašlo ani jedno řešení nebo úlohu nestihli vyřešit. Jedno řešení našli 2 žáci, dvě různá řešení objevili 4 žáci, 5 žáků nalezlo tři řešení a jeden žák odhalil čtyři řešení.

V závěru lekce jsme zhodnotili hodinu. Žákům se podle jejich slov nejvíce dařil první úkol. Pro některé z nich bylo velmi lehké najít cestu. Obtížností často srovnávali s prvním úkolem i úlohu třetí, která byla pro ně také lehká. Jako těžší pociťovali chvíli, kdy se museli odpoutat od nalezeného řešení a měli hledat jinou cestu. Ve třídě se objevili i žáci, kteří tento typ úloh vůbec nepochopili a proto správně nevyřešili ani jedno Výstaviště. V tomto případě bychom postupovali následovně. Žákům bychom zadali jednodušší typ Výstaviště s jednoznačným řešením, aby si upevnili způsob pohybu. Poté bychom mohli postupně navyšovat náročnost.

V lekci bylo velmi znát, že žáci nemají dřívější zkušenosti s tímto typem úloh. Největší potíže způsobovala vícepatrová Výstaviště, což žáci zmiňovali i v závěrečném hodnocení. Hodina probíhala klidně, žáci reagovali na dotazy a byli aktivní v závěrečném rozhovoru. Přípravu hodnotíme jako funkční. Pokud se žáci s těmito úlohami seznamují, doporučujeme pro začátek vynechat Výstaviště s přechody pater. Ty bychom zařadili ve chvíli, kdy budou mít žáci zkušenosti s řešením.

4.6 Písemná reflexe výhod a úskalí BOV

Na základě studia BOV a vyzkoušených příprav můžeme definovat některé výhody a nevýhody zavádění této výuky do hodin matematiky.

Podle našeho názoru je hlavní nevýhoda časová náročnost. A to jak z hlediska přípravného, tak z hlediska realizačního. Učitelé často chtějí mít přípravy na vyučování rychle hotové. Proto mohou zanedbat některá hlediska, například analýzu vybraných úloh, což se může odrazit v kvalitě výuky. Z hlediska realizačního může být časová náročnost také problematická. Nároky na objem učiva jsou veliké a tím jsou učitelé limitováni. Na další překážku můžeme narazit již při volbě tématu. Badatelsky lze pojmout široké množství námětů. Je ale nutné, aby učitel vzal v úvahu náročnost úloh, věk a zkušenosti žáků. Při nesprávném odhadu těchto faktorů nevytvoříme žákům vhodné prostředí pro bádání.

Jako výhodu bychom na prvním místě jmenovali efektivitu. Jak se nám potvrdilo v některých zkoušených lekcích, žáci prohlubují své poznatky a lépe si uvědomují souvislosti. Při frontálně vedené výuce si často žáci poznatky osvojují pouze povrchně a brzy je zapomenou. Tak tomu u BOV není. Předpokládá se, že si lépe pamatujeme to, co sami uděláme nebo co objevíme. Dalším podstatným přínosem je atraktivita metody a nadšení ze strany žáků. Všechny lekce shledaly úspěch. Na žáky BOV působilo silným motivačním dojmem.

Jak je znatelné z předchozího textu, badatelsky orientovaná výuka má své klady i zápory. Záleží na každém učiteli, zda se rozhodne tuto výuku do svých hodin zařadit. Učitelům, kteří se rozhodnou BOV vyzkoušet doporučujeme, aby byli s žáky trpěliví a dali jim prostor, aby matematiku objevili sami.

5 Závěr

Hlavním cílem diplomové práce bylo pomoci učitelům 1. stupně ZŠ v zařazování badatelsky orientované výuky do hodin matematiky. Pro podporu tohoto hlavního cíle jsme definovali cíle dílčí.

Podrobná charakteristika BOVM byla rozpracována na základě odborné literatury. Pro tento účel jsme nahlédli do literatury české i zahraniční, která se touto problematikou zabývá. V rámci tohoto cíle jsme se zaměřili také na BOV v obecnějším měřítku a zkoumali jsme její využití nejen v matematice, ale i v přírodních vědách.

V rámci plnění druhého dílčího cíle byly prostudovány kurikulární dokumenty. Zde byly hledány odpovědi na otázku, zda BOV odpovídá požadavkům na vzdělávání. Bylo dokázáno, že je v souladu s těmito dokumenty a její zařazování do výuky je tedy možné. V rámci hledání vhodných témat byly prostudovány učebnice nakladatelství Fraus. Celkem jsme vybrali šest typů úloh, které byly podrobně analyzovány.

Následující cíl, a to zpracování konkrétních příprav vyučování, byl předmětem praktické části. Z vybraných úloh jsme vypracovali osm příprav a ke každé z nich pracovní list pro žáky.

Pět vybraných příprav jsme vyzkoušeli v praxi a zjistili, že žáci se v nich aktivně zapojují, jsou schopni bádat a souvislosti si sami uvědomovat. Všechny vyzkoušené přípravy se projevily jako funkční, u některých doporučujeme drobné úpravy, které byly popsány v reflexích. V návaznosti na vyzkoušené lekce jsme popsali pozitiva a úskalí takto chápané výuky.

Celá diplomová práce může být chápána jako zásobník nápadů pro učitele, kteří chtějí zařadit BOV do své výuky.

6 Seznam použité literatury

ARTIGUE, Michèle a Morten BLOMHØJ, 2013. Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM: Mathematics education.* **6**(45), 797-810. DOI: 10.1007/s11858-013-0506-6. ISSN 1863-9704.

BAPTIST, Peter, 2012. BAPTIST, Peter a Dagmar RAAB. *Implementing inquiry in mathematics education.* Bayreuth: University of Bayreuth, s. 1-11. ISBN 978-3-00-040752-9.

DEWEY, John, 1938. *Logic: The Theory of Inquiry.* New York: Henry Holt and Company. ISBN 978-0809328222.

DIVÍŠEK, Jiří, 1989. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha: SPN. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

DOSTÁL, Jiří, 2013a. Badatelsky orientovaná výuka jako trend soudobého vzdělávání. *E-pedagogium* [online]. Olomouc, **2013**(3), 81-93 [cit. 2018-12-15]. ISSN 1213-7499. Dostupné z: http://old.pdf.upol.cz/rychle-odkazy/casopis-e-pedagogium/

DOSTÁL, Jiří, 2013b. *Experiment jako součást badatelsky orientované výuky.* Trends in Education. s. 9-19.

DOSTÁL, Jiří, 2015. *Badatelsky orientovaná výuka : pojetí, podstata, význam a přínosy.* Olomouc: Univerzita palackého. ISBN 978-80-244-4393-5.

HARLEN, Wynne, 2010. *Implementing inquiry-based learning in science education* [online], [cit. 2018-12-15]. Dostupné z: http://fibonacci.uni-bayreuth.de

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ, 2010a. *Matematika: pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ, 2010b. *Matematika: příručka učitele pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-943-8.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ, 2011. *Matematika: pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, Milan. Co je to „Hejného metoda“? *Hejného metoda* [online]. Praha: H-mat, 2014 [cit. 2018-01-21]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/hejneho-metoda

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA, 2015. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Třetí vydání. Praha: Portál. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.

HOŠPESOVÁ, Alena, 2016. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni základního vzdělávání.* Orbis schoae. Praha, **10**(2), 117-130. ISSN 1802-4637.

KOTÁSEK, Jiří et al., 2001. *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice: Bílá kniha.* Praha: Tauris. ISBN 80-211-0372-8.

LERNER, Isaak Jakovlevič, 1986. *Didaktické základy metody výuky.* Praha: SPN.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

PAPÁČEK, Miroslav, 2010. Limity a šance zavádění badatelsky orientovaného vyučování přírodopisu a biologie v České republice. In: *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, s. 145-162. ISBN 978-80-7394-210-6.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2017. 166 s. [cit. 2018-12-14]. Dostupné z: www.msmt.cz

SAMKOVÁ, Libuše, Alena HOŠPESOVÁ, Filip ROUBÍČEK a Marie TICHÁ, 2015. Badatelsky orientované vyučování v matematice. *Scientia in educatione.* **6**(1), 32. ISSN 1804-7106.

STEHLÍKOVÁ, Naďa a Jana CACHOVÁ, 2006 *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe* [online]. [cit. 2017-05-06]. Dostupné z: class.pedf.cuni.cz

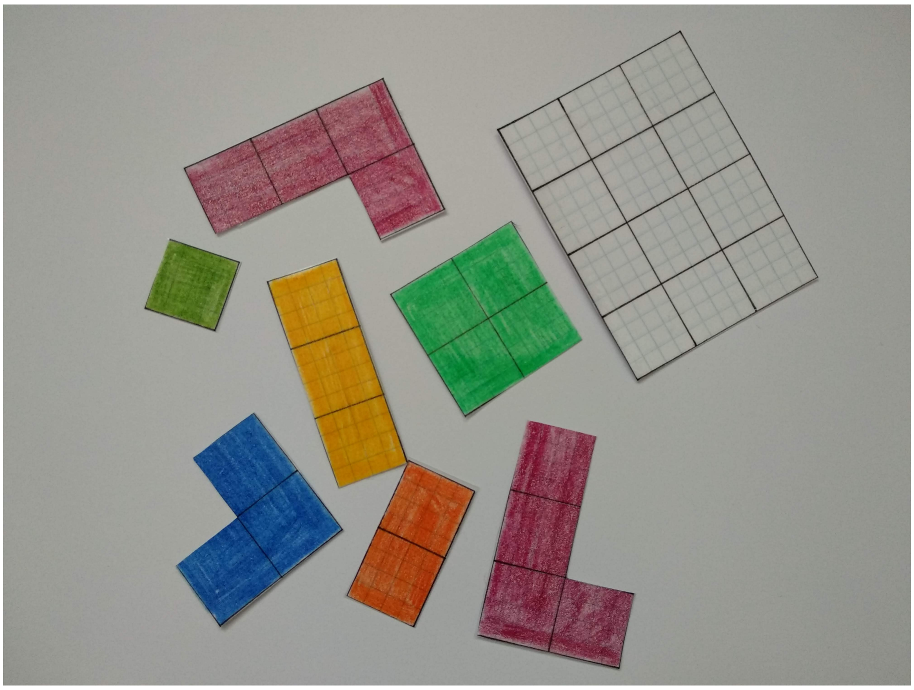
VOTÁPKOVÁ, Dana, ed., 2013. *Badatelé.cz: průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním* [online]. Praha: Sdružení Tereza [cit. 2017-04-21]. ISBN 978-80-87905-02-9. Dostupné z: www.badatele.cz

7 Seznam příloh

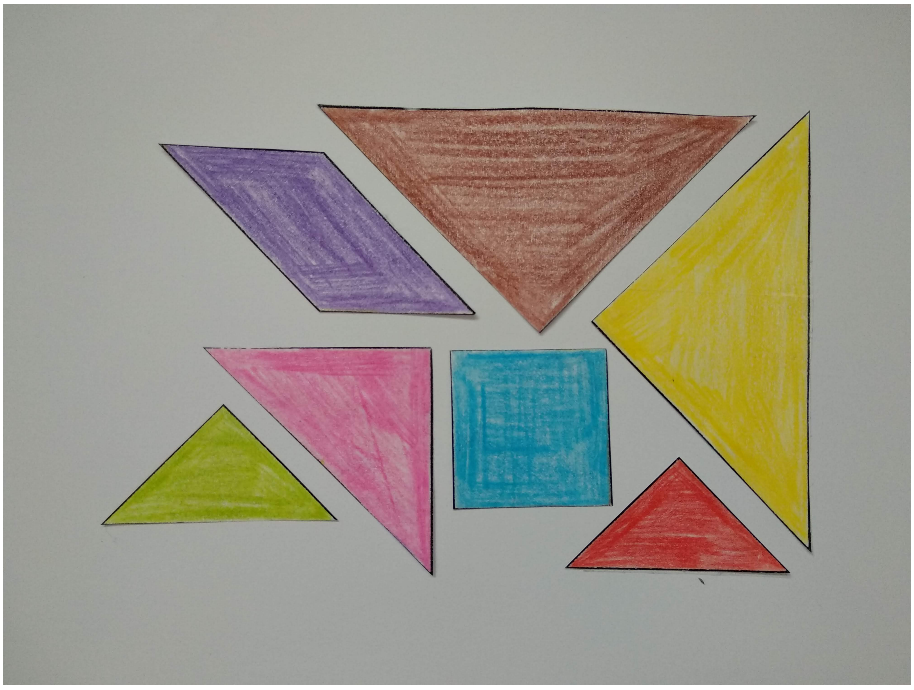
Příloha 1: Ukázka pomůcek na přípravu Parkety
Příloha 2: Rozstřihaný Tangram
Příloha 3: Čtvercová síť k úloze Tangramy[1]
Příloha 4: Barevný a čistý vzor Tangramu[1]
Příloha 5: Geometrické tvary pro práci s Tangramy[1]
Příloha 6: Ukázka řešení pracovního listu Algebrogramy 2
Příloha 7: Ukázka řešení pracovního listu Hadi 1
Příloha 8: Ukázka řešení pracovního listu Parkety
Příloha 9: Ukázka nákresu žáků k lekci Parkety
Příloha 10: Ukázka řešení pracovního listu Tangramy
Příloha 11: Ukázka řešení úkolu 2 v lekci Tangramy
Příloha 12: Ukázka řešení pracovního listu Výstaviště

[1] V případě tisku doporučujeme zvětšit o 20%, na původní velikost.

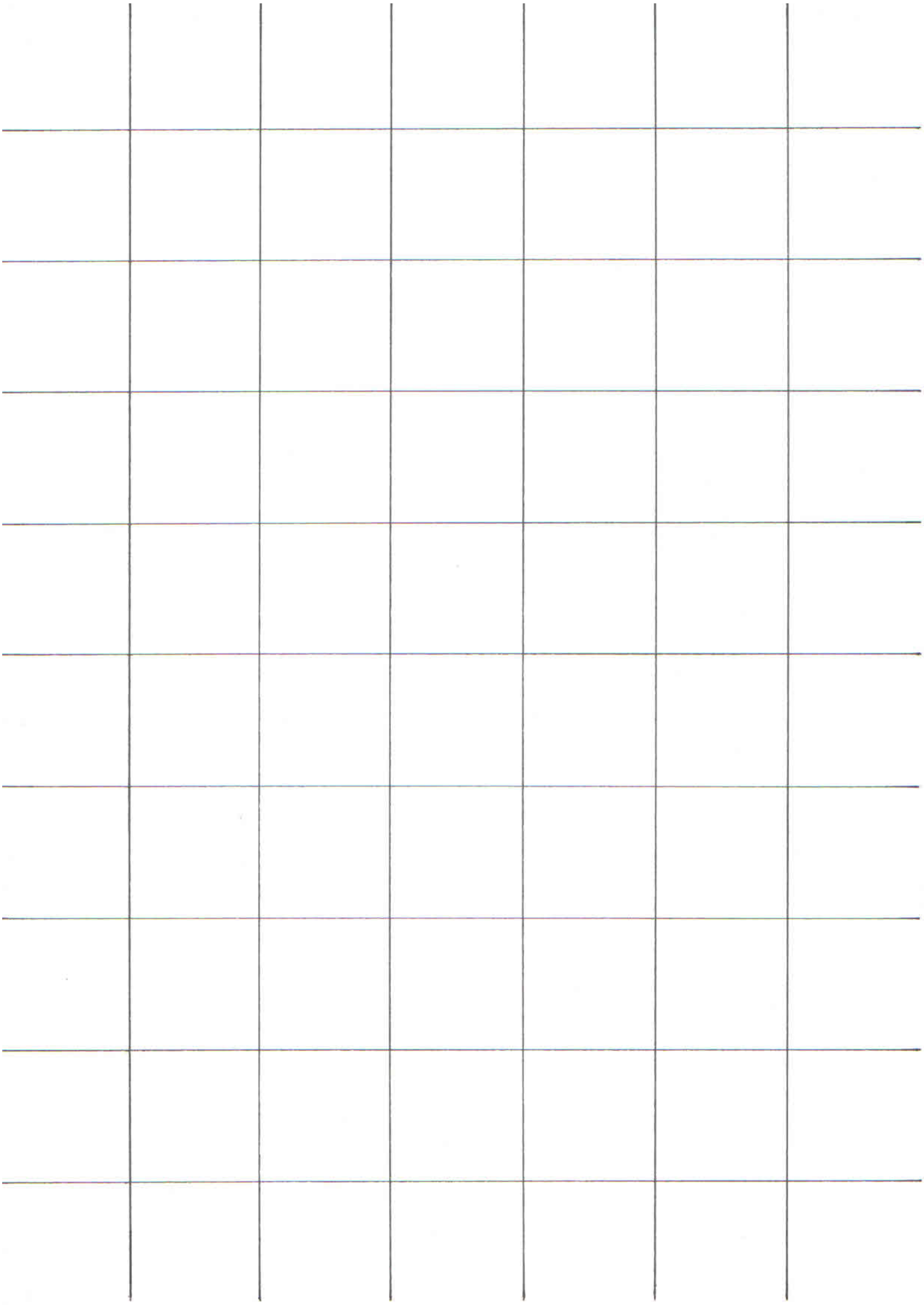
Příloha 1: Ukázka pomůcek k úloze Parkety



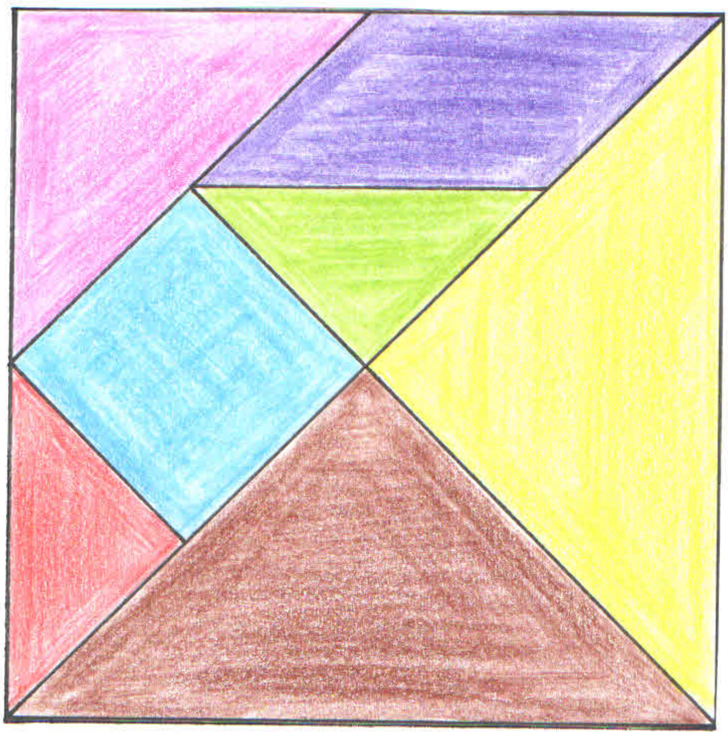
Příloha 2: Rozstřihaný Tangram

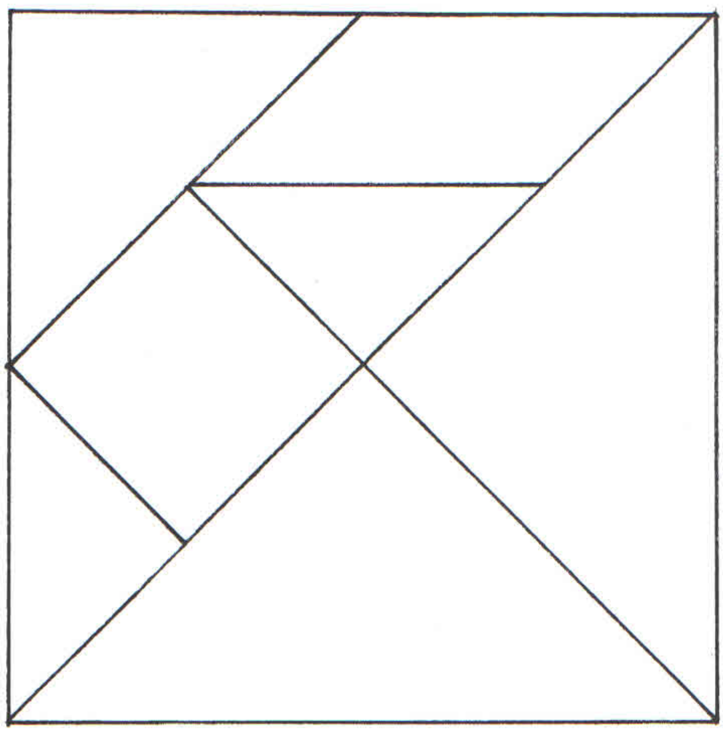


Příloha 3: Čtvercová síť k úloze Parkety

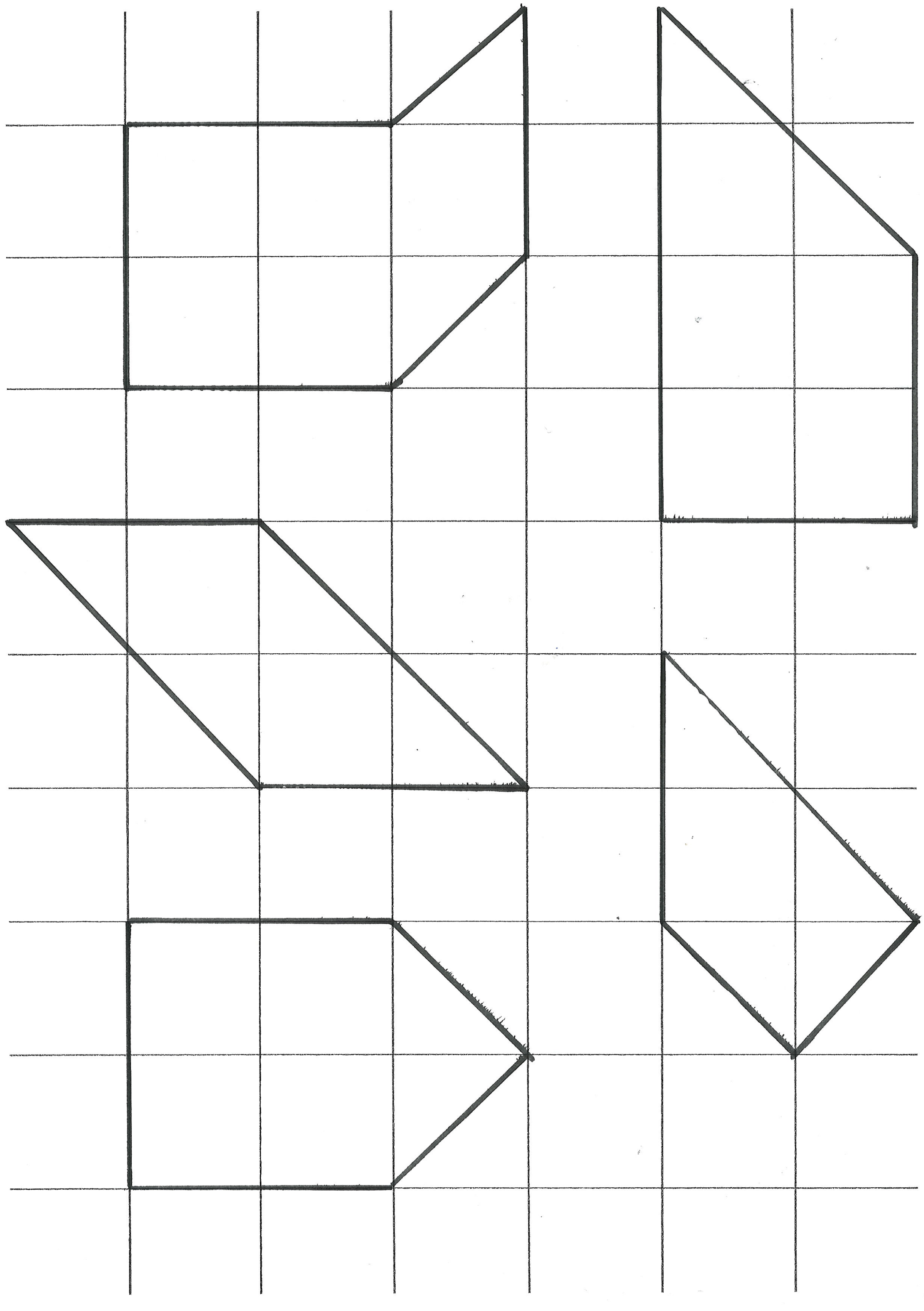


Příloha 4: Barevný a nevybarvený Tangram





Příloha 5: Geometrické tvary pro práci s Tangramy



Příloha 6: Ukázka řešení pracovního listu Algebrogramy 2

Jména řešitelů: Anna, Petr
Třída: 5.B

Algebrogramy 2 - zadání pro žáky

Řeš algebrogramy na sčítání. U každého úkolu se nejprve pokus algebrogramy vyřešit, poté popiš svou taktiku.

1. **Úkol**

A + AB = 23	A = 2	B = 1
C + CD = 34	C = 3	D = 1
E + EF = 35	E = 3	F = 2
G + GH = 41	G = 3	H = 8

2. **Úkol**

LMN + LM + L = 136	L = 1	M = 2	N = 3
PQR + PQ + P = 139	P = 1	Q = 2	R = 6
STU + ST + S = 260	S = 2	T = 3	U = 5

3. **Úkol**
Je pravdivý tento výrok?
Algebrogram AA + AA = BB má více řešení, ale B je vždy sudé.

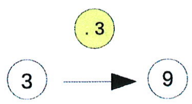
22 + 22 = 44
44 + 44 = 88
33 + 33 = 66
11 + 11 = 22

Příloha 7: Ukázka řešení pracovního listu Hadi 1

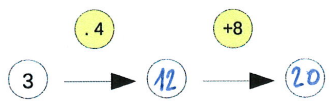
Jméno řešitele: NIKOLKA
Třída: 4.A

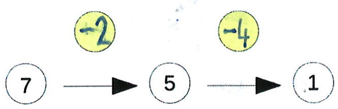
Hadi 1 - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Pozorně si prohlédni Hada. Pokus se popsat, jak je tato úloha řešena.

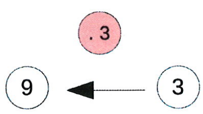


2. **Úkol**
   Samostatně nebo ve skupině řeš Hada.



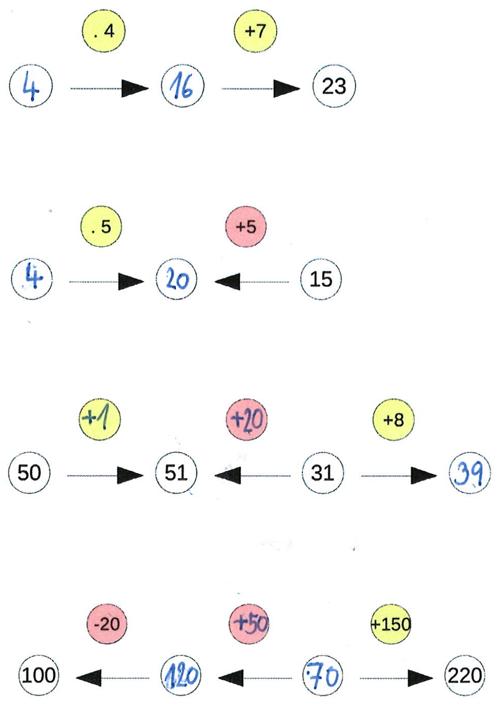


3. **Úkol**
   Opět pozoruj Hada. Ve skupině svými slovy popište, v čem se had liší od prvního a zkuste popsat, jak byste úlohu řešili.



Příloha 8: Ukázka řešení pracovního listu Hadi 1

4. **Úkol**
Řeš úlohu. Dávej pozor na směr šipek. Argumentuj, proč je tvé řešení správné.

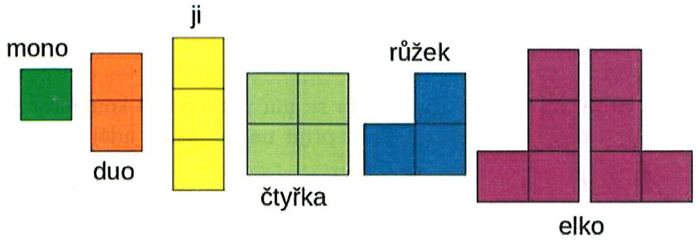


Příloha 9: Ukázka řešení pracovního listu Parkety

Jména řešitelů: Roman, Anhelina.
Třída: 4B

Parkety - zadání pro žáky

Táta se rozhodl, že vymění podlahu v koupelně o velikosti 3 x 4 m. Ve stavebninách zrovna probíhal výprodej, na skladě už zbylo pouze 7 parket. Na pokrytí koupelny stačí, táta ale potřebuje pomoci s tím, jak parkety v koupelně rozložit. Na skladě měli tyto tvary parket: mono, duo, ji, čtyřka, růžek a dvě elka.



1. **Úkol**
   Pokus se pokrýt podlahu parketami tak, aby nikde nezbylo volné místo a ani nikde parkety nepřečnívaly. Kolik parket jsi použil?

   3 parkety 4 parkety 4 parkety

2. **Úkol**
   Jaký je nejmenší počet parket, které můžeš použít na podlahu? Jaké to jsou?
   Kolik jich můžeš použít nejvíce? Různé možnosti můžeš zakreslovat do čtvercové sítě.

   Lze 3 parkety

Příloha 10: Ukázka řešení pracovního listu Parkety

3. **Úkol**
   Mamka se rozhodla, že na podlaze chce mít čtyřku. Kolik možností má táta k položení parket? Jaké to jsou?

   3 možnosti

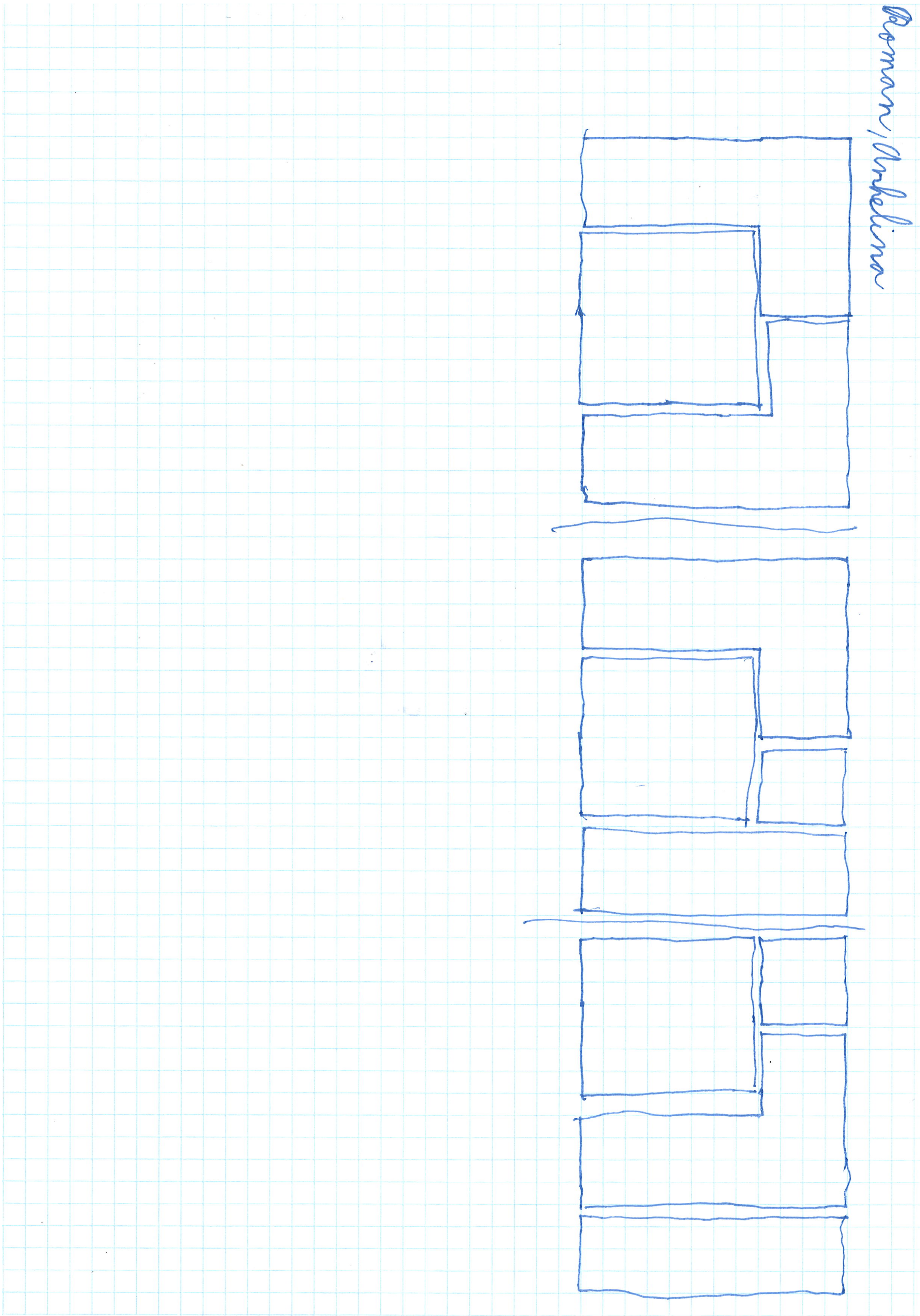
4. **Úkol**
   Táta přišel na to, jak zjistit, zda se mu parkety do koupelny vejdou aniž by s nimi manipuloval. Zkus přijít na to, jak to udělal.

možnosti táta přišel na to že dá
na čtverečkov 2 elka a 1 čtyřku
ém papíru

5. **Úkol**
   Mohl by táta jen těmito parketami pokrýt dvě stejné koupelny? Jak jsi na to přišel?

   Ne nestačí

Příloha 11: Ukázka nákresu žáků k lekci Parkety

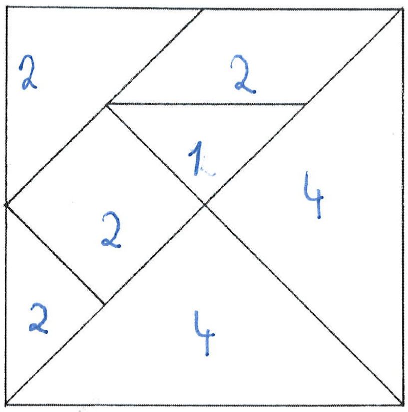


Příloha 12: Ukázka řešení pracovního listu Tangramy

Jméno řešitele: Anna
Třída: V.B

Tangramy - zadání pro žáky

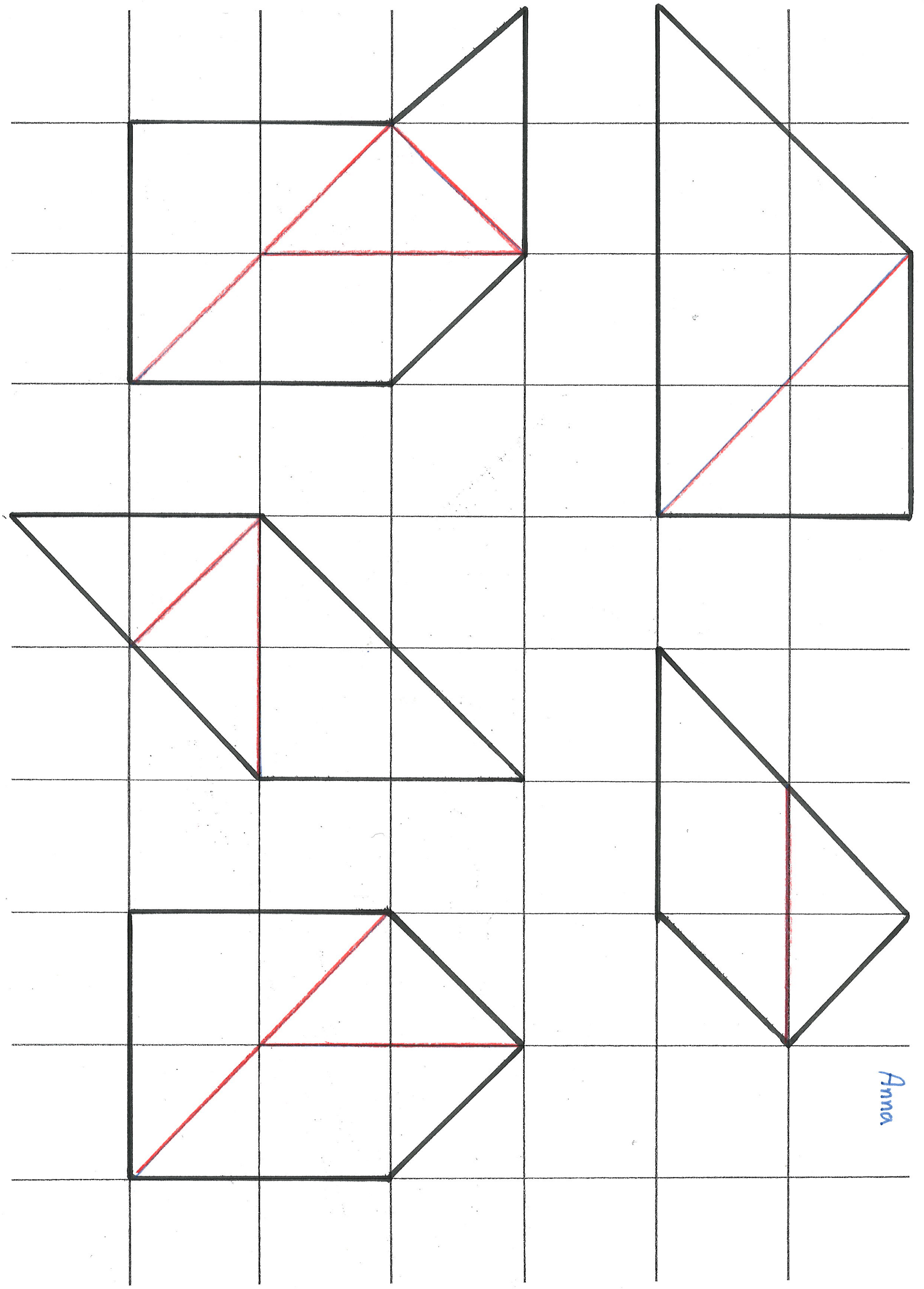
1. **Úkol**
   Máš k dispozici jednotlivé části Tangramu a čtvercovou síť. Zjisti počet čtverců, které vyplní jednotlivé části Tangramu. Zjištěné číslo zapiš přímo do Tangramu. Měřit můžeš sám, nebo se poraď ve skupině.



2. **Úkol**
   Pozorně si prohlédni znázorněné obrazce. Pokus se vytvořit stejné geometrické tvary pomocí dvou nebo více dílů Tangramu. Dávej pozor na to, aby jednotlivé tvary zakrývaly stejný počet čtverečků, jako na znázornění. Řešení zakresli do čtvercové sítě.

3. **Úkol**
   Zapoj svou fantazii a slož ze všech částí Tangramu libovolný tvar. Může to být budova, postava, zvíře, cokoliv. Použij všechny části. Ty se musí dotýkat vrcholy, nebo stranami. Žádná nesmí ležet mimo.
   Vypočítej, kolik celých čtverců tvůj útvar zakrývá. Popiš svou taktiku. Překvapilo tě něco? Co jsi zjistil?

Příloha 13: Ukázka řešení úkolu 2 v lekci Tangramy



Příloha 14: Ukázka řešení pracovního listu Výstaviště

Jméno řešitele: Maki
Třída: 4.A.

Výstaviště - zadání pro žáky

1. **Úkol**
   Vyřeš Výstaviště. Pohybovat se můžeš jen svisle nebo vodorovně.

a)

8	7	6	5
9	10	3	4
12	11	2	1

b)

13	14	15
12	11	10
7	8	9
6	3	2
5	4	1

c)

17	18	13	12	9	8
16	15	14	11	10	7
1	2	3	4	5	6

2. **Úkol**
   Řeš dvoupatrové a třípatrové Výstaviště. Šedá pole označují přechody mezi patry.

10	9	8	7
11	14	15	6
12	13	16	5
1	2	3	4

29	30	31	32
28	23	22	21
27	24	17	20
26	25	18	19

4	5	6	7
3	16	15	8
2	13	14	9
1	12	11	10

23	24	25	26
22	17	32	27
21	18	31	28
20	19	30	29

44	43	34	35
45	42	33	36
46	41	40	37
47	48	39	38

Příloha 15: Ukázka řešení pracovního listu Výstaviště

3. **Úkol**
   Hledej co nejvíce možných cest po tomto Výstavišti.

6	5	4	1
7	8	3	2
10	9	20	19
11	14	15	18
12	13	16	17

8	7	6	5
9	20	3	4
10	19	2	1
11	18	17	16
12	13	14	15

6	5	2	1
7	4	3	20
8	9	18	19
11	10	17	16
12	13	14	15

		3	
	13		

		3	
	13		

		3	
	13		