Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Řešení úloh z analytické geometrie v prostředí programu GeoGebra

Vypracoval: Eliška Benešová

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Řešení úloh z analytické geometrie v prostředí programu GeoGebra jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Eliška Benešová

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce. Hlavně děkuji za čas, který mi věnoval, trpělivost, vstřícnost, ochotu, cenné rady a připomínky.

Anotace

Ve výuce matematiky by měl být kladen důraz na grafickou reprezentaci učiva pro lepší zprostředkování vizuálního vjemu žákovi. Tato bakalářská práce s názvem *Řešení úloh z analytické geometrie v prostředí programu GeoGebra* se zaměřuje na propojení geometrické a algebraické reprezentace geometrických úloh. Program GeoGebra je pro tento účel velmi vhodný, protože obsahuje prostředí pro geometrii v rovině a v prostoru a pro zápis algebraických výpočtů. Hlavním cílem bylo vytvořit kolekci řešených úloh z analytické geometrie. Práce obsahuje 24 úloh, které byly vybrány na úrovni středoškolského učiva matematiky a vysokoškolské přípravy učitelů matematiky. Úlohy jsou zaměřeny především na výpočty vzdálenosti geometrických útvarů v rovině a prostoru. Všechny jsou ukázkově vyřešeny a doplněny ilustracemi vytvořenými v programu GeoGebra. Součástí práce jsou originální aplety, které jsou dostupné online prostřednictvím odkazů nebo QR kódů uvedených v textu práce. Řešení úloh je tak možné studovat i prostřednictvím dynamických 2D nebo 3D konstrukcí. Aplety jsou určené pro sdílení učiteli a žáky. Sada apletů ve formě tzv. GeoGebra knihy je součástí práce. Dále práce mapuje učivo analytické geometrie na základní a střední škole a ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky.

Annotacion

In the matter of mathematics, graphical representation of the curriculum for its better conceivability should be greatly emphasized. This bachelor thesis, called *Solving Analytical Geometry Problems in the Interface of the GeoGebra Software*, interconnects the relation between the geometrical and the algebraic representation. The GeoGebra software is an outstanding choice for the abovementioned topic, since it contains the necessary interface for both flat and spatial geometry, as well as for notation of algebraic expressions. The Bachelor´s thesis contains 24 tasks, which were selected from the analytic geometry curriculum of elementary and high schools, as well as its scope in the college studies of mathematics teachers. The subject matter of the problems is distance in plane and space. The problems are solved and illustrated with the help of GeoGebra. The thesis includes online sharing of the created applets, which are available online via links or QR codes listed in the text of the thesis. The solution of tasks can be studied through dynamic 2D or 3D structures. Applets are intended for sharing by teachers and students. A set of applets in the form of the so-called GeoGebra book is also part of the work. Furthermore, the work maps the curriculum of the analytic geometry of elementary and high school level of education and the college level of future teachers.

Obsah

1 Úvod

Bakalářská práce se věnuje řešení úloh z analytické geometrie v prostředí programu GeoGebra. Věřím, že práce by mohla pomoci studentům středních a vysokých škol pochopit problematiku vybraného úseku analytické geometrie. Práce by mohla sloužit jako podklad k samostudiu. Práce obsahuje kolekci řešených úloh z analytické geometrie. Díky programu GeoGebra jsou řešené úlohy ilustrovány obrázky i dynamickými aplety.

Práce začíná rešerší učiva analytické geometrie na základní, střední a vysoké škole, konkrétně k přípravě učitelů matematiky. Čtenář je informován o tom, v jaké etapě vzdělávání jsou položeny základy analytické geometrie, kdy se v matematice přímo zavádí pojem analytická geometrie s vysvětlením hlavní podstaty tématu. Výčet učiva analytické geometrie je doplněn konkrétními ukázkově vyřešenými příklady ze *Standardů pro základní vzdělávání z roku 2013* (Standardy RVP ZV 2013). Vložena je i ukázka příkladů maturitního učiva z analytické geometrie (Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014).

Další částí práce jsou řešené úlohy z učiva od středních škol až po vysokoškolskou přípravu učitelů matematiky. Vybraným tématem analytické geometrie je vzdálenost v rovině a v prostoru. Jde o vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímek, vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, vzdálenost přímky a s ní rovnoběžné roviny a vzdálenost dvou mimoběžných přímek. Každý příklad je doplněn početním řešením, ilustracemi, webovým odkazem a QR kódem. Přes webový odkaz a QR kód se studenti dostanou do online prostředí programu GeoGebra, kde najdou knihu s příklady. Poskytnuté je zadání, dynamický aplet a řešení příkladu. Studenti tak mohou použít svých mobilních zařízení nebo tabletů a věnovat se učivu i bez většího zařízení např. notebooku nebo stolního počítače. Zároveň mohou využívat tištěnou verzi práce. Na konci práce se nachází závěr, který shrnuje cíl a obsah práce.

2 Rešerše učiva

V následující kapitole představím výsledky rešerše učiva analytické geometrie na základních a středních školách a na vysoké škole pro přípravu učitelů matematiky. Rešerše hodnotí učivo z hlediska analytické geometrie. Základními zdroji jsou *Standardy pro základní vzdělávání* zpracované dle upraveného *RVP ZV* účinného od 1. 9. 2013 (Standardy RVP ZV 2013). Využívám shrnutí analytické geometrie od Josefa Poláka v knize *Přehled středoškolské matematiky* (Polák 2015). Dalším zdrojem je přímo *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* (RVP G 2007) a učebnice *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie* od Milana Kočandrleho a Lea Bočka (Kočandrle a Boček 2009). Ukázku maturitního učiva představuji z *Katalogu požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014* (Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014). Vysokoškolské učivo přípravy učitelů matematiky je hodnoceno podle studijních programů na Univerzitě Karlově v Praze (Studijní plány 2019/2020) a Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích (Portál IS/STAG 2020). Vycházím ze sylabů vyučovaných předmětů.

2.1 Základní škola

Ve *Slovníku středoškolské matematiky* (Česká terminologická komise Jednoty čs. matematiků a fyziků a vědeckého kolegia matematiky ČSAV 1981, s. 11) je analytická geometrie definována jako „odvětví geometrie, které užívá analytických metod k vyřešení geometrických objektů. Základní myšlenkou analytických metod je vyjádřit geometrické objekty algebraickými.“ Žák základní školy se s pojmem analytická geometrie explicitně nesetká, jelikož tato oblast učiva není obsahem osnov, rámcových nebo tematických plánů. Avšak na základní škole získáváme důležité poznatky, které jsou v analytické geometrii využívány.

Na prvním stupni se žák seznamuje s oblastí geometrie v rovině a v prostoru, tak že se učí narýsovat a znázornit základní rovinné útvary. Rovinnými útvary, se kterými se žák setká, jsou čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnice. Žák se průběžně cvičí v užívání jednoduchých konstrukcí v různých příkladech. Žák rozeznává základní rovinné útvary nezávisle na jejich natočení, velikosti nebo označení. Také ovládá schopnost určit rovinné útvary pomocí počtu vrcholů a stran, rovnoběžnosti a kolmosti stran. Žák je seznámen se základními pojmy a značkami užívanými v rovinné geometrii. Dalším cílem výuky je rozpoznání jednoduchých těles a určení na nich základních rovinných útvarů. Pokrokem v rýsování je kružnice s daným poloměrem, obecný trojúhelník nebo trojúhelník se třemi zadanými délkami stran, čtverec a obdélník s užitím konstrukce rovnoběžek a kolmic. Při rýsování jsou dodržovány zásady rýsování. Geometrie na prvním stupni klade také otázky spojené s velikostí rovinných útvarů. Cílem je tedy, aby žák rozlišoval obsah a obvod rovinného útvaru. Ovládal určení obsahu a obvodu pomocí čtvercové sítě nebo měřením rovinného útvaru. Také jsou představeny základní jednotky obsahu bez vzájemného převádění. Žák se učí graficky sčítat, odčítat a porovnávat úsečky, zjišťuje délku lomené čáry graficky i měřením. A v neposlední řadě má dojít k pochopení převodu jednotek. Dále se probírají dvojice kolmic a rovnoběžek ve čtvercové síti, jejich náčrtek a narýsování. Na prvním stupni se dojde až k rozpoznání a znázornění jednoduchých osově souměrných útvarů ve čtvercové síti a určení osy souměrnosti útvaru překládáním papíru (Standardy RVP ZV 2013).

Na druhém stupni se navazuje na nabyté vědomosti z předchozích let a je přidáváno další učivo v oblasti geometrie v rovině a prostoru. Například žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely. Využívá polohové a metrické vlastnosti, kterými jsou Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost, vzájemná poloha bodů a přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky, k řešení geometrických úloh. Geometrické úlohy jsou řešeny početně a je užívána matematická symbolika. Dalšími úkoly jsou charakteristika a třídění základních rovinných útvarů, poznání základních rovinných útvarů, rozlišení typů úhlů, typy trojúhelníků a čtyřúhelníků. S úhly se pojí jejich velikost, která se dá určit měřením a výpočtem. Dochází ke sčítání a odčítání úhlů, určení násobku úhlu. Žák je seznámen s výpočtem součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. U trojúhelníku se probírají věty o shodnosti a podobnosti. Opět se počítá obvod a obsah, ale na složitějších rovinných útvarech, a dochází i k převodu jednotek. Pokračuje se objemem a povrchem těles. Dále se prohlubuje schopnost načrtnutí a sestrojení složitějších rovinných útvarů, sítě základních těles a obrazu jednoduchých těles v rovině. Přidává se k tomu středová a osová souměrnost. Zavádí se pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh. Nelze vynechat charakteristiku základních prostorových útvarů a analýzu jejich vlastností. Jde o rozpoznání mnohostěnů a rotačních těles, používání pojmů podstava, hrana, stěna, vrchol, tělesová a stěnová úhlopříčka. Žák nakonec všechny své znalosti využije při analýze a řešení aplikačních geometrických úloh (Standardy RVP ZV 2013).

Lehký náznak analytické geometrie v učivu základních škol můžeme naleznout v tematické části *Číslo a proměnná*, kde žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí lineárních rovnic a jejich soustav. Lineární rovnice se dá upravit do základního tvaru $ax + b = 0$, kde $a \neq 0$. Výraz na levé straně definuje lineární funkci, jejímž grafem je přímka. Obecná rovnice přímky je $ax + by + c = 0$, avšak s tou se žáci seznámí až na střední škole. Příkladem je převzatá úloha o nákupu ze *Standardů pro základní vzdělávání 2013, str. 81:*

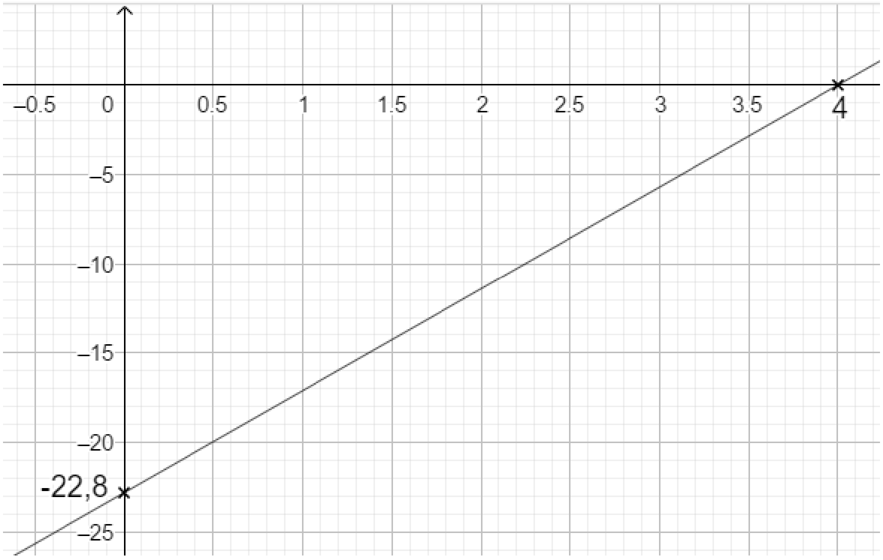
Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	1. Číslo a početní operace
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-1-08** Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav
Indikátory	1. žák vyřeší rovnici a soustavu dvou jednoduchých lineárních rovnic pomocí ekvivalentních úprav 2. žák ověří správnost řešení slovní úlohy
Ilustrativní úloha	
Rohlík stojí 2,50 Kč a houska 3,20 Kč. Eva zaplatila za nákup 26 Kč. Housek koupila o jeden kus víc než rohlíků. Mohla si Eva koupit 4 rohlíky a 5 housek?	
Poznámky k ilustrativní úloze	M-9-1-08.2

Řešení: Prvním krokem je sestavení rovnice, druhým její vyřešení:

$$\begin{aligned} 2{,}5x + 3{,}2(x+1) &= 26, \\ 5{,}7x &= 22{,}8, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Eva si mohla koupit 4 rohlíky a 5 housek.

K výsledku dojdeme i graficky, kdy rovnici vezmeme jako lineární funkci tedy přímku $p: 5{,}7x - 22{,}8 = 0$. Výsledkem je průsečík přímky *p* a osy *x*.



Obr. 1: Úloha o nákupu

V tematické části *Závislosti, vztahy a práce s daty* se objevuje zobrazení funkcí přímá a nepřímá úměrnost. Je zavedena lineární funkce v pravoúhlé soustavě souřadnic. Grafem přímé úměrnosti je opět přímka. Seznamují se s rovnicí přímky ve směrnicovém tvaru. Příkladem je následující ilustrativní úloha převzatá ze *Standardů pro základní vzdělávání 2013, str. 85*. Zabývat se budeme jen možností a).

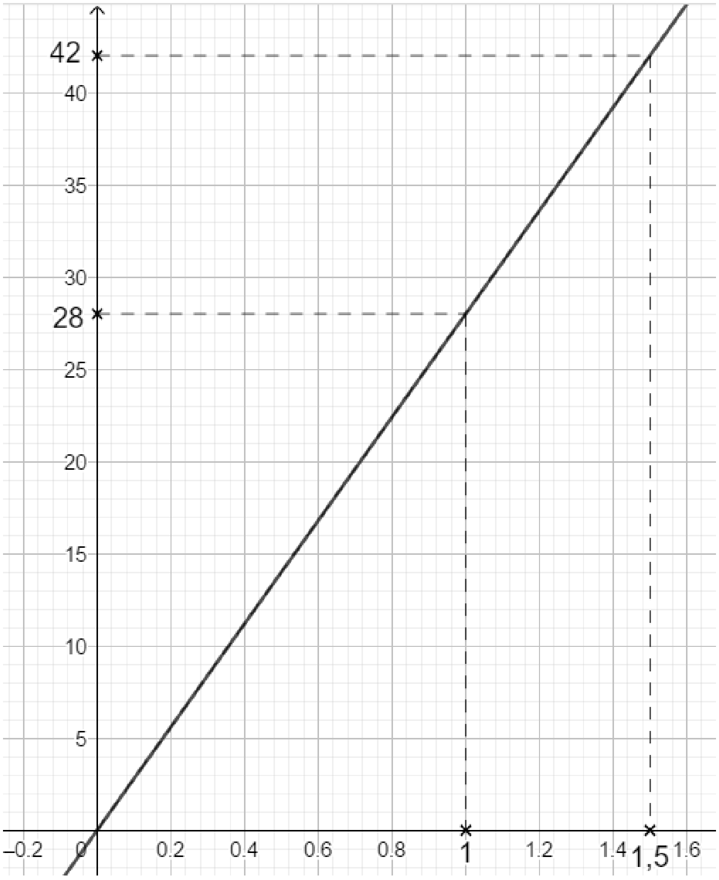
Vzdělávací obor	Matematika a její aplikace
Ročník	9.
Tematický okruh	2. Závislosti, vztahy a práce s daty
Očekávaný výstup RVP ZV	**M-9-2-03** Žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti
Indikátory	1. žák vytvoří tabulku pro přímou a nepřímou úměrnost na základě textu úlohy 2. žák rozliší přímou a nepřímou úměrnost z textu úlohy
Ilustrativní úloha	
Urči, jaká úměrnost platí v dané situaci: a) Jeden kilogram banánů stojí 28 Kč. Maminka za 1,5 kilogramu zaplatila 42 Kč. b) Když půjdeš do školy pěšky rychlostí 4 km/h, bude ti cesta trvat déle, než když pojedeš na in-line bruslích rychlostí 7 km/h.	
Poznámky k ilustrativní úloze	M-9-2-03.2

Řešení: Zapíšeme si údaje, které známe ze zadání. Vytvoříme tabulku na základě textu úlohy. Poté sestrojíme graf, z něhož vidíme, že se jedná o přímou úměrnost.

$$1\ kg \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\ 28\ Kč$$

$$\underline{1{,}5\ kg \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 42\ Kč}$$

Hmotnost v kg	0,5	1	1,5	2
Cena v Kč	14	28	42	56



Obr. 2:Přímá úměra

2.2 Střední škola

S analytickou geometrií jako takovou se žák seznámí v hodinách matematiky na střední škole. Josef Polák ve svém *Přehledu středoškolské matematiky* z roku 2015 shrnuje základní obsah učiva analytické geometrie. Učivo rozdělil do 14 podkapitol a to následujících:

1. Analytické vyjádření geometrického útvaru,
2. Orientované úsečky, vázané vektory,
3. Volné vektory,
4. Soustavy souřadnic na přímce, v rovině a v prostoru,
5. Souřadnice vektorů,
6. Skalární a vektorový součin vektorů,
7. Rovnice přímky, polopřímky, úsečky,
8. Analytické vyšetřování vzájemné polohy dvou přímek v rovině a v prostoru,
9. Rovnice roviny, poloroviny, poloprostoru,
10. Analytické vyšetřování vzájemné polohy přímky a roviny, dvou rovin,
11. Analytické vyjádření metrických vlastností v rovině a v prostoru,
12. Kuželosečky a jejich rovnice,
13. Analytické vyšetřování vzájemné polohy přímky a kuželosečky, dvou kuželoseček, kulové plochy a přímky,
14. Analytické vyšetřování množin všech bodů dané vlastnosti (Polák 2015).

Podle *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* by žák měl zvládat užívat různé způsoby analytického vyjádření přímky v rovině, řešit analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině, využívat charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, určit základní údaje o kuželosečce, a řešit analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky (RVP G 2007). Autoři Milan Kočandrle a Leo Boček vytvořili učebnici *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*, ve které se žák seznámí se souřadnicemi, vektory, geometrií v rovině a v prostoru, kuželosečkami a kulovou plochou (Kočandrle a Boček 2009).

U maturitní zkoušky se žák setká s užším výběrem učiva z analytické geometrie. Požadavky jsou vymezené v *Katalogu požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky*, který je platný od školního roku 2015/ 2016 (Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014). Z analytické geometrie se žák zabývá souřadnicemi bodu a vektoru na přímce, určuje vzdálenost dvou bodů a souřadnic středu úsečky. Je zaveden pojem vektor, jeho umístění, souřadnice a velikost. Žák dovede provádět operace s vektory, jako je například součet, násobení reálným číslem nebo skalární součin. Zahrnuta je také grafická interpretace. Probíranou látkou jsou souřadnice bodu a vektoru v rovině, zobrazené v kartézské soustavě souřadnic. K vyjádření přímky v rovině je vysvětleno parametrické vyjádření přímky, obecná rovnice a směrnicový tvar rovnice v rovině. Dále je cílem studia určit polohové a metrické vztahy bodů a přímek v rovině a aplikovat je v úlohách.

Ukázkou maturitního učiva z analytické geometrie jsou následující příklady z *Katalogu požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014, str. 28:*

1) Je dána přímka $p: x - 2y - 7 = 0$. Jaké může být její vyjádření?

A) $x = 1 + 2t, y = -3 + t; t \epsilon \mathbb{R}$

B) $\mathrm{x} = -1 - 2\mathrm{t}, \mathrm{y} = -3 - \mathrm{t};\ t \epsilon \mathbb{R}$

C) $x = -3 + 2t, y = 1 + t;\ t \epsilon \mathbb{R}$

D) $x = 1 - 2t, y = -3 + t; t \epsilon \mathbb{R}$

E) $x = -1 + 2t, y = 3 - t; t \epsilon \mathbb{R}$

2) Je dána úřémka $q: x = 3t, y = 12 - 4t;\ t \epsilon \mathbb{R}$. Vypočítejte vzdálenost přímky q od rovnoběžné přímky *p*, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

3) Je dán pravidelný šestiúhelník *ABCDEF* se středem *S*. Označme vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé, či nikoli.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\vec{v} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{FD} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

2.3 Vysokoškolská příprava učitelů matematiky

Ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky se navazuje na znalosti, které byly získány jak na základní, tak střední škole. Body výuky jsou na každé škole odlišné, protože neexistuje rámcový vzdělávací program pro vysoké školy. V některých předmětech analytické geometrie převládá geometrie, v jiných algebra. Někde se klade důraz na definice, věty, důkazy, jinde se vyučují jen nosné myšlenky a větší pozornost je věnována aplikacím analytické geometrie. Výklad učiva může být zaměřen na troj a dvou-dimenzionální prostor, jinde na n-rozměrný prostor. Každý předmět je ovlivněn vyučujícím, jenž má určitý matematický vkus a styl výuky. Hlavními tématy vyučovanými na pedagogické fakultě Univerzity Karlovy podle sylabu jsou:

- Geometrie čtverečkovaného papíru a její zobecnění na E_2 jako prostředí vhodné k experimentování a samostatnému objevování geometrických zákonitostí.
- Repér roviny E_2, kanonický repér, lineární závislost vektorů a báze, souřadnicová soustava daná repérem, ortonormální a ortogonální báze, podobně v E_3 a E_4.
- Popis a zkoumání útvarů v E_2 a E_3 analyticky (např. těžiště trojúhelníka a čtyřstěnu, konvexnost a nekonvexnost útvarů, rovnoběžnostěn a další tělesa, metrické úlohy, příčka mimoběžek).
- Geometrie čtyř- dimenzionálního prostoru jako prostředí vhodné k abstrakci, popis těles v E_4 pomocí zobecňování útvarů a těles (nadkrychle, simplex, opěrná nadrovina), popis přímky, roviny a nadroviny repérem a rovnicí, rovnoběžnost a kolmost v E_4 analyticky.
- Analytická geometrie kuželoseček, opakování ze SŠ, základní prvky a vlastnosti kružnice, elipsy, hyperboly, paraboly, obecná a středová (vrcholová) rovnice kuželoseček, vzájemná poloha přímky a kuželosečky.
- Analytický popis geometrických transformací v E_2 (shodností, podobností, afinit) a řešit úlohy zahrnující transformace syntetickým i analytickým způsobem (Studijní plány 2019/2020).

Na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích se budoucí učitel seznámí s analytickou geometrií v předmětu *Lineární algebra a geometrie*. Hlavními body výuky jsou vektorový prostor lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze vektorového prostoru, vektorové prostory se skalárním součinem, ortogonální vektory, afinní bodový prostor, afinní bodové podprostory, neparametrická rovnice nadroviny, svazky a trsy nadrovin, vzájemná poloha afinních podprostorů, klasifikace vzájemných poloh dvou afinních bodových podprostorů, příčky mimoběžných podprostorů, eukleidovský prostor, kartézská soustava souřadnic, ortonormální báze, vektorový součin, vnější součin, objem simplexu, vzdálenost podprostorů, odchylka podprostorů a aplikační úlohy. V předmětu *Geometrie I.* jsou zavedeny kuželosečky, jejich fokální vlastnosti, kanonický tvar rovnice kuželosečky, tečna, pól, polára, sdružené průměry, hlavní směry, charakteristická rovnice, kvadriky, kanonický tvar rovnice, tečná a polární rovina, klasifikace kvadrik pomocí charakteristické rovnice, algebraické křivky a plochy vyšších řádů (Portál IS/STAG 2020).

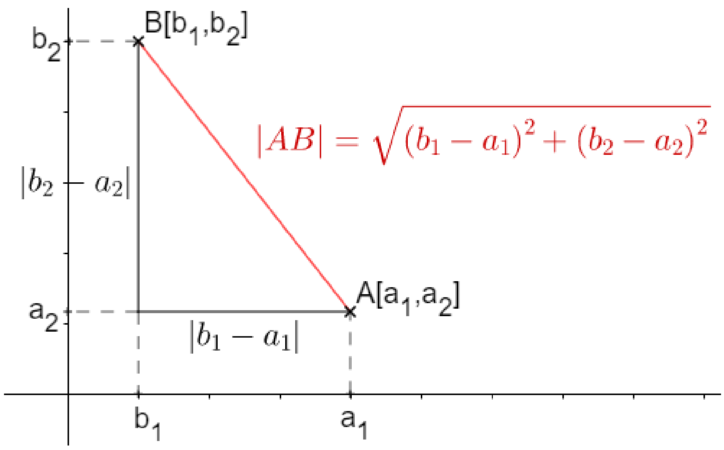
3 Řešené úlohy

V následující kapitole najdeme 24 řešených úloh z analytické geometrie. Zabývám se vzdálenostmi geometrických útvarů v rovině a prostoru. Úlohy jsou rozděleny do 7 podkapitol a to vzdálenost dvou bodů, vzdálenost bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímek, vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, vzdálenost přímky a s ní rovnoběžné roviny, vzdálenost dvou mimoběžných přímek. Každá úloha je doplněna řešením, výsledkem, ilustracemi, webovým odkazem a QR kódem.

3.1 Vzdálenost dvou bodů

Pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v rovině a v prostoru se používají vzorce, které vycházejí z pravoúhlého trojúhelníku. Využívá se Pythagorova věta a informace o souřadnicích bodů.

Vzdálenost dvou bodů v rovině

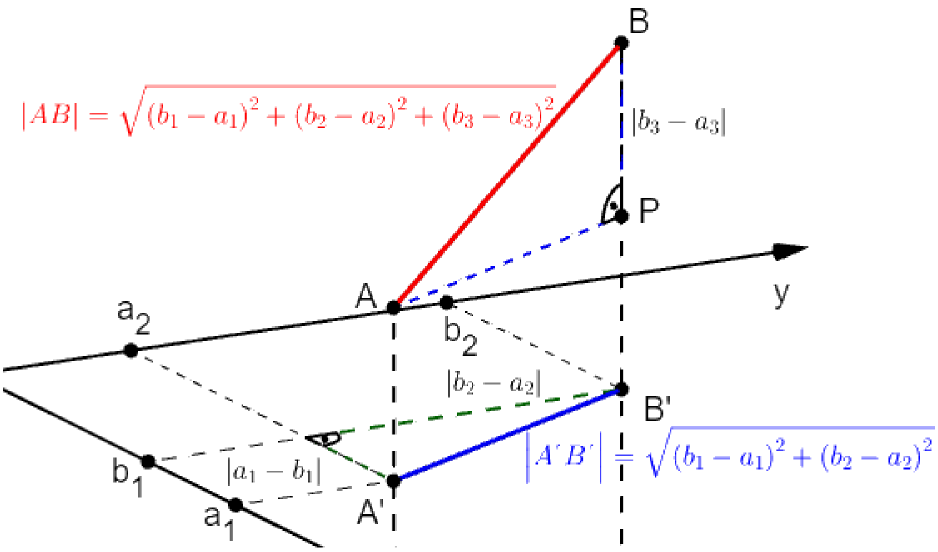


Obr. 3: Vzdálenost dvou bodů v rovině

Máme-li body $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$, pak jejich vzdálenost spočítáme následovně:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \ . \tag{1}$$

Vzdálenost dvou bodů v prostoru



Obr. 4: Vzdálenost dvou bodů v prostoru

Máme-li body $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$, pak jejich vzdálenost spočítáme následovně. Použijeme kolmé průměty bodů A a B do roviny xy. Značíme je A', B'. Vzdálenost A', B' už umíme spočítat, protože je to vzdálenost v rovině. Podle vzorce platí tedy

$$|A'B'| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Obdélník $A'B'PA$ ukazuje, že $|AP| = |A'B'|$. Trojúhelník APB je pravoúhlý a AB je jeho přepona. Takže platí Pythagorova věta $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$.

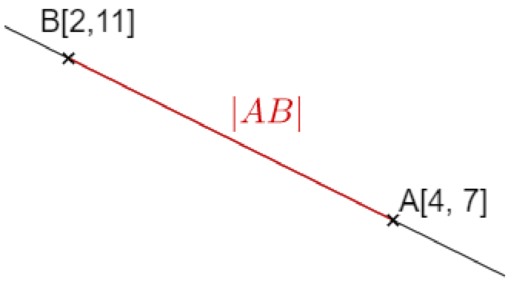
Po dosazení $|AP| = |A'B'|$ a z toho že, víme $|BP| = |b_3 - a_3|$ dostáváme vzorec pro výpočet vzdálenosti v prostoru:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\ . \qquad (2)$$

Příklad 1.1: Vypočítejte vzdálenost bodů $A[4,7],\ B[2,11]$.

Řešení: Využijeme vztah (1):

$$|AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (11-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,j.$$



Obr. 5: Vzdálenost dvou bodů

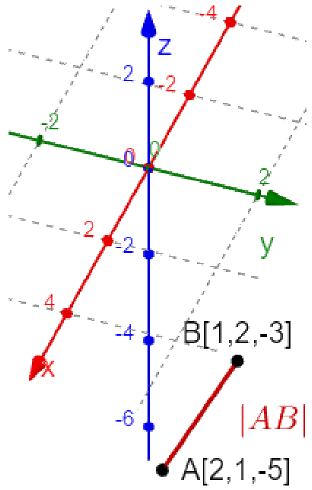
Vzdálenost dvou bodů je $2\sqrt{5}$ jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/vse52wjp

Příklad 1.2: Vypočítejte vzdálenost bodů $A[2,1,-5],\ B[1,2,\ -3]$.

Řešení: Využijeme vztah (2):

$$|AB| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (-3+5)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\,j.$$



Obr. 6: Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost dvou bodů je $\sqrt{6}$ jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/fwjh43hd

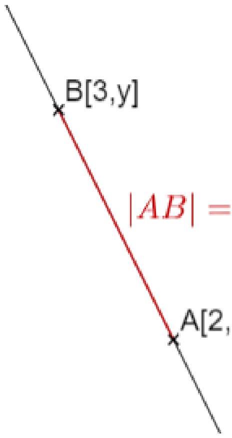
Příklad 1.3: Jsou dány body $A[2,1]$, $B[3,y]$. Určete číslo y tak, aby $|AB| = \sqrt{5}$.

Řešení: Výsledek získáme vyřešením rovnice, která vychází ze vztahu (1) pro výpočet vzdálenosti dvou bodů:

$$\sqrt{(3-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$1 + (y-1)^2 = 5,$$

$$(y-1)^2 = 4.$$



Obr. 7: Vzdálenost dvou bodů

Dostáváme dvě řešeníy_1, y_2:

$$y_1 - 1 = 2 \qquad y_1 = 3,$$

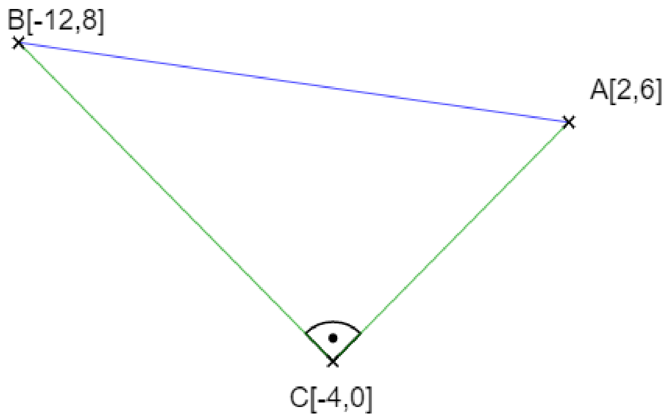
$$y_2 - 1 = -2 \qquad y_2 = -1.$$

Řešeními příkladu jsou body $B_1[3,3]$ a $B_2[3,-1]$.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/y9yg6bmb

Příklad 1.4: Dokažte, že trojúhelník *ABC*, kde $A[2,6], B[-12,8]$, $C[-4,0]$, je pravoúhlý.

Řešení:



Obr. 8: Pravoúhlý trojúhelník ABC

Určíme si velikosti všech stran:

$$|AB| = \sqrt{(-12-2)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{196+4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\ j,$$
$$|BC| = \sqrt{(-4+12)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}\ j,$$
$$|CA| = \sqrt{(2+4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ j.$$

Nyní ověříme platnost Pythagorovy věty v trojúhelníku *ABC:*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2,$$
$$(10\sqrt{2})^2 = (8\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2,$$
$$100 \cdot 2 = 64 \cdot 2 + 36 \cdot 2,$$
$$200 = 128 + 72,$$
$$200 = 200.$$

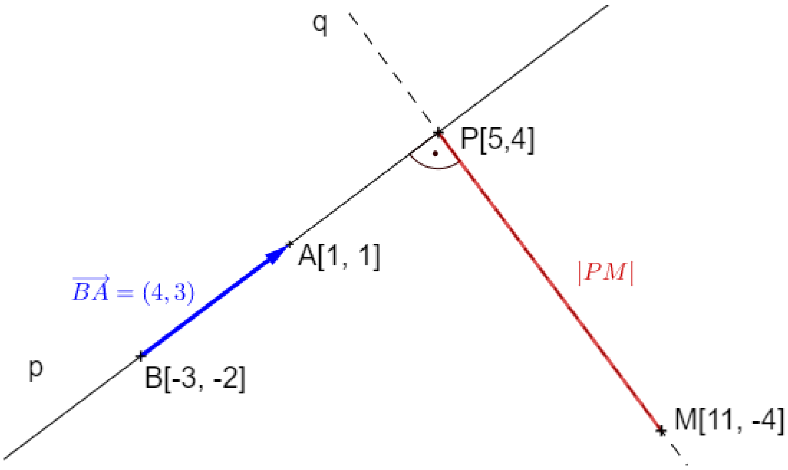
Trojúhelník *ABC* je pravoúhlý.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/ahsvatzf

3.2 Vzdálenost bodu od přímky

Příklad 2.1 Určete vzdálenost bodu M od přímky AB. Je-li dáno: $M[11,-4], A[1,1]$, $B[-3,-2]$.

Řešení: Bodem *M* povedeme kolmici *q* k přímce *p(AB)*. Poté najdeme patu kolmice *P*, což je průsečík přímek *p* a *q*. Určíme vzdálenost d=$|MP|$.



Obr. 9: Vzdálenost bodu M od přímky p

Přímka *p* je dána body *A*, *B*. Určíme směrový vektor $\overrightarrow{BA}$. Přímku *p* vyjádříme parametricky:

$$\overrightarrow{BA} = (4,3),$$

$$p: X = A + \overrightarrow{BA} \cdot t,$$

$$x = 1 + 4t,$$

$$y = 1 + 3t \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

Nyní vytvoříme obecnou rovnici přímky *q*, která je dána bodem *M* a normálovým vektorem $\vec{n}$. Normálový vektor $\vec{n}$ přímky *q* je směrový vektor $\overrightarrow{BA}$ přímky *p*:

$$\vec{n} = (4,3),$$

$$q: 4x + 3y + c = 0,$$
$$4 \cdot 11 + 3 \cdot (-4) + c = 0,$$
$$c = -32,$$

$$q: 4x + 3y - 32 = 0.$$

Najdeme patu *P* průnikem přímek *p* a *q*. A to tím, že dosadíme parametrické vyjádření přímky *p* do obecné rovnice přímky *q* za neznámé *x* a *y*. Rovnici vyřešíme a dostaneme parametr *t*, který zpět dosadíme do parametrického vyjádření přímky *p* a získáme patu *P*:

$$4 \cdot (1 + 4t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 32 = 0,$$

$$t = -1,$$

$x = 1 + 4 \cdot (-1) = 5,$
$y = 1 + 3 \cdot (-1) = 4, \qquad P[5, 4].$

Nakonec stačí spočítat vzdálenost dvou bodů:

$$d = |MP| = \sqrt{(11-4)^2 + (-4-4)^2} = 10j.$$

Vzdálenost daného bodu od přímky je 10 jednotek.

Druhou možností výpočtu je použití parametrického vyjádření obou přímek a následné řešení soustavy rovnic:

$$p: X = A + \overrightarrow{BA} \cdot t,$$
$$x = 1 + 4t,$$
$$y = 1 + 3t;\ t \in \mathbb{R}.$$

Směrový vektor přímky *q* je kolmý na směrový vektor přímky *p*. Vytvoříme ho tak, že prohodíme souřadnice vektoru $\overrightarrow{BA}$ a u jedné změníme znaménko:

$$\vec{u} = (3, -4),$$

$$q: X = M + \vec{u} \cdot s,$$

$$x = 11 + 3s,$$

$$y = -4 - 4s\ ;\ s\ \in \mathbb{R}.$$

Následně vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$1 + 4t = 11 + 3s,$

$\underline{1 + 3t = -4 - 4s},$

$4t - 3s = 10 \qquad /\cdot 4,$

$\underline{\;3t + 4s = -5} \qquad /\cdot 3,$

$16t - 12s = 40,$

$\underline{9t + 12s = -15},$

$25t = 25,$
$t = 1.$

Po zjištění hodnoty, která náleží t, můžeme patu P jednoduše dopočítat dosazením parametru *t* do parametrického vyjádření přímky *p*:

$x = 1 + 4 \cdot 1 \qquad x = 5,$

$y = 1 + 3 \cdot 1 \qquad y = 4, \qquad P[5{,}4].$

Pokud chceme použít parametr *s* a jeho dosazení do parametrického vyjádření přímky *q*, musíme parametr s dopočítat z jedné z rovnic.

Třetí možností je použití vzorce, který je zformulován takto:

$$d = |MP| = \frac{|am_1+bm_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Dosazujeme koeficienty obecné rovnice přímky $p\colon ax + by + c = 0$ a bod $M(m_1, m_2)$. Máme tedy přímku *p*, která je dána body *A*, *B*. Určíme směrový vektor $\overrightarrow{BA}$. Z něhož utvoříme normálový vektor prohozením souřadnic a změnou znaménka:

$$\overrightarrow{BA} = (4{,}3), \vec{n} = (3, -4),$$

$$p\colon 3x - 4y + c = 0,$$

$$3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + c = 0,$$

$$c = 1,$$

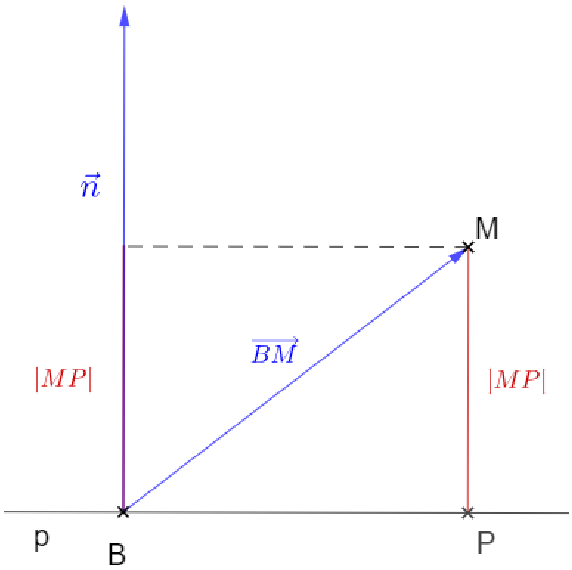
$$p\colon 3x - 4y + 1 = 0.$$

Známe i bod $M[11, -4]$. Do vzorce dosadíme:

$$d = \frac{|3 \cdot 11 - 4 \cdot (-4) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{50}{5} = 10j.$$

Vzdálenost daného bodu od přímky je 10 jednotek.

Další možné řešení staví na tom, že vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je rovna vzdálenosti bodu *M* od jeho kolmého průmětu *P* do přímky *p*.



Obr. 10:Vzdálenost bodu M od jeho kolmého průmětu P

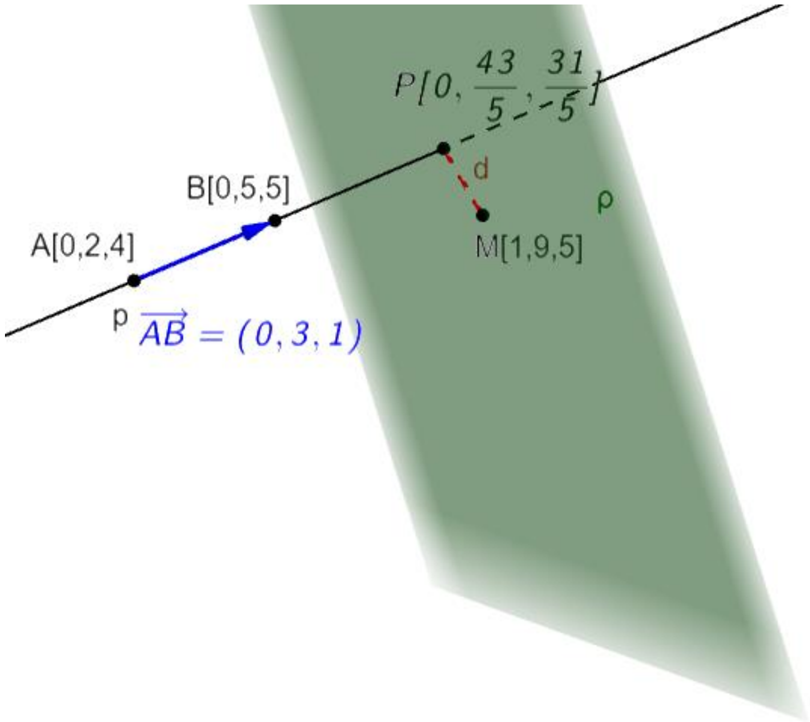
Pro vzdálenost bodu *M* od přímky *p*, určené bodem *B* a normálovým vektorem *n*, potom platí:

$$d = |MP| = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad . \tag{4}$$

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/qyu8rnry

Příklad 2.2: Určete vzdálenost d bodu M od přímky p, která je daná body A a B. Je-li dáno: $M[1,9,5], A[1,2,4], B[0,5,5]$.

Řešení: Vzdáleností bodu M od přímky p rozumíme vzdálenost bodu M a paty kolmice P. Bodem M povedeme rovinu ρ kolmou k přímce p. Proto, abychom mohli vytvořit rovinu, která zahrnuje bod M a je kolmá k přímce p, potřebujeme směrový vektor $\overrightarrow{AB}$. Směrový vektor $\overrightarrow{AB}$ přímky p je současně normálový vektor roviny ρ.



Obr. 11: Vzdálenost bodu M od přímky AB

Přímka AB je určena směrovým vektorem $\overrightarrow{AB} = (0,3,1)$, body $A[0,2,4]$ a $B[0,5,5]$. Její parametrické vyjádření vypadá následovně:

$$p: \begin{aligned} x &= 0 + 0t, \\ y &= 5 + 3t, \\ z &= 5 + t; t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rovinu vyjádříme obecnou rovnicí takto:

$$\rho: 0x + 3y + z + c = 0.$$

Nyní dosadíme do rovnice bod M:

$$0 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 5 + c = 0,$$

$$c = -32,$$

$$\rho: 3y + z - 32 = 0.$$

Průsečík *P* roviny a přímky zjistíme vyřešením soustavy rovnic. Parametrické vyjádření přímky dosadíme za neznámé *x*, *y*, *z* do obecné rovnice roviny:

$$0 + 3 \cdot (5 + 3t) + (5 + t) - 32 = 0,$$
$$15 + 9t + 5 + t - 32 = 0,$$
$$t = \frac{6}{5}.$$

Průsečík *P* dopočítáme dosazením parametru do parametrické rovnice přímky *p*:

$$x = 0,$$
$$y = 5 + 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{43}{5},$$
$$z = 5 + \frac{6}{5} = \frac{31}{5},$$
$$P\left[0, \frac{43}{5}, \frac{31}{5}\right].$$

Nakonec určíme vzdálenost dvou bodů a tím je úloha vyřešena.

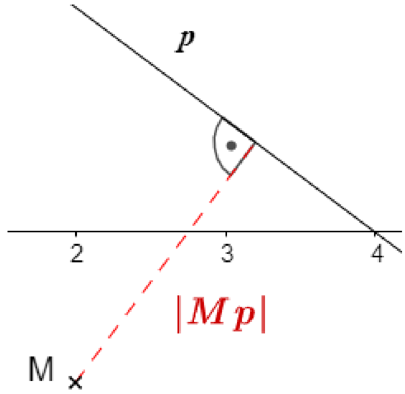
$$d = |PM| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(9 - \frac{43}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{31}{5}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5} \doteq 1{,}61\ j$$

Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je $\frac{\sqrt{65}}{5}$ jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/pcmnf4u3

Příklad 2.3: Určete vzdálenost bodu $M[2,\ -1]$ od přímky p: $3x + 4y - 12 = 0$.

Řešení:



Obr. 12:Vzdálenost bodu od přímky

Vidíme, že v zadání máme uveden bod *M* a přímku, proto využijeme vztah (3). Zadáme do vztahu souřadnice a dostaneme hledanou vzdálenost:

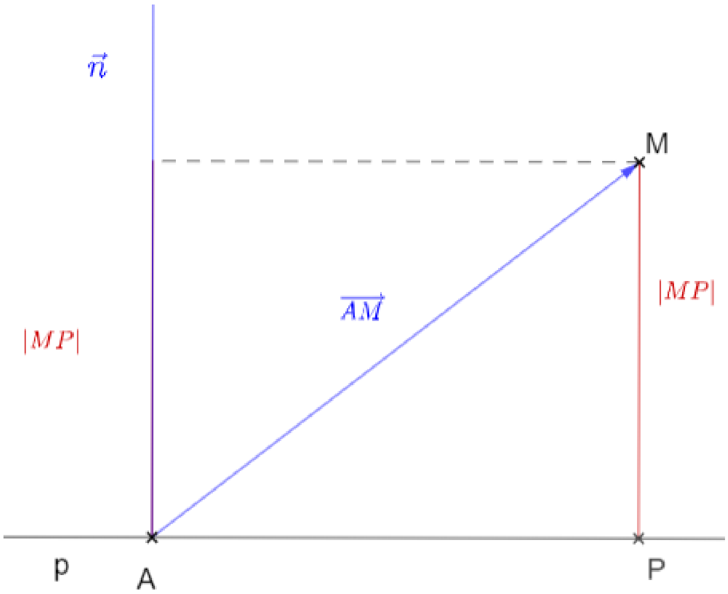
$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2\ j.$$

Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je 2 jednotky.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/d6efuafs

Příklad 2.4: Určete vzdálenost bodu $M[2,4]$ od přímky p: $x = 6 + 3t, y = -8 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pro řešení tohoto příkladu si můžeme zvolit vztah (4). Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je rovna vzdálenosti bodu *M* od jeho kolmého průmětu *P* do přímky *p*.



Obr. 13: Vzdálenost bodu M od jeho kolmého průmětu P

Zjistíme normálový vektor $\vec{n}$ přímky *p* a směrový vektor $\overrightarrow{AM}$, kdy bod *A* je bod přímky *p* se souřadnicemi $[6, -8]$. Normálový vektor získáme prohozením souřadnic a změnou znaménka směrového vektoru přímky *p*. Platí tedy:

$$\overrightarrow{AM} = (-4,12)\ ,\ \vec{n} = (4,3),$$

$$|MP| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

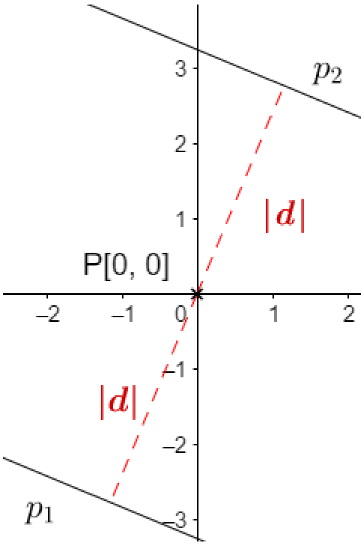
$$|MP| = \frac{|(-4,12) \cdot (4,3)|}{|(4,3)|} = \frac{20}{5} = 4\, j.$$

Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* je 4 jednotky.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/epc4jcyh

Příklad 2.5: Mezi všemi přímkami $5x + 12y + c = 0$ najděte tu, jejíž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je *d=3*.

Řešení:



Obr. 14:Vzdálenost přímek od počátku soustavy souřadnic

Pro řešení této úlohy využijeme znalost vztahu (3). Ze zadání úlohy dosadíme známé koeficienty. Počítáme vzdálenost přímky od počátku soustavy souřadnic, který je dán souřadnicemi $[0, 0]$. Sestavíme rovnici, kterou následně vyřešíme:

$$3 = \frac{|5 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + c|}{\sqrt{5^2 + 12^2}},$$

$$3 \cdot 13 = |c|,$$

$$c_1 = 39,$$

$$c_2 = -39.$$

Přímky, jenž splňují zadání, jsou $p_1: 5x + 12y + 39 = 0$ *s* c_1 *a* $p_2: 5x + 12y - 39 = 0$ *s* c_2.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/uyfhvhsd

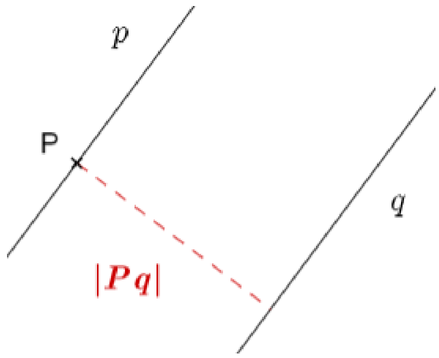
3.3 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Výpočet vzdálenosti dvou rovnoběžných přímek můžeme převést na výpočet vzdálenosti libovolného bodu jedné z přímek od druhé přímky. Vzdálenost rovnoběžných přímek můžeme určit jako vzdálenost přímek v rovině jimi určené nebo pomocí roviny kolmé k oběma přímkám (Pomykalová 2009). Pokud obecné rovnice přímek $\mathrm{p}: \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$ a $\mathrm{q}: \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{d} = 0$ mají stejné koeficienty a a b, můžeme použít vztah, který je odvozený ze vzorce (3).

$$|pq| = \frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{5}$$

Příklad 3.1: Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $p: 8x - 6y + 3 = 0, q: 8x - 6y - 3 = 0$.

Řešení: Vzdálenost přímek p a q vypočteme tak, že si určíme libovolný bod P z přímky p.



Obr. 15: Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Zvolíme si libovolně například $x = 0$. Dopočítám souřadnici y dosazením $x = 0$ do rovnice přímky p:

$$8 \cdot 0 - 6y + 3 = 0,$$

$$y = \frac{1}{2}.$$

Hledaný bod přímky p je tedy $P\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Nyní můžeme použít vzorec (3) z předchozího oddílu:

$$d = \frac{\left|8 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{10} = 0{,}6\ j.$$

V zadání vidíme, že koeficienty a a b jsou v obecných rovnicích přímek stejné, tudíž můžeme použít vzorec (5):

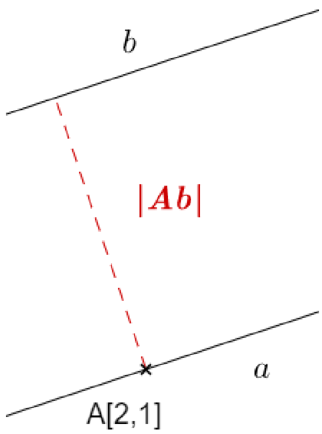
$$|pq| = \frac{|3 - (-3)|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{6}{10} = 0{,}6\ j.$$

Vzdálenost přímek p a q je 0,6 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/c7cu5cb6

Příklad 3.2: Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $a: x = 2 - 3t, y = 1 - t, t \in \mathbb{R}, b: 2x - 6y + 5 = 0$.

Řešení: V následujícím příkladu budeme postupovat podobně jako v předchozím, akorát máme výhodu, že přímka a je vyjádřena parametricky, takže rovnou vidíme bod přímky. Opět využijeme vzorec (3).



Obr. 16: Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Bod přímky a má souřadnice[2,1]. Dosadíme do vztahu:

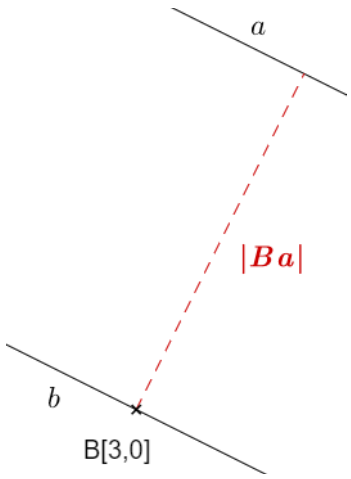
$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \doteq 0{,}47\ j.$$

Vzdálenost přímek a a b je přibližně 0,47 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/tgasxy8g

Příklad 3.3: Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $a: x = 1 - 2t, y = 3 + t, t \in \mathbb{R}, b: x = 3 - 2s, y = s, s \in \mathbb{R}$.

Řešení: Obě přímky jsou zadány parametricky. Řešení uskutečníme tím, že jednu parametrickou rovnici přímky převedeme na obecnou rovnici přímky.



Obr. 17: Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Vyjádříme parametr t a porovnáme, upravíme a dostaneme obecnou rovnici přímky a:

$$\frac{1-x}{2} = y - 3,$$

$$x + 2y - 7 = 0.$$

Známe bod přímky b o souřadnicích [3,0]. Opět použijeme vzorec (3):

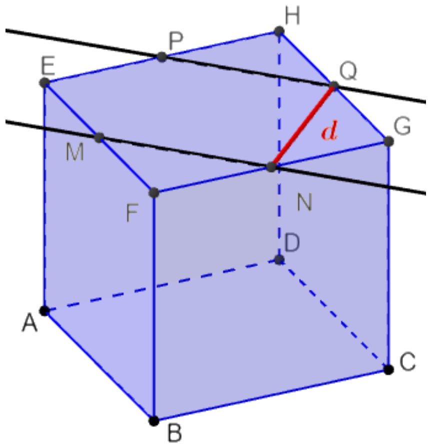
$$d = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \doteq 1{,}79\ j.$$

Vzdálenost přímek p a q je přibližně 1,79 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/kfhqmzcb

Příklad 3.4: Je dána krychle *ABCDEFGH* o hraně délky $a = 6cm$. Body *M, N, P, Q* jsou po řadě středy hran *EF, FG, EH, GH*. Určete vzdálenost přímek *MN* a *PQ*.

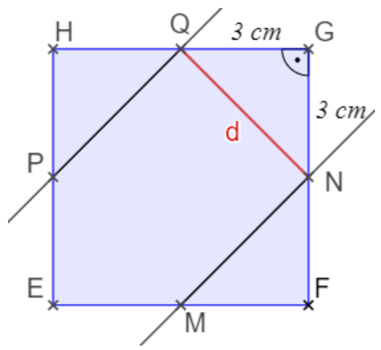
Řešení: Pro lepší pochopení příkladu by mohla být nápomocná grafická reprezentace.



Obr. 18: Vzdálenost přímek MN a PQ

Vidíme, že úlohou je určit vzdálenost dvou rovnoběžných přímek nebo také vzdálenost dvou bodů. Při řešení nyní použijeme informaci, že krychle má stranu délky 6 a příklad vyřešíme pomocí Pythagorovy věty. Vybereme si tedy pravoúhlý trojúhelník *NGQ* z horní podstavy, určíme délku jeho přilehlých stran a vypočítáme přeponu. Vzdálenost *NG* a *GQ* je polovina strany *a*, takže 3cm. Nyní stačí vypočítat přeponu *QN=d:*

$$d = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,cm.$$



Obr. 19 : Užití Pythagorovy věty

Vzdálenost přímek *MN* a *PQ* je $3\sqrt{2}\ cm$.

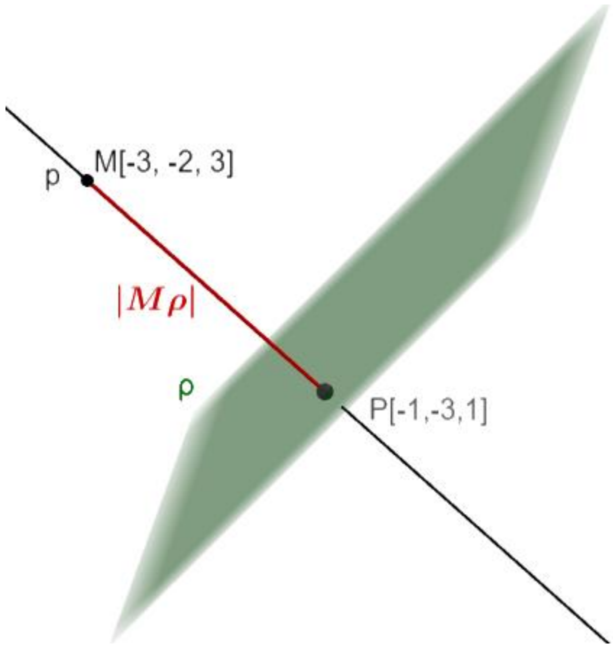
https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/eg85pdct

3.4 Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu od roviny můžeme určit jako vzdálenost bodu v prostoru a bodu roviny. Bod roviny je pata kolmice spuštěné z bodu v prostoru na rovinu. Příklad se tedy spočítá jako vzdálenost dvou bodů. Dále se dají využít vzorce, které najdete níže.

Příklad 4.1: Určete vzdálenost bodu M $[-3,\ -2,\ 3]$ od roviny ρ: $2x - y - 2z + 1 = 0$.

Řešení: Vzdálenost bodu M od roviny ρ je rovna velikosti nejkratší úsečky vedené od bodu M k rovině ρ. Proto povedeme kolmici p k rovině ρ bodem M. Tím určíme patu kolmice a označíme ji jako bod P, který je průsečíkem kolmice p a roviny ρ. Příklad se tedy vypočítá jako vzdálenost dvou bodů.



Obr. 20: Vzdálenost bodu od roviny

Vytvoříme parametrickou rovnici přímky p, která je kolmá na rovinu ρ a prochází bodem M. Normálový vektor roviny je směrový vektor přímky. Parametrická rovnice přímky p vypadá takto:

$$x = -3 + 2t,$$

$$y = -2 - t,$$

$$z = 3 - 2t;\ t \in \mathbb{R}.$$

Následně určíme průsečík přímky p a roviny ρ. Dosadíme parametrické vyjádření přímky p do obecné rovnice roviny ρ. Vyřešíme rovnici a dostaneme t, které dosadíme zpět do parametrické rovnice přímky. Tím vypočteme souřadnice paty:

$$2 \cdot (-3 + 2t) - (-2 - t) - 2 \cdot (3 - 2t) + 1 = 0,$$

$$-6 + 4t + 2 + t - 6 + 4t + 1 = 0,$$

$$t = 1,$$

$$x = -3 + 2 = -1,$$
$$y = -2 - 1 = -3,$$
$$z = 3 - 2 = 1,$$

$$P[-1, -3, 1].$$

Nakonec spočítáme vzdálenost bodů M a P:

$$|PM| = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-2 + 3)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{9} = 3j.$$

Druhou možností výpočtu může být využití vzorce. Vzdálenost bodu $M[m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ je vyjádřena vzorcem:

$$v = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (6)$$

Dosadíme údaje ze zadání:

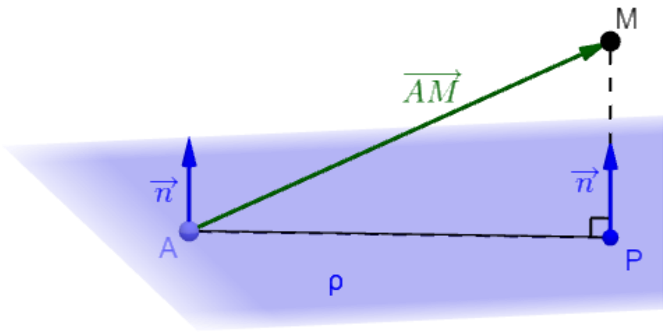
$$v = \frac{|2 \cdot (-3) + -1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3j.$$

Vzdálenost bodu M od roviny ρ je 3 jednotky.

Úlohu lze řešit také následovně. Vzdálenost bodu M od roviny ρ je rovna vzdálenosti bodu M od jeho kolmého průmětu P do roviny ρ:

$$|M\rho| = |PM|.$$

Pro vzdálenost bodu M od roviny ρ, určené bodem A a normálovým vektorem $\vec{n}$, můžeme tvrdit, že vzdálenost je velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AM}$ do jednotkového vektoru $\vec{n}$.



Obr. 21: Vzdálenost bodu M od roviny ρ

Potom platí:

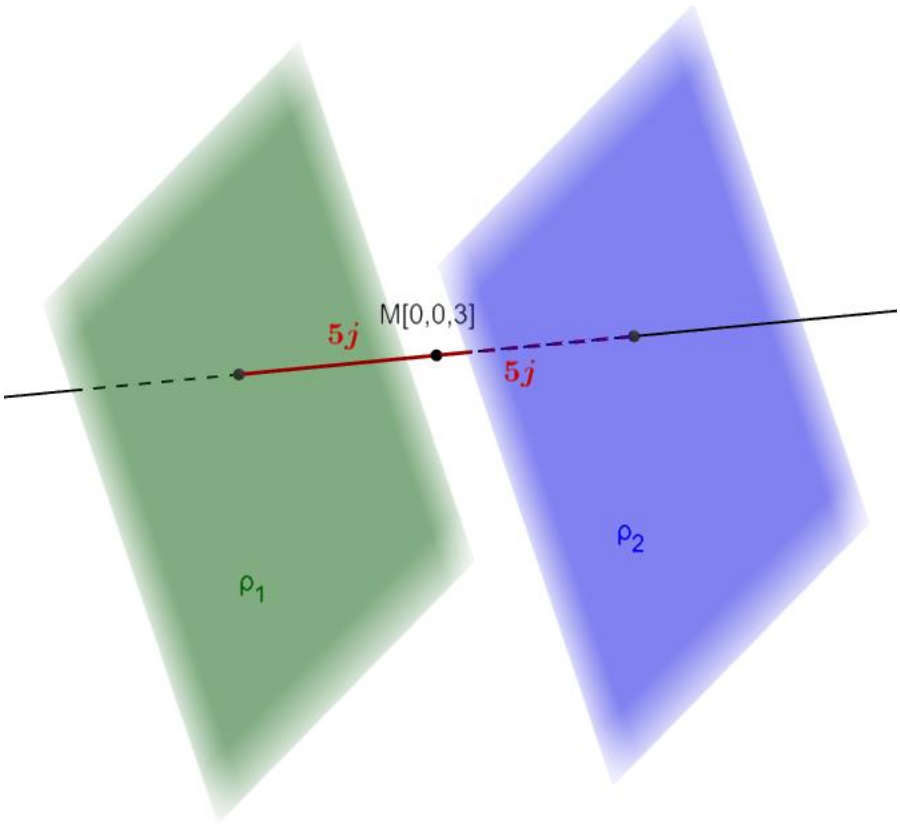
$$d = |M\rho| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \tag{7}$$

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/pvvsxmyy

Příklad 4.2: Určete hodnotu parametru d tak, aby vzdálenost bodu $\mathrm{M}[0,0,3]$ od roviny ρ: $4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2\mathrm{z} + \mathrm{d} = 0$ byla 5.

Řešení: Využijeme vztah (6), do kterého dosadíme všechny známé čísla ze zadání:

$$5 = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}}.$$



Obr. 22: Vzdálenost bodu M od roviny ρ

Rovnici vyřešíme:

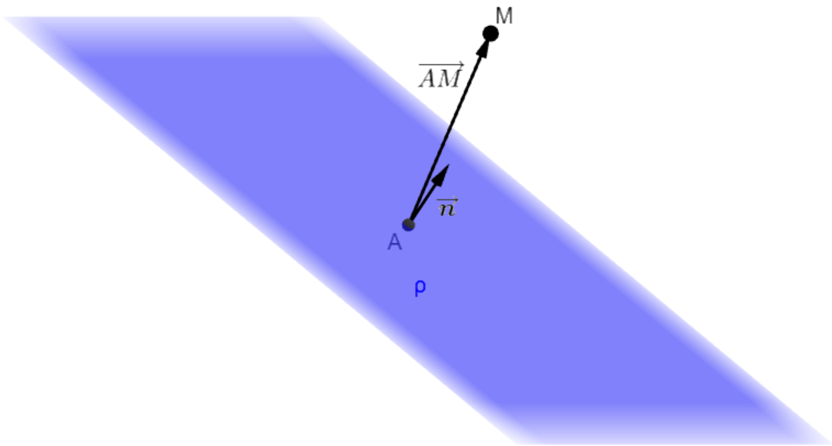
$$30 = |6 + d|,$$
$$d_1 = 24,$$
$$d_2 = -36.$$

Aby vzdálenost bodu M od roviny ρ byla 5, musí rovnice roviny vypadat následovně ρ_1: $4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2\mathrm{z} + 24 = 0$ a ρ_2: $4\mathrm{x} - 4\mathrm{y} + 2\mathrm{z} - 36 = 0$.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/cvy9bdhh

Příklad 4.3: Určete vzdálenost bodu $M[5,-1,7]$ od roviny ρ, která je určená bodem $A[2,0,0]$ a normálovým vektorem $\vec{n}=(2,-1,3)$.

Řešení: Pro vzdálenost bodu M od roviny ρ, určené bodem A a normálovým vektorem $\vec{n}$, potom platí vztah (7).



Obr. 23 : Vzdálenost bodu M a roviny ρ

Proto zjistíme směrový vektor $\overrightarrow{AM}=(3,-1,7)$. Dosadíme:

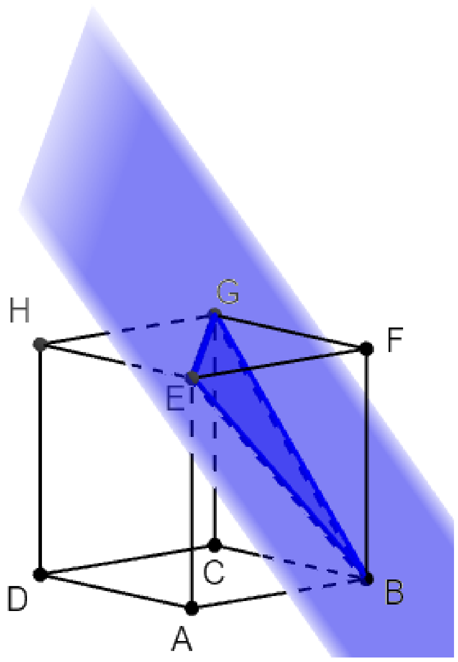
$$d=|M\rho|=\frac{|(3,-1,7)\ \cdot(2,-1,3)|}{|(2,-1,3)|}=\frac{|6+1+21|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}\doteq 7{,}48\ j\ .$$

Vzdálenost bodu M od roviny ρ je přibližně 7,48 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/qqm2xne2

Příklad 4.4: Určete vzdálenost bodu *F* od roviny *BEG* procházející vrcholy krychle *ABCDEFGH*, jejíž hrana má délku $a = 1\ cm$. Bod *A* má souřadnice $[0, 0, 0]$, B$[0, 1, 0]$ a C$[-1, 1, 0]$.

Řešení: Abychom mohli spočítat vzdálenost bodu *F* od roviny *BEG*, musíme znát souřadnice bodů *F*, *E*, *G*. Toto je důležité pro sestavení obecné rovnice roviny.



Obr. 24: Vzdálenost bodu od roviny

V zadání máme souřadnice bodů *A*, *B*, *C*, z nich odvodíme souřadnice bodů *FEG*. Souřadnice bodů odvodíme z bodů pod nimi. Délka strany krychle je 1 cm, tudíž jsou body vyzdviženy do výše o 1 cm. Změní se tedy jejich zetová souřadnice. Souřadnice bodů jsou $F[0, 1, 1]$, $E[0, 0, 1]$, $G[-1, 1, 1]$. Rovina je určena 3 body. Vytvoříme 2 směrové vektory roviny. Normálový vektor roviny určíme tak, že vypočítáme vektorový součin směrových vektorů roviny:

$$\overrightarrow{BE} = (0, -1, 1), \overrightarrow{BG} = (-1, 0, 1), \vec{n} = (-1, -1, -1).$$

Obecnou rovnici roviny vytvoříme z normálového vektoru a bodu roviny. Normálový vektor určuje koeficienty *a*, *b*, *c* obecné rovnice roviny *BEG*. Následně dosadíme jakýkoliv bod roviny do rovnice pro získání *d:*

$$-\mathrm{x} - \mathrm{y} - \mathrm{z} + \mathrm{d} = 0,$$

$$-0 - 1 - 0 + \mathrm{d} = 0,$$
$$d = 1,$$
$$-\mathrm{x} - \mathrm{y} - \mathrm{z} + 1 = 0.$$

Na dokončení výpočtu použijeme vzorec (6):

$$v = \frac{|-1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ cm.$$

Vzdálenost bodu F od roviny BEG je $\frac{1}{\sqrt{3}}\ cm.$

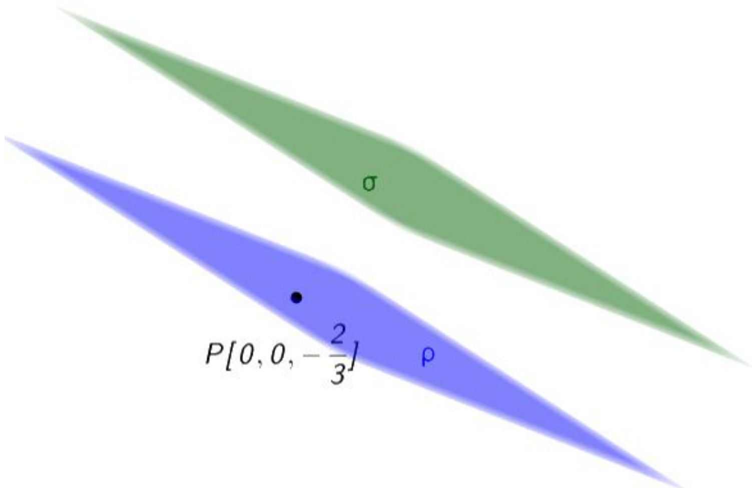
https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/jpctuvu8

3.5 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin lze převést na vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.

Příklad 5.1: Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\rho: 2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\mathrm{z} + 2 = 0$ a $\sigma: 4x - 2y + 6z - 1 = 0$.

Řešení:



Obr. 25: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ vypočteme tak, že si určíme libovolný bod P z roviny ρ. Zvolíme si libovolně například $x = 0, y = 0$. Dopočítám souřadnici y dosazením $x = 0$ do rovnice roviny ρ:

$$2 \cdot 0 - 0 + 3z + 2 = 0,$$
$$z = -\frac{2}{3}.$$

Bod P, který leží v rovině ρ má souřadnice $\left[0, 0, -\frac{2}{3}\right]$. Následně použijeme vzorec (6) z předešlého oddílu:

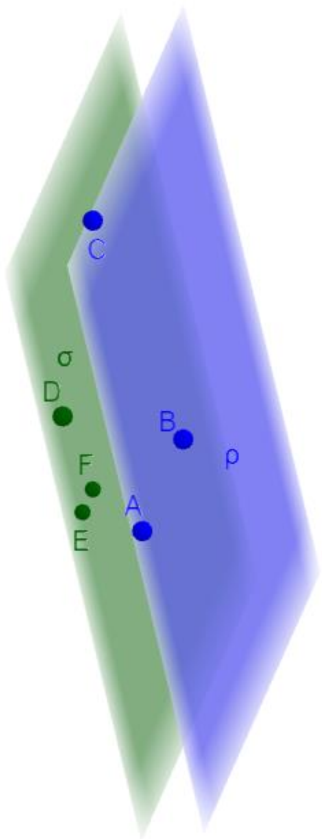
$$v = \frac{\left|4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{5}{\sqrt{56}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{28} \doteq 0{,}67j.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ je 0,67 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/w7f35b7s

Příklad 5.2: Jsou dány dvě rovnoběžné roviny ρ a σ. Rovina ρ je zadána body $A[2, 0, 0], B[0, 4, 0], C[0, 1, 6]$. Rovina σ je zadána body $D[0, 0, 2], E\left[\frac{1}{2}, 0, 0\right], F[0, 1, 0]$. Určete vzdálenost těchto dvou rovin.

Řešení: K vyřešení příkladu potřebujeme znát alespoň jednu obecnou rovnici roviny a bod druhé roviny, abychom mohli využít vzorec (6).



Obr. 26: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ

Obecnou rovnici ρ vytvoříme pomocí známých bodů *A*, *B*, *C*. Vypočteme dva směrové vektory $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0)$ a $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 6)$. Vektorovým součin směrových vektorů roviny vytvoříme normálový vektor $\vec{n} = (24, 12, 6)$, který ještě můžeme upravit na $\vec{n} = (4, 2, 1)$, Následně dosadíme bod *A* z roviny ρ pro získání *d:*

$$4x + 2y + z + d = 0$$

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 + d = 0$$

$$d = -8$$

$$\rho\colon 4x + 2y + z - 8 = 0$$

Nakonec dosadíme známou obecnou rovnici roviny ρ a bod *D* z roviny σ:

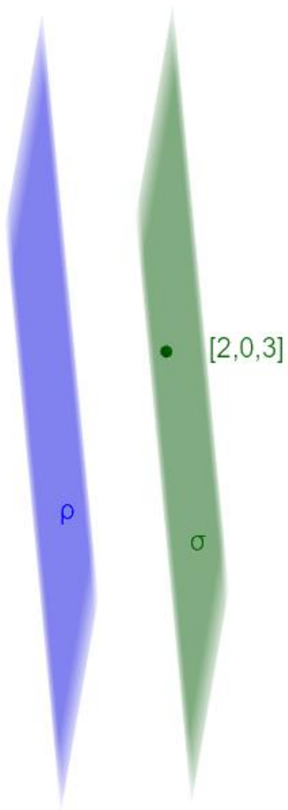
$$v = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 - 8|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} \doteq 1{,}31\, j.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ je 1,31 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/e6xrcavj

Příklad 5.3: Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ: $20x + 10y + 2z + 3 = 0$ a $\sigma = \{[2 + t, -t + 2s, 3 - 5t - 10s], t, s \in \mathbb{R}\}$.

Řešení: V následujícím příkladu budeme postupovat obdobně jako v příkladu, kdy máme obě roviny vyjádřeny obecnou rovnicí. Zde máme výhodu, že je rovina σ vyjádřena parametricky, takže rovnou vidíme bod roviny. Bod roviny σ je dán souřadnicemi $[2, 0, 3]$.



Obr. 27: Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

Opět využijeme vzorec (6):

$$v = \frac{|20 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{20^2 + 10^2 + 2^2}} = \frac{49}{\sqrt{504}} = \frac{49}{6\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{12} \doteq 2{,}18j.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ρ a σ je 2,18 jednotek.

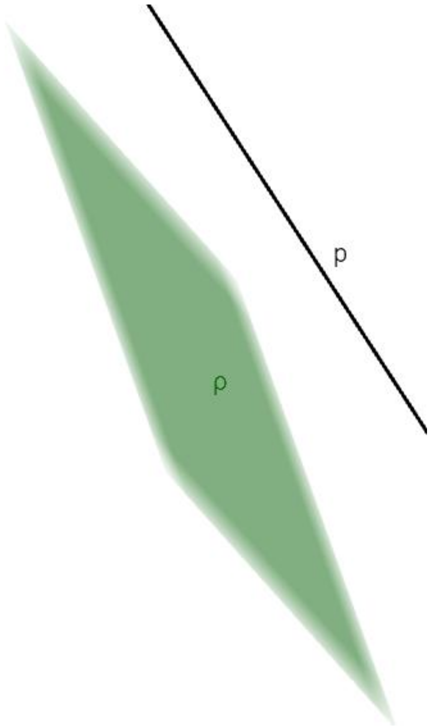
https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/zngdyskj

3.6 Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny.

Příklad 6.1: Určete vzdálenost přímky $p: x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = 3 - t;\ t \in \mathbb{R}$ a roviny $\rho: 3x - y + z + 1 = 0$.

Řešení: V parametrickém vyjádření přímky vidíme bod přímky *p*. Bod označíme jako *M* a má souřadnice $[2, 1, 3]$.



Obr. 28: Vzdálenost přímky p od roviny ρ s ní rovnoběžné

Příklad je tedy převeden na typ vzdálenost bodu *M* od roviny ρ, proto využijeme vzorec (6):

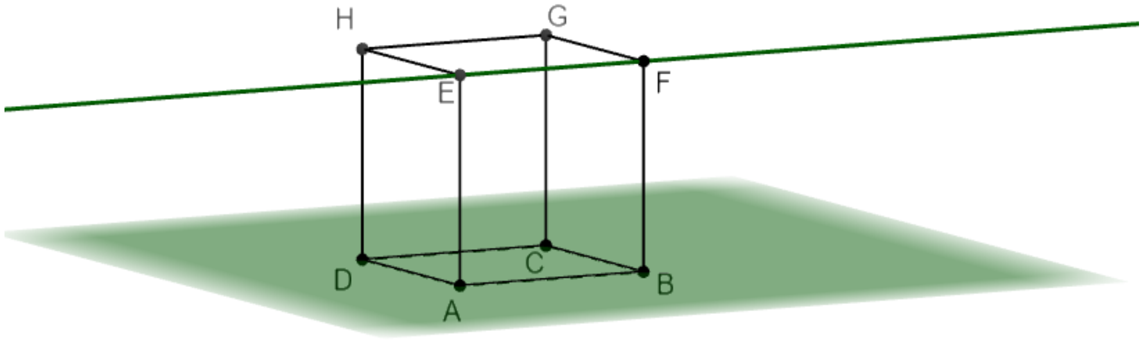
$$v = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11} \doteq 2{,}71\ j.$$

Vzdálenost přímky *p* a s ní rovnoběžné roviny ρ je2,71 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/wjw5srmx

Příklad 6.2: Je dána krychle *ABCDEFGH* o hraně délky $a = 1\ cm$. Určete vzdálenost roviny *ABC* a přímky *EF*. Bod *A* má souřadnice $[0, 0, 0]$, $\mathrm{B}[0, 1, 0]$ a $\mathrm{C}[-1, 1, 0]$.

Řešení: Díky obrázku vytvořenému v programu GeoGebra, vidíme, že vzdálenost roviny *ABC* a přímky *EF* je rovna délce hrany krychle. Bez výpočtů můžeme dospět k výsledku.



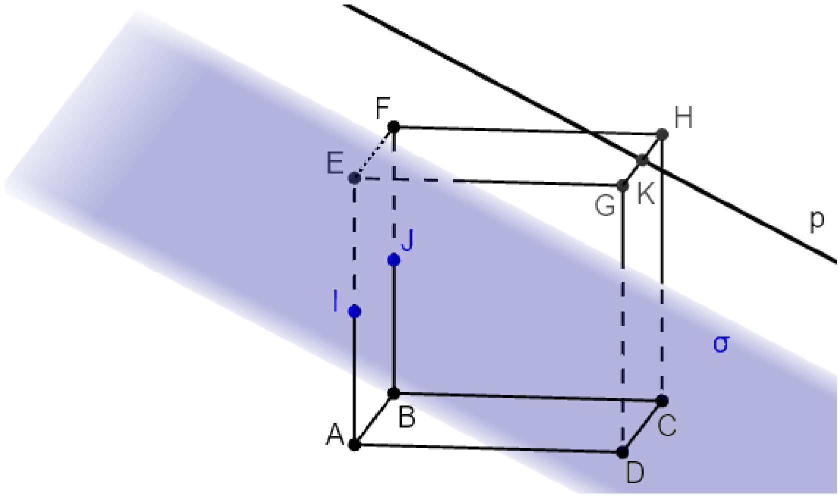
Obr. 29: Vzdálenost přímky EF a roviny ABC

Vzdálenost roviny *ABC* a přímky *EF* je *1 cm*.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/pgguhtqx

Příklad 6.3: Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete vzdálenost roviny σ a přímky *p*. Rovina σ je určena body *I, J, D, C*. Přímka *p* je rovnoběžná s rovinou σ a obsahuje bod *K*. Body *I, J, K* jsou středy hran. Bod *A* má souřadnice $[0, 0, 0]$, $B[0, 4, 0]$ a $C[-4, 4, 0]$.

Řešení: Nejprve potřebujeme určit souřadnice tří bodů, abychom mohli vytvořit obecnou rovnici roviny. Zde si zvolíme například *I, J* a bod *C*, jehož souřadnice známe. Bod *I* má souřadnice $[0, 0, 2]$, protože délka hrany je *4 cm*, což vychází ze souřadnic známých bodů ze zadání, a bod *I* se nachází v polovině hrany *AE*. Bod *J* má souřadnice $[0, 4, 2]$.



Obr. 30: Vzdálenost roviny σ a přímky p

Vytvoříme 2 směrové vektory roviny. Normálový vektor roviny určíme tak, že vypočítáme vektorový součin směrových vektorů roviny:

$$\overrightarrow{CI} = (4, 4, 2), \overrightarrow{CJ} = (4, 0, 2), \vec{n} = (4, 0, 16).$$

Obecnou rovnici roviny vytvoříme z normálového vektoru a bodu roviny. Normálový vektor určuje koeficienty *a*, *b*, *c* obecné rovnice roviny σ. Následně dosadíme jakýkoliv bod roviny do rovnice pro získání *d:*

$$\begin{aligned} 4x + 0y + 16z + d &= 0, \\ 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 16 \cdot 2 + d &= 0, \\ d &= -32, \\ 4x + 16z - 32 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní stačí zjistit souřadnice bodu *K*. Bod *K* je na ose *x* ve vzdálenosti -4, na ose *y* ve vzdálenosti 2 a na ose *z* ve výšce 4 od počátku souřadnic. Souřadnice bodu *K* jsou tedy $[-4, 2, 4]$. Úloha se dá převést na vzdálenost roviny a bodu, pro jejíž výpočet známe vzorec (6), do kterého dosadíme:

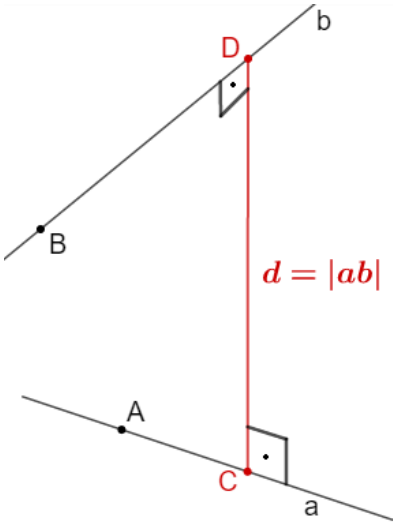
$$v = \frac{|4 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + 16 \cdot 4 - 32|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 16^2}} = \frac{16}{\sqrt{272}} \doteq 0{,}97\ j.$$

Vzdálenost přímky *p* od roviny σ s ní rovnoběžné je 0,97 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/tpahszqt

3.7 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je rovna délce jejich nejkratší příčky, která je k oběma mimoběžným přímkám kolmá. Když zjistíme krajní body příčky, můžeme použít výpočet pro vzdálenost dvou bodů.

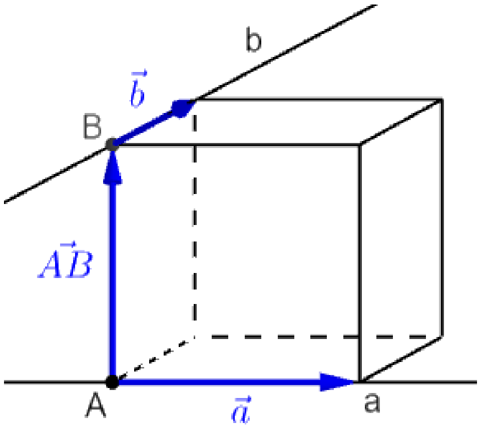


Obr. 31: Vzdálenost dvou mimoběžek a a b

Jiné řešení příkladů je postaveno na poznatku, že příčka *CD* je kolmým průmětem úsečky *AB* do osy mimoběžek. Vzdálenost *d(CD)*= $|ab|$ spočítáme jako velikost kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AB}$ do směru vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$d = |ab| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} \quad . \tag{8}$$

Také si můžeme představit dvě mimoběžné přímky jako části hran rovnoběžnostěnu. Přímka *b* je součástí dolní podstavy a přímka *a* je součástí horní podstavy, jak můžete vidět na obrázku níže. Pak se vzdálenost přímek *a* a *b* rovná vzdálenosti podstav, což je výška rovnoběžnostěnu. Platí vztah: $výška = \frac{objem}{obsah\ podstavy}$, který je po dosazení totožný se vztahem (8).



Obr. 32: Vzdálenost dvou mimoběžek a a b

Příklad 7.1: Určete vzdálenost mimoběžek a, b, kde přímka a je dána bodem $A[4, 2, -2]$ a směrovým vektorem $\vec{a} = (1, 1, 1)$, přímka b je dána bodem $B[1, 0, 2]$ a směrovým vektorem $\vec{b} = (0, -2, 1)$.

Řešení: Vzdálenost mimoběžek a, b je rovna délce jejich nejkratší příčky *CD*, která je k oběma mimoběžkám kolmá. Bod *C* leží na přímce *a* a bod *D* leží na přímce *b*. Ze zadání vyjádříme rovnicemi body *C* a *D* a spočítáme vektor $\overrightarrow{CD}$:

$$C = [4, 2, -2] + (1, 1, 1) \cdot s,$$

$$D = [1, 0, 2] + (0, -2, 1) \cdot t,$$

$$\overrightarrow{DC} = (3, 2, -4) + (1, 1, 1) \cdot s - (0, -2, 1) \cdot t,$$

$$\overrightarrow{DC} = (3 + s, 2 + s + 2t, -4 + s - t).$$

Vektor $\overrightarrow{DC}$ musí být kolmý k oběma směrovým vektorům přímek. Takže řešíme, kdy se skalární součiny rovnají 0: $\overrightarrow{DC} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{DC} \cdot \vec{b} = 0$. Dostaneme 2 rovnice o 2 neznámých, které vyřešíme:

$$\begin{aligned} 3 + s + 2 + s + 2t - 4 + s - t &= 0, \\ \underline{-4 - 2s - 4t - 4 + s - t} &\underline{= 0,} \\ 1 + 3s + t &= 0, \\ \underline{-8 - s - 5t} &\underline{= 0,} \end{aligned}$$

$$s = \frac{3}{14}, t = -\frac{23}{14}.$$

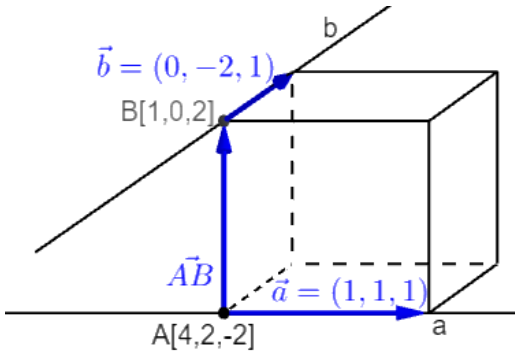
Parametry dosadíme do rovnic, které jsou výše a získáme souřadnice bodů *C* a *D* a vektor $\overrightarrow{DC}$:

$$C\left[\frac{59}{14},\frac{31}{14},-\frac{25}{14}\right], D\left[1,\frac{23}{7},\frac{5}{14}\right], \overrightarrow{DC}=\left(\frac{45}{14},-\frac{15}{14},-\frac{15}{7}\right).$$

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek *a* a *b* je zde převedena na vzdálenost dvou bodů *C* a *D*: $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{\left(\frac{45}{14}\right)^2+\left(-\frac{15}{14}\right)^2+\left(-\frac{15}{7}\right)^2} = \frac{15\sqrt{14}}{14} \doteq 4{,}01\ j.$

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek *a* a *b* je 4,01 jednotek.

Když si představíme dvě mimoběžné přímky *a* a *b* jako části hran rovnoběžnostěnu, zjistíme, že jeho výška je hledaná vzdálenost.



Obr. 33: Vzdálenost dvou mimoběžných přímek a a b

Směrový vektor $\overrightarrow{AB}$ je $(-3,-2,4)$ a vektorový součin $\vec{a}\times\vec{b}$ je $(3,-1,-2)$. Vše dosadíme do vzorce (8):

$$d = |ab| = \frac{|(-3,-2,4)\ \cdot\ (3,-1,-2)|}{|(3,-1,-2)|} = \frac{|-9+2-8|}{|(3,-1,-2)|} = \frac{15}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{15\sqrt{14}}{14} \doteq 4{,}01\ j.$$

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek *a* a *b* je přibližně 4,01 jednotek.

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau#material/vk46yhve

4 Závěr

V bakalářské práci jsem se zabývala Řešením úloh z analytické geometrie v prostředí programu GeoGebra. Práce by mohla sloužit jako studijní materiál příkladů zaměřených na výpočet vzdálenosti geometrických útvarů v rovině a prostoru. Vytvořila jsem kolekci 24 příkladů, které jsou vyřešeny klasickým způsobem, u některých je doplněna i jiná, méně obvyklá možnost řešení. Příklady jsou obohaceny ilustracemi, které jsem zpracovala v programu GeoGebra. Na náhled vytvořeného apletu odkazuje webová adresa a QR kód. Oba způsoby jsou uvedeny za příkladem. V programu GeoGebra tak vznikla ucelená kniha, která je doplňkem k mé bakalářské práci. Zde na ni přikládám odkaz:

https://www.geogebra.org/m/hgc9huau

5 Seznam použité literatury

Česká terminologická komise Jednoty čs. matematiků a fyziků a vědeckého kolegia matematiky ČSAV. Slovník středoškolské matematiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. Matematika pro gymnázia. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

KUBÁT, Josef, Josef PILGR a Dag HRUBÝ. Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-030-6.

MŠMT. Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky 2014 [online]. [cit. 2019-11-12]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ-17-18.pdf

POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-079-9.

Portál IS/STAG 2020. Pedagogická fakulta. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [online]. [cit. 2019-11-12]. Dostupné z: https://wstag.jcu.cz/portal/

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. [online]. Praha: MŠMT, 2007. 35 s. [cit. 2020-12-04]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2017. 35 s. [cit. 2019-11-12]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/

Standardy pro základní vzdělávání. 2013. Matematika a její aplikace [online]. [cit. 2019-11-12]. Dostupné z: ttps://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832

Studijní plány 2019/2020. Pedagogická fakulta. Univerzita Karlova. Praha. [online]. [cit. 2019-11-12]. Dostupné z: http://studium.pedf.cuni.cz/karolinka/2019/plany.html

PROGRAM GEOGEBRA 2020 [online]. Dostupné z: http://geogebra.org