

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

**Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu
se skákajícími nelinearitami**

Diplomová práce

Bc. Michaela Zahradníková

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2018

Zahradníková, M., 2018: Okrajové úlohy pro rovnice 2. řádu se skákajícími nelinearitami. [Boundary value problems for equations of second order with jumping nonlinearities. Mgr. Thesis, in Czech.] - 76 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace:

The subject of this Thesis is to examine nontrivial solutions of boundary value problems for second order ODEs with unilateral jumping nonlinearities. Considered problems can be interpreted as models of a simple beam supported by three types of elastic obstacles. Couples of eigenvalues and eigenfunctions are found and discussed with respect to parameter which represents the strength of the obstacle.

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 11. prosince 2018

.....
Michaela Zahradníková

Poděkování

Děkuji svému školiteli Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za odborné vedení práce, cenné rady a připomínky a za čas věnovaný konzultacím.

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní pojmy a tvrzení	3
2.1	Skákající nelinearity	3
2.2	Banachovy a Hilbertovy prostory	4
2.3	Operátory na lineárních prostorech	5
2.4	Prostory funkcí	6
2.4.1	Prostory spojitých funkcí	6
2.4.2	L^p prostory	7
2.4.3	Sobolevovy prostory	9
2.5	Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu	11
2.5.1	Vybrané úlohy na vlastní čísla	11
2.5.2	Dva typy řešení okrajových úloh druhého řádu	12
3	Formulace úloh, vlastnosti řešení	16
3.1	Operátorová rovnice	16
3.2	Specifikace úloh s jednostrannou překážkou	19
3.2.1	Penalizace v krajním bodě intervalu	19
3.2.2	Penalizace ve vnitřním bodě intervalu	23
3.2.3	Penalizace na souvislém podintervalu	27
4	Řešení úloh s bodovou překážkou	33
4.1	Překážka v krajním bodě intervalu	33
4.1.1	Řešení splňující $u(1) \geq 0$	34
4.1.2	Řešení splňující $u(1) < 0$	35
4.2	Překážka uvnitř intervalu	40

4.2.1	Klasická řešení	40
4.2.2	Deformovaná řešení	42
5	Řešení úlohy se souvislou překážkou	51
5.1	Nedeforovaná řešení	52
5.1.1	Řešení bez kontaktu s překážkou	52
5.1.2	Řešení dotýkající se překážky	54
5.2	Deformovaná řešení	55
5.2.1	Řešení s plným kontaktem s překážkou	57
5.2.2	Úloha s volnou hranicí	67
6	Závěr	74

Kapitola 1

Úvod

V této práci se budeme zabývat okrajovými úlohami pro diferenciální rovnice druhého řádu, ve kterých se vyskytuje člen se skákající nelinearitou, a to buď v jedné z okrajových podmínek, nebo v podmínce týkající se derivace v jednom bodě uvažovaného intervalu, nebo přímo v rovnici samotné. Skákající nelinearitou zde bude funkce záporná část.

Ve všech případech půjde o úlohy s reálným parametrem λ . Naším úkolem bude hledat takové hodnoty tohoto parametru, pro které existuje netriviální řešení. Pro lineární úlohu toto odpovídá hledání vlastních čísel a jim příslušných vlastních funkcí. Protože námi studované úlohy budou pozitivně homogenní (speciálně platí, že kladné násobky řešení jsou také řešením), můžeme je rovněž nahlížet jako úlohy na vlastní čísla.

Dalším, tentokrát vstupním parametrem bude násobek skákající nelinearity $\tau \geq 0$. Pro $\tau = 0$ nelinearita zmizí a všechny úlohy se tak stanou známými úlohami na vlastní čísla pro rovnice druhého řádu. Zaměříme se tedy především na hledání řešení, pro která se člen se skákající nelinearitou skutečně projeví.

V jistém přiblížení lze problém ztotožnit s modelem jednoduchého nosníku či prutu upevněného ve svých krajích a stlačovaného v podélné ose silou odpovídající parametru λ . Řešení potom představuje průhyb nosníku. Člen se skákající nelinearitou danou funkcí záporná část ovlivňuje řešení způsobem, který bychom mohli přirovnat k působení jednostranné pružné překážky o síle τ . Přívlastkem pružná vyjadřujeme skutečnost, že překážka dovoluje řešení nabývat v místě svého působení záporných hodnot. Zavedením této názorné interpretace můžeme uvažované úlohy označovat jako úlohy s bodovou překážkou, je-li nelinearita v okrajové či přechodové podmínce, a úlohu se souvislou překážkou, vyskytuje-li se nelineární člen přímo v rovnici.

Vzhledem k tomu, že se jedná o jednostrannou překážku, mohou pro každou z vybraných úloh existovat řešení s různou regularitou. Abychom mohli úlohy popisovat jednotně a přitom postihli všechny možné typy řešení, zformulujeme je obecněji pomocí operátorové rovnice s lineárním a nelineárním operátorem, uvažované na vhodném podprostoru Sobolevova prostoru $W^{1,2}$. Pro tři různé nelineární operátory se skákající nelinearitou dokážeme vlastnosti hledaných řešení. Ukážeme, že splňují jisté diferenciální rovnice s okrajovými a přechodovými podmínkami, které budeme následně řešit.

Práce je členěna do několika kapitol. Nejprve uvedeme základní pojmy a užitá tvrzení z funkcionální analýzy a teorie diferenciálních rovnic druhého řádu. Potom zformulujeme abstraktní operátorovou rovnici, jejíž řešení pro konkrétně zvolené prostory a operátory bude hlavním předmětem této práce. Nelineární operátor vystupující v rovnici bude postupně odpovídat penalizaci řešení v krajním bodě uvažovaného intervalu, v bodě vnitřním a na souvislém podintervalu. V kapitolách věnovaných jednotlivým úlohám nalezneme příslušná řešení, která rozlišíme podle toho, jakým způsobem jsou překážkou ovlivněna či deformována. Pouze ve speciálních případech budou řešení třídy C^∞ , jako je tomu u úlohy bez překážky. V důsledku penalizace se může ztrácet hladkost řešení v první, druhé nebo třetí derivaci. Na příslušných místech budeme dále diskutovat závislost vlastních čísel λ na parametru τ , který odpovídá síle překážky. Pro překážku nacházející se uvnitř intervalu nebo na souvislém podintervalu bude dalším parametrem její umístění, vzhledem k němu však nebudeme provádět diskusi řešení v plné obecnosti. U souvislé překážky najdeme pouze základní typy řešení, které demonstrují charakteristiky úlohy. Řešení obecnější tvarů lze obdržet rozdělením problému na dílčí části a kombinací postupů užitých při hledání základních typů, proto se jimi nebudeme zabývat.

Definice, věty a pomocná tvrzení jsou číslovány dle umístění v jednotlivých kapitolách. Text práce je vysázen systémem \LaTeX , pro vykreslení obrázků byly použity programy GeoGebra a Gnuplot.

Kapitola 2

Základní pojmy a tvrzení

2.1 Skákající nelinearity

Definice 2.1 (Skákající nelinearita, [3]). Spojitou funkci $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *skákající nelinearitou*, pokud existují limity

$$\mu_- := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\psi(x)}{x}, \quad \mu_+ := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

a platí $\mu_- \neq \mu_+$.

Definice 2.2 Pro $f : D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme funkce

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} && \text{pro } x \in D(f), \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\} && \text{pro } x \in D(f). \end{aligned}$$

Funkci f^+ nazýváme *kladná část funkce f* , funkci f^- *záporná část funkce f* .

Poznámka 2.3 Funkce f^+ , f^- jsou nezáporné na $D(f)$ a platí

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Je-li f spojitá, jsou spojité i f^+ , f^- .

Na kladnou, resp. zápornou část funkce f můžeme nahlížet jako na složenou funkci $\psi_+(f(x))$, resp. $\psi_-(f(x))$, kde vnější funkce ψ_+ (tzv. *kladná část*), resp. ψ_- (tzv. *záporná část*) zobrazují \mathbb{R} na $[0, +\infty)$ a jsou definovány předpisy

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= \max\{x, 0\} && \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\ \psi_-(x) &= \max\{-x, 0\} && \text{pro } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

což lze ekvivalentně zapsat jako

$$\psi_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0, \end{cases} \quad \psi_-(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\psi_+(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi_+(x)}{x} = 1, \quad -1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\psi_-(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi_-(x)}{x} = 0,$$

a proto jsou v souladu s Definicí 2.1 funkce ψ_+ a ψ_- skákající nelinearity.

2.2 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 2.4 Necht' X je lineární prostor. Funkci $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$ nazveme *normou* na X , jestliže pro všechna $u, v \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

- (i) $\|u\|_X = 0$, právě když $u = o$, kde o je nulový prvek X ,
- (ii) $\|\lambda u\|_X = |\lambda| \|u\|_X$,
- (iii) $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$ (trojúhelníková nerovnost).

Dvojici $(X, \|\cdot\|_X)$ nazýváme *normovaný lineární prostor*.

Definice 2.5 Necht' $(X, \|\cdot\|_X)$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je *Cauchyovská v normě* $\|\cdot\|_X$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí $\|u_m - u_n\|_X < \varepsilon$.

Definice 2.6 Řekneme, že normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je *Banachův prostor*, jestliže každá Cauchyovská posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ v normě $\|\cdot\|_X$ konverguje v téže normě k nějakému prvku $u \in X$.

Definice 2.7 Necht' X je lineární prostor nad \mathbb{R} . Řekneme, že zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je *skalární součin* na X , jestliže pro všechna $u, v, w \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

- (i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ a $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = o$, kde o je nulový prvek X (pozitivní definitnost),
- (ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (symetrie),
- (iii) $\langle \lambda u, u \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ a $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem* nebo též *unitární prostor*.

Věta 2.8 (Norma indukovaná skalárním součinem) *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitární prostor.*

Zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle}$ definuje normu na prostoru X .

Věta 2.9 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitární prostor. Potom pro všechna $u, v \in X$ platí*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| .$$

Definice 2.10 *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je unitární prostor a $(X, \|\cdot\|)$, kde $\|\cdot\|$ značí normu indukovanou skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, je Banachův prostor. Potom $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*.*

Poznámka 2.11 *Nedojde-li k nedorozumění, budeme Banachův prostor $(X, \|\cdot\|_X)$, resp. Hilbertův prostor $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ značit stručně jako X .*

2.3 Operátory na lineárních prostorech

Definice 2.12 *Nechť X, Y jsou lineární prostory. Zobrazení (operátor) $T : X \rightarrow Y$ nazveme *lineárním*, jestliže platí:*

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \forall u, v \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

V případě, že $Y = \mathbb{R}$, nazýváme lineární zobrazení *lineárním funkcionálem*.

Definice 2.13 *Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Řekneme, že operátor $T : X \rightarrow Y$ je *spojitý*, jestliže pro každou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ a prvek $u \in X$ splňující*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{v } X$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = T(u) \quad \text{v } Y .$$

Definice 2.14 *Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Řekneme, že lineární operátor $T : X \rightarrow Y$ je *omezený*, existuje-li konstanta $c > 0$ tak, že pro všechna $u \in X$ platí*

$$\|T(u)\|_Y \leq c \|u\|_X .$$

Věta 2.15 ([2], Věta 3.2). *Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Lineární operátor $T : X \rightarrow Y$ je spojitý právě tehdy, je-li omezený.*

Definice 2.16 Nechť X, Y jsou lineární prostory. Řekneme, že zobrazení $T : X \rightarrow Y$ je *pozitivně homogenní*, jestliže platí

$$T(\alpha u) = \alpha Tu \quad \text{pro všechna } u \in X, \quad \alpha \geq 0.$$

Pokud výše uvedená rovnost platí dokonce pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, nazveme takový operátor *homogenní*.

Definice 2.17 Operátor T na Hilbertově prostoru H nazveme *pozitivní*, pokud

$$\langle Tu, u \rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } u \in H.$$

Definice 2.18 Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Prostor všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y značíme $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definice 2.19 Na prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$ je norma operátoru T definována vztahem

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup\{\|Tu\|_Y : u \in X, \|u\|_X \leq 1\}.$$

Věta 2.20 (Rieszova věta o reprezentaci, důkaz v [9]). *Nechť H je Hilbertův prostor a f spojitý lineární funkcionál na H . Potom existuje jediný prvek $y_f \in H$ takový, že*

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle \quad \text{pro všechna } x \in H.$$

Navíc $\|f\| = \|y_f\|$. Obráceně, každý prvek $y \in H$ definuje na H spojitý lineární funkcionál f_y předpisem

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{pro všechna } x \in H$$

a platí $\|f_y\| = \|y\|$.

2.4 Prostory funkcí

2.4.1 Prostory spojitých funkcí

Definice 2.21 Symbolem $C([a, b])$ označíme prostor všech funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$ a definujeme na něm normu

$$\|u\|_C := \max_{x \in [a, b]} |u(x)|.$$

Definice 2.22 Symbolem $C^k(a, b)$, resp. $C^k([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, označíme prostor spojitých funkcí, které mají na intervalu (a, b) , resp. $[a, b]$ spojitě derivace až do řádu $k \in \mathbb{N}$ včetně. V krajních bodech chápeme všechny příslušné derivace jako jednostranné.

Definice 2.23 Symbolem $C^\infty(a, b)$, resp. $C^\infty([a, b])$ označíme prostor spojitých funkcí, které mají na intervalu (a, b) , resp. $[a, b]$ spojitě derivace všech řádů. V krajních bodech chápeme všechny příslušné derivace jako jednostranné.

Definice 2.24 Symbolem $C_0^\infty([a, b])$ označme množinu všech funkcí $u \in C^\infty([a, b])$, pro které navíc

$$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Definice 2.25 Řekneme, že funkce f je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro jakákoliv $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$ platí implikace

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon.$$

Věta 2.26 Každá funkce absolutně spojitá na $[a, b]$ je spojitá na $[a, b]$.

2.4.2 L^p prostory

Definice 2.27 (Lebesgueův integrál, [8], str. 296) Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b]$ Lebesgueův integrál, když existuje absolutně spojitá funkce $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že platí $F'(x) = f(x)$ pro skoro všechna $x \in [a, b]$. Lebesgueův integrál definujeme rovností

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Definice 2.28 Nechtě $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$. Množinu všech funkcí u , pro které je Lebesgueův integrál

$$\int_a^b |u(x)|^p dx < \infty,$$

značíme $L^p(a, b)$.

Poznámka 2.29 Dvě funkce $u_1, u_2 \in L^p(a, b)$ budeme považovat za sobě rovné (totožné), budou-li se lišit pouze na množině nulové míry.

Definice 2.30 Na prostoru $L^p(a, b)$ je definována norma ¹

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

Prostor $L^p(a, b)$ opatřený touto normou je Banachův prostor. Na prostoru $L^2(a, b)$ můžeme navíc definovat skalární součin vztahem

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx.$$

Poznámka 2.31 Prostor $L^2(a, b)$ opatřený skalárním součinem a normou z Definice 2.30 je Hilbertův prostor.

Věta 2.32 ([4], str. 74). *Prostory $L^p(a, b)$ mají následující vlastnosti:*

- (i) *Množina $C_0^\infty([a, b])$ je hustá v prostoru $L^p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.*
- (ii) *Platí tzv. Hölderova nerovnost: Budiž $p > 1$ a definujme číslo $q > 1$ tak, že $1/p + 1/q = 1$. Nechť $u \in L^p(a, b)$ a $v \in L^q(a, b)$. Pak platí*

$$\int_a^b |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Speciálně pro $p = 2$ dostáváme

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

což je Cauchy-Schwarzova nerovnost.

Příklad 2.33 Všechny spojitě funkce na intervalu $[a, b]$ patří do $L^p(a, b)$, $p \geq 1$.

Následující Věty 2.34–2.36 jsou převzaty ze Sekcí 4.4 a 4.5 v [5], kde jsou také dokázány. Ve všech budeme uvažovat $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Věta 2.34 *Je-li f absolutně spojitá v $[a, b]$, je $f' \in L^1(a, b)$.*

Věta 2.35 *Nechť $f \in L^1(a, b)$, $c \in \mathbb{R}$. Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Potom F je absolutně spojitá v $[a, b]$.

¹zde využíváme právě zavedené rovnosti funkcí z Poznámky 2.29, bez níž by výraz $\|\cdot\|_{L^p}$ nedefinoval normu

Věta 2.36 *Nechť $f \in L^1(a, b)$. Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Potom skoro všude v $[a, b]$ je $F'(x) = f(x)$. Pokud je navíc $f \in C([a, b])$ potom je $F'(x) = f(x)$ všude v $[a, b]$.

Věta 2.37 ([4], str. 96) *Předpokládejme, že $f \in L^1(a, b)$ ($f \in C([a, b])$) a*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([a, b]).$$

Pak $f(x) = 0$ skoro všude na $[a, b]$ ($f(x) = 0$ všude v $[a, b]$).

Definice 2.38 ([2, Definice 2.22]) *Budiž $1 \leq p < \infty$. Symbolem*

$$L_{loc}^p(a, b)$$

označíme množinu všech funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že $f \in L^p(c, d)$ pro všechna $a < c < d < b$.

Věta 2.39 *Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Platí následující inkluze*

$$L^2(a, b) \subset L^1(a, b) \subset L_{loc}^1(a, b).$$

Důkaz. První inkluze plyne z Hölderovy nerovnosti a omezenosti intervalu (a, b) . Druhá inkluze plyne z [5, Věta 42]. □

2.4.3 Sobolevovy prostory

Definice 2.40 (slabá derivace, [1, Definice 2]). *Předpokládejme, že funkce $u \in L_{loc}^1(a, b)$. Řekneme, že funkce $u'_w \in L_{loc}^1(a, b)$ je *slabá derivace* funkce u , právě když*

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b u'_w(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([a, b]).$$

Lemma 2.41 ([1, Lemma 1], str. 19). *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $u' \in C([a, b])$. Pak $u' = u'_w$.*

Definice 2.42 ([4], str. 83). *Symbolem $W^{1,2}(a, b)$ označme množinu všech funkcí z Lebesgueova prostoru $L^2(a, b)$, jejichž slabá derivace také patří do $L^2(a, b)$. Prostor $W^{1,2}(a, b)$ nazýváme *Sobolevův prostor*.*

Definice 2.43 Na prostoru $W^{1,2}(a, b)$ je definován skalární součin vztahem

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}} = \int_a^b u(x)v(x) dx + \int_a^b u'(x)v'(x) dx ,$$

a tedy norma

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} . \quad (2.1)$$

Poznámka 2.44 Prostor $W^{1,2}(a, b)$ opatřený výše definovaným skalárním součinem a normou je Hilbertův prostor.

Věta 2.45 ([4], str. 84). *Množina $C^\infty([a, b])$ je hustá ve $W^{1,2}(a, b)$.*

Definice 2.46 Necht' jsou dány Banachovy prostory X s normou $\|\cdot\|_X$ a Y s normou $\|\cdot\|_Y$. Řekneme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y , píšeme $X \hookrightarrow Y$, jestliže $X \subset Y$ a platí

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in X : \|u\|_Y \leq C \|u\|_X .$$

Definice 2.47 Necht' X je Banachův prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou na něm dvě normy. Řekneme, že tyto dvě normy jsou *ekvivalentní*, existují-li kladná čísla c_1, c_2 tak, že

$$c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 \quad \text{pro všechna } u \in X .$$

Věta 2.48 *Množiny*

$$H = \{ \varphi \in W^{1,2}(a, b) : \varphi(a) = 0 \} , \\ W_0^{1,2}(a, b) = \{ \varphi \in W^{1,2}(a, b) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \}$$

jsou lineární podprostory Sobolevova prostoru $W^{1,2}(a, b)$. Navíc, forma

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u'(x)v'(x) dx \quad \text{pro všechna } u, v \in H \quad (u, v \in W_0^{1,2}(a, b)) \quad (2.2)$$

definuje na H (na $W_0^{1,2}(a, b)$) skalární součin, který indukuje normu

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pro všechna } u \in H \quad (u \in W_0^{1,2}(a, b)) . \quad (2.3)$$

Ta je ekvivalentní standardní normě $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ z (2.1) prostoru $W^{1,2}(a, b)$.

Důkaz. Tvrzení plyne ze Sekce 13.3 a Lemmatu 13.7 v [4]. □

Věta 2.49 *Prostor $W^{1,2}(a, b)$ s normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ je spojité vnořen do prostoru $C([a, b])$ i do prostoru $L^2(a, b)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne ze Sekcí 13.4 a 16.5 v [4]. □

Důsledek 2.50 Prostory H a $W_0^{1,2}(a, b)$ s normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ jsou spojitě vnořeny do prostoru $C([a, b])$ i do prostoru $L^2(a, b)$.

Věta 2.51 Prostory H a $W_0^{1,2}(a, b)$ s normou $\|\cdot\|$ jsou spojitě vnořeny do prostoru $C([a, b])$ i do prostoru $L^2(a, b)$.

Důkaz. Tvrzení plyne z ekvivalence normy $\|\cdot\|$ se standardní normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ (Věta 2.48) a z Důsledku 2.50. □

2.5 Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

2.5.1 Vybrané úlohy na vlastní čísla

Věta 2.52 (podle [7]). Úloha na vlastní čísla

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, L), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

má nekonečně mnoho kladných vlastních čísel $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jiná vlastní čísla této úlohy neexistují.

Věta 2.53 Úloha na vlastní čísla

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (a, 1), \quad u(a) = 0, \quad u(1) = 0$$

má nekonečně mnoho kladných vlastních čísel $\lambda_n = n^2\pi^2/(1-a)^2$, kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi(1-x)}{1-a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jiná vlastní čísla této úlohy neexistují.

Důkaz. Transformací $x \mapsto 1-x$ lze úlohu převést na úlohu z Věty 2.52. □

Věta 2.54 (podle [7]). *Úloha na vlastní čísla*

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, L), \quad u(0) = 0, \quad u'(L) = 0$$

má nekonečně mnoho kladných vlastních čísel $\lambda_n = (2n - 1)^2 \pi^2 / 4L^2$, kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n(x) = \sin \frac{(2n - 1)\pi x}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jiná vlastní čísla této úlohy neexistují.

2.5.2 Dva typy řešení okrajových úloh druhého řádu

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ a necht' $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Uvažujme okrajovou úlohu pro rovnici druhého řádu

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{na } (a, b) \tag{2.4}$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$u(a) = c_0, \quad u(b) = c_1. \tag{2.5}$$

Definice 2.55 Funkci $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z prostoru $C^2([a, b])$, která splňuje rovnici (2.4) a okrajové podmínky (2.5), nazveme *klasickým řešením* okrajové úlohy (2.4), (2.5).

Poznámka 2.56 Pokud pravá strana rovnice (2.4) splňuje $f \in C^k([a, b])$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, potom pro řešení okrajové úlohy platí $u \in C^{k+2}([a, b])$. Speciálně, je-li $f \in C^\infty([a, b])$, je i $u \in C^\infty([a, b])$.

Nechť $u \in C^2([a, b])$ je klasické řešení úlohy (2.4), (2.5). Vynásobíme-li rovnici (2.5) libovolnou funkcí $v \in C^1([a, b])$ splňující navíc

$$v(a) = v(b) = 0$$

a zintegrujeme-li ji přes interval (a, b) , dostáváme

$$\int_a^b -u''(x)v(x) \, dx = \int_a^b f(x)v(x) \, dx.$$

Integrací per-partes v integrálu na levé straně dále obdržíme

$$\int_a^b u'(x)v'(x) \, dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) = \int_a^b f(x)v(x) \, dx,$$

což se díky nulovým hodnotám funkce v v krajních bodech intervalu zjednoduší na

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx. \quad (2.6)$$

Všimněme si, že se v (2.6) nyní vyskytuje pouze první derivace funkce u . To nás přivádí k otázce, pro jaké funkce u, v a f má tato integrální identita smysl, neboť původní předpoklad o vlastnostech daných funkcí se zdá být zbytečně silný. Budeme-li totiž uvažovat Lebesgueovy integrály, je na pravé straně (2.6) skalární součin funkcí f a v jakožto funkcí z Lebesgueova prostoru $L^2(a, b)$ a na levé straně skalární součin funkcí u', v' v témže prostoru. Pro existenci (a konečnost) těchto integrálů zřejmě stačí volit

$$u, v \in W^{1,2}(a, b) \quad \text{a} \quad f \in L^2(a, b).$$

Zobecníme nyní pojem klasického řešení. Definujme lineární funkci $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) := \frac{c_1 - c_0}{b - a}(x - a) + c_0, \quad (2.7)$$

kde konstanty $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ jsou hodnoty z okrajových podmínek (2.5). Zřejmě pro φ platí

$$\varphi(a) = c_0, \quad \varphi(b) = c_1, \quad \varphi'(x) = \frac{c_1 - c_0}{b - a}, \quad \varphi''(x) = 0 \quad \text{pro } x \in [a, b]$$

a proto pokud funkce u splňuje (2.4), pak i funkce $w := u - \varphi$ splňuje tuto rovnici. Navíc, funkce u splňuje podmínky (2.5), právě když funkce w splňuje homogenní Dirichletovy okrajové podmínky $w(a) = w(b) = 0$.

Definice 2.57 Funkci $u \in W^{1,2}(a, b)$ splňující $u - \varphi \in W_0^{1,2}(a, b)$ pro φ z (2.7) a

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \text{pro všechna } v \in W_0^{1,2}(a, b), \quad (2.8)$$

kde $f \in L^2(a, b)$, nazveme *slabým řešením* okrajové úlohy (2.4), (2.5).

Výše jsme ukázali, že pro spojitou pravou stranu f je klasické řešení $u \in C^2([a, b])$ i řešením slabým: vynásobením vhodnou testovací funkcí, zintegrováním a provedením per-partes jsme odvodili integrální identitu (2.8). Speciálně jsou funkce u a u' omezené na $[a, b]$, patří tudíž do Lebesgueova prostoru $L^2(a, b)$ a díky tomu je $u \in W^{1,2}(a, b)$. Podmínka $u - \varphi \in W_0^{1,2}(a, b)$ plyne z okrajových podmínek (2.5) a z volby funkce φ .

Slabé řešení je obecnější pojem než řešení klasické, nemusí být C^2 hladké, stačí, aby existovaly integrály ve slabé formulaci (2.8).

Následující věta odpovídá na obrácenou otázku, kdy je slabé řešení zároveň řešením klasickým.

Věta 2.58 ([4, Věta 17.5]). *Nechť $u \in W^{1,2}(a, b)$ je slabým řešením okrajové úlohy (2.4), (2.5) pro $f \in C([a, b])$. Potom u je řešením klasickým.*

Důkaz provedeme analogicky jako v [4], kde se dokazuje regularita řešení obecné úlohy druhého řádu.

Nechť $u \in W^{1,2}(a, b)$ splňující $u - \varphi \in W_0^{1,2}(a, b)$ pro φ z (2.7) je slabé řešení okrajové úlohy (2.4), (2.5). Jelikož

$$u(a) - \varphi(a) = u(b) - \varphi(b) = 0,$$

vyplývají pro funkci u okrajové podmínky (2.5) z tvaru funkce φ .

Spojitosť řešení plyne ze spojitého vnoření prostoru $W^{1,2}(a, b)$ do prostoru spojitých funkcí $C([a, b])$. Dokažme dále jeho hladkost. Dle předpokladu je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$, podle Věty 2.36 proto máme

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] \quad \text{pro všechna } x \in [a, b].$$

Vynásobíme-li funkci f libovolnou funkcí $v \in W_0^{1,2}(a, b)$ a provedeme-li per-partes, dostaneme

$$\int_a^b f(x)v(x) dx = - \int_a^b \left[\int_a^x f(t) dt \right] v'(x) dx.$$

Funkce u je podle předpokladu slabým řešením úlohy (2.4), (2.5), splňuje tedy integrální identitu (2.8), kterou můžeme díky předchozímu vztahu zapsat ve tvaru

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx = - \int_a^b \left[\int_a^x f(t) dt \right] v'(x) dx \quad \text{pro všechna } v \in W_0^{1,2}(a, b),$$

resp.

$$\int_a^b \left(u'(x) + \int_a^x f(t) dt \right) v'(x) dx = 0 \quad \text{pro všechna } v \in W_0^{1,2}(a, b). \quad (2.9)$$

Definujeme-li funkci

$$M(x) := u'(x) + \int_a^x f(t) dt, \quad (2.10)$$

lze vztah (2.9) psát jako

$$\int_a^b M(x)v'(x) dx = 0 \quad \text{pro všechna } v \in W_0^{1,2}(a, b). \quad (2.11)$$

Funkce M patří do prostoru $L^2(a, b)$, protože funkce u' tam patří (jelikož $u \in W^{1,2}(a, b)$) a protože funkce horní meze integrálu

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

je podle Věty 2.35 dokonce absolutně spojitá na $[a, b]$.

Ukážeme nyní, že funkce M je na intervalu $[a, b]$ konstantní. Zvolme

$$v(x) = \int_a^x (M(t) - c) dt, \quad \text{kde } c = \frac{1}{b-a} \int_a^b M(t) dt.$$

Nejprve ověříme, že se jedná o vhodnou testovací funkci pro (2.11), tj. že $v \in W_0^{1,2}(a, b)$. Protože $M \in L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$ a c je konstanta (jedná se průměr funkce M přes interval $[a, b]$), je funkce v podle Věty 2.35 absolutně spojitá na $[a, b]$, tudíž $v \in L^2(a, b)$. Podle Věty 2.36 má v skoro všude v (a, b) derivaci

$$v'(x) = M(x) - c,$$

je tedy také $v' \in L^2(a, b)$. Dále platí

$$v(a) = \int_a^a (M(t) - c) dt = 0,$$

$$v(b) = \int_a^b (M(t) - c) dt = \int_a^b M(t) dt - (b-a)c = \int_a^b M(t) dt - \frac{b-a}{b-a} \int_a^b M(t) dt = 0,$$

čímž jsme obdrželi požadované. Dosazením funkce v do (2.11) dostáváme

$$\int_a^b M(x)(M(x) - c) dx = 0. \quad (2.12)$$

Z toho vyplývá, že

$$\int_a^b (M(x) - c)^2 dx = \int_a^b M(x)(M(x) - c) dx - c \int_a^b (M(x) - c) dx = -c \int_a^b (M(x) - c) dx.$$

Jelikož je poslední integrál podle výpočtů výše roven $v(b)$ a tudíž nulový, máme

$$\|M - c\|_{L^2(a,b)}^2 = 0$$

a proto je $M(x) = c$ skoro všude na $[a, b]$. Vzhledem k definici (2.10) funkce M je tak pro skoro všechna $x \in [a, b]$

$$u'(x) + \int_a^x f(t) dt = c$$

a odtud

$$u'(x) = - \int_a^x f(t) dt + c. \quad (2.13)$$

Na pravé straně je absolutně spojitá funkce proměné $x \in [a, b]$, což znamená, že funkce $u'(x)$ je absolutně spojitá na $[a, b]$, speciálně je $u' \in C([a, b])$. Derivací (2.13) dále podle Věty 2.36 dostáváme, že

$$u''(x) = -f(x) \quad \text{pro všechna } x \in [a, b],$$

protože funkce f je spojitá. Tím jsme dokázali, že u splňuje (2.4) a $u \in C^2([a, b])$. \square

Kapitola 3

Formulace úloh, vlastnosti řešení

V této kapitole budeme na vybraných podprostorech Sobolevova prostoru $W^{1,2}(0,1)$ uvažovat operátorovou rovnici s lineárním a nelineárním operátorem. Pro různé nelineární operátory převedeme tuto rovnici do integrálního tvaru a dokážeme, že hledaná řešení splňují jisté okrajové úlohy pro diferenciální rovnice druhého řádu.

3.1 Operátorová rovnice

Nechť H je podprostor Sobolevova prostoru $W^{1,2}(0,1)$. Označme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalární součin na H , který na tomto podprostoru indukuje normu $\|\cdot\|$ ekvivalentní se standardní normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ prostoru $W^{1,2}(0,1)$.

Nechť $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$. Uvažujme operátorovou rovnici

$$u - \lambda \mathcal{A}u + \tau \mathcal{B}u = 0, \quad u \in H, \quad (3.1)$$

kde $\mathcal{A} : H \rightarrow H$ je lineární operátor a $\mathcal{B} : H \rightarrow H$ je nelineární, pozitivně homogenní operátor (konkrétní podoba prostoru H i obou operátorů bude specifikována níže). Naším úkolem bude hledat netriviální řešení této rovnice pro dané $\tau \geq 0$, tj. dvojice

$$(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H$$

splňující (3.1) takové, že $\|u\| \neq 0$.

Definice 3.1 Pokud dvojice $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H$ s $\|u\| \neq 0$ splňuje (3.1) pro nějaké $\tau \geq 0$, nazýváme číslo λ *vlastním číslem* rovnice (3.1) a o funkci u hovoříme jako o příslušné *vlastní funkci*.

Operátor $\mathcal{A} : H \rightarrow H$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x) \, dx \quad \text{pro všechna } v \in H. \quad (3.2)$$

Ukážeme nyní, že operátor \mathcal{A} je tímto dobře definován. Integrál na pravé straně, chápaný ve smyslu Lebesguea, lze nahlížet jako skalární součin na prostoru $L^2(0, 1)$, tudíž existuje a je konečný pro všechna $u, v \in H \subset W^{1,2}(0, 1) \subset L^2(0, 1)$. Pro každé pevné $u \in H$ je tedy

$$L_u(v) := \int_0^1 u(x)v(x) \, dx \quad (3.3)$$

lineární funkcionál na H . Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti a ze spojitěho vnoření prostoru $W^{1,2}(0, 1)$ do $L^2(0, 1)$ je

$$|L_u(v)| = |\langle u, v \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq c \|u\|_{W^{1,2}} \|v\|_{W^{1,2}}, \quad c > 0.$$

Protože dle předpokladu je také $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ ekvivalentní s $\|\cdot\|$, dostáváme

$$|L_u(v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad C > 0.$$

Funkcionál L_u je proto omezený a díky linearitě rovněž spojitý. Podle Rieszovy věty o reprezentaci tak existuje právě jeden prvek $\ell_u \in H$, že platí

$$L_u(v) = \langle \ell_u, v \rangle \quad \text{pro všechna } v \in H.$$

Máme tedy (3.2) s $\mathcal{A}u = \ell_u$.

Věta 3.2 *Operátor \mathcal{A} definovaný v (3.2) je lineární, spojitý a pozitivní operátor na prostoru H . Navíc,*

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle > 0 \quad \text{pro všechna } u \in H, \|u\| \neq 0.$$

Důkaz. Linearita operátoru \mathcal{A} plyne z linearitě Lebesgueova integrálu. Pro důkaz spojitosti operátoru nám nyní stačí dokázat jeho omezenost. Pro všechna $u \in H$ je prvek $\mathcal{A}u$ reprezentantem funkcionálu L_u z (3.3) a podle Rieszovy věty o reprezentaci platí $\|\mathcal{A}u\| = \|L_u\|$. Je tedy

$$\|\mathcal{A}u\| = \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} |L_u(v)|$$

a výše jsme ukázali, že

$$|L_u(v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad C > 0.$$

Dostáváme tak

$$\|\mathcal{A}u\| \leq \sup_{v \in H, \|v\| \leq 1} C \|u\| \|v\| \leq K \|u\|, \quad K > 0,$$

a operátor \mathcal{A} je tudíž omezený. Pro všechna $u \in H$ dále platí

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle = \|u\|_{L^2}^2 \geq 0,$$

tedy \mathcal{A} je pozitivní. Rovnost přitom nastává pouze pro $u = 0$ skoro všude na $(0, 1)$ ve smyslu Lebesgueovy míry. Protože je však z věty o vnoření $u \in C([0, 1])$, platí $u(x) = 0$ na celém intervalu $[0, 1]$. To ovšem znamená, že $\|u\| = 0$, čímž je dokázána i poslední část tvrzení. \square

Věta 3.3 *Nechť $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H$, $\|u\| \neq 0$, je pro nějaké $\tau \geq 0$ řešením rovnice (3.1) a nechť $\mathcal{B} : H \rightarrow H$ je pozitivní operátor. Potom $\lambda > 0$.*

Důkaz. Vynásobíme-li (3.1) skalárně funkcí u , dostaneme (s využitím vlastností skalárního součinu)

$$\|u\|^2 - \lambda \langle \mathcal{A}u, u \rangle + \tau \langle \mathcal{B}u, u \rangle = 0,$$

odkud

$$\lambda \langle \mathcal{A}u, u \rangle = \|u\|^2 + \tau \langle \mathcal{B}u, u \rangle.$$

Pro $\|u\| \neq 0$ je podle Věty 3.2 $\langle \mathcal{A}u, u \rangle > 0$, můžeme tedy tímto členem dělit a pro vlastní číslo λ platí

$$\lambda = \frac{\|u\|^2 + \tau \langle \mathcal{B}u, u \rangle}{\langle \mathcal{A}u, u \rangle}.$$

Protože dle předpokladu je $\tau \geq 0$ a $\langle \mathcal{B}u, u \rangle \geq 0$, dostáváme tvrzení věty. \square

Poznámka 3.4 Pro $\tau = 0$ je rovnice (3.1) lineární, speciálně každý násobek řešení u je opět řešením. Vzhledem k nelinearitě operátoru \mathcal{B} toto přestává být pravda pro $\tau > 0$. Jelikož \mathcal{B} je pozitivně homogenní, obecně platí, že pouze *nezáporný* násobek řešení je rovněž řešením.

3.2 Specifikace úloh s jednostrannou překážkou

Pro konkrétní prostory H budeme nyní definovat celkem tři různé nelineární operátory \mathcal{B} . Další text tedy rozdělíme na tři části. V každé z nich vyjádříme díky znalosti všech parametrů úlohy operátorovou rovnici v integrálním tvaru a dokážeme vlastnosti jejího řešení. Podotkněme, že všechny uvažované nelineární operátory budou operátory se skákající nelinearitou. Vzhledem k tomu můžeme o dílčích úlohách mluvit jako o úlohách s jednostrannou překážkou a efekt působení těchto operátorů označovat termínem penalizace.

3.2.1 Penalizace v krajním bodě intervalu

Uvažujme nejprve prostor

$$H := \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = 0\}$$

se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \quad \forall u, v \in H, \quad (3.4)$$

který indukuje normu

$$\|u\| = \left(\int_0^1 (u'(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ prostoru $W^{1,2}(0,1)$. Skutečnost, že forma (3.4) je na daném prostoru skalárním součinem, je předmětem Věty 2.48, stejně jako ekvivalence indukované normy (3.5) s normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$.

Operátor $\mathcal{B} : H \rightarrow H$ definujeme pomocí předpisu

$$\langle \mathcal{B}u, v \rangle = -u^-(1)v(1) \quad \text{pro všechna } v \in H. \quad (3.6)$$

Obdobně jako v definici operátoru \mathcal{A} je pro libovolné pevné $u \in H$ pravá strana (3.6) spojitý lineární funkcionál vzhledem k v (označme ho B_u). Linearita B_u plyne z toho, že pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $v, w \in H$ platí

$$B_u(\alpha v + \beta w) = -u^-(1)(\alpha v(1) + \beta w(1)) = -\alpha u^-(1)v(1) - \beta u^-(1)w(1) = \alpha B_u(v) + \beta B_u(w).$$

Dále platí

$$|B_u(v)| = | -u^-(1)v(1) | = |u^-(1)||v(1)| \leq \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \max_{x \in [0,1]} |v(x)| = \|u\|_{C([0,1])} \|v\|_{C([0,1])}$$

a podle Věty (2.51) je prostor H spojitě vnořen do prostoru $C([0, 1])$. Odtud dostáváme

$$|B_u(v)| \leq C \|u\| \|v\| ,$$

funkcionál B_u je tudíž omezený a v důsledku také spojitý. Prvek $\mathcal{B}u$ je z Rieszovy věty o reprezentaci jediný reprezentant tohoto funkcionálu. Definice operátoru \mathcal{B} je tedy korektní.

Věta 3.5 *Operátor \mathcal{B} definovaný v (3.6) je nelineární, pozitivně homogenní a pozitivní operátor na prostoru H .*

Důkaz. Pro každé $u \in H$ a $t \geq 0$ platí

$$\langle \mathcal{B}(tu), (\cdot) v \rangle = -(tu(1))^- v(1) = -tu^-(1)v(1) = \langle t\mathcal{B}u, v \rangle \quad \forall v \in H,$$

odkud

$$\mathcal{B}(tu) = t\mathcal{B}u ,$$

tedy \mathcal{B} je pozitivně homogenní. Předchozí rovnosti však neplatí například pro $t < 0$ a $u(1) < 0$, neboť je $(tu(1))^- = 0$, ale $tu^-(1) = -tu(1) < 0$. Operátor \mathcal{B} tak nemůže být lineární. Dále je pro libovolné $u \in H$

$$\langle \mathcal{B}u, u \rangle = -u^-(1)u(1) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u(1) \geq 0, \\ -(-u(1))u(1) = u^2(1) > 0 & \text{pro } u(1) < 0, \end{cases}$$

a proto \mathcal{B} je pozitivní. □

S ohledem na (3.4), (3.2) a (3.6) chápeme operátorovou rovnici (3.1) jako

$$\langle u - \lambda \mathcal{A}u + \tau \mathcal{B}u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H. \quad (3.7)$$

Funkci v říkáme *testovací funkce*. Napíšeme-li (3.7) v integrálním tvaru, dostaneme pro $u \in H$ rovnici

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - \tau u^-(1)v(1) = 0 \quad \forall v \in H. \quad (3.8)$$

Obsahem následující věty je odpověď na otázku, jaké vlastnosti má funkce $u \in H$, pro kterou je splněna rovnice (3.8).

Věta 3.6 Pro funkci $u \in H$ splňující rovnici (3.8) platí:

(i) $u \in C^2([0, 1])$,

(ii) u je řešením úlohy

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1) \quad (3.9)$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0, \quad (3.10)$$

$$u'(1) = \tau u^-(1). \quad (3.11)$$

Důkaz. Předpokládejme, že $u \in H$ je řešením integrální rovnice (3.8). Z věty o vnoření víme, že funkce u je spojitá na intervalu $[0, 1]$. Ukážeme nyní, že je dokonce třídy $C^2([0, 1])$. Princip důkazu této části tvrzení spočívá v užití Věty 2.58. Zúžíme-li v rovnici (3.8) výběr testovacích funkcí v z prostoru H na jeho podprostor $W_0^{1,2}(0, 1)$, můžeme psát

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx \quad \forall v \in H.$$

Funkce u tedy zřejmě splňuje také (2.8) s

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c_0 = u(0) = 0, \quad c_1 = u(1), \quad f(x) := \lambda u(x), \quad \varphi(x) = c_1 x.$$

V jistém smyslu tak můžeme funkci u nahlížet jako slabé řešení okrajové úlohy (2.4), (2.5). Protože funkce $f(x) = \lambda u(x)$ je spojitá na $[0, 1]$, je podle Věty 2.58 funkce u klasickým řešením této úlohy, tedy platí $u \in C^2([0, 1])$ a u splňuje rovnici (3.9). Poznamenejme, že v důsledku jsou všechny derivace funkce u (do řádu 2 včetně) klasické.

Okrajová podmínka (3.10) pro $u \in H$ vyplývá přímo z definice prostoru H . Zbývá dokázat, že funkce u splňuje také podmínku (3.11). Za tímto účelem vynásobme rovnici (3.9) libovolnou testovací funkcí $v \in H$ a zintegrujme ji přes interval $(0, 1)$. Dostaneme tímto

$$\int_0^1 (u''(x) + \lambda u(x))v(x) dx = 0.$$

Rozepsáním levé strany ve tvaru dvou integrálů a provedením per-partes v prvním z nich obdržíme

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_0^1 \lambda u(x)v(x) dx = 0.$$

Protože $v \in H$, je člen $u'(0)v(0)$ nulový a máme tudíž

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - u'(1)v(1) = 0.$$

Porovnáním této rovnice s (3.8) dostáváme

$$\tau u^-(1)v(1) - u'(1)v(1) = (u'(1) - \tau u^-(1))v(1) = 0.$$

Při volbě testovací funkce $v \in H$, takové že $v(1) \neq 0$, je tedy podmínka (3.11) zřejmě splněna. \square

Věta 3.7 *Netriviální řešení rovnice (3.8) s $\tau \geq 0$ existuje pouze pro $\lambda > 0$.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z Vět 3.3 a 3.5. \square

Podle Věty 3.6 je funkce u splňující integrální rovnici (3.8) klasickým řešením okrajové úlohy (3.9), (3.10), (3.11). Abychom mohli této skutečnosti efektivně využívat při výpočtech, tj. místo integrální rovnice řešit rovnici diferenciální, je třeba dokázat ekvivalenci obou úloh. Tím zajistíme, že takto nalezená řešení jsou skutečně řešením původní úlohy.

Věta 3.8 *Funkce $u \in C^2([0, 1])$ splňující (3.9), (3.10), (3.11) je řešením integrální rovnice (3.8).*

Důkaz. Dokažme nejprve, že $u \in H$. Protože funkce u a u' jsou spojité na $[0, 1]$, patří též do $L^2(0, 1)$, odkud dostáváme $u \in W^{1,2}(0, 1)$. To spolu s podmínkou (3.10) implikuje $u \in H$.

Abychom ukázali, že u splňuje (3.8), budeme postupovat podobně jako v poslední části důkazu Věty 3.6. Vynásobením rovnice (3.9) libovolnou funkcí $v \in H$, zintegrováním přes interval $(0, 1)$ a provedením per-partes ve členu s u'' obdržíme rovnici

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - u'(1)v(1) = 0.$$

Dosadíme-li za $u'(1)$ výraz $\tau u^-(1)$ z podmínky (3.11), dostaneme rovnici (3.8). \square

3.2.2 Penalizace ve vnitřním bodě intervalu

Pro tento případ uvažujme podprostor

$$H := \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\} = W_0^{1,2}(0,1)$$

Sobolevova prostoru $W^{1,2}(0,1)$. I na tomto podprostoru je forma (3.4) skalárním součinem a norma (3.5) tímto skalárním součinem indukovaná je ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ (Věta 2.48).

Nechť $x_0 \in (0,1)$. Operátor $\mathcal{B} : H \rightarrow H$ definujeme předpisem

$$\langle \mathcal{B}u, v \rangle = -u^-(x_0)v(x_0) \quad \text{pro všechna } v \in H, \quad (3.12)$$

tedy stejně jako v předchozí části, výraz na pravé straně však nyní uvažujeme v jiném bodě. Tato definice je korektní opět díky Rieszově větě o reprezentaci a díky tomu, že pro libovolné pevné $u \in H$ je pravá strana (3.12) vzhledem k v spojitý lineární funkcionál na H .

Věta 3.9 *Operátor \mathcal{B} definovaný v (3.12) je nelineární, pozitivně homogenní a pozitivní operátor na prostoru H .*

Důkaz. Tvrzení lze dokázat stejně jako Větu 3.5, kde výrazy vyjádřené v $x = 1$ nahradíme výrazy v bodě $x = x_0$. \square

Operátorovou rovnici (3.1) můžeme s ohledem na (3.4), (3.2) a (3.12) zapsat v integrálním tvaru

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - \tau u^-(x_0)v(x_0) = 0 \quad \forall v \in H. \quad (3.13)$$

Zabývejme se nyní otázkou, jaké vlastnosti má funkce u splňující tuto rovnici.

Věta 3.10 *Pro funkci $u \in H$ splňující integrální identitu (3.13) platí:*

$$(i) \quad u \in C([0,1]) \cap C^2([0,x_0]) \cap C^2([x_0,1]),$$

(ii) *funkce u splňuje diferenciální rovnici*

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0,1) \setminus \{x_0\}, \quad (3.14)$$

(iii) funkce u splňuje okrajové podmínky

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.15)$$

a tzv. přechodovou podmínku

$$u'(x_0-) - u'(x_0+) = \tau u^-(x_0), \quad (3.16)$$

(iv) jestliže $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, potom $u \in C^2([0, 1])$ a platí

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1), \quad (3.17)$$

tj. rovnice z (3.14) je splněna pro všechna $x \in (0, 1)$.

Důkaz. Nechť $u \in H$ je řešením rovnice (3.13). Z definice prostoru $H = W^{1,2}(0, 1)$ okamžitě plyne $u(0) = u(1) = 0$, tj. podmínka (3.15). Protože je dále H spojitě vnořen do prostoru $C([0, 1])$, je funkce u spojitá na intervalu $[0, 1]$.

Ukažme dále platnost tvrzení (iv). Je-li $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, nelineární člen v rovnici (3.13) zmizí. Je tedy

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

a funkce u tudíž splňuje také (2.8) s

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c_0 = u(0) = 0, \quad c_1 = u(1) = 0, \quad f(x) := \lambda u(x), \quad \varphi(x) = 0.$$

Protože funkce $f(x) = \lambda u(x)$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, je podle Věty 2.58 funkce u klasickým řešením úlohy (2.4), (2.5). To znamená, že $u \in C^2([0, 1])$ a u splňuje rovnici (3.17) s okrajovými podmínkami (3.15), čímž je tvrzení (iv) dokázáno.

Pro důkaz tvrzení (i)–(iii) bude třeba zúžit v rovnici (3.13) výběr testovacích funkcí v z celého prostoru H na vhodné podprostory. Definujme nejprve prostor

$$H_1 := \{v \in H : v(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in [x_0, 1]\},$$

na který můžeme nahlížet jako na prostor $W_0^{1,2}(0, x_0)$. Volbou testovacích funkcí $v \in H_1$ přejde rovnice (3.13) do tvaru

$$\int_0^{x_0} u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^{x_0} u(x)v(x) dx = 0 \quad \text{pro všechna } v \in H_1, \quad (3.18)$$

a tedy u splňuje rovnici (2.8) s

$$a = 0, \quad b = x_0, \quad f(x) := \lambda u(x) \quad \text{pro } x \in [0, x_0].$$

Pokud dále zvolíme

$$c_0 = 0, \quad c_1 = u(x_0), \quad \varphi(x) = \frac{c_1}{x_0}x \quad \text{pro } x \in [0, x_0],$$

je $u \in W^{1,2}(0, x_0)$, $u - \varphi \in W_0^{1,2}(0, x_0)$ a funkce u je díky spojitosti funkce $f(x) = \lambda u(x)$ klasickým řešením okrajové úlohy (2.4), (2.5) s takto zvolenými parametry (Věta 2.58).

Speciálně odtud plyne

$$u \in C^2([0, x_0])$$

a u splňuje rovnici

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, x_0).$$

Analogicky definujeme prostor

$$H_2 := \{v \in H : v(x) = 0 \text{ pro } x \in [0, x_0]\},$$

který můžeme ztotožnit s prostorem $W_0^{1,2}(x_0, 1)$. Obdobnými úvahami jako výše lze ukázat, že

$$u \in C^2([x_0, 1])$$

a u splňuje

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{na } (x_0, 1).$$

Tím jsme dokázali tvrzení (i) a skutečnost, že funkce u je řešením (3.14), což je vlastně souhrnný zápis rovnic

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, x_0),$$

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{na } (x_0, 1).$$

V bodě x_0 totiž v obecném případě nemusí existovat druhá derivace funkce u , jak vyplývá z podmínky (3.16), jejíž platnost nyní ukážeme.

Vynásobíme-li (3.14) libovolnou testovací funkcí $v \in H$ a zintegrujeme-li rovnici přes intervaly $(0, x_0)$ a $(x_0, 1)$, dostaneme po sečtení a provedení per-partes v integrálech s u''

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_0^{x_0} u'(x)v'(x) dx + u'(x_0^-)v(x_0) - u'(0)v(0) + \int_0^{x_0} \lambda u(x)v(x) dx \\ & - \int_{x_0}^1 u'(x)v'(x) dx + u'(1)v(1) - u'(x_0^+)v(x_0) + \int_{x_0}^1 \lambda u(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Protože $v \in H$, hraniční členy $u'(0)v(0)$ a $u'(1)v(1)$ jsou nulové a máme tudíž

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx + u'(x_0-)v(x_0) - u'(x_0+)v(x_0) + \int_0^1 \lambda u(x)v(x) \, dx \\ &= - \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx + (u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0) + \int_0^1 \lambda u(x)v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Jelikož u je řešením (3.13), dostáváme porovnáním poslední rovnosti s (3.13), že

$$(u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0) = \tau u^-(x_0)v(x_0).$$

Odtud volbou testovací funkce v takové, že $v(x_0) \neq 0$, plyne (3.16). \square

Věta 3.11 *Netriviální řešení rovnice (3.13) s $\tau \geq 0$ existuje pouze pro $\lambda > 0$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět 3.3 a 3.9. \square

Věta 3.12 *Funkce $u \in C([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$ splňující (3.14), (3.15), (3.16) je řešením integrální rovnice (3.13).*

Důkaz. Funkce u je spojitá na $[0, 1]$, patří tedy do $L^2(0, 1)$. Její derivace u' je spojitá na $[0, x_0]$ a na $[x_0, 1]$, odkud $u' \in L^2(0, x_0) \cap L^2(x_0, 1)$. Ačkoliv obecně není pravda, že u' je spojitá na celém $[0, 1]$, protože derivace v bodě x_0 existují jen jako jednostranné, vyplývá z aditivity Lebesgueova integrálu, že $u' \in L^2(0, 1)$, a proto $u \in W^{1,2}(0, 1)$. Z podmínky (3.15) potom dostáváme, že $u \in H$.

Nyní ukážeme, že u splňuje rovnici (3.13). Postupovat budeme obdobně jako v poslední části důkazu Věty 3.10. Vynásobíme rovnici (3.14) libovolnou funkcí $v \in H$, zintegrujeme přes $(0, x_0)$ a $(x_0, 1)$, integrály sečteme, provedeme per-partes ve členech s u'' a uijeme toho, že členy s $v(0)$, resp. $v(1)$ jsou nulové. Obdržíme tak rovnici

$$- \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx + (u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0) + \int_0^1 \lambda u(x)v(x) \, dx = 0,$$

do které v prostředním členu místo výrazu v závorce dosadíme výraz $\tau u^-(x_0)$ z podmínky (3.16). Tím jsme získali rovnici (3.13). \square

Důsledek 3.13 *Je-li $u \in C^2([0, 1])$ a $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$ a u splňuje rovnici (3.17) s okrajovými podmínkami (3.15), potom je také řešením integrální rovnice (3.13).*

Důkaz. Tvrzení plyne z předchozí věty, uvědomíme-li si, že za současných předpokladů pro funkci u platí, že patří do prostoru $C([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$ a splňuje (3.14), (3.15), (3.16). \square

3.2.3 Penalizace na souvislém podintervalu

Uvažujme opět podprostor

$$H := \{\varphi \in W^{1,2}(0,1) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} = W_0^{1,2}(0,1)$$

se skalárním součinem (3.4) a odpovídající normou (3.5).

Nechť $x_0 \in (0,1)$. Definujme operátor $\mathcal{B} : H \rightarrow H$ předpisem

$$\langle \mathcal{B}u, v \rangle = - \int_{x_0}^1 u^-(x)v(x) dx \quad \text{pro všechna } v \in H. \quad (3.19)$$

Analogicky jako v předchozích případech ukážeme, že \mathcal{B} je tímto dobře definován. Pro libovolné pevné $u \in H$ označme

$$B_u(v) = - \int_{x_0}^1 u^-(x)v(x) dx \quad \forall v \in H.$$

Zřejmě platí, že B_u je lineární funkcional na prostoru H . Užitím Hölderovy nerovnosti a základních vlastností Lebesgueova integrálu dále dostáváme

$$\begin{aligned} |B_u(v)| &= \left| - \int_{x_0}^1 u^-(x)v(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^1 |u^-(x)v(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{x_0}^1 |u^-(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_0}^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{x_0}^1 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_0}^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Ze spojitého vnoření prostoru H do $L^2(0,1)$ následně plyne, že

$$|B_u(v)| \leq \|u\| \|v\|,$$

tedy funkcional B_u je omezený a díky linearitě také spojitý. Podle Rieszovy věty o reprezentaci je tak prvek $\mathcal{B}u$ pro každé $u \in H$ jednoznačně definován jako reprezentant funkcionalu B_u .

Věta 3.14 *Operátor \mathcal{B} definovaný v (3.19) je nelineární, pozitivně homogenní a pozitivní operátor na prostoru H .*

Důkaz. Pro libovolné $t \geq 0$ a $u \in H$ platí

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}(tu), v \rangle &= - \int_{x_0}^1 (tu(x))^- v(x) dx = - \int_{x_0}^1 tu^-(x)v(x) dx \\ &= -t \int_{x_0}^1 u^-(x)v(x) dx = t \langle \mathcal{B}u, v \rangle = \langle t\mathcal{B}u, v \rangle \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Odtud je $\mathcal{B}(tu) = t\mathcal{B}u$, tedy \mathcal{B} je pozitivně homogenní. Uvedená rovnost však zřejmě neplatí například pro $t < 0$ a funkci u , která je záporná na $(x_0, 1)$, proto \mathcal{B} není lineární.

Jelikož

$$-u^-(x)u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u(x) \geq 0 \\ -(-u(x))u(x) = u^2(x) > 0 & \text{pro } u(x) < 0, \end{cases}$$

je pro všechna $u \in H$

$$\langle \mathcal{B}u, u \rangle = - \int_{x_0}^1 u^-(x)u(x) dx = \int_{x_0}^1 (-u^-(x)u(x)) dx \geq 0,$$

neboť integrál z nezáporné funkce je rovněž nezáporný. Tím je dokázána pozitivita operátoru \mathcal{B} . \square

Operátorovou rovnicí (3.7) můžeme vzhledem k definici operátorů \mathcal{A} a \mathcal{B} zapsat v integrálním tvaru

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - \tau \int_{x_0}^1 u^-(x)v(x) dx = 0 \quad \forall v \in H,$$

resp.

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0,1]}(x)u^-(x)) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in H, \quad (3.20)$$

kde funkce $\chi_{[x_0,1]}(x)$ je charakteristická funkce intervalu $[x_0, 1]$, tj.

$$\chi_{[x_0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [x_0, 1] \\ 0 & \text{pro } x \in [0, x_0). \end{cases}$$

Skákající nelinearita se v tomto případě objevuje v integrandu integrální identity.

Poznámka 3.15 Charakteristická funkce $\chi_{[x_0,1]}(x)$ je spojitá ve všech bodech intervalu $[0, 1]$ kromě bodu $x = x_0$. Pokud je funkce u spojitá na $[0, 1]$, je i funkce u^- spojitá na $[0, 1]$. Odtud vyplývá, že funkce $\chi_{[x_0,1]}(x)u^-(x)$ je spojitá ve všech bodech intervalu $[0, 1]$ kromě bodu $x = x_0$. Speciálně, je spojitá na intervalech $[0, x_0)$ a $(x_0, 1]$. V bodě $x = x_0$ ji lze spojitě dodefinovat zleva, resp. zprava, tak, aby byla spojitá na uzavřených intervalech $[0, x_0]$ a $[x_0, 1]$.

Věta 3.16 Pro funkci $u \in H$ splňující integrální identitu (3.20) platí:

$$(i) \quad u \in C^1([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1]),$$

(ii) funkce u splňuje diferenciální rovnici

$$u''(x) + \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1) \setminus \{x_0\}, \quad (3.21)$$

(iii) funkce u splňuje okrajové podmínky

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.22)$$

a přechodovou podmínku

$$u''(x_0-) - u''(x_0+) = \tau u^-(x_0), \quad (3.23)$$

(iv) je-li $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, potom $u \in C^2([0, 1])$ a platí

$$u''(x) + \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1), \quad (3.24)$$

tj. rovnice z (3.21) je splněna pro všechna $x \in (0, 1)$.

Důkaz. Necht' $u \in H$ je řešením rovnice (3.20). Ze spojitého vnoření prostoru H do prostoru $C([0, 1])$ ihned plyne, že funkce u je spojitá na intervalu $[0, 1]$. Splnění okrajových podmínek (3.22) je zřejmé z definice prostoru $H = W_0^{1,2}(0, 1)$.

Dále ukážeme platnost tvrzení (iv). Rovnice (3.20) je vlastně (2.8) s

$$a = 0, \quad b = 1,$$

$$f(x) = \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x).$$

Zvolíme-li dále $\varphi(x) = 0$ pro $x \in [0, 1]$, lze funkci u nahlížet dle Definice 2.57 jako slabé řešení okrajové úlohy (2.4), (2.5), kde $c_0 = c_1 = 0$. Je-li $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, tj. $u^-(x_0) = 0$, je funkce $\tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x)$ spojitá na celém intervalu $[0, 1]$. Platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = \tau u^-(x_0) = 0.$$

Je proto spojitá i funkce f a z Věty 2.58 dostáváme, že u je dokonce klasickým řešením této úlohy, tedy patří do prostoru $C^2([0, 1])$ a splňuje rovnici (3.24). Tím je tvrzení (iv) dokázáno.

V obecném případě je funkce $\tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x)$ (a tedy funkce f) spojitá pouze na intervalech $[0, x_0]$, $[x_0, 1]$, kde hodnoty v bodě x_0 chápeme jako spojitě dodefinované

limitou zleva, resp. zprava. Analogickou úvahu jako výše tak nyní provedeme na těchto intervalech. Volbou testovacích funkcí z prostoru

$$H_1 = \{v \in H : v(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in [x_0, 1]\} \subset H,$$

který lze ztotožnit s prostorem $W_0^{1,2}(0, x_0)$, dostáváme, že funkce u splňuje

$$\int_0^{x_0} u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^{x_0} u(x)v(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_1,$$

což je (2.8) s

$$a = 0, \quad b = x_0, \quad f(x) = \lambda u(x) \quad \text{pro } x \in [0, x_0].$$

Funkce f je přitom stejná jako v důkazu části (iv) tvrzení, uvažujeme ji však pouze na intervalu $[0, x_0]$. Definujme

$$c_0 = 0, \quad c_1 = u(x_0), \quad \varphi(x) = \frac{c_1}{x_0}x.$$

Potom u je slabým řešením úlohy (2.4), (2.5) s takto zvolenými parametry. Ze spojitosti funkce f na intervalu $[0, x_0]$ a z Věty 2.58 dále plyne, že u je řešením klasickým, tj. $u \in C^2([0, x_0])$ a u splňuje

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, x_0). \quad (3.25)$$

Zcela analogicky budeme postupovat na intervalu $[x_0, 1]$. Za prostor testovacích funkcí v rovnici (3.20) zvolíme prostor

$$H_2 = \{v \in H : v(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in [0, x_0]\} \subset H,$$

který lze ztotožnit s prostorem $W_0^{1,2}(x_0, 1)$, čímž tato rovnice přejde do tvaru

$$\int_{x_0}^1 u'(x)v'(x) dx - \int_{x_0}^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x))v(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_2.$$

Vzhledem k Definici 2.57 je tak funkce u slabým řešením úlohy (2.4), (2.5) s

$$a = x_0, \quad b = 1, \quad c_0 = u(x_0), \quad c_1 = 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{-c_0}{1-x_0}(x-x_0) + c_0, \quad f(x) = \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x), \quad x \in [x_0, 1],$$

a díky spojitosti funkce f na uvažovaném intervalu také řešením klasickým (Věta 2.58).

Platí tedy $u \in C^2([x_0, 1])$ a u splňuje rovnici

$$u'' + \lambda u + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x) = 0 \quad \text{na } (x_0, 1). \quad (3.26)$$

Celkem tak máme, že funkce u splňuje rovnici (3.21), což je souhrnný zápis rovnic (3.25), (3.26), a že $u \in C([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$. Derivace v krajních bodech přitom chápeme jako jednostranné, tudíž se nemusejí rovnat.

Abychom nyní ukázali, že je také $u \in C^1([0, 1])$, stačí nám vzhledem k předešlému dokázat pouze existenci první derivace v bodě $x = x_0$. Za tímto účelem vynásobme rovnici (3.21) libovolnou testovací funkcí $v \in H$ a zintegrujme ji přes intervaly $(0, x_0)$ a $(x_0, 1)$. Po sečtení obou rovnic a provedení per-partes v integrálech s u'' dostáváme

$$\begin{aligned}
0 &= - \int_0^{x_0} u'(x)v'(x) \, dx + u'(x_0-)v(x_0) - u'(0)v(0) + \int_0^{x_0} \lambda u(x)v(x) \, dx \\
&\quad - \int_{x_0}^1 u'(x)v'(x) \, dx + u'(1)v(1) - u'(x_0+)v(x_0) \\
&\quad + \int_{x_0}^1 (\lambda u(x) + \tau u^-(x)) v(x) \, dx \\
&= - \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx + u'(x_0-)v(x_0) - u'(x_0+)v(x_0) \\
&\quad + \int_{x_0}^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x)) v(x) \, dx \\
&= - \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx + (u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0) \\
&\quad + \int_{x_0}^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x)) v(x) \, dx,
\end{aligned}$$

přičemž hraniční členy $u'(0)v(0)$ a $u'(1)v(1)$ jsou nulové díky tomu, že $v \in H$. Poslední rovnost můžeme přepsat ve tvaru

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx - \int_{x_0}^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x)u^-(x)) v(x) \, dx = (u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0).$$

Jelikož $u \in H$ je dle předpokladu řešením (3.20), musí platit

$$(u'(x_0-) - u'(x_0+))v(x_0) = 0.$$

Zřejmě tedy stačí zvolit v tak, aby $v(x_0) \neq 0$, a tvrzení (i) je dokázáno.

Konečně přechodovou podmínku (3.23) lze ukázat tak, že z rovnice (3.21) vyjádříme $u''(x)$ a poté provedeme limitní přechod pro $x \rightarrow x_0-$ a $x \rightarrow x_0+$. Vzhledem ke spojitosti funkce u v bodě $x = x_0$ můžeme psát

$$u''(x_0-) = -\lambda u(x_0),$$

$$u''(x_0+) = -\lambda u(x_0) - \tau u^-(x_0)$$

a odečtením obou jednostranných limit obdržíme požadované. □

Důsledek 3.17 *Pokud je v části (iv) Věty 3.10 parametr $\tau = 0$ nebo $u(x) \geq 0$ na celém intervalu $[x_0, 1]$, potom platí $u \in C^2([0, 1])$ a u splňuje diferenciální rovnici*

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1). \quad (3.27)$$

Poznámka 3.18 Přejchodová podmínka (3.23) je díky rovnici (3.21) ekvivalentní s podmínkou spojitosti v bodě $x = x_0$, tj.

$$u(x_0-) = u(x_0+).$$

Věta 3.19 *Netriviální řešení rovnice (3.20) s $\tau \geq 0$ existuje pouze pro $\lambda > 0$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět 3.3 a 3.14. □

Věta 3.20 *Funkce $u \in C^1([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$ splňující (3.21), (3.22) je řešením integrální rovnice (3.20).*

Důkaz. Je zřejmé, že u i u' jakožto spojité funkce na $[0, 1]$ náležejí do $L^2(0, 1)$ a tedy $u \in W^{1,2}(0, 1)$. Z podmínky (3.22) pak ihned vyplývá $u \in H$.

Abychom ukázali, že u splňuje (3.20), budeme postupovat obdobně jako v předchozí části důkazu Věty 3.16. Vynásobíme rovnici (3.21) libovolnou $v \in H$, zintegrujeme přes $(0, x_0)$ a $(x_0, 1)$, integrály sečteme, provedeme per-partes ve členech s u'' . Ve vzniklé rovnici využijeme toho, že členy s $v(0)$, resp. $v(1)$ jsou nulové, a že funkce u' je dle předpokladu spojitá i v bodě x_0 a proto $u'(x_0-) - u'(x_0+) = 0$. Výsledná rovnice je až na znaménko (3.20). □

Důsledek 3.21 *Je-li $u \in C^2([0, 1])$ a $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$ a u splňuje rovnici (3.24) s okrajovými podmínkami (3.22), potom je také řešením integrální rovnice (3.20).*

Důkaz. Tvrzení plyne z předchozí věty, protože za současných předpokladů funkce u patří do prostoru $C^1([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$ a splňuje (3.21) a (3.22). □

Kapitola 4

Řešení úloh s bodovou překážkou

V předchozí kapitole jsme pro tři různé nelineární operátory \mathcal{B} dokázali kvalitativní vlastnosti řešení operátorové rovnice (3.1). Nyní se pokusíme tato řešení najít. Jako první prostudujeme úlohy, ve kterých operátor \mathcal{B} odpovídá působení jednostranné pružné překážky v jednom bodě uvažovaného intervalu.

4.1 Překážka v krajním bodě intervalu

Pro operátor \mathcal{B} definovaný v sekci 3.2.1 předpisem (3.6) hledáme řešení úlohy

$$u \in H : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - \tau u^-(1)v(1) = 0 \quad \forall v \in H,$$

kde $\tau \geq 0$, $H = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = 0\}$. Podle Vět 3.6, 3.8 je tato úloha ekvivalentní s okrajovou úlohou

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \tag{4.1}$$

$$u(0) = 0, \tag{4.2}$$

$$u'(1) = \tau u^-(1), \tag{4.3}$$

přičemž hledané řešení u má být třídy $C^2([0,1])$.

Nejprve vyřešíme případ $\tau = 0$. Podmínka (4.3) má nyní tvar

$$u'(1) = 0. \tag{4.4}$$

Dostáváme tak úlohu na vlastní čísla z Věty 2.54, která má nekonečně mnoho vlastních čísel

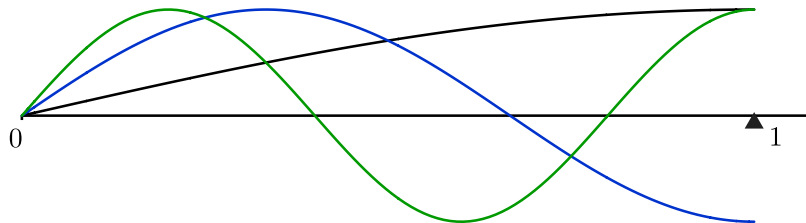
$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \tag{4.5}$$

a jim odpovídajících vlastních funkcí

$$u_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Platí, že libovolný nenulový násobek vlastní funkce je rovněž vlastní funkcí.

Na obrázku 4.1 jsou vykresleny první tři řešení u_1 , u_2 , u_3 úlohy s překážkou v krajním bodě intervalu pro $\tau = 0$.



Obrázek 4.1: Vlastní funkce u_1 (černá), u_2 (modrá), u_3 (zelená) úlohy pro $\tau = 0$

Řešení, která jsme obdrželi, zjevně nejsou překážkou ovlivněna. V bodě $x = 1$ mohou nabývat záporných hodnot a přitom zde mít nulovou derivaci. Příklad $\tau = 0$ tedy odpovídá úloze bez překážky, což plyne již z původní operátorové rovnice. V ní totiž mizí nelineární člen, který působení překážky modeluje.

Dále uvažujme $\tau > 0$. V podmínce (4.3) je nyní rozhodující hodnota $u(1)$, rozlišíme proto následující případy.

4.1.1 Řešení splňující $u(1) \geq 0$

Za předpokladu, že $u(1) \geq 0$, dostáváme i pro $\tau > 0$ z (4.3)

$$u'(1) = 0.$$

Máme tedy stejnou úlohu na vlastní čísla jako v případě $\tau = 0$, a proto každé řešení požadovaného typu je zároveň řešením úlohy bez překážky. Je ovšem třeba dbát přidané podmínky na znaménko $u(1)$.

Jelikož

$$u_n(1) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

má smysl hledat pouze řešení, pro něž je $u(1) > 0$. Splnění této podmínky zajistíme, budeme-li pro lichá n uvažovat pouze kladné násobky funkcí u_n z (4.6), zatímco pro n

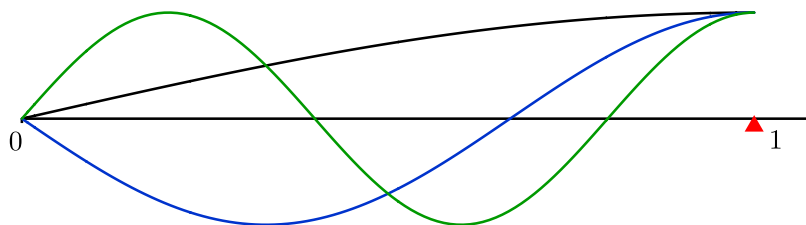
sudá pouze záporné. Celkem tedy můžeme řešení psát ve tvaru

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.7)$$

přičemž pouze *kladné* násobky těchto funkcí jsou rovněž řešení. Příslušná vlastní čísla jsou stejná jako v úloze bez překážky, tj. $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4$.

Všimněme si, že pro $\tau > 0$ je úloha pozitivně homogenní, což je v souladu s Poznámkou 3.4. Nalezená řešení nemají s překážkou žádný kontakt, ta proto neovlivňuje jejich tvar, její přítomnost se však projeví v omezení přípustných násobků.

Na obrázku 4.2 jsou vykresleny vlastní funkce u_1 , u_2 , u_3 dané předpisem (4.7), tj. řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3) s $\tau > 0$ splňující $u(1) > 0$.



Obrázek 4.2: Vlastní funkce u_1 (černá), u_2 (modrá), u_3 (zelená) úlohy pro $\tau > 0$

4.1.2 Řešení splňující $u(1) < 0$

Hledejme nyní taková řešení úlohy (4.1), (4.2), (4.3), pro která je $u(1) < 0$. Podmínku (4.3) lze vzhledem k definici záporné části funkce psát jako

$$u'(1) = -\tau u(1). \quad (4.8)$$

Protože $-\tau u(1) > 0$, jsou tato řešení v okolí krajního bodu $x = 1$ vždy rostoucí. Hodnota derivace v tomto bodě je přitom tím větší, čím větší je síla překážky τ nebo čím menší je hodnota $u(1)$.

Pro (4.1) máme charakteristickou rovnici

$$r^2 + \lambda = 0, \quad (4.9)$$

jejíž kořeny jsou

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}. \quad (4.10)$$

Podle Věty 3.7 existuje netriviální řešení pouze pro $\lambda > 0$. Oba kořeny jsou tudíž ryze imaginární a definujeme-li

$$\beta := \sqrt{\lambda} > 0, \quad (4.11)$$

můžeme psát

$$r_{1,2} = \pm\beta i.$$

Fundamentální systém řešení je tedy $FS = \{\cos \beta x, \sin \beta x\}$, což nám dává obecné řešení rovnice (4.1) tvaru

$$u(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ jsou libovolně volitelné konstanty. Dosazením tohoto řešení do okrajové podmínky (4.2) dostáváme

$$u(0) = A = 0,$$

odkud

$$u(x) = B \sin \beta x. \quad (4.12)$$

Z podmínky (4.8) je potom

$$u'(1) = \beta B \cos \beta = -\tau B \sin \beta.$$

Jelikož nás zajímají pouze netriviální řešení úlohy, tj. řešení s $B \neq 0$, požadujeme, aby

$$\beta \cos \beta = -\tau \sin \beta.$$

Vydělíme-li tuto rovnici $-\tau$ a členem $\cos \beta$ (ten je nenulový, v opačném případě by musel být nulový i člen $\sin \beta$, což není možné), dostaneme transcendentní rovnici v proměnné β

$$-\frac{1}{\tau}\beta = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.13)$$

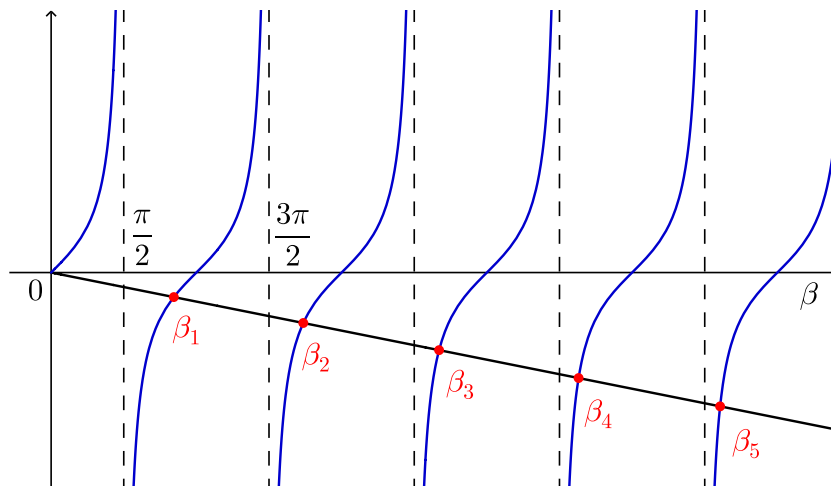
Na levé straně je lineární funkce, na pravé straně funkce tangens. Zřejmě tak existuje posloupnost kořenů

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n \rightarrow +\infty$$

splňující

$$\beta_n \in \left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.14)$$

(viz též obrázek 4.3). S rostoucím n se navíc kořeny stále více přibližují levému krajnímu bodu příslušného intervalu.



Obrázek 4.3: Grafické řešení rovnice (4.13).

Protože $\beta = \sqrt{\lambda}$, víme, že existuje posloupnost vlastních čísel

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty,$$

$$\lambda_n = \beta_n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

a příslušných vlastních funkcí

$$u_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (4.15)$$

Znaménko B_n je zde dáno požadavkem $u_n(1) < 0$, tedy

$$B_n \sin \sqrt{\lambda_n} < 0.$$

To bude vzhledem k (4.14) splněno, pokud

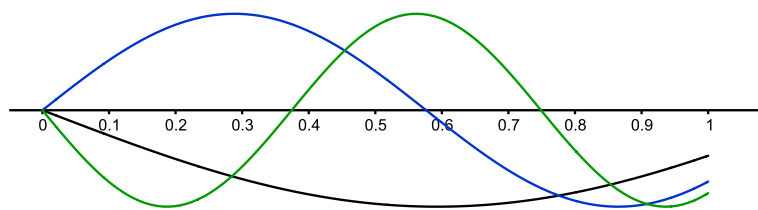
$$\operatorname{sgn} B_n = (-1)^n.$$

Řešení tedy můžeme psát ve tvaru

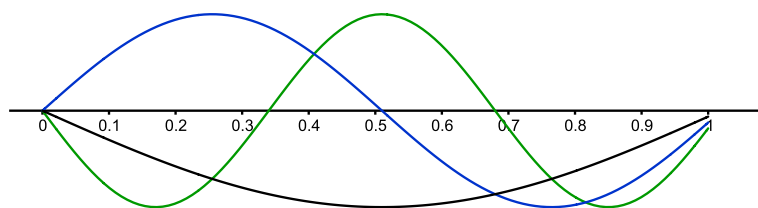
$$u_n(x) = (-1)^n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (4.16)$$

přičemž pouze *kladné* násobky těchto vlastních funkcí jsou vlastní funkce řešené úlohy.

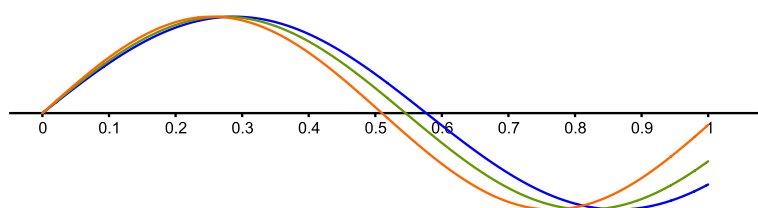
Na obrázku 4.4 jsou znázorněny vlastní funkce u_1, u_2, u_3 z (4.16) pro $\tau = 5$, které odpovídají vlastním číslům $\lambda_1 = 7.02$, $\lambda_2 = 29.70$ a $\lambda_3 = 70.39$. Pro $\tau = 50$ jsou první tři vlastní funkce úlohy znázorněny na obrázku 4.5. Vlastní čísla jsou v tomto případě $\lambda_1 = 9.49$, $\lambda_2 = 37.94$ a $\lambda_3 = 85.38$. Hodnoty byly zjištěny numerickým řešením rovnice (4.13).



Obrázek 4.4: Řešení u_1 (černá), u_2 (modrá), u_3 (zelená) pro $\tau = 5$



Obrázek 4.5: Řešení u_1 (černá), u_2 (modrá), u_3 (zelená) pro $\tau = 50$



Obrázek 4.6: Funkce u_2 pro $\tau = 5$ (modrá), $\tau = 10$ (zelená), $\tau = 50$ (oranžová).

Na obrázku 4.6 jsou pro srovnání vykresleny vlastní funkce u_2 pro $\tau = 5$, $\tau = 10$ a $\tau = 50$. Příslušná vlastní čísla byla uvedena výše, pro $\tau = 10$ je $\lambda_2 = 33.18$.

Poznámka 4.1 Lze ukázat, že norma (3.5) na prostoru H zohledňující hodnoty derivací je pro řešení všech úloh uvažovaných v této práci úměrná hodnotě $\sqrt{\lambda}$. Konkrétně pro funkce u_n z (4.16) je

$$\|u_n\|^2 = \int_0^1 |u_n'(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x \right|^2 dx = \frac{\lambda_n}{2}.$$

Vlastní čísla λ_n přitom tvoří neomezenou rostoucí posloupnost (jak uvidíme dále, toto je pravda pro všechny studované úlohy). To znamená, že takto vynormované funkce u_n by měly s rostoucím n klesající amplitudu.

Z důvodu přehlednosti jsou funkce na obrázcích v této práci vykreslovány s amplitudou rovnou jedné, výjimku tvoří pouze grafy řešení úlohy se souvislou překážkou. Protože jsou všechny studované úlohy pozitivně homogenní, tj. každý kladný násobek řešení je řešením, není v obrázcích znázorněna osa y .

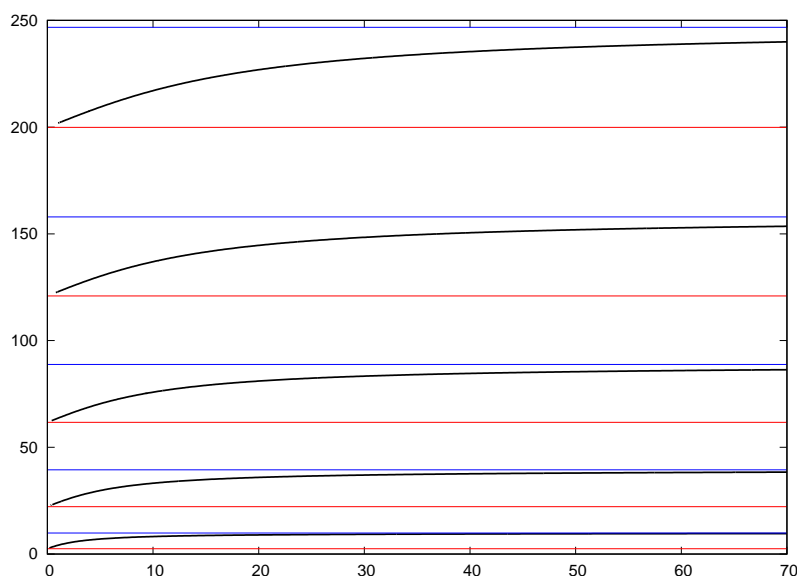
Z obrázků 4.4–4.6 je zřejmé, že čím větší je hodnota parametru τ , odpovídající síle překážky, tím více se průsečíky vlastních funkcí úlohy blíží k hodnotám nulových bodů funkcí

$$\sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vlastní funkce úlohy se tedy s rostoucím τ přibližují tvarem řešením Dirichletovy úlohy na vlastní čísla s homogenními okrajovými podmínkami. V rovnici (4.13) se pro $\tau \rightarrow \infty$ blíží směrnice lineární funkce $-\frac{1}{\tau}\beta$ k nule a z obrázku 4.3 je patrné, že kořeny β_n této rovnice konvergují k hodnotám $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Pro vlastní čísla potom platí

$$\lambda_n \rightarrow n^2\pi^2 \quad \text{pro } \tau \rightarrow +\infty.$$

Limitní hodnoty jsou právě vlastní čísla zmíněné Dirichletovy úlohy. Tu lze nahlížet jako úlohu s pevnou překážkou, která nedovoluje, aby řešení v bodě jejího umístění nabývalo záporných hodnot.



Obrázek 4.7: Závislost vlastních čísel λ na τ . Černě jsou vykresleny souvislé větve kvadrátů kořenů rovnice (4.13), tj. $\lambda = \lambda(\tau) = \beta^2(\tau)$, které se nacházejí v pásech mezi vlastními čísly úloh bez překážky (červeně) a s pevnou překážkou (modře).

Na obrázku 4.7 je vykresleno prvních pět větví vlastních čísel úlohy (4.1), (4.2), (4.8) pro $\tau > 0$, jejichž příslušné vlastní funkce jsou překážkou přímo ovlivněny. Červeně jsou vyznačeny vlastní čísla z (4.5) úlohy (4.1), (4.2), (4.4), jejichž vlastní funkce překážku obcházejí, modře pak hodnoty $n^2\pi^2$ odpovídající vlastním číslům úlohy s pevnou překážkou. Je patrné, že černé křivky vycházejí pro $\tau = 0$ z červených a s rostoucím τ se přibližují ke křivkám modrým.

4.2 Překážka uvnitř intervalu

Uvažujme nyní operátor \mathcal{B} z (3.12), který odpovídá penalizaci ve vnitřním bodě intervalu $(0, 1)$. Úloha je v tomto případě dána rovnicí

$$u \in H : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \lambda \int_0^1 u(x)v(x) dx - \tau u^-(x_0)v(x_0) = 0 \quad \forall v \in H,$$

kde $\tau \geq 0$ a $H = W_0^{1,2}(0, 1)$. Abychom našli její řešení, využijeme Větu 3.10, podle které pro funkci u splňující uvedenou integrální rovnici obecně platí

$$u \in C([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1]) \quad (4.17)$$

a u je řešením okrajové úlohy

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, 1) \setminus \{x_0\}, \quad (4.18)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.19)$$

$$u(1) = 0, \quad (4.20)$$

$$u'(x_0-) - u'(x_0+) = \tau u^-(x_0). \quad (4.21)$$

Je-li navíc $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, víme podle téže věty, že $u \in C^2([0, 1])$ a u splňuje rovnici z (4.18) na celém intervalu $(0, 1)$. Vzhledem k Větě 3.12 jsou obě úlohy, integrální i diferenciální, ekvivalentní, proto se dále budeme zabývat pouze řešením úlohy (4.17)–(4.21).

4.2.1 Klasická řešení

Vyřešme nejprve případy, ve kterých lze obdržet řešení třídy $C^2([0, 1])$ (dokonce třídy $C^\infty([0, 1])$). Tyto případy nastanou pro $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$, kdy je rovnice z (4.18)

splněna i v bodě $x = x_0$. Hledáme tedy řešení úlohy na vlastní čísla

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

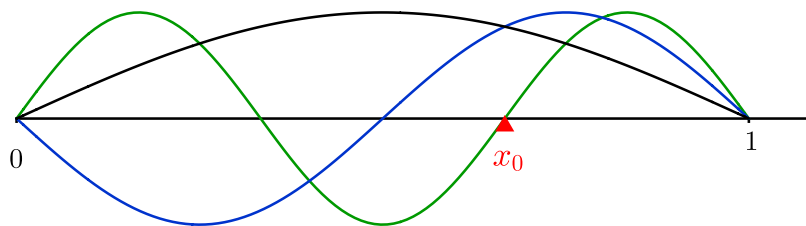
s okrajovými podmínkami (4.19), (4.20), na která případně klademe další požadavky.

Podle Věty 2.52 existuje nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_n = n^2\pi^2$, kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n = \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.22)$$

Pro $\tau = 0$ je každá funkce tvaru (4.22) se všemi svými nenulovými násobky řešením naší úlohy, a to nezávisle na hodnotě x_0 . Tento případ tak opět odpovídá úloze bez překážky, resp. úloze s překážkou působící na řešení nulovou silou.

Je-li $\tau > 0$, mohou být funkce z (4.22) řešením pouze tehdy, splňují-li $u(x_0) \geq 0$. Vidíme, že umístění překážky, tj. umístění bodu x_0 , je nyní podstatné. Zřejmě ne všechny vlastní funkce Dirichletovy okrajové úlohy nabývají v tomto bodě nulové hodnoty, pokud ano, je libovolný nenulový násobek takové funkce opět řešením. Každou z vlastních funkcí (4.22), která je v bodě $x = x_0$ nenulová, lze vhodným násobkem „naladit“ tak, aby vyhovovala požadavku $u(x_0) > 0$. Pouze *kladné* násobky takové funkce jsou hledaná řešení. Přítomnost překážky se tak projevuje v omezení co do znaménka vlastních funkcí, ačkoli jinak na řešení nepůsobí (ve smyslu ztráty hladkosti).



Obrázek 4.8: Klasická řešení u_1 (černá), u_2 (modrá), u_3 (zelená) úlohy s překážkou umístěnou v bodě $x_0 = \frac{2}{3}$, $\tau > 0$.

Na obrázku 4.8 jsou pro $x_0 = 2/3$ vykresleny vlastní funkce u_1 , u_2 a u_3 z (4.22). První dvě překážku obcházejí a pouze jejich kladné násobky jsou řešením, třetí funkce se překážky dotýká a tak i její záporné násobky zůstávají řešením.

Dodejme, že je-li x_0 racionální číslo, tj. tvaru p/q , $p, q \in \mathbb{N}$, každá funkce z (4.22) s $n = kq$, $k \in \mathbb{N}$, prochází bodem $x = x_0$, a tedy se překážky dotýká. Naopak pro

x_0 iracionální žádná tímto bodem neprochází, dotyk tudíž nemůže nastat. V každém případě však platí, že všechna vlastní čísla $\lambda_n = n^2\pi^2$ úlohy bez překážky (tj. pro $\tau = 0$) jsou také vlastními čísly úlohy s překážkou (pro $\tau > 0$).

4.2.2 Deformovaná řešení

Hledejme nyní taková řešení úlohy (4.17)–(4.21) s $\tau > 0$, pro která platí $u(x_0) < 0$. Tato řešení splňují rovnici (4.18), tj.

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

na intervalech $(0, x_0)$ a $(x_0, 1)$, spolu s okrajovými podmínkami (4.19), (4.20) a mají být podle (4.17) spojitá na celém intervalu $(0, 1)$. Speciálně tedy požadujeme spojitost v bodě x_0 , kterou můžeme vyjádřit ve formě podmínky

$$u(x_0-) = u(x_0+). \quad (4.23)$$

Vzhledem k požadavku $u(x_0) < 0$ má přechodová podmínka (4.21) v tomto případě tvar

$$u'(x_0-) - u'(x_0+) = -\tau u(x_0). \quad (4.24)$$

Odtud je zřejmé, že hledaná řešení nemohou být hladká, jednostranné derivace v bodě x_0 se liší o hodnotu $-\tau u(x_0) > 0$. Z tohoto důvodu je budeme také označovat termínem *deformovaná*, abychom odlišili jejich kvalitativní vlastnosti od klasických řešení z předchozí části.

Protože na obou intervalech $(0, x_0)$, $(x_0, 1)$ uvažujeme stejnou rovnici, mají i příslušné charakteristické rovnice stejný tvar

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Odtud dostáváme

$$r^2 = -\lambda$$

a protože podle Věty 3.11 existuje netriviální řešení dané úlohy pouze pro $\lambda > 0$, jsou kořeny

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$$

ryze imaginární komplexně sdružená čísla. Označíme-li pro jednoduchost

$$\beta := \sqrt{\lambda} > 0,$$

můžeme psát

$$r_{1,2} = \pm\beta i.$$

Fundamentální systém řešení rovnice (4.18) je $\text{FS} = \{\cos \beta x, \sin \beta x\}$. V tomto tvaru jej použijeme pro řešení na intervalu $(0, x_0)$. Na intervalu $(x_0, 1)$ zvolíme fundamentální systém

$$\text{FS}_R = \{\cos \beta(1-x), \sin \beta(1-x)\},$$

který je rovněž tvořen lineárně nezávislými řešeními rovnice (4.18). Ze součtových vzorců pro goniometrické funkce je totiž

$$\cos \beta(1-x) = \cos \beta \cos x + \sin \beta \sin x,$$

$$\sin \beta(1-x) = \sin \beta \cos x - \cos \beta \sin x,$$

což při ztotožnění prvků FS , FS_R se sloupcovými vektory odpovídá lineární transformaci

$$\begin{pmatrix} \cos \beta(1-x) \\ \sin \beta(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{pmatrix}$$

a determinant matice této transformace je zjevně nenulový.

Obecné řešení rovnice (4.18) je tedy

$$u(x) = \begin{cases} u_L(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x & \text{na } (0, x_0) \\ u_R(x) = C \cos \beta(1-x) + D \sin \beta(1-x) & \text{na } (x_0, 1) \end{cases},$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ jsou libovolně volitelné konstanty. Dosazením tohoto řešení do okrajových podmínek (4.19), (4.20) postupně dostáváme

$$u_L(0) = A = 0,$$

$$u_R(1) = C = 0$$

a v důsledku

$$u_L(x) = B \sin \beta x,$$

$$u_R(x) = D \sin \beta(1-x).$$

Podmínka (4.23) vyjadřuje požadavek na spojitost řešení v bodě x_0 . K jejímu splnění je zapotřebí, aby se v tomto bodě rovnaly funkční hodnoty zprava a zleva, tj.

$$B \sin \beta x_0 = D \sin \beta(1-x_0). \quad (4.25)$$

Konečně z podmínky (4.24) vzhledem k derivacím

$$\begin{aligned}u'_L(x) &= B\beta \cos \beta x, \\u'_R(x) &= -D\beta \cos \beta(1-x)\end{aligned}$$

dostáváme po dosazení

$$B\beta \cos \beta x_0 + D\beta \cos \beta(1-x_0) = -\tau B \sin \beta x_0. \quad (4.26)$$

Rovnice (4.25), (4.26) tvoří soustavu o neznámých B a D . Aby existovalo nenulové řešení, musí být determinant matice soustavy roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} \sin \beta x_0 & -\sin \beta(1-x_0) \\ \beta \cos \beta x_0 + \tau \sin \beta x_0 & \beta \cos \beta(1-x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Vyjádřením determinantu a užitím součtového vzorce postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\beta(\sin \beta x_0 \cos \beta(1-x_0) + \cos \beta x_0 \sin \beta(1-x_0)) \\ + \tau \sin \beta x_0 \sin \beta(1-x_0) &= 0 \\ \beta \sin(\beta x_0 + \beta(1-x_0)) + \tau \sin \beta x_0 \sin \beta(1-x_0) &= 0 \\ \beta \sin \beta + \tau \sin \beta x_0 \sin \beta(1-x_0) &= 0.\end{aligned}$$

Z poslední rovnice je

$$\beta \sin \beta = -\tau \sin \beta x_0 \sin \beta(1-x_0) \quad (4.27)$$

a hledáme taková $\beta > 0$, pro která nastane rovnost. To odpovídá hledání průsečíků funkcí

$$\begin{aligned}f(\beta) &:= \beta \sin \beta, \\g(\beta) &:= -\tau \sin \beta x_0 \sin \beta(1-x_0)\end{aligned}$$

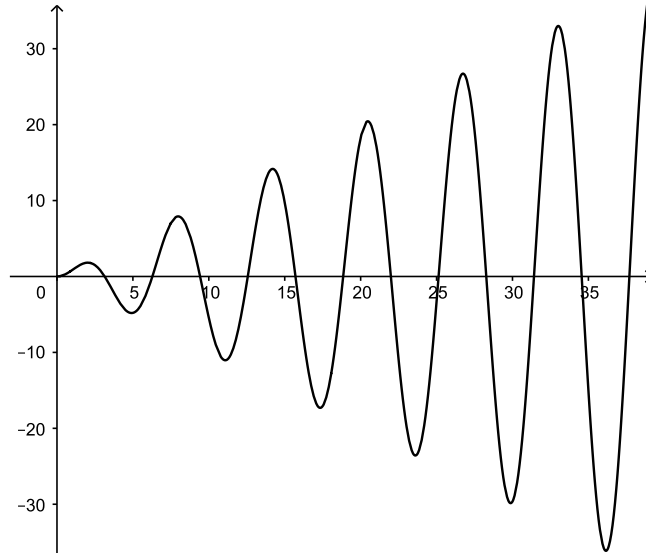
na intervalu $(0, \infty)$.

Funkce f je spojitá a střídá znaménko ve svých kořenech $\beta = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Její průběh je znázorněn na obrázku 4.9. Speciálně je

$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0, \quad f > 0 \text{ na } (0, \pi), \quad f < 0 \text{ na } (\pi, 2\pi). \quad (4.28)$$

Funkce $g : (0, \infty) \rightarrow [-\tau, \tau]$ je spojitá a omezená funkce s množinou nulových bodů

$$\left\{ \frac{k\pi}{x_0}, \frac{k\pi}{1-x_0}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$



Obrázek 4.9: Graf funkce $f(\beta) = \beta \sin \beta$.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme $x_0 \in (0, 1)$ a v předpisu funkce g vystupuje součin funkcí $\sin \beta x_0$ a $\sin \beta(1 - x_0)$, který je v parametru x_0 symetrický vůči bodu $x = 1/2$, můžeme dále bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$. Potom je $1 - x_0 \leq x_0$ a tudíž

$$\frac{k\pi}{x_0} \leq \frac{k\pi}{1 - x_0}, \quad k \in \mathbb{N},$$

přičemž rovnost nastává pouze pro $x_0 = \frac{1}{2}$.

Označme nejmenší kladný kořen funkce g písmenem γ . Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\gamma = \frac{\pi}{x_0}$$

a platí

$$\gamma \in (\pi, 2\pi]. \quad (4.29)$$

Protože se jedná o první kořen funkce g na $(0, \infty)$, je

$$g < 0 \text{ na } (0, \gamma). \quad (4.30)$$

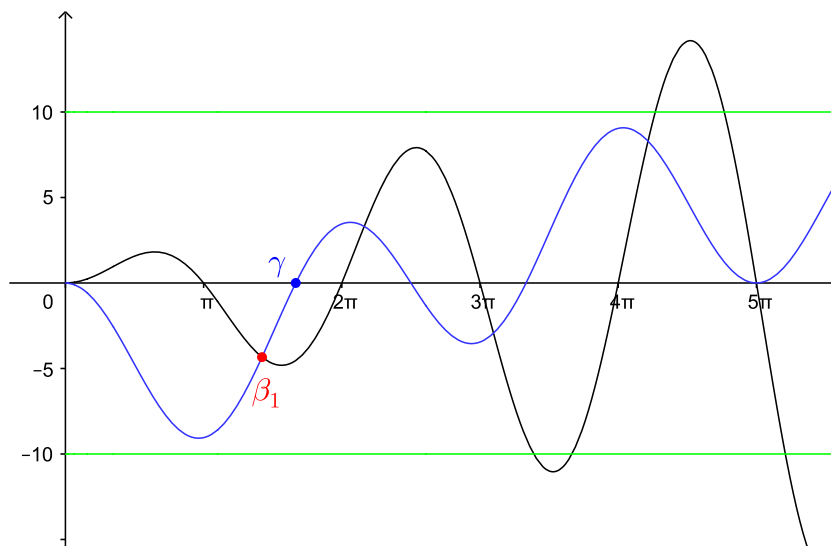
Pokud $x_0 > \frac{1}{2}$, je $\gamma \in (\pi, 2\pi)$. Odtud a z (4.28), (4.30) plyne, že nejmenší kladný průsečík β_1 funkcí f a g splňuje

$$\beta_1 \in (\pi, \gamma), \quad (4.31)$$

viz též obrázek 4.10.

Pro $x_0 = \frac{1}{2}$ je

$$g(\beta) = -\tau \sin^2 \frac{\beta}{2} \leq 0 \quad \text{na } (0, \infty)$$



Obrázek 4.10: Průsečíky funkcí f a g , tj. kořeny rovnice (4.27) pro $x_0 = 0.6$, $\tau = 10$; první průsečík β_1 v intervalu (π, γ)

a $\gamma = 2\pi$ je dvojnásobný kořen funkce g . Je tudíž

$$g(2\pi) = g'(2\pi) = 0 \quad (4.32)$$

a g nabývá v bodě $\beta = 2\pi$ svého maxima. Funkce g je proto na okolí bodu 2π konkávní. Oproti tomu je funkce f , pro kterou je rovněž bod $\beta = 2\pi$ kořenem, na okolí tohoto bodu ryze rostoucí. Díky (4.28) a (4.30) proto i v tomto případě splňuje nejmenší kladný průsečík β_1 funkcí f a g (4.31), bod $\beta = 2\pi$ je jejich druhým průsečíkem, (obrázek 4.11).

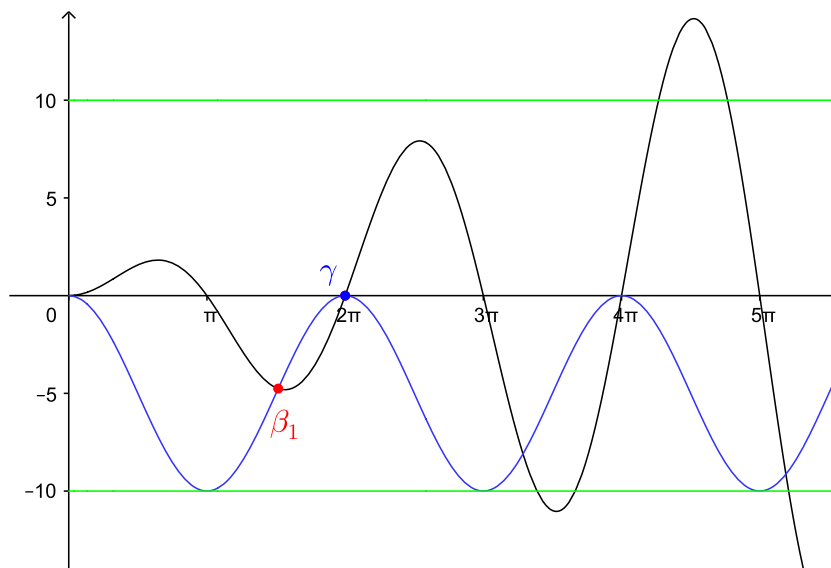
Nezávisle na hodnotě x_0 jsme tak zjistili, že první kořen β_1 se vždy nachází v intervalu (π, γ) . První vlastní číslo úlohy (4.18)–(4.20), (4.23) a (4.24) s $\tau > 0$ je pak

$$\lambda_1 = \beta_1^2 \in (\pi^2, 4\pi^2] .$$

Dále platí, že funkce f prochází body

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right] , \quad \text{resp.} \quad \left[\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, - \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) \right] , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

jedná se o body, ve kterých se funkce $y = f(\beta)$ dotýká přímky $y = \beta$, resp. přímky $y = -\beta$. Jsou to body lokálních maxim, resp. minim funkce f . Je zřejmé, že hodnoty těchto maxim, resp. minim tvoří v absolutní hodnotě rostoucí posloupnost a pro $\beta > \tau$ již leží mimo interval $[-\tau, \tau]$. Jelikož je funkce g omezená, protože její obor hodnot je podmnožinou $[-\tau, \tau]$, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\pi/2 + m\pi > \tau$ a díky spojitosti obou funkcí



Obrázek 4.11: Průsečíky funkcí f a g , tj. kořeny rovnice (4.27) pro $x_0 = 0.5$, $\tau = 10$; první průsečík β_1 v intervalu (π, γ)

tak leží v každém intervalu

$$\left[\frac{\pi}{2} + (m+n)\pi, \frac{3\pi}{2} + (m+n)\pi \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

alespoň jeden kořen (4.27). Dokázali jsme tak, že existuje rostoucí posloupnost $\beta_n \rightarrow +\infty$ průsečíků funkcí f a g , tedy kořenů (4.27). Jejich druhé mocniny tvoří neomezenou rostoucí posloupnost vlastních čísel λ_n úlohy (4.18)–(4.20), (4.23) a (4.24) s $\tau > 0$.

Možné průsečíky funkcí f a g na intervalu $[2\pi, \pi/2 + m\pi]$ nebudeme podrobněji specifikovat, neboť funkce g v závislosti na x_0 mění svůj tvar způsobem, který je pro tento účel obtížně uchopitelný. Podstatný je fakt, že existuje celá posloupnost těchto průsečíků, které pro konkrétní hodnoty τ a x_0 dokážeme numericky najít.

Pokud je β kořenem (4.27) a platí, že $\beta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, existuje netriviální dvojice koeficientů $(B, D) \neq (0, 0)$ — například tvaru

$$(B, D) = \left(B, B \frac{\sin \beta x_0}{\sin \beta(1-x_0)} \right)$$

splňující (4.25), (4.26). Díky existenci celé posloupnosti kořenů β_n rovnice (4.27) víme, že existuje posloupnost vlastních čísel úlohy

$$\lambda_n = \beta_n^2, \tag{4.33}$$

kterým odpovídají vlastní funkce

$$u_n(x) = \begin{cases} B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x & \text{na } (0, x_0) \\ B_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x_0}{\sin \sqrt{\lambda_n} (1-x_0)} \sin \sqrt{\lambda_n} (1-x) & \text{na } (x_0, 1). \end{cases} \quad (4.34)$$

Znaménko konstanty $B_n \neq 0$ je dáno požadavkem

$$u_n(x_0) < 0,$$

tedy

$$B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x_0 < 0.$$

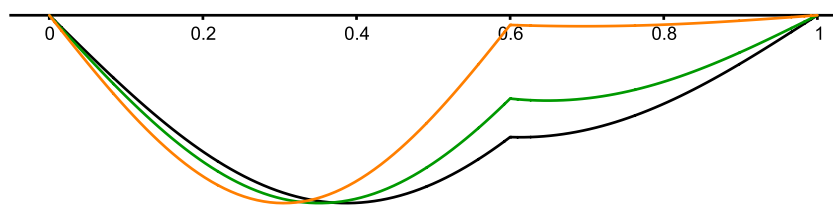
Pokud je $\beta = n\pi$ kořenem (4.27) pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ (takové β existují, právě když je x_0 racionální), je $\lambda_n = n^2\pi^2$ vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je $u_n(x) = \sin n\pi x$. Ta je ale v bodě $x = x_0$ nulová a nespňuje tak požadavek $u(x_0) < 0$. Tyto případy byly diskutovány v části o klasických řešeních.

Na obrázcích 4.12, resp. 4.13 jsou pro tři různé hodnoty τ znázorněny funkce u_1 , resp. u_2 z (4.34) pro překážku umístěnou v bodě $x_0 = 0.6$. Numericky nalezené hodnoty vlastních čísel jsou $\lambda_1 = 16.48$, $\lambda_2 = 43.03$ pro $\tau = 5$, $\lambda_1 = 19.98$, $\lambda_2 = 46.10$ pro $\tau = 10$ a $\lambda_1 = 26.52$, $\lambda_2 = 58.67$ pro $\tau = 100$.

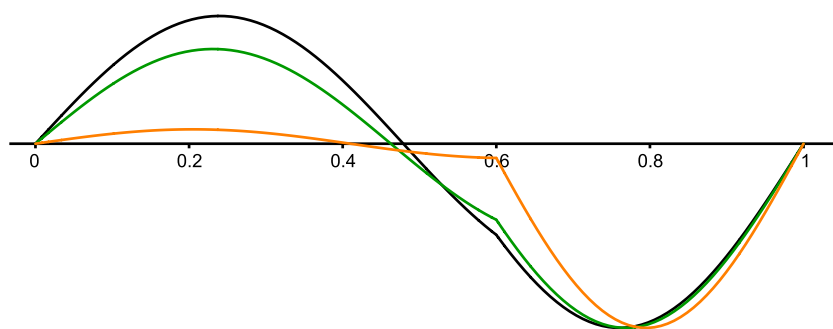
Všimněme si, že při zvětšujícím se τ se po vynormování zmenšuje amplituda na jednom z podintervalů $(x_0, 1)$, resp. $(0, x_0)$, a zůstává jednotková na intervalu opačném. To odpovídá výsledkům z [6], kde je tato úloha řešena pro pevnou překážku v x_0 – na jednom z intervalů $(0, x_0)$, $(x_0, 1)$ je příslušná vlastní funkce nulová, na druhém jde o vlastní funkci homogenní Dirichletovy úlohy. Vlastní čísla úlohy s pevnou překážkou jsou tudíž

$$\lambda_m^L = \frac{n^2\pi^2}{x_0^2}, \quad \lambda_n^R = \frac{n^2\pi^2}{(1-x_0)^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (4.35)$$

Na obrázku 4.14 jsou červeně vykresleny hodnoty vlastních čísel $\lambda_n = n^2\pi^2$, kterým odpovídají nedeformované vlastní funkce, které buď překážku umístěnou v bodě $x_0 = 0.6$ ze správné strany obcházejí nebo se jí jen dotknou. Černě jsou vyneseny větve vlastních čísel z (4.33), tj. větve kvadrátů kořenů rovnice (4.27). Zeleně jsou pro srovnání vynešeny ještě hodnoty vlastních funkcí úlohy s pevnou překážkou. Obdobně jako v sekci s překážkou na kraji intervalu je patrné, že černé křivky vycházejí vlevo pro $\tau = 0$ z červených a blíží se pro rostoucí τ křivkám modrým. Vlastnímu číslu $\lambda = 25\pi^2 \approx 250$ odpovídá vlastní funkce, která se překážky dotýká, má dva nulové body na intervalu



Obrázek 4.12: Řešení u_1 úlohy s překážkou v $x_0 = 0.6$ pro $\tau = 5$ (černá), $\tau = 10$ (zelená), $\tau = 100$ (oranžová)

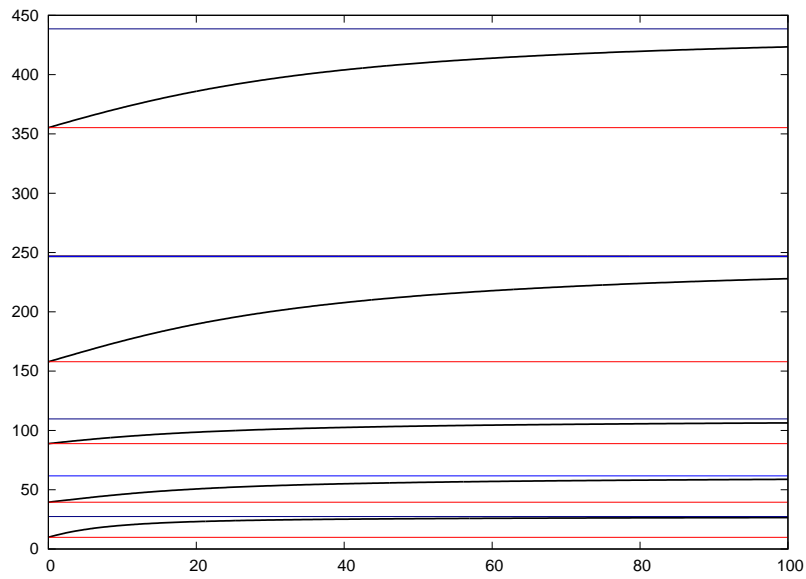


Obrázek 4.13: Řešení u_2 úlohy s překážkou v $x_0 = 0.6$ pro $\tau = 5$ (černá), $\tau = 10$ (modrá), $\tau = 100$ (oranžová)

$(0, 0.6)$ a jeden na intervalu $(0.6, 1)$. Toto λ je zároveň vlastním číslem λ_5 z (4.33), tedy $\beta_5 = 5\pi$ je kořenem (4.27) a příslušná vlastní funkce je u_5 z (4.22). Navíc,

$$\lambda_5 = \lambda_3^L = \lambda_2^R.$$

To je dáno tím, že je překážka umístěna v racionálním bodě $x_0 = 0.6$, který rozděluje interval $(0, 1)$ v poměru $3 : 2$. Pokud by x_0 bylo iracionální číslo, žádná vlastní čísla pro Dirichletovy úlohy na jednotlivých podintervalech by nikdy nesplynula.



Obrázek 4.14: Závislost vlastních čísel λ na τ . Černě jsou vykresleny souvislé větve vlastních čísel z (4.33), červeně jsou vyznačeny vlastní čísla $\lambda_n = n^2\pi^2$, modře hodnoty vlastních čísel z (4.35); $x_0 = 0.6$

Kapitola 5

Řešení úlohy se souvislou překážkou

Hledejme nyní řešení rovnice

$$u \in H : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 (\lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0,1]}(x)u^-(x))v(x) dx = 0 \quad \forall v \in H,$$

kde $\tau \geq 0$, $x_0 \in (0, 1)$ a $H = W_0^{1,2}(0, 1)$, tj. operátorové rovnice (3.1) konkretizované v sekci 3.2.3 pro nelineární operátor \mathcal{B} , který odpovídá působení jednostranné pružné překážky na intervalu $[x_0, 1) \subset (0, 1)$.

Tato řešení budeme hledat jakožto řešení jistých diferenciálních rovnic druhého řádu s okrajovými a přechodovými podmínkami, které jsou s původní úlohou ekvivalentní. Naším cílem bude najít základní typy řešení, které demonstrují charakteristiky úlohy. Obecnější tvary řešení pak můžeme obdržet rozdělením problému na dílčí části, přičemž řešení každé z nich bude odpovídat některému z níže uvedených případů.

Typy řešení rozlišíme podle *deformace* a *množiny kontaktu* s překážkou. Za deformované řešení přitom budeme považovat každé řešení, které je maximálně třídy $C^2([0, 1])$. V této notaci tak může být i klasické řešení deformované, jestliže jeho třetí derivace není spojitá na $[0, 1]$. Množinou kontaktu řešení s překážkou rozumíme množinu

$$K = \{x \in (0, 1) : u(x) \leq 0\} \cap [x_0, 1).$$

Jestliže $K = \emptyset$, řešení nemá s překážkou kontakt. Pokud je $K = \{x_0\}$, říkáme, že řešení se překážky *dotýká*. *Plný kontakt* nastává, je-li $K = [x_0, 1)$ a $u(x) < 0$ pro všechna $x \in [x_0, 1)$. Množina kontaktu může být rovněž vlastní částí překážky. Potom ji budeme označovat jako *množinu s volnou hranicí*. Jako nejjednodušší případ vyčleníme souvislou množinu $K = [\alpha, 1)$, $\alpha \in (x_0, 1)$.

5.1 Nedeformovaná řešení

Podle Věty 3.16 je řešení u uvažované integrální rovnice pro $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$ třídy $C^2([0, 1])$ a splňuje diferenciální rovnici

$$u''(x) + \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (5.1)$$

spolu s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (5.2)$$

Vzhledem k tomu, jak jsme zavedli pojem deformace, nemusí uvedená regularita nutně znamenat, že se jedná o nedeformovaná řešení. Přepíšeme-li rovnici výše do tvaru

$$-u''(x) = \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x)$$

a uvědomíme-li si, že člen s $\tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x)$ je za uvedených předpokladů spojitý na $(0, 1)$, nicméně není obecně diferencovatelný (například pokud funkce u mění na intervalu $(x_0, 1)$ znaménko), dojdeme k závěru, že nedeformovaná řešení lze obdržet tehdy, je-li $\tau = 0$ nebo $u(x_0) \geq 0$ a $u(x) > 0$ na intervalu $(x_0, 1)$.

V obou uvedených případech je nelineární člen v rovnici (5.1) nulový, dostáváme tak úlohu na vlastní čísla

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (5.3)$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami (5.2), která má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_n = n^2 \pi^2$ a jim odpovídajících vlastní funkcí

$$u_n(x) = \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je-li $\tau = 0$, je libovolný násobek vlastní funkce rovněž vlastní funkcí. Vidíme také, že nalezená řešení jsou třídy $C^\infty([0, 1])$, překážka je nedeformuje. Příklad $\tau = 0$ tak opět odpovídá úloze bez překážky.

Pro $\tau > 0$ musí nedeformovaná řešení splňovat podmínku $u(x) > 0$ na $(x_0, 1)$. Rozlišíme je nyní podle typu kontaktní množiny.

5.1.1 Řešení bez kontaktu s překážkou

Nechť $\tau > 0$ a $x_0 \in (0, 1)$. Hledáme řešení úlohy (5.3), (5.2) splňující $u(x) > 0$ pro $x \in [x_0, 1)$. V tomto případě je $K = \emptyset$ a řešení nemají s překážkou kontakt, jinými

slovy překážku obchází. Zřejmě je podstatné její umístění, protože bod $x = x_0$ vystupuje v přidané podmínce. Jelikož je x_0 vstupním parametrem úlohy a může nabývat libovolné hodnoty z intervalu $(0, 1)$, zjednodušíme si hledání požadovaných řešení pomocí následující úvahy.

Každé řešení této úlohy splňující danou podmínku je i řešením úlohy bez překážky, neboť rovnice i okrajové podmínky zůstávají stejné. Ptejme se tedy, pro jaké hodnoty x_0 bude některá z vlastních funkcí úlohy bez překážky splňovat podmínku kladných hodnot na intervalu $[x_0, 1)$. Funkce

$$u_1(x) = \sin \pi x$$

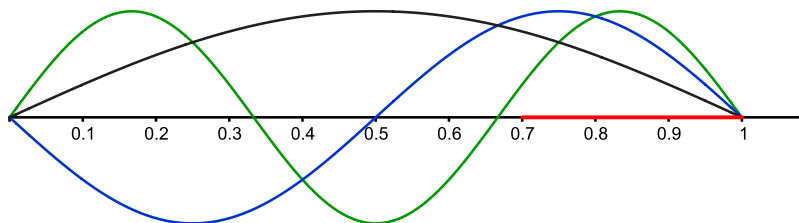
spolu se všemi svými *kladnými* násobky obejde libovolně umístěnou překážku, tj. je řešením nezávisle na hodnotě x_0 . Záporné násobky řešením nejsou. Pro $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ bude řešením také funkce

$$u_2(x) = -\sin 2\pi x,$$

stejně jako všechny její *kladné* násobky. Podobně pro $x_0 \in (\frac{2}{3}, 1)$ dostáváme další řešení

$$u_3(x) = \sin 3\pi x$$

a libovolný *kladný* násobek tohoto řešení je opět řešením. Bude-li překážka umístěna například na intervalu $[0.7, 1)$, jsou hledaná řešení funkce u_1, u_2, u_3 . Situace je znázorněná na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Funkce u_1, u_2, u_3 obcházející překážku umístěnou na intervalu $[0.7, 1)$.

Platí tedy, že funkce

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \sin n\pi x, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (5.4)$$

resp. všechny její kladné násobky, splňuje podmínku $u(x) > 0$ na $[x_0, 1)$ za předpokladu, že

$$x_0 > \frac{n-1}{n},$$

tj. bod x_0 se nachází za posledním nulovým bodem funkce u_n v intervalu $(0, 1)$.

Všimněme si, že pro x_0 z intervalu $(0, \frac{1}{2}]$ existuje (až na kladný násobek) jediné řešení, a tím je funkce u_1 . Pro $x_0 \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ máme již dvě řešení u_1, u_2 . Zobecněním dojdeme k závěru, že zvětšováním hodnoty x_0 vzrůstá počet řešení při překročení každé z hodnot $\frac{n-1}{n}$, $n = 2, 3, 4, \dots$, které odpovídají bodům, ve kterých příslušná funkce u_n naposledy mění znaménko. Nyní tak můžeme provést diskusi řešení vzhledem k parametru x_0 . Interval $(0, 1)$ lze nahlížet jako systém navzájem disjunktních intervalů

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right], \quad n \in \mathbb{N},$$

a platí, že je-li $x_0 \in I_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, existuje (až na kladný násobek) právě n řešení tvaru

$$u_k(x) = (-1)^{k+1} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

které nemají s překázkou žádný kontakt.

Vidíme tak, že ačkoli nezáleží na síle překážky τ , neboť na řešení fakticky nepůsobí, projeví se její přítomnost omezením násobků vlastních funkcí úlohy, které jsou stejné jako pro úlohu bez překážky. Počet i tvar řešení je dán hodnotou parametru $x_0 \in (0, 1)$. Čím větší je tato hodnota, tím více řešení dostáváme.

5.1.2 Řešení dotýkající se překážky

Zbývá vyřešit případ, kdy $\tau > 0$, $u(x_0) = 0$ a $u(x) > 0$ pro $x \in (x_0, 1)$, tj. kdy $K = \{x_0\}$. Řešení úlohy (5.3), (5.2) tohoto tvaru se tedy překážky umístěné na intervalu $[x_0, 1)$, $x_0 > 0$, dotýkají.

S využitím poznatků z předchozí části snadno nahlédneme, že funkce

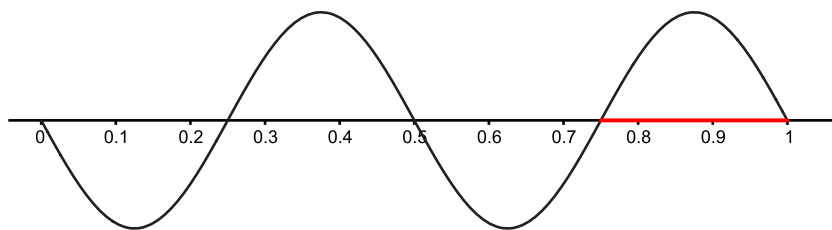
$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \sin n\pi x, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

spolu se všemi svými *kladnými* násobky má v bodě x_0 dotyk s překázkou, jestliže platí

$$x_0 = \frac{n-1}{n},$$

tj. krajní bod překážky splývá s bodem, ve kterém daná funkce naposledy mění znaménko. Protože funkce

$$u_1(x) = \sin \pi x,$$



Obrázek 5.2: Funkce u_4 dotýkající se překážky s krajním bodem $x_0 = \frac{3}{4}$.

uvažujeme-li pouze její kladné násobky, nabývá na intervalu $(0, 1)$ pouze kladných hodnot, nemůže zřejmě vyhovovat požadavku $u(x_0) = 0$.

Označme P množinu

$$P = \left\{ \frac{n-1}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \right\}.$$

Je-li $x_0 \in P$ pro nějaké $n = 2, 3, 4, \dots$, jsou hledaná řešení všechny kladné násobky funkce

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \sin n\pi x.$$

Jestliže $x_0 \in (0, 1) \setminus P$, řešení požadovaného typu neexistuje.

5.2 Deformovaná řešení

Řešení integrální rovnice, která jsme doposud našli, byla vždy třídy $C^\infty([0, 1])$. To je zřejmě speciální případ. Podle Věty 3.16 totiž pro řešení u uvažované integrální rovnice obecně platí

$$u \in C^1([0, 1]) \cap C^2([0, x_0]) \cap C^2([x_0, 1])$$

a pro $\tau > 0$ je pouze při splnění podmínky $u(x_0) \geq 0$ řešení třídy C^2 na celém intervalu $[0, 1]$. Dále je podle téže věty u řešením diferenciální rovnice

$$u''(x) + \lambda u(x) + \tau \chi_{[x_0, 1]}(x) u^-(x) = 0 \quad \text{na } (0, 1) \setminus \{x_0\}, \quad (5.5)$$

kde $\tau > 0$, s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0, \quad (5.6)$$

$$u(1) = 0. \quad (5.7)$$

Protože v bodě x_0 nemusí existovat druhá derivace, je tento bod z intervalu $(0, 1)$ explicitně vyloučen. Vlastně tak máme dvě rovnice

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, x_0), \quad (5.8)$$

$$u''(x) + \lambda u(x) + \tau u^-(x) = 0 \quad \text{na } (x_0, 1) \quad (5.9)$$

propojené navzájem přechodovými podmínkami

$$u(x_0-) = u(x_0+), \quad (5.10)$$

$$u'(x_0-) = u'(x_0+), \quad (5.11)$$

neboť řešení u má být na $[0, 1]$ hladké.

Konečně připomeňme podmínku

$$u''(x_0-) - u''(x_0+) = \tau u^-(x_0),$$

rovněž vystupující ve Větě 3.16. Podle Poznámky 3.18 je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou spojitosti v bodě x_0 , proto ji při výpočtech nebudeme používat. Přesto ji zde však nyní uvádíme, protože je z ní, na rozdíl od podmínky spojitosti, vidět závislost velikosti zlomu druhé derivace na hodnotě τ .

Řešení integrální rovnice (3.20) tedy budeme hledat jakožto řešení úlohy dané diferenciální rovnicí (5.5), resp. rovnicemi (5.8), (5.9), které splňuje okrajové podmínky (5.6), (5.7) a přechodové podmínky (5.10), (5.11). Podle Věty 3.20 jsou totiž obě úlohy ekvivalentní. Je-li $u(x_0) \geq 0$, je rovnice (5.5) splněna na celém intervalu $(0, 1)$ a víme, že řešení je třídy $C^2([0, 1])$, čehož budeme rovněž využívat.

Tuto úlohu zřejmě není možné řešit, aniž bychom na začátku předpokládali alespoň přibližný tvar funkce u . První rozlišení provedeme vzhledem ke znaménku $u(x_0)$. Kvůli nelineárnímu členu s u^- vystupujícímu v rovnici je dále podstatný průběh funkce u na intervalu $(x_0, 1)$. Střídá-li zde znaménko, dostáváme rovnice

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } M^+,$$

resp.

$$u''(x) + \lambda u(x) - \tau u(x) = 0 \quad \text{na } M^-,$$

kde M^+ , resp. M^- jsou takové podmnožiny intervalu $(x_0, 1)$, na kterých funkce u nabývá pouze kladných, resp. záporných hodnot.

Prostudujeme nyní podrobněji dva nejjednodušší případy, které povedou vždy na řešení pouze dvou diferenciálních rovnic.

5.2.1 Řešení s plným kontaktem s překážkou

Zaměříme se v tuto chvíli na řešení s kontaktní množinou $K = [x_0, 1)$, tj. na taková, která jsou na intervalu $[x_0, 1)$ záporná. Speciálně pro ně platí $u(x_0) < 0$, a tedy v tomto bodě nemají druhou derivaci. Budeme tak řešit úlohu danou rovnicemi (5.8), (5.9) a podmínkami (5.6), (5.7), (5.10), (5.11), přičemž rovnici (5.9) můžeme díky předpokládanému charakteru řešení psát ve tvaru

$$u''(x) + (\lambda - \tau)u(x) = 0 \quad \text{na } (x_0, 1). \quad (5.12)$$

Kořeny charakteristické rovnice pro (5.8) jsou

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda},$$

pro (5.12) potom

$$R_{1,2} = \pm\sqrt{\tau - \lambda}.$$

Jaké fundamentální systémy na příslušných intervalech obdržíme, bude záviset na hodnotě výrazů pod odmocninami. Podle Věty 3.19 existuje netriviální řešení úlohy pouze pro $\lambda > 0$. Na $(0, x_0)$ tak vždy dostáváme fundamentální systém

$$\text{FS}_L = \left\{ \cos \sqrt{\lambda}x, \sin \sqrt{\lambda}x \right\},$$

tj. obecné řešení

$$u_L(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, x_0],$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Vzhledem k okrajové podmínce (5.6) musí být $A = 0$, odkud

$$u_L(x) = B \sin \sqrt{\lambda}x, \quad x \in [0, x_0], \quad B \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

V případě rovnice na intervalu $[x_0, 1]$ záleží na znaménku rozdílu $\tau - \lambda$. Rozlišíme nyní jednotlivé možnosti.

Případ $0 < \lambda < \tau$

Hledejme nejprve vlastní čísla $\lambda \in (0, \tau)$. Protože $\tau - \lambda > 0$, jsou kořeny charakteristické rovnice pro (5.12) různá reálná čísla. Označíme-li pro jednoduchost

$$R := \sqrt{\tau - \lambda},$$

můžeme psát

$$R_{1,2} = \pm R, \quad R > 0,$$

a FS = $\{e^{Rx}, e^{-Rx}\}$. Místo tohoto fundamentálního systému použijeme systém

$$\text{FS}_R = \{e^{R(1-x)}, e^{-R(1-x)}\},$$

který lze získat z původního pomocí lineární transformace

$$\begin{aligned} e^{R(1-x)} &= e^R e^{-Rx} \\ e^{-R(1-x)} &= e^{-R} e^{Rx}. \end{aligned}$$

Máme tak obecné řešení

$$u_R(x) = C e^{R(1-x)} + D e^{-R(1-x)}, \quad x \in [x_0, 1], \quad C, D \in \mathbb{R},$$

jehož dosazením do okrajové podmínky (5.7) dostáváme, že $D = -C$, a tedy

$$u_R(x) = C (e^{R(1-x)} - e^{-R(1-x)}), \quad x \in [x_0, 1], \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Podle podmínek (5.10), (5.11) má dále platit

$$\begin{aligned} u_L(x_0) &= u_R(x_0), \\ u'_L(x_0) &= u'_R(x_0), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} B \sin \sqrt{\lambda} x_0 &= C (e^{R(1-x_0)} - e^{-R(1-x_0)}), \\ B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 &= -CR (e^{R(1-x_0)} + e^{-R(1-x_0)}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

což je lineární soustava dvou rovnic pro dvě neznámé B a C . Ta má netriviální řešení, právě když

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} x_0 & - (e^{R(1-x_0)} - e^{-R(1-x_0)}) \\ \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 & R (e^{R(1-x_0)} + e^{-R(1-x_0)}) \end{vmatrix} = 0$$

neboli

$$R \sin \sqrt{\lambda} x_0 (e^{R(1-x_0)} + e^{-R(1-x_0)}) + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 (e^{R(1-x_0)} - e^{-R(1-x_0)}) = 0. \quad (5.16)$$

Protože dle předpokladů platí $R > 0$, $\lambda > 0$ a $x_0, 1 - x_0 \in (0, 1)$, je součet i rozdíl exponenciál v závorkách vždy kladný. Navíc, kdyby $\sin \sqrt{\lambda} x_0 = 0$, pak by z rovnice (5.16) musel být i $\cos \sqrt{\lambda} x_0 = 0$, což není možné. Proto lze (5.16) ekvivalentně přepsat do tvaru

$$-\sqrt{\lambda} \cotg \sqrt{\lambda} x_0 = \sqrt{\tau - \lambda} \coth \left(\sqrt{\tau - \lambda} (1 - x_0) \right). \quad (5.17)$$

Vlastní čísla $\lambda \in (0, \tau)$ jsou kořeny této nelineární rovnice. Jedná se o průsečíky funkcí

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= -\sqrt{\lambda} \cotg \sqrt{\lambda} x_0, \\ g(\lambda) &= \sqrt{\tau - \lambda} \coth(\sqrt{\tau - \lambda}(1 - x_0)). \end{aligned}$$

Funkce f je spojitá a rostoucí na každém souvislém podintervalu svého definičního oboru

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k\pi}{x_0} \right)^2, \left(\frac{(k+1)\pi}{x_0} \right)^2 \right)$$

a nabývá kladných hodnot na každém intervalu

$$I_k^+ := \left(\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{x_0} \right)^2, \left(\frac{(k+1)\pi}{x_0} \right)^2 \right), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

přičemž

$$f \left(\left(\frac{\pi/2 + k\pi}{x_0} \right)^2 \right) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow ((k+1)\pi/x_0)^2_-} f(\lambda) = +\infty, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

tedy f zobrazí každý interval I_k^+ , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, spojitě a vzájemně jednoznačně na interval $(0, +\infty)$.

Funkce $g(\lambda)$ je spojitá, kladná a klesající na svém definičním oboru $D(g) = (0, \tau)$ a lze ukázat, že

$$\lim_{\lambda \rightarrow \tau_-} g(\lambda) = \frac{1}{1 - x_0}.$$

Odtud vyplývá, že v každém intervalu I_k^+ , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, který celý leží v $(0, \tau)$, se nachází právě jeden kořen rovnice (5.17).

Zabývejme se nyní otázkou, kdy existuje alespoň jeden kořen této rovnice, tj. kdy se funkce f a g protnou alespoň v jednom bodě. K tomu musí být splněna podmínka

$$\tau > \tau_{\min},$$

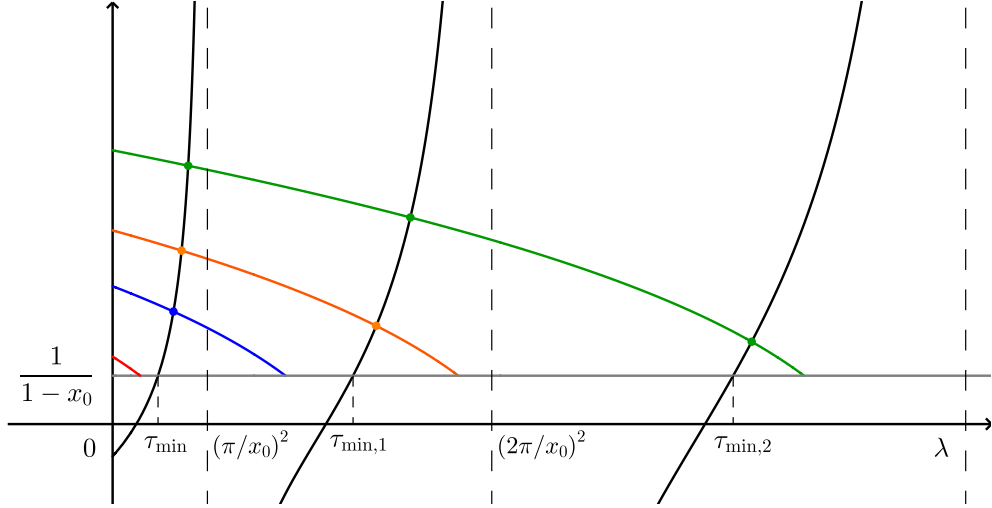
kde τ_{\min} je nejmenší kladný kořen rovnice

$$-\sqrt{\tau} \cotg \sqrt{\tau} x_0 = \frac{1}{1 - x_0}. \quad (5.18)$$

Je-li toto splněno, mohou existovat i další kořeny v intervalech I_k^+ , $k \in \mathbb{N}$, a to právě když

$$\tau > \tau_{\min, k},$$

kde $\tau_{\min, k}$ je kořen rovnice (5.18) na intervalu I_k^+ . Situace je pro $x_0 = 0.6$ a čtyři různé hodnoty parametru τ znázorněna na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Funkce f – černá; funkce g – červeně pro $\tau = 8$, modře pro $\tau = 50$, oranžově pro $\tau = 100$ a zeleně pro $\tau = 200$; $x_0 = 0.6$

Zjistili jsme tedy, že pro $\tau > \tau_{\min}$, kde hodnota τ_{\min} závisí na x_0 , existuje alespoň jeden kořen uvažované nelineární rovnice (5.17), tedy alespoň jedno kladné vlastní číslo naší úlohy splňující $\lambda < \tau$. Je-li navíc $\tau \in (\tau_{\min,k}, \tau_{\min,k+1})$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde $\tau_{\min,0} = \tau_{\min}$, obdržíme právě $k + 1$ vlastních čísel. Ty označíme λ_n , $n = 1, \dots, k + 1$ a bude platit, že $\lambda_n \in I_{n-1}^+$.

Vyjádříme-li C pomocí první rovnice z (5.15) jako

$$C = B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_0}{e^{\sqrt{\tau-\lambda}(1-x_0)} - e^{-\sqrt{\tau-\lambda}(1-x_0)}} = B \frac{2 \sin \sqrt{\lambda} x_0}{\sinh(\sqrt{\tau-\lambda}(1-x_0))},$$

jsou pak pro daná x_0 a τ vlastní funkce u_n odpovídající vlastnímu číslu λ_n

$$u_n(x) = \begin{cases} B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, & x \in [0, x_0], \\ B_n \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x_0}{\sinh(\sqrt{\tau-\lambda}(1-x_0))} \sinh(\sqrt{\tau-\lambda}(1-x)), & x \in [x_0, 1]. \end{cases} \quad (5.19)$$

Znaménko koeficientu B_n je přitom dáno vztahem

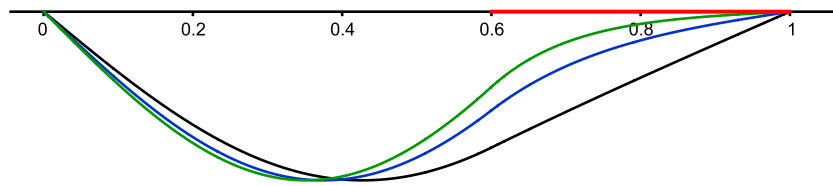
$$B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x_0 < 0.$$

Protože $x_0 \in (0, 1)$ a funkce \sinh je pro kladné hodnoty argumentu kladná, mají všechny funkce u_n požadovaný profil, tj. nemění $[x_0, 1)$ znaménko a množinou kontaktu je celý tento interval.

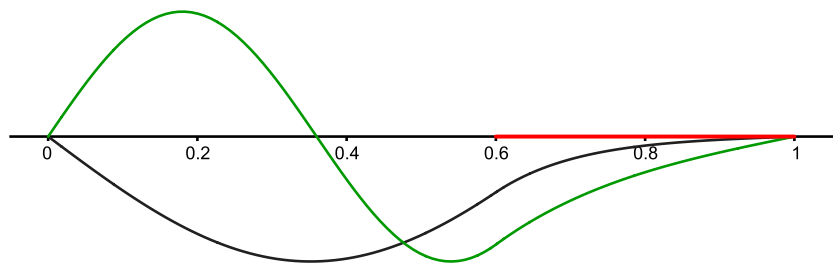
Na obrázku 5.4 jsou pro překážku umístěnou na intervalu $[0.6, 1)$ vykresleny vlastní funkce u_1 dané předpisem (5.19) pro tři různé hodnoty parametru τ , konkrétně pro

$\tau = 15$, $\tau = 50$ a $\tau = 100$. Numerickým řešením rovnice (5.17) jsme obdrželi vlastní čísla $\lambda_1 = 13.5$, $\lambda_1 = 17.59$ a $\lambda_1 = 19.94$ odpovídající (v tomto pořadí) uvedeným hodnotám τ .

Pro $\tau = 100$ existuje ještě jedno vlastní číslo splňující $\lambda < \tau$, a to $\lambda_2 = 76.24$. Odpovídající vlastní funkce u_2 je spolu s první vlastní funkcí u_1 znázorněna na obrázku 5.5. Pro $\tau = 15$ a $\tau = 50$ vyhovuje této podmínce pouze první vlastní číslo.



Obrázek 5.4: První vlastní funkce u_1 úlohy pro $\tau = 15$ (černá), $\tau = 50$ (modrá) a $\tau = 100$ (zelená); $x_0 = 0.6$



Obrázek 5.5: Vlastní funkce u_1 (černá), u_2 (zelená) úlohy s $\tau = 100$ a $x_0 = 0.6$

Případ $\lambda = \tau$

V této části budeme vlastně hledat speciální hodnoty parametru τ , pro které je $\lambda = \tau$ vlastním číslem úlohy (5.6)–(5.12). V dalším tak budeme neznámou označovat τ , nikoli λ .

Charakteristická rovnice pro (5.12) má za předpokladu $\lambda = \tau$ dvojnásobný kořen $R = 0$. Na pravém podintervalu tak můžeme zvolit fundamentální systém

$$\text{FS}_R = \{1, 1 - x\},$$

kde funkce $1, 1 - x$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (5.12). Dostáváme tedy obecné

řešení

$$u_R(x) = C(1 - x) + D, \quad x \in [x_0, 1],$$

přičemž $C, D \in \mathbb{R}$ jsou libovolně volitelné konstanty. Má-li u_R splňovat okrajovou podmínku (5.7), musí být zřejmě $D = 0$, čímž se předpis zjednoduší na

$$u_R(x) = C(1 - x), \quad x \in [x_0, 1], \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tohoto řešení do podmínek (5.10), (5.11) (připomeňme, že na intervalu $[0, x_0]$ stále uvažujeme obecné řešení (5.13)), obdržíme pro neznámé koeficienty B, C systém rovnic

$$\begin{aligned} B \sin \sqrt{\tau} x_0 &= C(1 - x_0), \\ B \sqrt{\tau} \cos \sqrt{\tau} x_0 &= -C. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Netriviální řešení $(B, C) \neq (0, 0)$ existuje tehdy a jen tehdy, je-li determinant soustavy roven nule, tj. platí-li

$$\sin \sqrt{\tau} x_0 + (1 - x_0) \sqrt{\tau} \cos \sqrt{\tau} x_0 = 0. \tag{5.21}$$

Vzhledem k předpokladu $\sin \sqrt{\tau} x_0 < 0$ je z rovnice výše $\cos \sqrt{\tau} x_0 \neq 0$, můžeme ji tedy tímto členem vydělit a ekvivalentně psát

$$\operatorname{tg} \sqrt{\tau} x_0 = -(1 - x_0) \sqrt{\tau}, \tag{5.22}$$

resp. při označení $\beta = \sqrt{\tau}$

$$\operatorname{tg} \beta x_0 = -(1 - x_0) \beta.$$

Na levé straně je funkce tangens v proměnné β s periodou $\frac{\pi}{x_0}$, na pravé straně je klesající lineární funkce v téže proměnné, která prochází počátkem a je záporná pro $\beta > 0$. Existuje tudíž posloupnost kladných kořenů této rovnice

$$\beta_k \in \left(\frac{\pi}{2x_0} + (k-1) \frac{\pi}{x_0}, \frac{\pi}{x_0} + (k-1) \frac{\pi}{x_0} \right) = \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{x_0}, \frac{k\pi}{x_0} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

resp. kořenů (5.22)

$$\tau_k \in \left(\left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{x_0} \right)^2, \left(\frac{k\pi}{x_0} \right)^2 \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Je-li pro dané $x_0 \in (0, 1)$ a pro nějaké k přirozené $\tau = \tau_k$, existuje vlastní číslo $\lambda = \tau_k$.

Vyjádříme-li konstantu C z první rovnice (5.20), je příslušná vlastní funkce

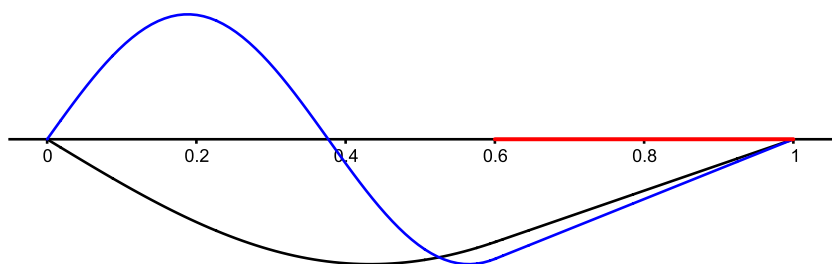
$$u(x) = \begin{cases} B \sin \sqrt{\tau_k} x, & x \in [0, x_0], \\ B \frac{\sin \sqrt{\tau_k} x_0}{1 - x_0} (1 - x), & x \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

Znaménko koeficientu B je opět dáno požadavkem

$$B \sin \sqrt{\tau_k} x_0 < 0.$$

Díky tomu snadno nahlédneme, že na intervalu $[x_0, 1)$ je toto řešení u vždy záporné, má tedy s překážkou plný kontakt.

Pro $x_0 = 0.6$ jsme numericky našli první dva kořeny $\tau_1 = 13.14$, $\tau_2 = 69.55$ ne-lineární rovnice (5.22), tj. hodnoty parametru τ , pro které existuje vlastní číslo úlohy $\lambda = \tau$. Příslušné vlastní funkce jsou vykresleny na obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: Vlastní funkce úlohy s $\tau = 13.14$, resp. s $\tau = 69.55$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = \tau = 13.14$ (černá), resp. $\lambda = \tau = 69.55$ (modrá); $x_0 = 0.6$

Případ $\lambda > \tau$

Zabývejme se nyní hledáním vlastních čísel uvažované úlohy (5.6)–(5.12), pro která platí $\lambda > \tau$. Kořeny charakteristické rovnice pro (5.12) jsou v tomto případě komplexně sdružená ryze imaginární čísla

$$R_{1,2} = \pm \sqrt{\tau - \lambda} = \pm i \sqrt{\lambda - \tau}.$$

Můžeme tedy (podobně jako v sekci 4.2.2) zvolit na intervalu $[x_0, 1]$ fundamentální systém

$$\text{FS}_R = \left\{ \cos \left(\sqrt{\lambda - \tau} (1 - x) \right), \sin \left(\sqrt{\lambda - \tau} (1 - x) \right) \right\},$$

který dává obecné řešení tvaru

$$u_R(x) = C \cos \left(\sqrt{\lambda - \tau} (1 - x) \right) + D \sin \left(\sqrt{\lambda - \tau} (1 - x) \right), \quad x \in [x_0, 1],$$

pro nějaké konstanty $C, D \in \mathbb{R}$. Z podmínky (5.7) je

$$u_R(1) = C = 0,$$

odkud

$$u_R(x) = D \sin \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x) \right), \quad x \in [x_0, 1], \quad D \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li nyní funkci u_R danou tímto předpisem spolu s funkcí u_L z (5.13) do podmínek (5.10), (5.11), dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} B \sin \sqrt{\lambda} x_0 &= D \sin \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right), \\ B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 &= -D \sqrt{\lambda - \tau} \cos \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

pro neznámé koeficienty B a D . Tento systém má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} x_0 & -\sin \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) \\ \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 & \sqrt{\lambda - \tau} \cos \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$\sqrt{\lambda - \tau} \sin \sqrt{\lambda} x_0 \cos \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_0 \sin \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) = 0.$$

Díky předpokladům $\sin \sqrt{\lambda} x_0 < 0$ a $\sin \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right) < 0$ (hledané řešení musí být v bodě x_0 záporné, jestliže má mít s překážkou plný kontakt) můžeme tuto rovnici ekvivalentně zapsat jako

$$-\sqrt{\lambda} \cotg \sqrt{\lambda} x_0 = \sqrt{\lambda - \tau} \cotg \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right). \quad (5.24)$$

Na levé straně je stejná funkce f jako v (5.17), jejíž vlastnosti byly popsány v části o vlastních číslech $\lambda < \tau$, na pravé straně je funkce

$$h(\lambda) = \sqrt{\lambda - \tau} \cotg \left(\sqrt{\lambda - \tau}(1 - x_0) \right).$$

Podobně jako funkce f je i h spojitá, avšak klesající na každém souvislém podintervalu

$$J_{k,\tau} := \left(\left(\frac{k\pi}{1-x_0} \right)^2 + \tau, \left(\frac{(k+1)\pi}{1-x_0} \right)^2 + \tau \right), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

svého definičního oboru a platí pro ni

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \tau_+} h(\lambda) &= \frac{1}{1-x_0} > 0, & \lim_{\lambda \rightarrow (\pi/(1-x_0))^2 + \tau_-} h(\lambda) &= -\infty, \\ \lim_{\lambda \rightarrow (k\pi/(1-x_0))^2 + \tau_+} h(\lambda) &= +\infty, & \lim_{\lambda \rightarrow ((k+1)\pi/(1-x_0))^2 + \tau_-} h(\lambda) &= -\infty, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} f(\lambda) = -\frac{1}{x_0} < 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow (\pi/x_0)_-^2} f(\lambda) = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow (k\pi/x_0)_+^2} f(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow ((k+1)\pi/x_0)_-^2} f(\lambda) = +\infty, \quad k \in \mathbb{N},$$

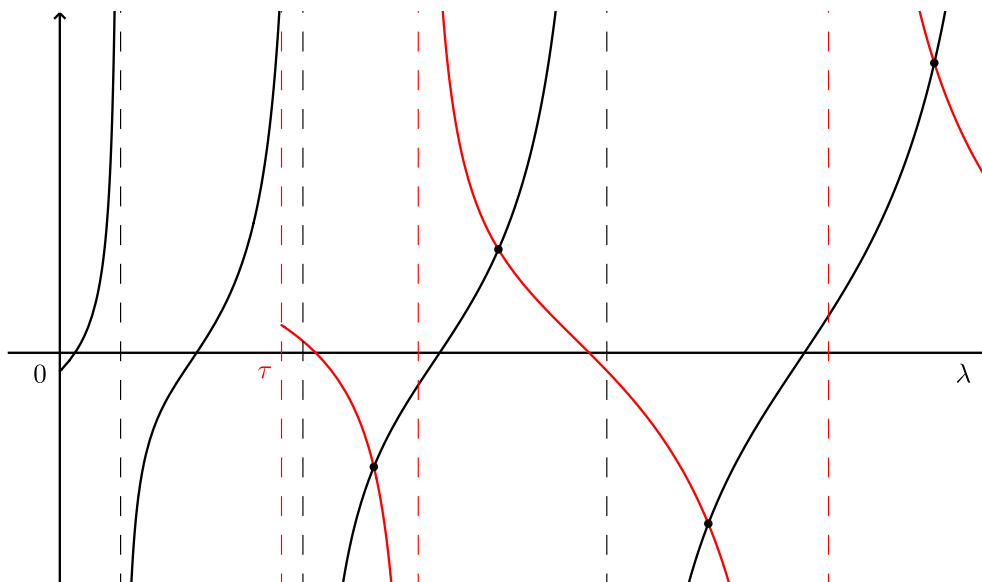
musí na každém intervalu $J_{k,\tau}$, $k \in \mathbb{N}$, i na každém intervalu

$$I_k := \left(\left(\frac{k\pi}{x_0} \right)^2, \left(\frac{(k+1)\pi}{x_0} \right)^2 \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

takovém, že

$$I_k \subset (\tau, +\infty),$$

existovat alespoň jeden průsečík funkcí f a h , tedy kořen rovnice (5.24). Průsečíky mohou přitom existovat i na intervalu $J_{0,\tau}$, resp. na I_k takovém, že $I_k \not\subset (\tau, +\infty)$. Na obrázku 5.7 je situace znázorněna pro $x_0 = 0.6$, $\tau = 100$.



Obrázek 5.7: Kořeny rovnice (5.24) pro $x_0 = 0.6$, $\tau = 100$ jako průsečíky funkcí $f(\lambda)$ (černá, asymptoty $(k\pi/x_0)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$) a $h(\lambda)$ (červená, asymptoty $(k\pi/(1-x_0))^2 + \tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$). První průsečík se v tomto případě nachází na intervalu $J_{0,\tau}$.

Vyjádříme-li D z první rovnice v (5.23) jako

$$D = B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_0}{\sin(\sqrt{\lambda} - \tau(1-x_0))},$$

dostaneme příslušná řešení rovnice (5.12)

$$u(x) = \begin{cases} B \sin \sqrt{\lambda} x, & x \in [0, x_0], \\ B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_0}{\sin(\sqrt{\lambda} - \tau(1-x_0))} \sin(\sqrt{\lambda} - \tau(1-x)), & x \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

Aby tyto funkce byly také řešením (5.9), tj. byly to vlastní funkce naší úlohy, musí platit

$$B \sin \sqrt{\lambda} x_0 < 0$$

a

$$u(x) = u_R(x) < 0 \quad \text{na } (x_0, 1).$$

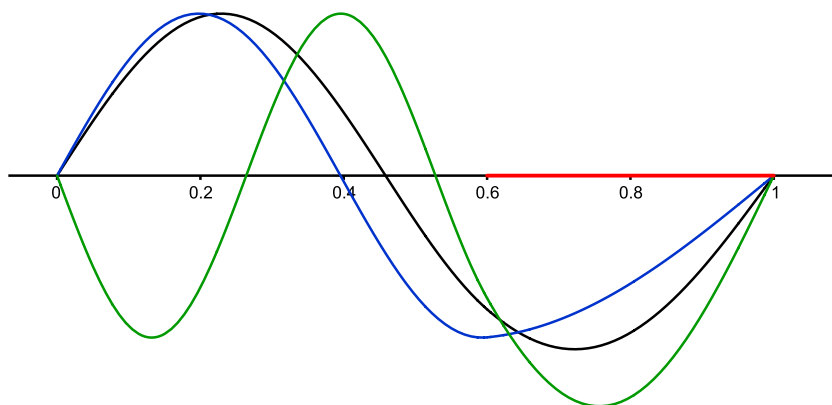
První podmínka zajistí, aby $u(x_0) < 0$, druhá, aby kontaktní množinou byl interval $[x_0, 1)$. To znamená, že

$$\sin \left(\sqrt{\lambda - \tau} (1 - x) \right)$$

nesmí měnit na $[x_0, 1)$ znaménko, což ovšem vyžaduje, aby kořeny rovnice (5.24) splňovaly navíc

$$\lambda - \tau < \left(\frac{\pi}{1 - x_0} \right)^2,$$

kde $(\pi/(1-x_0))^2$ je podle Věty 2.53 nejmenší vlastní číslo Dirichletovy úlohy na intervalu $(x_0, 1)$. To je zajištěno pouze pro kořeny z intervalu $J_{0,\tau}$, tj. pouze pro průsečíky funkce f s první větví funkce h (těch může být víc než jeden, ale také nemusí pro daná τ a x_0 existovat vůbec).

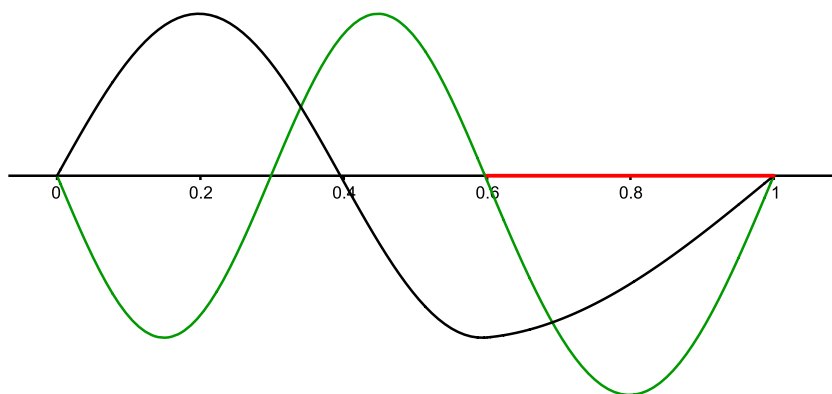


Obrázek 5.8: Vlastní funkce u úlohy pro $\tau = 15$ (černá), $\tau = 50$ (modrá), $\tau = 100$ (zelená) odpovídající vlastním číslům $\lambda > \tau$; $x_0 = 0.6$

Na obrázku 5.8 jsou pro tři různé hodnoty parametru τ vykresleny vlastní funkce úlohy, které mají s překážkou plný kontakt a odpovídají vlastním číslům $\lambda > \tau$. Překážka je zde umístěna na intervalu $[0.6, 1)$. Numerickým řešením rovnice (5.24) byly nalezeny tyto konkrétní hodnoty: $\lambda = 46.99$ pro $\tau = 15$, $\lambda = 63.14$ pro $\tau = 50$ a $\lambda = 141.65$ pro $\tau = 100$.

Všimněme si, že ve všech znázorněných případech se působení překážky na řešení projevuje zmenšováním jeho křivosti na intervalu $[x_0, 1)$.

Jak bylo uvedeno výše, může se v základním intervalu $J_{0,\tau}$ nacházet více kořenů rovnice (5.24), tj. vlastních čísel splňujících $\lambda > \tau$. To nastává například pro $\tau = 50$, kdy uvedené podmínce vyhovují čísla $\lambda = 63.14$ a $\lambda = 110.77$. Příslušné vlastní funkce jsou na obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: Vlastní funkce u úlohy pro $\tau = 50$ odpovídající vlastním číslům $\lambda = 63.14$ (černě), $\lambda = 110.77$ (zeleně, $u(x_0) = -0.04$); $x_0 = 0.6$

Na obrázku 5.10 jsou pro pevně zvolenou překážku na intervalu $[0.6, 1)$ znázorněny souvislé větve vlastních čísel v závislosti na parametru τ . Jednotlivé větve začínají na přímce $\lambda = \tau + (\pi/(1 - x_0))^2$ a pro $\tau \rightarrow +\infty$ konvergují hodnoty $\lambda(\tau)$ podél k -té větve (počítáno odspodu) k hodnotě

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{x_0} \right)^2$$

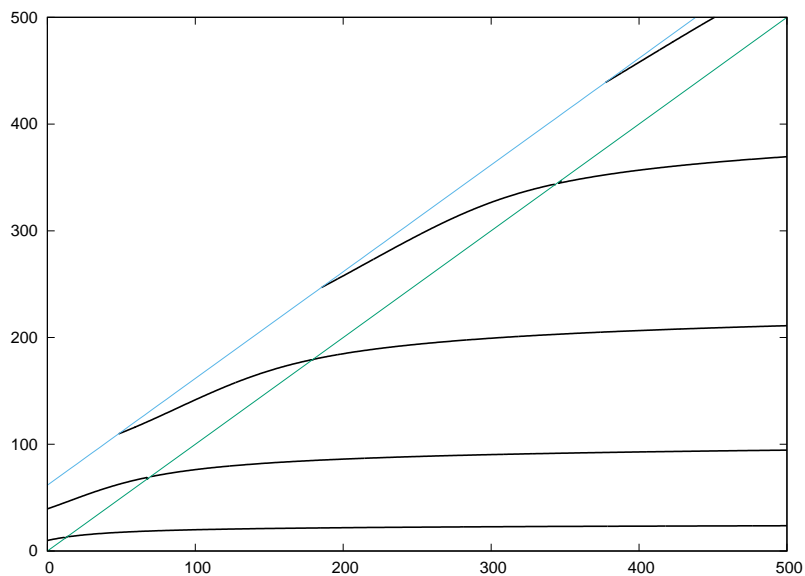
(viz též obrázek 5.3), což je k -té vlastní číslo pro Dirichletovu okrajovou úlohu na intervalu $(0, x_0)$. Na obrázku 5.11 je totéž znázorněno pro překážku umístěnou na $[0.7, 1)$.

5.2.2 Úloha s volnou hranicí

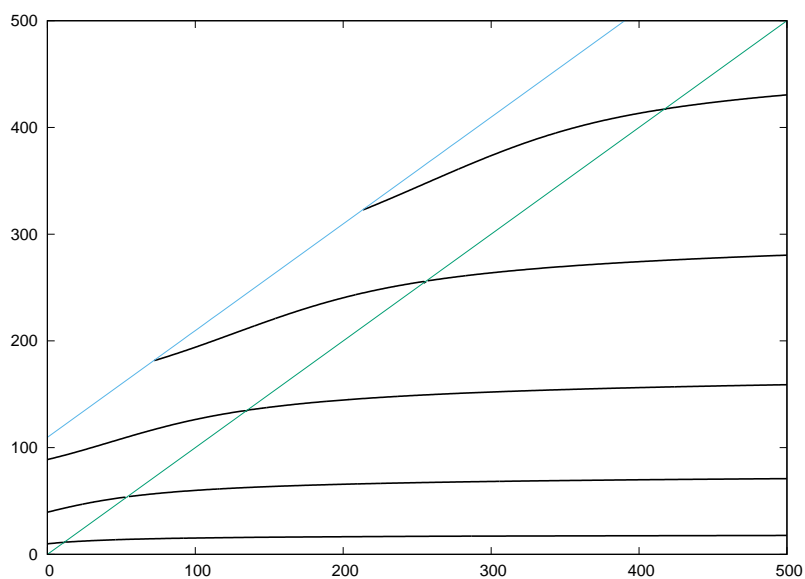
Hledejme nyní řešení rovnice (5.5) s okrajovými podmínkami (5.6), (5.7) takové, že

$$u > 0 \text{ na } [x_0, \alpha), \quad u < 0 \text{ na } (\alpha, 1) \quad (5.25)$$

pro nějaké $\alpha \in (x_0, 1)$, $0 < x_0 < 1$, tj. řešení, jehož kontaktní množinou je množina s volnou hranicí $K = [\alpha, 1)$. Volná hranice znamená, že hodnota α není předem známa.



Obrázek 5.10: Závislost λ na τ . Souvislé větve vlastních čísel úlohy (5.6)–(5.12) černě, zeleně přímka $\lambda = \tau$, modře $\lambda = \tau + (\pi/(1 - x_0))^2$; $x_0 = 0.6$.



Obrázek 5.11: Závislost λ na τ . Souvislé větve vlastních čísel úlohy (5.6)–(5.12) černě, zeleně přímka $\lambda = \tau$, modře $\lambda = \tau + (\pi/(1 - x_0))^2$; $x_0 = 0.7$.

Protože funkce u má být spojitá na $[0, 1]$, plyne z (5.25)

$$u(\alpha) = 0. \quad (5.26)$$

Dále je $u(x_0) > 0$, a tedy podle Věty 3.16 u splňuje rovnici (5.5) na celém intervalu $(0, 1)$ a je třídy $C^2([0, 1])$.

Díky požadovanému profilu je u řešením rovnic

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{na } (0, \alpha), \quad (5.27)$$

$$u''(x) + (\lambda - \tau)u(x) = 0 \quad \text{na } (\alpha, 1). \quad (5.28)$$

S ohledem na (5.26) a okrajové podmínky (5.6), (5.7) tak vlastně dostáváme dvě Dirichletovy úlohy na vlastní čísla s homogenními okrajovými podmínkami, jednu na intervalu $(0, \alpha)$ s vlastním číslem λ , druhou na $(\alpha, 1)$ s vlastním číslem $(\lambda - \tau)$. Příslušné vlastní funkce označíme jako u_L pro rovnici (5.27) a u_R pro (5.28). Díky C^2 hladkosti řešení víme, že musí platit

$$u'_L(\alpha) = u'_R(\alpha). \quad (5.29)$$

Spojitosť druhé derivace v bodě α pak ihned vyplývá z obou rovnic (5.27), (5.28) a z (5.26). Navíc je odtud

$$u''_L(\alpha) = 0 = u''_R(\alpha),$$

tj. bod $x = \alpha$ je pro funkci u inflexním bodem.

Vzhledem k požadavku (5.25) nás na obou intervalech zajímají pouze netriviální řešení a protože u_R nesmí měnit znaménko, jedná se o první vlastní funkci dané okrajové úlohy. Podle Vět 2.52 a 2.53 je tedy

$$\begin{aligned} u_L(x) &= B \sin \frac{n\pi x}{\alpha} && \text{na } (0, \alpha), \\ u_R(x) &= D \sin \frac{\pi(1-x)}{1-\alpha} && \text{na } (\alpha, 1), \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $B, D \in \mathbb{R}$ jsou libovolně volitelné konstanty takové, že $B \neq 0$, $D < 0$. Pro parametry α , λ a τ přitom platí

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad \sqrt{\lambda - \tau} = \frac{\pi}{1 - \alpha}. \quad (5.30)$$

Dosazením u_L , u_R do podmínky (5.29) obdržíme

$$B \frac{n\pi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\alpha}{\alpha} = -D \frac{\pi}{1-\alpha} \cos \frac{\pi(1-\alpha)}{1-\alpha},$$

neboli

$$B \frac{n\pi}{\alpha} (-1)^n = D \frac{\pi}{1-\alpha},$$

odkud

$$D = (-1)^n B \frac{n(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Tento vztah lze díky (5.30) psát ve tvaru

$$D = (-1)^n B \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda - \tau}}.$$

Protože uvažujeme pouze hodnoty $\tau > 0$, je odtud mj. zřejmé, že

$$|D| > |B|.$$

Za účelem nalezení hodnot λ a α vyjádříme z rovnic v (5.30) λ a porovnáním obdržíme

$$\frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{(1 - \alpha)^2} + \tau. \quad (5.31)$$

Funkce $\frac{n\pi^2}{\alpha^2}$ a $\frac{\pi^2}{(1-\alpha)^2}$ jsou vzhledem k proměnné α na intervalu $(0, 1)$ pro $n = 1$ vůči sobě symetrické podle osy $\alpha = 0.5$, první je pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ funkce klesající, druhá rostoucí. Parametr τ způsobí posunutí druhé funkce nahoru, monotonii neovlivní. Existuje tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ právě jeden kořen $\alpha_n \in (0, 1)$ rovnice (5.31). Vlastní čísla jsou pak

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\alpha_n^2}$$

a odpovídající vlastní funkce

$$u_n(x) = \begin{cases} B_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha_n} & \text{na } (0, \alpha_n), \\ (-1)^n B_n \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \sin \frac{\pi(1-x)}{1-\alpha_n} & \text{na } (\alpha_n, 1) \end{cases} \quad (5.32)$$

pro libovolné B_n splňující

$$B_n u'(\alpha_n) = B_n \cos n\pi = B_n (-1)^n < 0,$$

neboť vzhledem k (5.25) má být řešení v bodě α klesající. Dále musí platit

$$\alpha_n > x_0 \quad (5.33)$$

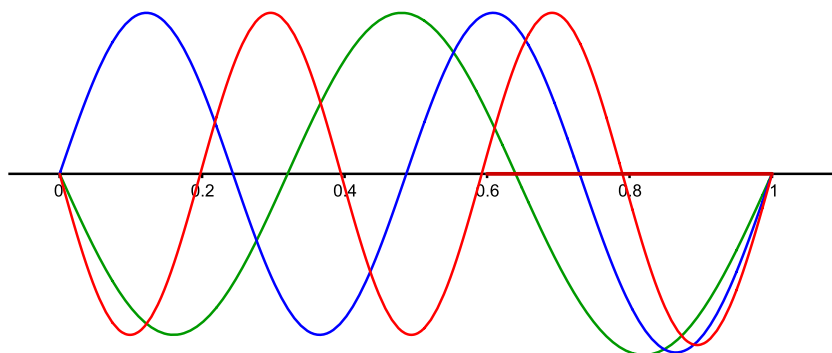
a

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi}{\alpha_n - x_0} \right)^2. \quad (5.34)$$

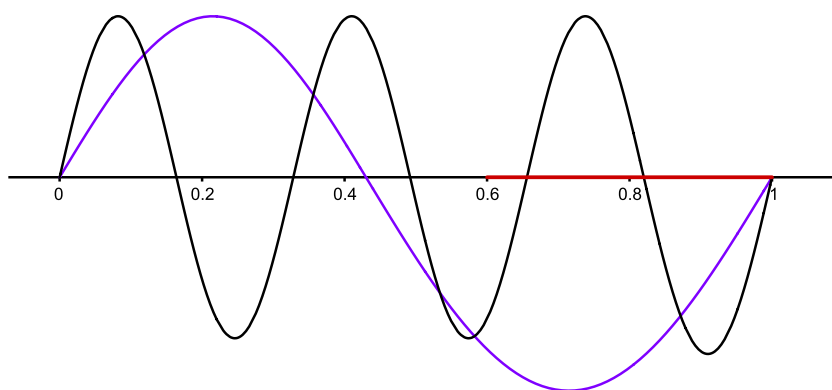
Druhý požadavek vyjadřuje skutečnost, že λ_n musí být menší než nejmenší vlastní číslo Dirichletovy úlohy na intervalu (x_0, α_n) , jinak by na tomto intervalu nebyla splněna podmínka $u_n(x) > 0$.

Pro libovolnou kladnou hodnotu parametru τ se průsečík funkcí na levé a pravé straně rovnice (5.31) pro $n = 1$ nachází v intervalu $(0, \frac{1}{2})$, což vyplývá z výše popsaného tvaru těchto funkcí. Je-li $x_0 \geq \frac{1}{2}$, nemůže tak být α_1 volnou hranicí úlohy.

Na obrázcích 5.12 a 5.13 jsou vykresleny funkce u_n dané předpisem (5.32) pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ s $\tau = 20$ a $x_0 = 0.6$. Odpovídající hodnoty λ a α jsou $\lambda_1 = 51.31$, $\alpha_1 = 0.43$, $\lambda_2 = 96.29$, $\alpha_2 = 0.64$, $\lambda_3 = 163.29$, $\alpha_3 = 0.73$, $\lambda_4 = 250.94$, $\alpha_4 = 0.79$, $\lambda_5 = 358.76$, $\alpha_5 = 0.82$. Požadavky (5.33) a (5.34) jsou splněny pouze pro $n = 2, 3, 4$, tedy pouze funkce u_2 , u_3 a u_4 jsou řešením naší úlohy. Funkce u_1 nesplňuje podmínku (5.33) a funkce u_5 podmínku (5.34).

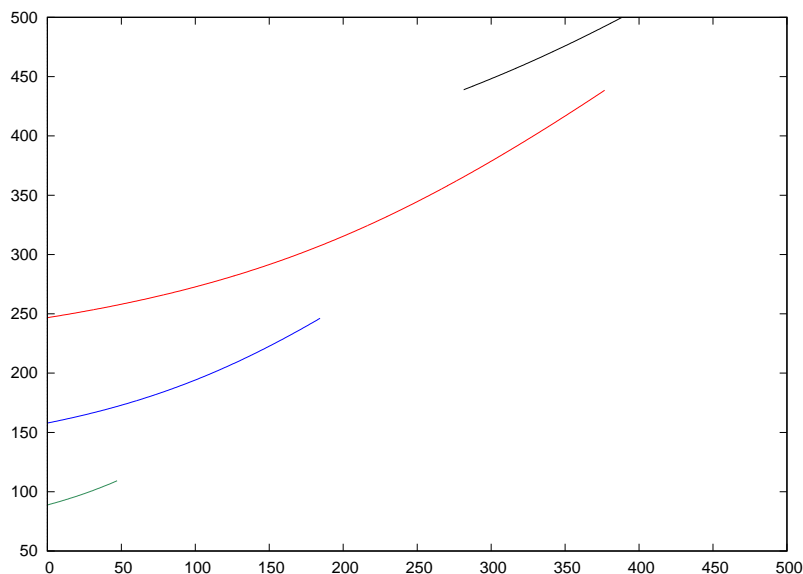


Obrázek 5.12: Řešení úlohy (5.26)–(5.29) pro $\tau = 20$; $n = 2$ zeleně, $n = 3$ modře, $n = 4$ červeně; $x_0 = 0.6$

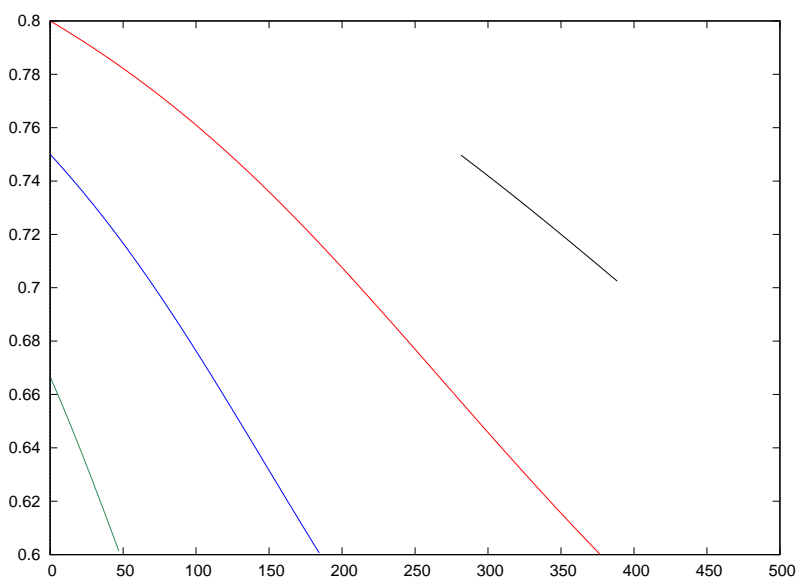


Obrázek 5.13: Funkce dané předpisem (5.32) pro $n = 1$ (fialově) a $n = 5$ (černě), které nejsou řešením úlohy (5.26)–(5.29) s $\tau = 20$ a $x_0 = 0.6$

Pro $x_0 = 0.6$ je na obrázku 5.14 znázorněna závislost vlastních čísel úlohy (5.26)–(5.29) na parametru τ . Jak na tomto parametru závisí hodnota α , určující množinu kontaktu řešení s překážkou, znázorňuje obrázek 5.15. Vyneseny jsou v obou případech pouze ty body, které splňují požadavky (5.33) a (5.34). Tytéž závislosti pro $x_0 = 0.4$ jsou vykresleny na obrázcích 5.16, 5.17.



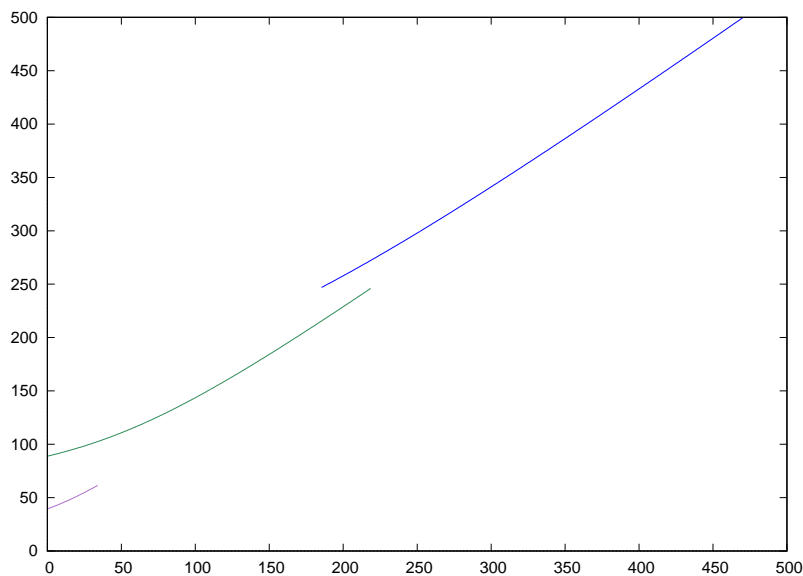
Obrázek 5.14: Závislost λ na τ . Souvislé větve vlastních čísel úlohy (5.26)–(5.29); $n = 2$ zeleně, $n = 3$ modře, $n = 4$ červeně, $n = 5$ černě; $x_0 = 0.6$.



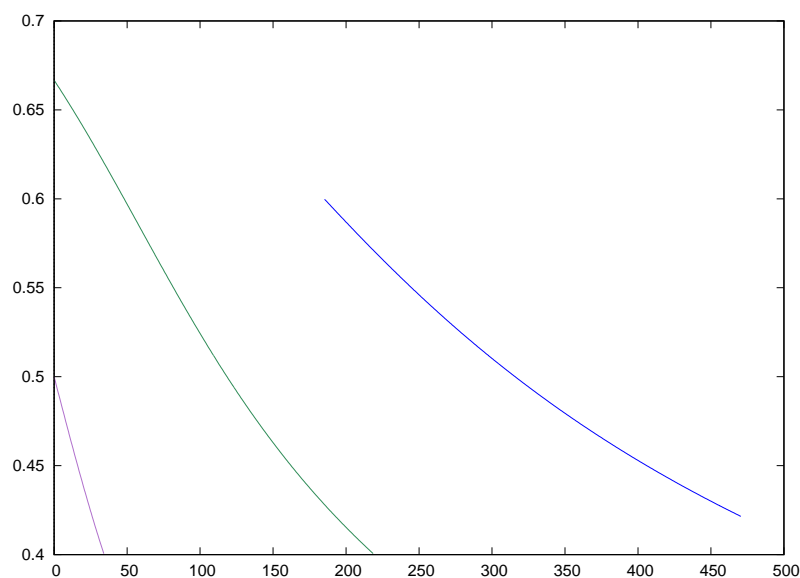
Obrázek 5.15: Závislost α na τ . Větve krajních bodů množiny kontaktu vlastních funkcí úlohy (5.26)–(5.29) tvaru (5.32); $n = 2$ zeleně, $n = 3$ modře, $n = 4$ červeně, $n = 5$ černě; $x_0 = 0.6$.

V této části jsme se zabývali hledáním řešení, jejichž množina kontaktu s překážkou je souvislý interval $[\alpha, 1)$. Přestože se jedná o řešení se spojitou druhou derivací, nejsou již třídy $C^3([0, 1])$, tedy překážka je deformuje. To je důsledkem nediferencovatelnosti členu se skákající nelinearitou v rovnici (5.5), o čemž bylo pojednáno v úvodu sekce 5.1.

Řešení se složitější množinou kontaktu lze získat kombinací postupů pro řešení s



Obrázek 5.16: Závislost λ na τ . Souvislé větve vlastních čísel úlohy (5.26)–(5.29); $n = 1$ fialově, $n = 2$ zeleně, $n = 3$ modře; $x_0 = 0.4$.



Obrázek 5.17: Závislost α na τ . Větve krajních bodů množiny kontaktu vlastních funkcí úlohy (5.26)–(5.29) tvaru (5.32); $n = 1$ fialově, $n = 2$ zeleně, $n = 3$ modře; $x_0 = 0.4$.

plným kontaktem a pro úlohu s volnou hranicí. Pokud by funkce u střídala na intervalu $(x_0, 1)$ znaménko častěji než v uvažovaném případě, dostaneme několik Dirichletových úloh s homogenními okrajovými podmínkami, které má tato funkce splňovat. V přechodových bodech musí mít přitom spojitou druhou derivaci. Pokud by navíc hledané řešení mělo být záporné v bodě x_0 , je třeba zohlednit podmínky (5.10), (5.11).

Kapitola 6

Závěr

V práci jsme studovali okrajové úlohy na vlastní čísla se skákající nelinearitou danou funkcí záporná část, která modeluje jednostrannou pružnou překážku. Postupně jsme rozlišili úlohy s bodovou a souvislou překážkou a popsali řešení v závislosti na parametru τ , který odpovídá síle překážky. Ve všech uvažovaných případech byla řešení dvojího typu. První typ představují ta, která jsou zároveň řešením úlohy bez překážky, tj. pro $\tau = 0$. Řešení druhého typu jsou pak překážkou ovlivněna a existují pouze pro $\tau > 0$.

V případě překážky umístěné v krajním bodě intervalu jsme ukázali, že pro libovolnou hodnotu parametru $\tau \geq 0$ existuje nekonečně mnoho kladných vlastních čísel a jim příslušných vlastních funkcí, které jsou vždy třídy C^∞ . Bodová překážka uvnitř intervalu oproti tomu může způsobit zlom v první derivaci vlastních funkcí, které tak na uvažovaném intervalu zůstávají pouze spojité. I pro tento případ jsme ukázali, že existuje shora neomezená posloupnost kladných vlastních čísel, a to při libovolném umístění překážky v rámci intervalu.

Pro souvislou překážku je úloha obecně velmi složitá. Proto jsme se v práci zaměřili pouze na hledání řešení s předem danými charakteristikami. Řešení, která překážku obchází nebo se jí dotýkají, jsou třídy C^∞ , existuje jich ale (až na kladný násobek) pouze omezený počet, daný umístěním levého krajního bodu překážky. Řešení s plným kontaktem mají zlom v druhé derivaci v krajním bodě překážky a je jich také (až na kladný násobek) konečně mnoho. Dále existují deformovaná řešení třídy C^2 , která nemají spojitou třetí derivaci. Ta hledáme jako řešení úlohy s volnou hranicí.

Konkrétní vlastní čísla deformovaných řešení byla hledána numericky, neboť se ve všech případech jednalo o kořeny jistých transcendentních rovnic. Analytickým rozбором

rovnice jsme je dokázali alespoň přibližně lokalizovat, respektive ukázat, že existují. Pro vybraná umístění překážky jsme pak popsali jejich závislost na parametru τ .

Úlohy s pružnou bodovou překážkou představují jakýsi přechod mezi lineární úlohou bez překážky a úlohou s překážkou pevnou, která nedovoluje řešení nabývat záporných hodnot. Souvislá překážka zmenšuje konvexitu vlastních funkcí na intervalu, kde působí.

Předmětem dalšího studia by mohlo být například podrobnější zkoumání závislosti vlastních funkcí na poloze překážky, které bylo v práci diskutováno pouze částečně. Přirozeně se nabízí také zobecnění pro úlohy čtvrtého řádu, které nosník modelují lépe, případně přidání diferencovatelné nelinearity.

Literatura

- [1] BURENKOV, Victor I. *Sobolev spaces on domains*. Stuttgart: B.G. Teubner, 1998. ISBN 3-8154-2068-7.
- [2] DRÁBEK, Pavel a Alois KUFNER. *Úvod do funkcionální analýzy*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 1993, 114 s. ISBN 80-7082-124-8.
- [3] FUČÍK, Svatopluk. *Boundary value problems with jumping nonlinearities*. Časopis pro pěstování matematiky. Vol. 101 (1976) No. 1, 69–87.
- [4] FUČÍK, Svatopluk a Alois KUFNER. *Nelineární diferenciální rovnice*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1978, 344 s. Teoretická knihovna inženýra.
- [5] JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet (II)*. Praha: Academia, 1976.
- [6] KUČERA, Milan. *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities based on bifurcation theory*. Časopis pro pěstování matematiky. Vol. 104 (1979) No. 4, 389–411.
- [7] TRENCH, William, F. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems* [online]. Faculty Authored and Edited Books & CDs. 9., 2013 [cit. 2018-11-11]. Dostupné z: <https://digitalcommons.trinity.edu/mono/9>
- [8] SCHWABIK, Štefan. *Integrace v R : (Kurzweilova teorie)*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1999, 326 s. ISBN 80-7184-967-7.
- [9] YOSIDA, Kōsaku. *Functional analysis*. New York: Springer, 1995. ISBN 3-540-58654-7.