Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti

Vypracovala: Kristýna Nováková
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2021

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma *Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti* jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 21.4.2021 …………………………

Poděkování

Mé poděkování patří Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnoval.

Anotace

Bakalářská práce je zaměřena na úlohy pro rozvoj prostorové představivosti. V práci jsou popsány některé pojmy, které jsou s prostorovou představivostí spojeny. Je to například schopnost, vnímání prostoru, nebo samotná představivost. K rozvoji prostorové představivosti napomáhají i různé pomůcky, které jsou v práci také zmíněné. Práce obsahuje jednak rešerši učiva základních a středních škol, rešerši didaktických přijímacích a maturitních zkoušek, ale i informace o testech prostorových schopností. Bakalářská práce je zakončena sadou úloh, která slouží k rozvoji prostorové představivosti.

Abstract

Bachelor thesis is focused on exercises for development of spatial imagination. Concepts that are connected with spatial imagination are described in my thesis. For example, the ability for space perception or the imagination itself. For the help of spatial imagination development are mentioned a few aids. The thesis contains a recherche of elementary curriculum and high school curriculum, a recherche of didactic entrance's exams and maturita exams and information about tests of spatial imagination. The bachelor thesis ends with an excercise which serve for the spatial imagination development.

Obsah

Úvod

Prostorová představivost je schopnost, která potřebuje, stejně jako všechny ostatní schopnosti člověka, procvičovat a rozvíjet už jen proto, abychom dokázali lépe fungovat v reálném světě. Pokud bychom neměli dostatečně rozvinutou prostorovou představivost, mohlo by to vést například ke špatné orientaci na mapě, tudíž bychom mohli třeba zabloudit ve městě. Při řízení auta bychom mohli špatně couvat a mohli by nastat další podobné situace, ve kterých se bez prostorové představivosti zkrátka neobejdeme.

K rozvoji prostorové představivosti existují různé pomůcky, jako je třeba tangram, soma kostka nebo origami. I na základních a středních školách je prostorová představivost součástí učiva, viz MŠMT (2021), což vede k tomu, že úlohy, které se budou zabývat prostorovou představivostí, budou obsaženy v přijímacích i maturitních didaktických testech. Dále pro rozvoj prostorové představivosti jsou vytvořené různé testy, které v práci uvádím.

Cílem mé práce je provést rešerši jednak dostupné literatury a dalších zdrojů pojednávajících o rozvoji prostorové představivosti a učiva matematiky na základních a středních školách. V mé práci také pojednávám o testech prostorových schopností, jako je například orientace v prostoru, vytváření prostorových představ nebo mentální manipulace s nimi, jejich obsahu a vztahu k učivu matematiky ZŠ a SŠ.

Na začátku práce jsou uvedeny pro pochopení problému jednotlivé pojmy, jako je například představivost, vnímání prostoru, či samotný vývoj prostorové představivosti. Dále jsou uvedeny některé pomůcky, nejen ze školního prostředí, sloužící pro rozvoj prostorové představivosti. Následuje rešerše učiva základních a středních škol, přijímacích a maturitních didaktických testů. Předposlední kapitola je zaměřena na testy, které se zabývají prostorovou představivostí. Závěrečnou částí práce je sada úloh, jejíž obsahem jsou příklady podporující rozvoj této schopnosti s řešením.

1. Prostorová představivost

Několik autorů přišlo s definicemi prostorové představivosti. Avšak některé se navzájem od sebe liší.

Říčan (2010) rozdělil prostorovou představivost na tři prakticky důležité schopnosti. Jako první je prostorová orientace, která nám pomáhá k určování polohy člověka v jeho okolí. Další je vizualizace. Tato schopnost nám dokáže pomoci k představě, do jakých vzájemných interakcí se dostanou předměty, které změní svou danou polohu. Poslední schopností je kinetická představivost, která nám pomáhá k tomu, abychom mohli dát dohromady výsledný obraz několika pohybů, které probíhají zároveň.

Slovenští matematici Perenčaj a Repáš (1985) definovali prostorovou představivost takto: *„Mohli by sme povedať, že je to akési videnie priestoru. Ale ten predsa musí vidieť každý, kto vidí. Problém je v tom, že nestačí priestor vidieť, ale je nutné si ho i uvedomovať."*

Gardner (1999) nepracuje přímo s prostorovou představivostí, ale s prostorovou inteligencí. Říká, že jádrem prostorové inteligence jsou schopnosti, které zajišťují vizuální vnímání světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytváření myšlenkové představy z vlastní vizuální zkušenosti, i když už žádné vnější podněty nepůsobí.

Prostorovou představivost definuje Molnár (2009) jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.

Spousta autorů nenazývá představivost prostorovou ale geometrickou.

Jedním z autorů je například František Kuřina. Podle něj je geometrická představivost jednou ze složek názorného myšlení, díky které si dokážeme vybavovat geometrické útvary včetně jejich vlastností. (Kuřina. 1987)

Dušek také nehovoří o prostorové představivosti, ale o představivosti geometrické. Věnuje se tedy rozvoji představivosti s geometrickým obsahem. Prosazuje názor, že nejde jen o to, aby si jedinec dokázal objekt představit, ale aby ho uměl také zanalyzovat, doplnit či přetvořit. (Molnár, 2009)

Vesměs se všechny definice shodují v tom, že prostorová nebo geometrická představivost je určitá schopnost.

1.1. Schopnost

V psychologickém slovníku je schopnost popsána jako soubor předpokladů nutných k úspěšnému vykonávání určitých činností, dovedností, které se vyvíjejí na základě vrozených dispozic, a to učením. (Hartl, 2009)

Sillamy (2001) schopnost vnímá jako přirozenou a získanou dispozici k vykonávání určitých úkolů.

Na metodickém portálu spravovaném Národním pedagogickým institutem České republiky, jsou popsány výkonové vlastnosti, včetně shromáždění informací o schopnostech. (Štěpánková, 2012)

1.2. Vnímání prostoru

Plháková (2004) vnímání, neboli percepci, definuje jako organizaci a interpretaci senzorických informací. Je to tedy jakýsi proces, jehož výsledkem jsou vjemy, které se mnohdy značně liší od neúplných údajů zaznamenaných našimi smysly. Podstatou vnímání je odhalování smysluplných celků v chaotických senzorických informacích, které probíhá v lidské mysli.

Konkrétně o vnímání prostoru píše Čechová (1996). Díky této schopnosti dokážeme přijít na vlastnosti různých věcí. Jak jsou velké, jaký mají tvar, jak jsou daleko od nás, odkud přichází zvuk, ale také sem patří vnímání zrakové. Zrak nám slouží k tomu, abychom si dokázali uvědomit, kde jsou předměty umístěné v prostoru. Jestli jsou vpravo, vlevo, nahoře, dole, vpředu nebo vzadu. Samozřejmě při vnímání prostoru jsou důležité komplexně všechny již zmíněné schopnosti – zrakové, pohybové, hmatové a sluchové.

Pokud bychom měli v rukách barevnou šestistěnnou kostku, která má na každé stěně jinou barvu a za úkol bychom měli načrtnou síť této kostky, pak nám pomůže, když si kostku budeme postupně otáčet a pozorovat ji, jak se dané barvy mění. Díky tomu, správně určíme rozklad krychle tak, aby barvy na síti měly správné umístění. Při tomto úkolu využíváme zrak, hmat i pohyb. V sadě úloh v kapitole 8 této práce je příklad č.1 strana 46, který simuluje tento případ.

Plháková (2004) píše ve své učebnici: *„Vizuální podněty z trojrozměrného světa dopadají na dvojrozměrný povrch sítnice,* odkud jsou *v podobě nervových impulsů odeslány do mozku. Ve skutečnosti není důležité, že sítnice má pouze dva rozměry, protože mozek tak jako tak zpracovává pouze nervové impulsy. Ty však obohacují informace,* *které po dešifrování umožňují vnímání vzdálenosti, tedy třetího rozměru. Některé z* nich *jsou zprostředkovány jediným okem, zatímco jiné získáváme s pomocí obou očí.“*

1.2.1. Monokulární vodítka

Pokud člověk má schopné pouze jedno oko, nebrání mu to v tom, aby tak nemohl získat velké množství informací o okolí, ve kterém se nachází. Prostorové vidění umožňují tzv. monokulární vodítka, která napomáhají lidem, kteří mají jedno oko z nějakého důvodu poškozené. (Plháková, 2004)

1. **Interpozice**

   Interpozice se týká rozmístění objektů v prostoru. Pokud se tedy objekty překrývají v percepčním poli, můžeme tak říci, který objekt je nám blíž a který je vzdálenější.

2. **Lineární perspektiva**

   S touto perspektivou se setkáme také v běžném životě, kdy tento jev můžeme pozorovat na železničních kolejí. Zdá se nám, že čím dál se na koleje díváme, kolejnice se přibližují k sobě, jako kdyby se měly překřížit. My však ale víme, že koleje jsou rovnoběžné, a proto se spolu nikdy nepotkají.

3. **Atmosférická perspektiva**

   Tato perspektiva se zabývá vzdálenějšími objekty, jako jsou například hory na obzoru, nebo různě vzdálené vysoké komíny, které nemůže člověk zřetelně vidět kvůli složení vzduchu. V ovzduší jsou kromě atmosférických plynů různé kouře, prach ale i smog.

4. **Relativní velikost**

   Pokud hledíme na místo, kde se nachází více stejných předmětů, budeme předpokládat, že objekty, které jsou menší, jsou od nás vzdáleny více než předměty, které se jeví větší.

5. **Relativní výška**

   Tato výška se opět zabývá pohledem, kdy vidíme dva nebo více stejných objektů, které mají z našeho pohledu ale stejnou velikost. Pokud tedy nedokážeme rozlišit jejich velikost, jako vzdálenější předmět budeme vnímat ten, který je výš.

6. **Gradient**

   Gradient je také označován jako spád struktury. Přejíždíme-li zrakem po určité oblasti, dochází k plynulým změnám vnímané členitosti povrchu, velikosti objektů v terénu i hustoty jejich rozmístění. Toto monokulární vodítko využívají například piloti při přistávání s letadlem.

7. **Pohybová paralaxa**

   Pohybová paralaxa se zabývá zřetelným rozdílem v rychlosti a směru pohybů. Jako příklad si uvedeme jízdu autem. Pokud jedeme autem a soustředíme se na směr jízdy, pak nás míjejí patníky rychleji a v opačném směru, než jedeme. Zatímco slunce se po obloze pohybuje společně s námi. Můžeme tedy říci, že bližší předměty se vždy pohybují rychleji, ať už v opačném nebo ve stejném směru.

1.2.2. Binokulární vodítka

Plháková (2004) rozlišuje dvě důležitá vodítka, které využívají senzorické údaje z obou očí, se nazývají binokulární.

1. **Binokulární konvergence**

   Pokud se budeme dívat na nějaký předmět a budeme ho od sebe oddalovat nebo přibližovat, pak naše oči se budou stáčet k sobě či od sebe. Když tedy držíme v ruce autíčko a dáme si ho k obličeji, naše zornice budou blíže, než když naopak autíčko od nás oddálíme. Díky těmto informacím si pak můžeme vydedukovat, jak je předmět od naší osoby vzdálen.

2. **Binokulární disparita**

   K dokonalému prostorovému vidění přispívá to, že naše oči jsou na obličeji umístěné od sebe průměrně 6,5 cm. Každé oko tak vnímá svět z trošku jiného úhlu. Pokud se zaměříme ne jeden objekt a budeme střídat zavírání pravého a levého oka, budou se nám měnit obrazy. Ze sítnice každého oka pak putuje do mozku odlišná informace o obrazu, která se následné spojí s informací z druhého oka a vznikne tak jediný trojrozměrný vjem.

1.3. Představivost

Schopný člověk si dokáže představit téměř cokoli. Vybaví si pohyblivé předměty, ale i nepohyblivé, různá přetvoření objektů, pootočení atd. Dokáže také předvídat, co nastane s objektem po několika následujících krocích. (Molnár, 2009)

Na publikačním systému Publi.cz Plecerová a Pužejová popsaly vznik a typy představ. Rozdělujeme celkem tři typy představivosti. Vizuální typ, který nám umožňuje lépe si vybavit takové předměty, které jsou zrakově názorné, výrazné. Můžeme zde najít různé obrazy, mapy, nákresy atd. Auditivní typ je zaměřen na sluchově názorné vybavení si. Pamatujeme si zkrátka to, co jsme už někdy v minulosti slyšeli. Poslední je motorický typ. V tomto typu je středem pozornosti pohyb. Snadno a lépe se nám vybaví takové představy, které jsou pohybově názorné. Co sám zatančím, napíšu, namaluji. Můžeme sem tedy zahrnout sport nebo například tanec. Nevybavují se ve vědomí náhodou. Základem je vybavení si zafixovaných stop v mozkové kůře. Přítomny jsou asociační zákony, které rozlišujeme na primární a sekundární. (Plecerová, 2016)

1.3.1. Primární asociační zákony

Plecerová (2016) uvádí, že do primárních asociačních zákonů spadá zákon dotyku v prostoru a čase. Takové představy jsou spojené s danou situací, polohou, osobou. Vybaví se, když jsme v opakující se situaci, s tou samou osobou. Může to být například návštěva u prarodičů v době oběda, kdy babička vždy nandá na talíř více knedlíků, než si řekneme, a proto už si příště řekneme méně knedlíků, než bysme chtěli a babička jich tam pak nandá akorát. Jako další máme zákon podobnosti a kontrastu. Pokud se setkáme s cizím člověkem a v hlavě nám proběhne, že má stejný oblek jako můj známý, tak se bavíme právě o tomto asociačním zákoně.

1.3.2. Sekundární asociační zákony

Sekundárními zákony rozumíme zákon novosti, časnosti a živosti. Zákon novosti spočívá logicky v tom, že novější prožité situace se nám vybaví lépe než zážitky, které jsme absolvovali mnohem dříve. Zákon časnosti se opírá o situace, které se často opakují. Takovéto situace se nám také lépe vybaví. Poslední ze sekundárních zákonů je zákon živosti. Věci, které v minulosti upoutali naši pozornost, si rozhodně představíme lépe než věci, které nás nezaujali. (Plecerová, 2016)

1.4. Vývoj prostorové představivosti

Jelikož je prostorová představivost schopnost, víme o ní, že se rozvíjí díky geneticky podmíněným a vrozeným dispozicím jedince. Není žádné období, kdy by se dalo říct, že se právě v tomto vývojovém stádiu prostorová představivost nerozvíjí. Můžeme rozvoji pomoci získáváním nových zkušeností, dovedností, vědomostí nebo zájmů. (Molnár, 2009)

Myslím si, že už v batolecím věku je prostorová představivost přítomna. Dokážeme nakreslit například auto, které před sebou momentálně nevidíme. Pro rozvoj je nejideálnější předškolní věk, jelikož nastává k jeho rozvoji posléze nejvíce času, kdy můžeme prostorovou představivost zdokonalovat. Samozřejmě i v dospělosti si také dokážeme prostorovou představivost velice dobře zlepšit různými tréninkovými cvičeními.

Podle Stopencové (Molnár, Perný, Stopencová, 2006) je jedním z úkolů výchovně vzdělávací činnosti ve stereometrii na základní škole rozvoj schopností zaměřený na správném:

- vytvoření představ o tvarech základních geometrických útvarů v prostoru – bod, přímka, krychle, kvádr aj.,
- určení vzájemné polohy útvarů v prostoru – rovnoběžnost, kolmost, podobnost, shodnost aj.,
- určení, o jaký pohyb geometrických útvarů v prostoru jde – posouvání, otočení, překlápění, aj.,
- představení si různé transformace a operace se základními geometrickými útvary v prostoru – odebírání částí, vytváření složených těles, rozvinutí sítě tělesa, aj.,
- zanalyzování vlastností geometrických útvarů – velikost, vzdálenost, odchylka, objem, povrch

1.5. Pomůcky pro rozvoj prostorové představivosti

Značnou rozvojovou hodnotu má využití různých modelů při výuce, tréninku, nebo nějakém cvičení. Daný předmět si osaháme, nebo si ho můžeme rovnou celý sami vytvořit. V současné době jsou čím dál tím aktuálnější počítačové softwary zaměřené na modelování, jako je například GeoGebra.

Pokud je dítě ve školním věku, je dobré si pomoci při řešení úloh náčrtem, který můžeme různě upravovat. Názorný obrázek může ulehčit daný problém tím, že si určitý objekt rozebere na části, které již zná. Poté si předmět opět složí nazpět a dojde tak k závěru. Ke zlepšení dojde také, pokud si budeme opakovat různé učivo. Ve stereometrii je například dobré pracovat s úlohami, které jsou slovně zadané, jelikož řešitel si musí v hlavě představit, s čím může vlastně pracovat a jak vypadá zadání. Prostorová představivost se neuplatňuje pouze v matematice, proto ji můžeme rozvíjet i v jiných předmětech. Jde například o výtvarnou výchovu, technickou výchovu, deskriptivní geometrie a jiné. I v různých soutěžích mimo školní prostředí se dá samozřejmě prostorová představivost rozvíjet. Bavíme se tak o Matematickém klokanovi, Matematické olympiádě nebo dalších obdobných soutěží.

Dítěti v předškolním věku pomáhají k rozvoji především didaktické hry. Mohli bychom sem zařadit například tangram, IQ puzzle, hlavolamy, soma kostku i kostky obyčejné. Dále k rozvoji prostorové představivosti dochází například i při běžném aktivním životě a při hře v trojrozměrném prostoru.

Následují pomůcky se mohou zahrnout i do výuky na základní škole, aby došlo k oživení hodin matematiky.

1.5.1. Náčrt

Kresby od ruky, neboli náčrty, můžeme říct i skici, jsou základním prostředkem vyjadřování člověka, který by měl být vždy prováděn pomocí tužky. Pokud bychom použili pero nebo třeba fix, stěží pak budeme upravovat náčrt. (Kletečka, 2007)

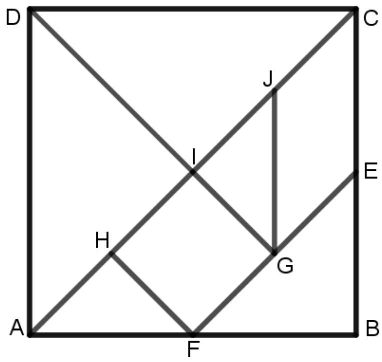
1.5.2. Tangram

Čínský hlavolam, tangram, nabírá neustále na své popularitě, avšak podložených informací o vzniku tangramu moc není. Patří k nejstarším, a i nejoblíbenějším skládacím hlavolamům. Zato legend o tomto hlavolamu je spousty. Jedné z nich je autorem americký odborník na hlavolamy Sam Loyd. Podle něj hlavolam před 4000 lety stvořil bůh Tan a popsal jej v „Tanových knihách". Obsahem každé z knih bylo přes 1000 hlavolamů, které měly představovat *stvoření světa a původ lidstva.* Dnes však s jistotou můžeme říct, že jde opravdu jen o smyšlenou legendu. Kdybychom si tangram rozložili na slovo *tan* a *gram*, tak můžeme říct, že přípona *gram* vyjadřuje nápis nebo kresbu. Avšak problémem je slovo *tan*. Někteří si myslí, že jde o zkomoleninu zastaralého anglického slova *trangram*, které znamená hlavolam nebo klenot. Nejpravděpodobnější varianta je, že je výraz odvozený od dynastie Tang, která byla natolik známá, že se několikrát stala synonymem slova čínský. Pokud je toto pravda, pak by tangram byl skutečně *Čínským hlavolamem*. (Botermans, 2004)

Existuje několik set podobných hlavolamů různé obtížnosti a tvaru. Úkol této skládačky je složit jednotlivé dílky, kterých je sedm a jejich název jsou *tany* podle muže jménem *Tan,* do požadovaného tvaru. V základním rozpoložení to nemusí být pouze čtverec, ale můžou to být různé tvary, jako jsou například číslice, auto nebo domeček atd. (Loyd, 2007)

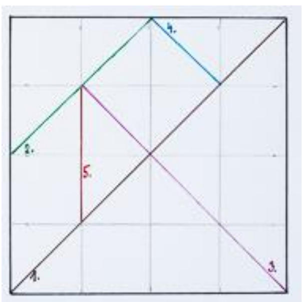
Jednotlivé dílky tangramu jsou rozřezány podle *obrázku 1*. Musí pak platit:

- $|AF| = |FB| = |BE| = |EC|$
- $|FG| = |GE|$
- $|GJ| = |CE|$
- Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé a rovnoramenné.



Obrázek 1 - Rozvržení tangramu

Momentálně na trhu existuje několik forem tangramu. Můžeme ho najít ve dřevěné podobě, plastové, nebo různého tvaru, nejen čtverce. Na internetu najdeme i několik návodů, jak si svůj vlastní tangram vyrobit.



Obrázek 2 – Návod na výrobu tangramu
Dostupné z: https://www.unimagnet.cz/clanek/188/magneticky-tangram-poskladejte-obrazce-z-barevnych-folii/

Obrázek 3 - Dřevěný tangram
Dostupné z: https://www.space4kids.cz/dreveny-tangram-pro-1-2-hrace/

1.5.3. Soma kostka

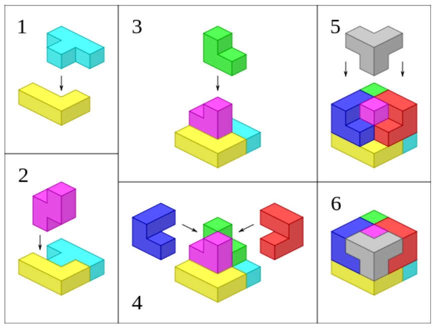
Soma kostka je svým způsobem 3D tangram. Též se skládá ze sedmi dílků, ze kterých se dá složit opět nespočet tvarů. Byla objevena během přednášky o kvantové fyzice Dánem Pietem Heinem v roce 1936, kterého přednáška od Wernera Heisenberga nudila. (Jančařík, 2007)

Kostku však nevytvořil tak, že by ji například rozřezal na jednotlivé dílky. Naopak zkonstruoval všechny nepravidelné díly, které se skládají ze čtyř krychliček a k nim přidal jeden dílek skládající se pouze ze tří kostek, viz *obrázek 4*. Pokud bychom spočítali počet všech krychliček z jednotlivých dílků, dostali bychom počet 27 $(6 \times 4 + 3 = 27)$. Z 27 kostek se ale také skládá krychle o rozměrech $3 \times 3 \times 3$. Přemýšlel během přednášky tedy nad tím, zda se z jednotlivých dílků dá složit krychle a když přišel domů z přednášky, zkonstruoval pak svou první soma kostku. Piet, autor kostky, také přišel na to, že se dá složit až 240 různými způsoby. (Chronicles, 2019)

Proč se soma kostka nazývá právě soma? Název je odvozen od drogy z románu *Konec civilizace aneb Překrásný nový svět* od Aldouse Huxleyho. Droga vzbuzuje v uživatelích pocit, jako kdyby byli ve světe svých snů. (Botermans, 2004)

Obrázek 4 – Dílky soma kostky

Obrázek 5 – Soma Kostka



Obrázek 6 – Návod na složení soma kostky Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Soma_cube#/media/File:Soma_cube_solution.svg

1.5.4. Origami

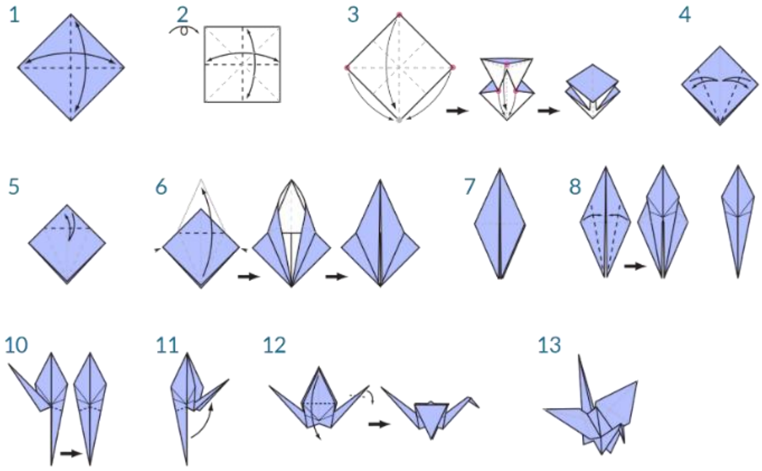
Další způsob, jak rozvíjet prostorovou představivost, je origami. Origami, skládání z papíru, má dlouhou tradici v Japonsku. Slovo origami se skládá ze dvou čínských znaků. Prvek na levé straně je kořen slova, který naznačuje etymologický původ znaku. Význam znaku vlevo nahoře znamená „skládat“ - *oru*. Vlevo dole je pak radikál, který vyjadřuje „papír“ – *kami*. Dohromady tak dají oba znaky slovo „skládat papír“ *(oru-kami – origami)*. (Grebeníček, 2012)

Obrázek 7 – Čínský znak origami Dostupné z: https://new.origami.cz/index.php/Origami

Skládání jako takové existovalo mnohem dříve než papír. Místo papíru se při skládání používaly listy dračinky, vějířovité palmy nebo roztloukané kůry morušovníku. V roce 105 před naším letopočtem byl zdokonalen proces výroby papíru. Od této doby se začal papír používat i k uměleckému, intelektuálnímu i duševnímu vyjadřování a také jako prostředek ke zdokumentování různých obchodů. Do Evropy se však toto umění dostalo až v posledních 200 letech. (Smith, 2007)

Z papíru se dá složit v podstatě jakýkoliv tvar, zvíře, zkrátka cokoli. Mezi nejznámější skládanku patří jeřáb, orizuru. Jeřáb totiž patří mezi tradiční japonské symboly dlouhého života, a proto si ho lidé skládají a mají ho pak jako symbol štěstí. Jako symbol se také použil na známém památníku dětským obětem v Hirošimě, kde je znázorněno děvčátko, které drží v ruce papírového jeřába. (Janoš, 1986)

Obrázek 8 – Památník v Hirošimě
Dostupné z: https://www.pikist.com/free-photo-isdhn/cs



Obrázek 9 – Návod na složení orizuru
Dostupné z: https://www.nazdi.cz/2016/02/dynamo-vizualni-programovani.html

1.5.5. Anaglyfy

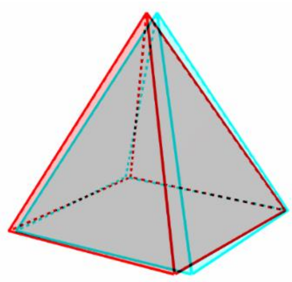
Postupem času se do výuky zařazovaly technologie. Na různých zařízeních jako je počítač, tablet či mobil si můžeme zobrazit anaglyfy, což jsou dvojice rovinných útvarů sestrojené ve stereoskopickém promítání.

Anaglyfy jsou dva obrazy zhotovené v jedné nákresně tak, jako kdybychom se na jeden koukali pouze pravým okem a na druhý levým okem. Přičemž každý z nich má jinou barvu. Většinou to bývá červená a modrá. Od těchto barev se pak odvíjí i barvy sklíček brýlí, kterými se na nákres musíme dívat. Sklíčka či folie brýlí musí být na obou očích různá. Pokud tedy máme nákres zhotoven v červené a modré, jedno sklíčko brýlí musí být červené a druhé modré, případně opačně. Dostaneme pak výsledný obraz ve 3D, tedy dojem, že vidíme předmět v prostorovém vidění. (Opava, 1989)

Anaglyf byl vynalezen německým Wilhelmem Rollmannem roku 1853. První anaglyf měl červenou a zelenou barvu. V té době byli zobrazovány většinou projektorem, který měl dva objektivy a na každém z nich byl barvený filtr. (Anaglyph 3D, 2021)

V současné době k vytvoření anaglyfů existuje několik programů a aplikací. Například GeoGebra má dokonce funkci přímo na vytvoření anaglyfu. Nevýhodou je nevhodnost zobrazení pro některé osoby, které takto zobrazený jev nedokážou v mozku zpracovat. Dalším problémem je, že se nám výsledný obraz nezobrazí úplně v reálných barvách.

Obrázek 10 – Anaglyfické brýle
Dostupné z: https://www.bryle-3d.cz/



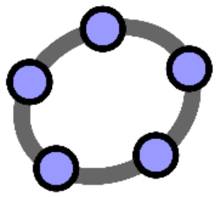
Obrázek 11 - Anaglyf

1.5.6. Aplikace

Existuje nespočet aplikací, při kterých využíváme prostorovou představivost a přispívá to tak k jejímu rozvoji. Mohou to být aplikace jak na počítači, tak i na dotykových zařízeních.

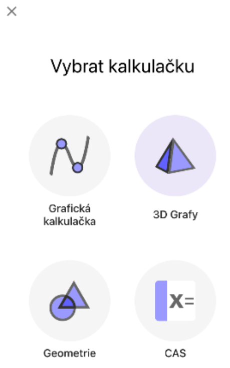
1.5.6.1. GeoGebra

Jedním z multiplatformních programů je GeoGebra. Je to dynamický software, jehož tvůrcem je Markus Hohenwarter, který na Geogebře začal pracovat v roce 2001 na univerzitě v Salzburgu. (GeoGebra, 2020)

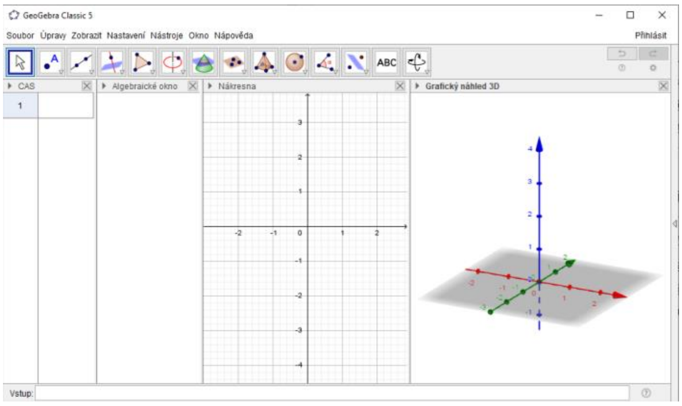


Obrázek 12 – Ikona
Dostupné z: https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:Geogebra.svg

Program nabízí jednoduché a přehledné prostředí, několik předdefinovaných funkcí a přístupný je po celém světě zdarma v mnoha jazycích. GeoGebra je určena pro interaktivní geometrii, algebru nebo analýzu. V této době je přístupná i jako mobilní aplikace, kde si můžeme vybrat přímo, s čím budeme nadále pracovat. Jestli s grafickou kalkulačkou, 3D grafy, geometrií, nebo CAS, což je počítačový algebraický systém. Oproti mobilní aplikaci na počítači vidíme celé prostředí GeoGebry a můžeme mezi nimi jednotlivě překlikávat, či si je zobrazit všechny najednou. Tento program funguje i online bez nutnosti stažení aplikace či softwaru.



Obrázek 13 – Mobilní aplikace GeoGebra

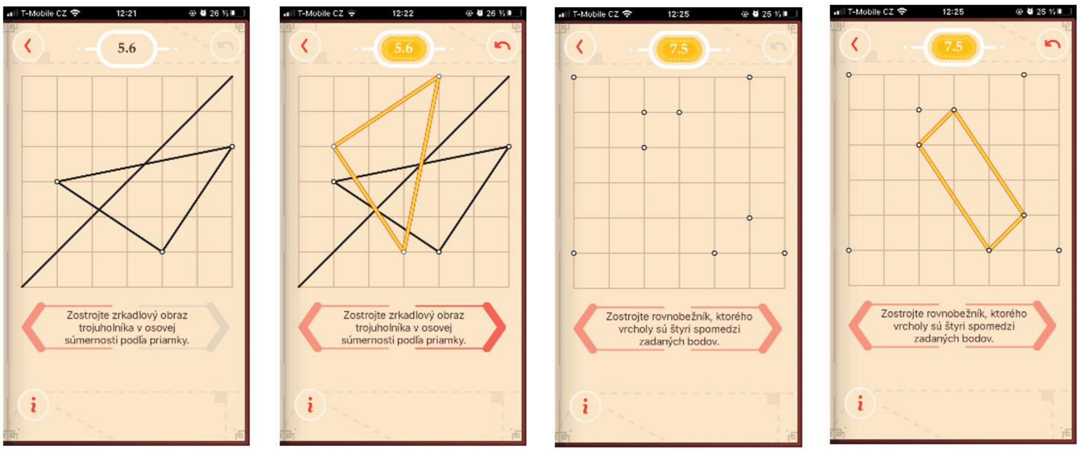


Obrázek 14 - Prostředí GeoGebra

1.5.6.2. Pythagorea

Další aplikací je Pythagorea. Tato hra je založena na čtvercové síti, na které se plní různé geometrické úlohy. Aplikace je přeložena do slovenštiny, takže i český uživatel s ní dokáže převážně dobře manipulovat. Pythagorea je rozdělena do 28 kategorií a má přes 330 úkolů různé obtížnosti. Aplikace je nejspíše pojmenována po řeckém filozofovi a matematikovi, který se jmenoval Pythagoras.

Obrázek 15 – Ikona Dostupné z: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.pythagorea&hl=cs&gl=US

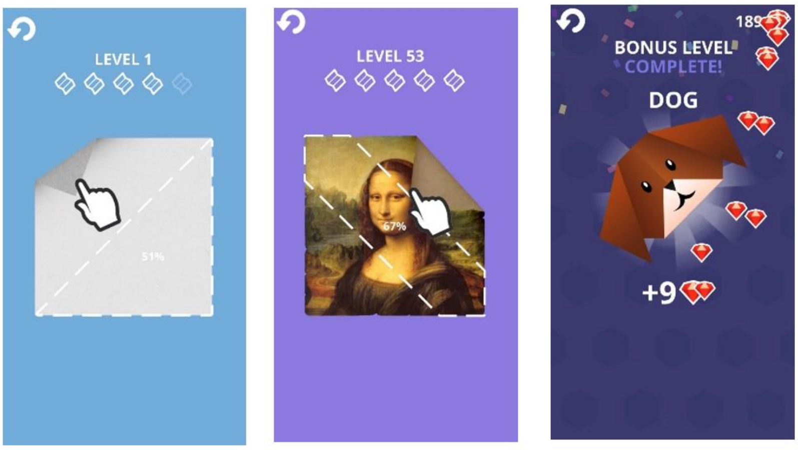


Obrázek 16 – Pythagorea

1.5.6.3. Origame

Obrázek 17 – Ikona
Dostupné z: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ketchapp.origame&hl=cs&gl=US

Origame je aplikace na dotyková zařízení, která, jak už napovídá název, se zabývá skládáním papíru, tedy origami. Úkolem je překládat papír do té doby, než bude v požadovaném tvaru. V každém kole je ukázáno, kolik možných přehybů je umožněno pro zvládnutí dané úrovně.

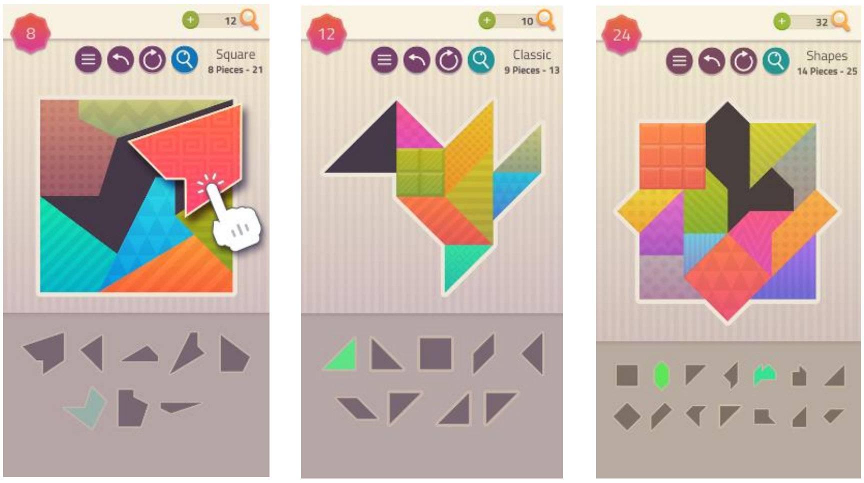


Obrázek 18 – Origame
Dostupné z: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ketchapp.origame&hl=cs&gl=US

1.5.6.4. Polygrams

Obrázek 19 – Ikona
Dostupné z: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.mindmill.tangram.block.puzzle&hl=cs&gl=US

Polygrams je hra na dotyková zařízení založena na tangramových hádankách. Aplikace obsahuje více než 2500 úrovní a je velice přehledná. V dolní části obrazovky jsou vždy určené dílky, kterými se má daný obrazec vyplnit.



Obrázek 20 – Polygrams
Dostupné z: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.mindmill.tangram.block.puzzle&hl=cs&gl=US

1.5.6.5. Minecraft

Obrázek 21 – Ikona
Dostupné z: https://www.playstation.com/cs-cz/games/minecraft/

Počítačová, velmi populární, hra Minecraft je sandboxová hra, což je hra bez žádného konkrétního cíle, která se odehrává ve virtuálním světě, kde si hráč může dělat v podstatě cokoli. Svět je tvořen ze 3D bloků, které nemají přesně daný účel použití. Hra je velmi podobná reálnému světu, pokud tedy budeme v módu survival, což je mód pro přežití a hráč si tak musí obstarat jídlo lovem, či pěstováním různých plodin, může si postavit příbytky, kde se schová před ostatním nebezpečím, jako jsou například různé příšery. Pokud by si hráč nastavil mod creative – mód pro tvorbu, měl by neometené množství materiálu, mohl by létat, zkrátka by ve svém světe mohl dělat absolutně cokoli, co hra dovoluje. V roce 2016 vznikla nová verze této hry určená přímo do škol. Tato verze dává učiteli možnost kontroly, řízení, hodnocení, usměrňování všech žákům, kteří se momentálně ve hře nacházejí. (Uluçay, 2017)

Minecraft vytvořil švédský vývojář Markus Persson, který je známý pod svou přezdívkou Notch. Založil také společnost Mojang Studios, která hru stále vyvíjí i přesto, že Persson už není součástí této společnosti. (Minecraft, 2021)

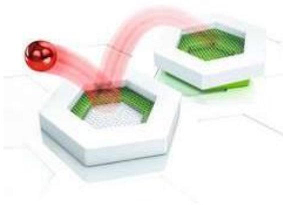
Obrázek 22 – Minecraft bloky
Dostupné z: https://news.microsoft.com/en-gb/features/beyond-the-blocks-how-the-latest-technology-made-minecraft-earth-a-reality/

1.5.7. Stolní hry

Stolní hry jsou dobrým pomocníkem k rozvoji prostorové představivosti. Některé z nich jsou přímo na ní založené.

1.5.7.1. Gravitrax

Jednou ze stolních her, kde využíváme prostorovou představivost, je kuličková dráha Gravitrax, která se vyrábí přímo v České republice. Cíl hry je sestavit jakoukoli kuličkovou dráhu tak, aby se kulička dostala z bodu A do bodu B. Dráha může obsahovat několik pater, různé zatáčky. Kulička může i přeskočit do jiné dráhy a dalších několik možností, jak kuličku dostat do požadovaného cíle. Je zkrátka jen na naší představivosti, jak si dráhu sestavíme. Cesta kuličky je ovlivňována také magnetickými silami, kinetikou a gravitací. Ke hře existuje i několik doplňků, které vylepšují dráhy. Může to být například trampolína nebo lanovka.



Obrázek 23 – Gravitrax *Obrázek 24 - Lanovka* *Obrázek 25 - Trampolína*

Dostupné z: https://www.ravensburger.org/cz/produkte/gravitrax/gravitrax-startovac%C3%AD-sada/gravitrax-startovn%C3%AD-sada-27504/index.html

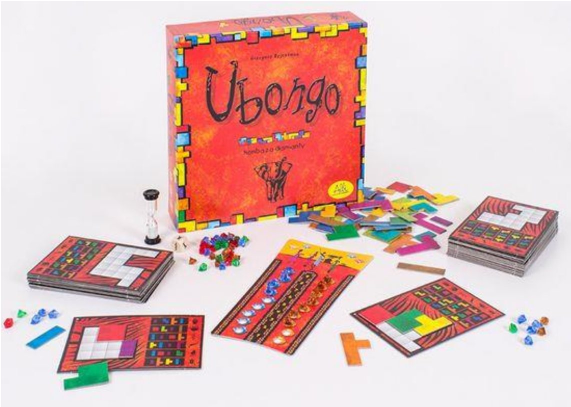
1.5.7.2. Mondo

Mondo je hra, kterou můžou hrát 4 hráči, ale jedinec si ji může zahrát i sám. Hráč si vytváří vlastní svět. Každému účastníkovi hry je přidělena tabulka světa, na kterou postupně skládá dílky krajiny, které na sebe musí navazovat.

Obrázek 26 – Mondo
Dostupné z: https://www.svet-deskovych-her.cz/produkty/1473/mondo

1.5.7.3. Ubongo

Ubongo má základy v tangramu. Na kartičkách z obou stran je nakreslený útvar, který se musí vyskládat danými dílky. Nemusí být však použity všechny. Existuje několik variant hry. Dvě základní se rozdělují na 2D skládání dílků a 3D dílky, které se opět podle zadání musí postavit tak, aby odpovídaly danému půdorysu. Nejvyšší počet hráčů, kteří mohou hru hrát najednou, je 4. Avšak jedinec si ji může zahrát i sám.



Obrázek 27 – Ubongo Dostupné z: https://www.albi.cz/hry-a-zabava/ubongo/

Obrázek 28 - Ubongo 3D Dostupné z: https://www.albi.cz/hry-a-zabava/ubongo-3d/

1.5.7.4. IQ Puzzle Pro

Hra obsahuje herní desku pro 2D hlavolamy a prostředek této desky je speciálně upraven pro dílky, aby se mohly stavět do pyramidy, tedy do tvaru jehlanu. Spodek desky je také upraven pro skládání dílků, avšak v jiném tvaru než na horní straně desky. Nejen že IG puzzle rozvíjí prostorovou představivost, ale také schopnost koncentrace a plánování.

Obrázek 29 - IG Puzzle Pro
Dostupné z: https://www.mall.cz/hry-jeden-hrac/mindok-smart-iq-puzzle-pro?tab=description

2. 1. stupeň základní školy

V této kapitole se věnuji prostorové představivosti jako součást školní výuky. V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání je oblast, Matematika a její aplikace, která je rozdělena do čtyř tematických okruhů, které se na prvním a druhém stupni malinko liší v názvech, ale jejich obtížnost se samozřejmě stupňuje a je probíráno nové a rozšiřující učivo. (MŠMT, 2021)

- 1. stupeň – Číslo a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a prostoru; nestandardní aplikační úlohy a problémy
- 2. stupeň – Číslo a proměnná; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a prostoru; Nestandartní aplikační úlohy a problémy

Tyto oblasti z MŠMT (2021) směřují k utváření a rozvíjení několika klíčových kompetencí, viz níže, tím, že vedou žáka například k:

- Využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace.
- Rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.
- Rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů.
- Vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací).
- K poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely.
- K poznání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby a další.

2.1. Geometrie v rovině a v prostoru

Tento okruh přispívá k rozvoji jak geometrické, tak i prostorové představivosti. Jako první věc, která nám přispěje k tomuto rozvoji, je orientace v prostoru. Tudíž určit, zda se naše osoba nebo jakýkoli předmět nachází před, za, vpředu či nahoře nebo například vně určitého objektu. Jako další je například pochopení prostorové situace, která je v rovině a další viz MŠMT (2021). Tyto úlohy se realizují s různými pomůckami, které můžou být ve formě stavby z krychlí a dalších těles, vytváření koláží z geometrických útvarů, práce s různými skládačkami, anebo už samotné překládání papíru, díky čemuž určíme kupříkladu střed úsečky, osy úsečky a osově souměrné útvary. MŠMT (2021)

Podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (2021) jsou na základní škole očekávány konkrétní výstupy, které by měl žák po ukončení 1.stupně zvládat.

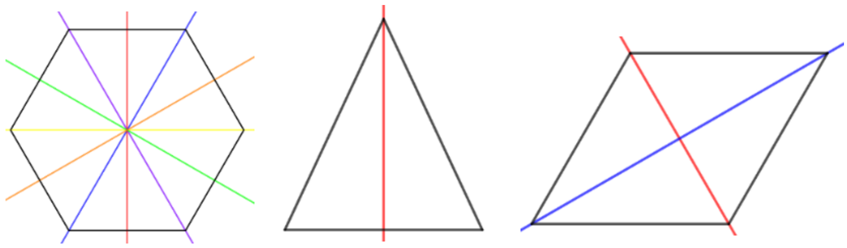
- Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje, narýsuje a popíše základní rovinné útvary, jednoduchá tělesa a užívá jednoduché konstrukce. Také je schopný najít v realitě objekty, které reprezentují jednotlivá tělesa. Minimálně pozná, pojmenuje, narýsuje základní rovinné tvary a graficky je znázorní.
- Žák dokáže porovnat velikosti jednotlivých útvarů, změřit a odhadnout délku úsečky, lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran. Minimálně pak rozezná přímku a úsečku, ví, jak se narýsují, označují a dokáže změřit a porovnat délku úsečky.
- Dítě rozezná, vymodeluje a sestrojí jednoduché souměrné útvary v rovině, rovnoběžky a kolmice. Minimálně sestrojí rovnoběžky, kolmice a určí osu souměrnosti překládáním papíru.
- Žák dokáže pracovat se čtvercovou sítí a pokud na ní je zobrazen obrazec, určí ze sítě jeho obsah a použije základní jednotky obsahu.

Učivo, které je v tomto okruhu probíráno, se tedy zabývá základními útvary v rovině a v prostoru. Jedná se o přímku, polopřímku, úsečku, lomenou čáru, čtverec, kružnici, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník, kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel a válec. Dále se základní vzdělávání v tomto tématu zaměřuje na vlastnosti těchto základních útvarů, jak je například délka úsečky, obvod a obsah obrazce, vzájemné polohy a osově souměrné útvary. (MŠMT, 2021)

Jana Blažková (2008) ve svém pracovním sešitu pro 3. ročník základní školy prezentuje tyto úlohy, které určitě potřebují k vyřešení zapojení prostorové představivosti.

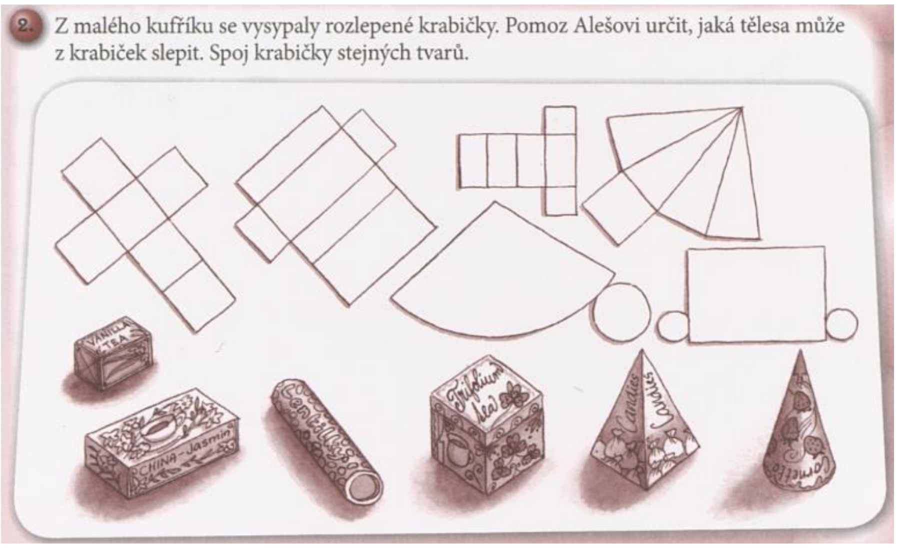
První příklad, *obrázek 30,* se zaměřuje na osovou souměrnost. Abychom tedy našli obrazec, který lze přeložit na dvě stejné části, musíme najít obrazci osu souměrnosti, která nám útvar rozdělí na shodné části. Kdybychom si vzali například šestiúhelník, ten má os souměrnosti právě šest. Rovnoramenný trojúhelník má pouze jednu možnost přeložení, a to podle osy, která vede vrcholem a středem základny trojúhelníka. Kosočtverec, lze přehnout na dvě shodné části pouze podle dvou os, které můžeme nazvat i jako uhlopříčky kosočtverce. Řešení je vidět na *obrázku 31*.

Obrázek 30 – Příklad Blažková 1
Dostupné z: BLAŽKOVÁ, Jana, 2008. Matematika pro 3. ročník základní školy. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-108-4.



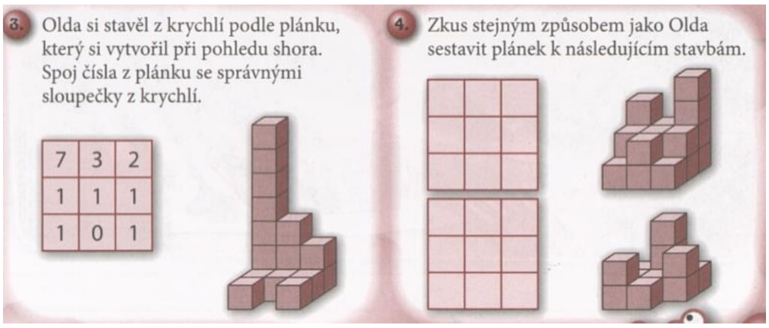
Obrázek 31 - Řešení příkladu Blažková 1

Další příklad z pracovního sešitu od Blažkové (2008) vidíme na *obrázku 32*. Za úkol máme přijít na to, která síť patří k jednotlivým tělesům, které symbolizují krabičky v zadání.



Obrázek 32 - Příklad Blažková 2
Dostupné z: BLAŽKOVÁ, Jana, 2008. Matematika pro 3. ročník základní školy. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-108-4.

Další zadání ze stejného pracovního sešitu se týká kótovaných půdorysů, viz *obrázek 33*, které nám určují kolik krychlí bude na daném místě postaveno na sobě. Žáci si tak musí představit i krychle, které jsou zastíněny za těmy, které vidíme zepředu.

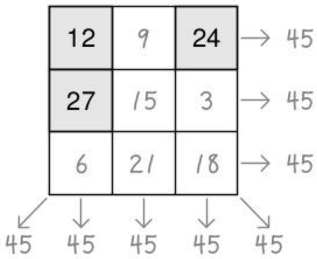


Obrázek 33 - Příklad Blažková 3
Dostupné z: BLAŽKOVÁ, Jana, 2008. Matematika pro 3. ročník základní školy. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-108-4.

2.2. Nestandardní aplikační úlohy a problémy

U těchto úloh se očekává, že žák dokáže řešit jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, které řeší do značné míry nezávisle na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky. Žáci tyto úlohy řeší většinou podle vzoru, pokud tomu tak samozřejmě není a žák si najde vlastní přístup, není na tom nic špatného. Nacházíme zde slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce anebo úlohy na prostorovou představivost. (MŠMT, 2021)

Magické čtverce, spočívají v tom, že čtverec o *n* řádcích a *n* sloupcích má v každém řádku, sloupci i uhlopříčce stejný součet čísel. Většinou je úkolem doplnit chybějící čísla, anebo daná čísla dosadit do čtverce tak, aby platil ve všech řádcích, sloupcích a uhlopříčkách stejný součet.



Obrázek 34 - Magický čtverec
Dostupné z: https://rookie722.wordpress.com/2017/02/21/magicky-ctverec/

3. 2. stupeň základní školy

Na druhém stupni se úlohy zaměřené na prostorovou představivost opět objevují v tematických okruzích Geometrie v rovině a v prostoru a v Nestandardních aplikačních úlohách a problémech, které jsou součástí rámcového vzdělávacího programu (2021).

3.1. Geometrie v rovině a v prostoru

Na druhém stupni prostorovou představivost využíváme u práce se sítěmi těles, díky kterým žáci vymodelují těleso. Už jen sledování znázornění těles ve volném rovnoběžném promítání přispívá k rozvoji. K těmto případům mohou použít například papírové krabičky, které si rozloží na sítě, nebo naopak.

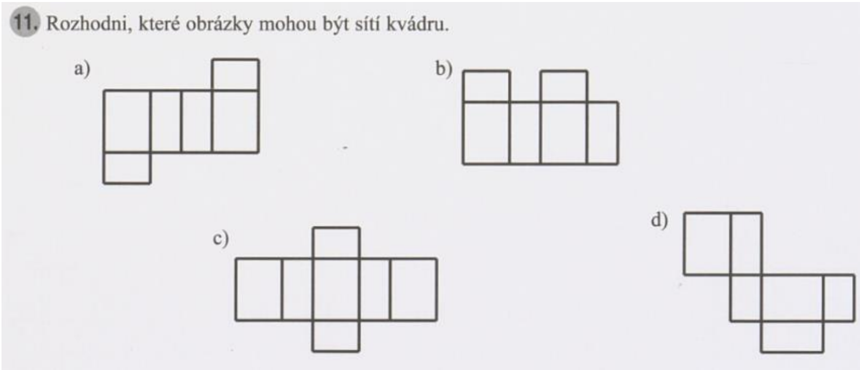
Pokud žák dokončí povinnou školní docházku, měl by ovládat tyto kompetence:

- Dokáže charakterizovat, třídit, načrtnout a sestrojit základní rovinné útvary a tělesa, u kterých určí a zdůvodní polohové a metrické vlastnosti. Odhadne a vypočítá obsah, obvod u základních rovinných útvarů a u těles objem a povrch.
- Určí velikost úhlu měřením či výpočtem
- Zná a dokáže správně použít pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh.
- Zkonstruuje obrazy rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti a pokud takovýto útvar existuje, dokáže o něm říci, že se jedná o osově nebo středově souměrný obraz.
- Žák dokáže načrtnou a sestrojit obraz a sítě těles
- Dokáže zanalyzovat a řešit aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

Pro minimální doporučenou úroveň znalostí z této sekce je opět MŠMT (2021) napsán podrobný seznam očekávaných výstupů.

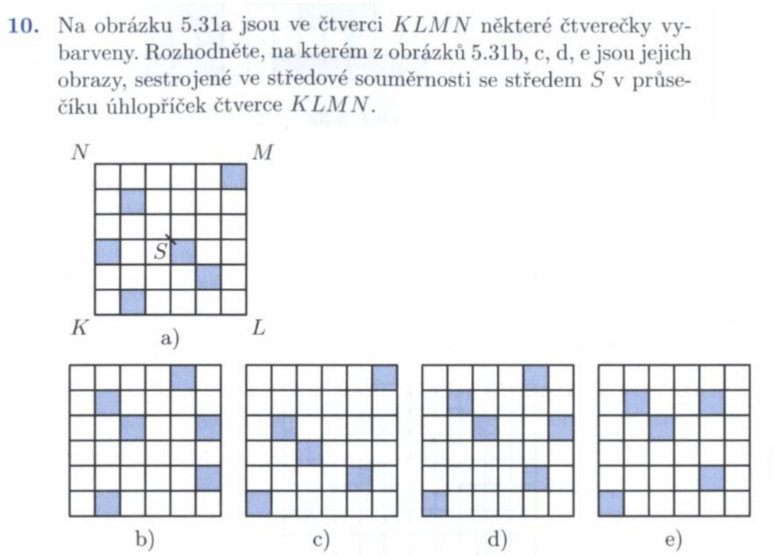
Obsahem geometrie v rovině a v prostoru jsou konkrétně rovinné a prostorové útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice a kruh, úhel, mnohoúhelníky (trojúhelník, čtyřúhelník, lichoběžník, rovnoběžník), shodnost a podobnost útvarů (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků), kvádr, krychle, válec, jehlan, kužel, koule, hranoly. Dále se probírají metrické vlastnosti v rovině, jako jsou například druhy úhlů, vzdálenosti nebo Pythagorova věta. Konstrukční úlohy jsou také součástí – množiny všech bodů dané vlastnosti (osy, kružnice, Thaletova věta), osová a středová souměrnost. (MŠMT, 2021)

Boušková (2007) ve své publikaci uvádí tento příklad na sestavení kvádru z jejich sítě, *obrázek 35*, a ptá se, jestli je to vůbec možné. Varianta a) není možná. Možnost b) také není možná, protože pokud bychom síť sestavili, podstavy by se překrývali, a tudíž by druhá podstava chyběla a kvádr by tak byl „s dírou“. U varianty c) je jasné, že kvádr nelze sestavit, protože už na síti můžeme vidět, že by kvádr měl 7 stěn a to nelze. Z jediné varianty d) je možné sestavit kvádr.



Obrázek 35 - Příklad Boušková
Dostupné z: BOUŠKOVÁ, Jitka, 2007. Matematika 6: pro základní školy. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-365-1.

Bušek (2010) ve své sbírce úloh z matematiky pro 7. ročník uvádí příklad, *obrázek 36*, který se zaměřuje na středovou souměrnost. Ve čtverci $KLMN$ jsou umístěny jednotlivé modré čtverečky. Z nabízených možností máme vybrat správnou možnost sestrojení středové souměrnosti se středem S. Správná odpověď je pak možnost d).



Obrázek 36 - Příklad Bušek
Dostupné z: BUŠEK, Ivan, 2010. Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník ZŠ. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-395-0.

3.2. Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Žáci v tomto tematickém okruhu vyhledávají úlohy spojené s realitou a ty řeší. Mohou to být příklady ze zájmové matematiky, doplňování různých schémat či řad anebo obrázkové řady.

V okruhu nestandardních úloh by se měl žák naučit a získat schopnosti:

- Užívat logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a nalézat tak různá řešení, které by měl zvládnout řešit samostatně.
- Měl by už dokázat řešit úlohy na prostorovou představivost, aplikovat a kombinovat poznatky z jiných vzdělávacích oblastí a využívat k tomu například i prostředky výpočetní techniky.

Probírá se zde učivo jako jsou číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy.

Číselné řady mají jednoduchý princip řešení. Musí se najít některé číslo z řady. Musíme pak tedy najít vztah mezi jednotlivými čísly a následně ho použít na hledané číslo. Následují příklady jsou od Igora Kotlána (2009). Abychom u příkladů na obrázcích přišli na číslo, které má nahradit otazník, musíme přijít na diferenci či kvocient jednotlivých řad. Tedy na to, jaký vztah mezi sebou mají jednotlivá čísla a ten tak použít na námi hledané číslo. Na *obrázku 37* si můžeme všimnout, že následující číslo získáme vždy součtem dvou předešlých čísel. Tedy $1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8$ a proto otazník nahradíme číslem 13, jelikož platí vztah $5 + 8 = 13$. U další řady, *obrázek 38*, hledáme dokonce dvě čísla. Pokud se budeme řadou zabývat, zjistíme, že se číselná řada dá rozložit na dvě samostatné. Jedna z nich bude $5, 7, 10, 14, ?$ a druhá bude $6, 8, 11, ?$. V obou řadách pak platí, že k prvnímu číslu se přičte 2 a vznikne tak druhé číslo. K druhému přičteme 3, ke třetímu 4 a ke čtvrtému 5. Dostaneme tedy řady 5, 7, 10, 14, 19 a 6, 8, 11, 15. Když je dáme zpět dohromady, dostaneme finální řadu 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 19.

1. Které číslo doplníte místo otazníku?

1 2 3 5 8 ?

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

Obrázek 37 – Příklad Kotlán 1

2. Která čísla doplníte místo otazníků?

5 6 7 8 10 11 14 ? ?

a) 15 a 19
b) 17 a 20
c) 15 a 16

Obrázek 38 – Příklad Kotlán 2

Dostupné z: KOTLÁN, Igor, 2009. Testy obecných studijních předpokladů a základy logiky. Brno: Institut vzdělávání Sokrates. ISBN 978-80-86572-68-0.

4. Gymnázium

Matematika a její aplikace na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje získané znalosti kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa. Vzdělání v matematice rozhodně přispívá k rozvoji jak analytického, tak i abstraktivního myšlení, rozvíjí logické usuzování. Jako důležitý bod považuji i to, že matematika učí i věcnou argumentaci, která vede k nalezení objektivní pravdy i přes to, že náš vlastní názor je odlišný. (MŠMT, 2013)

V Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (2013) této vzdělávací oblasti se opět rozlišuje 5 kategorií, které matematiku na gymnáziu rozdělují do určitých témat. Jako první je *Argumentace a ověřování*, kam spadají základní poznatky z matematiky, jako je například výrok, definice, věta, nebo i důkaz, dále množiny a výroková logika. Druhou vzdělávací oblastí je *Číslo a proměnná*, kam můžeme zařadit číselné obory, mocniny, výrazy s proměnnými, rovnice a nerovnice. Další je sekce *Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost*. Následují *Závislosti a funkční vztahy,* kde najdeme funkce a posloupnosti. Poslední kategorií je Geometrie, kde se žáci učí geometrii v rovině, v prostoru, trigonometrii a analytickou geometrii v rovině, kam spadají například vektory a kuželosečky.

Kompetence, které by měl žák ovládat ze všech vzdělávacích oblastí matematiky jsou kupříkladu následující:

- Žák by si měl vytvořit určitou zásobu matematických pojmů, vztahů, algoritmů a postupů řešení úloh.
- Měl by zvládnout práci s matematickými modely k tomu, aby dospěl, že k řešení se lze dostat několika způsoby.
- Žák by měl být schopný vytvářet hypotézy na základě vlastní zkušenosti nebo pokusu, měl by je také umět ověřit či vyvrátit a k tomu použít protipříklady.
- K obhajobě vlastních postupů by měl využít matematických postupů.
- Učivo by žáka mělo vést k rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti, rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním, jejich vyhodnocování a poznání mezí jejich užití
- Přesné vyjadřování a zdokonalení grafického projevu by také mělo být součástí kompetencí žáka.
- Žák by si také měl uvědomovat, že realita je mnohem složitější než její matematický model.

Všechny kompetence jsou pak sepsány v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (2013).

V tematickém okruhu Geometrie se opět objevuje prostorová představivost nejvíce.

4.1. Geometrie

Geometrie na gymnáziích se zabývá konkrétně klasifikací rovinných útvarů a těles, jejich obvody, obsahy, povrchy a objemy, shodnostmi a podobnosti trojúhelníků. Najdeme zde i různé věty jako je například Pythagorova věta nebo věty Euklidovy. V trigonometrii se objevuje věta sinová a kosinová. Žáci pracují s volným rovnoběžným promítáním, stejnolehlostí, osovou a středovou souměrností, posunutím, otočením, s trigonometrií pravoúhlého a obecného trojúhelníku. Objevuje se zde učivo i o kuželosečkách. Žáci mají znalosti o práci s vektory a také by měli ovládat analytické vyjádření přímky v rovině. (MŠMT,2013)

Některé očekávané výstupy z tohoto okruhu, které by měl žák po dokončení studia na gymnáziu ovládat, jsou:

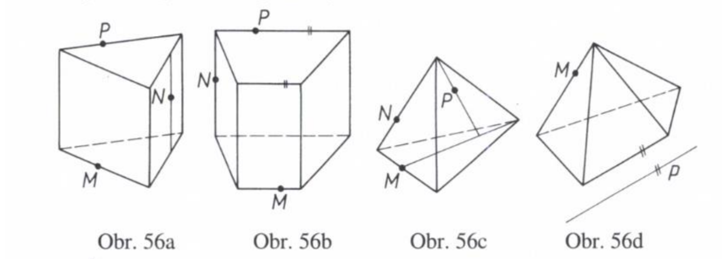
- Žák užívá pojmů a vlastností geometrických útvarů v rovině a v prostoru.
- Při řešení rovinných nebo prostorových úloh je na místě, aby si žák dokázal pomoci náčrtem.
- V příkladech, které má žák řešit, využívá funkční vztahy, trigonometrii, úpravy výrazů či práci s proměnnými a iracionálními čísly.
- Při řešení konstrukčních úloh polohových a nepolohových je žák schopen využít všech bodů dané vlastnosti s pomocí shodných zobrazení či výpočtu.
- Ve volném rovnoběžném zobrazení dokáže zkonstruovat hranol a jehlan a jejich různé řezy tělesem.
- Planimetrické a stereometrické úlohy z praxe by ho neměly překvapit.
- Žák by měl dokázat zanalyzovat kuželosečky a z jejího analytického vyjádření by měl určit základní údaje o daném typu kuželosečky.
- Metrické a polohové úlohy o lineárních útvarech v rovině, jako je například přímka, by měl být schopen vyřešit analyticky a různými způsoby analyticky vyjádřit přímku v rovině a určit i vzájemnou polohu přímky a kuželosečky.

Další kompetence jsou uvedeny v Rámcovém vzdělávacím plánu (2013).

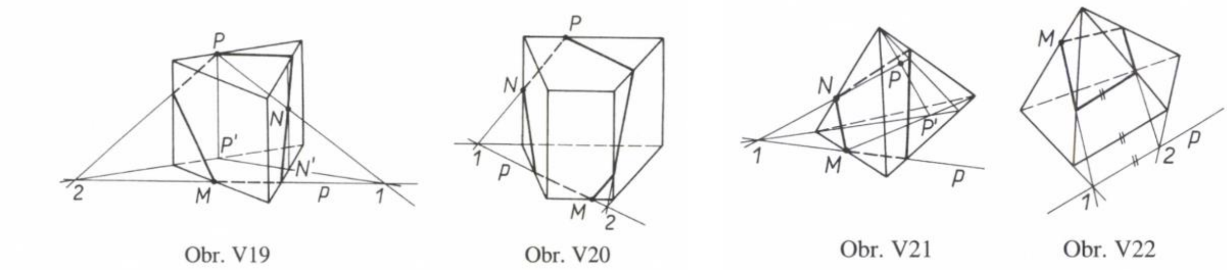
Matematička a pedagožka Eva Pomykalová je autorkou několika učebnic matematiky pro gymnázia. V těchto knihách se zabývá konkrétně stereometrií, planimetrií a deskriptivní geometrií. Učebnice mají konkrétní názvy: Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Matematika pro gymnázia – Stereometrie, Deskriptivní geometrie pro střední školy. Následující příklad je z učebnice stereometrie, kde si myslím, že prostorová představivost je nejvíce využívána. Ve své učebnici Pomykalová říká: *„Geometrické představy znázorněné graficky jsou mnohdy lepším dorozumívacím prostředkem než slovní či symbolické zápisy.“* (Pomykalová, 2000)

Příklad, *obrázek 39*, je zaměřený na řezy těles, které jsou určeny body M, N, P a v jednom případě přímkou p a bodem M. Pomykalová má ve své učebnici i výsledky úloh. Řešení této úlohy je zobrazeno na *obrázku 40*.

2.43 Sestrojte řez daných těles rovinami, které jsou určeny
a) body *M*, *N*, *P* (obr. 56a, b, c),
b) přímkou *p* v rovině podstavy a bodem *M* (obr. 56d).



Obrázek 39 – Příklad Pomykalová 1
Dostupné z: POMYKALOVÁ, Eva, 2000. Matematika pro gymnázia: Stereometrie. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-178-7.



2.43 a) Obr. V19, obr. V20, obr. V21, b) obr. V22.

Obrázek 40 – Řešení příkladu Pomykalová 1
Dostupné z: POMYKALOVÁ, Eva, 2000. Matematika pro gymnázia: Stereometrie. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-178-7.

5. Střední odborné školy

Prostorová představivost se objevuje nejvíce na technicky zaměřených středních školách, jako jsou školy průmyslové. Avšak s prostorovou představivostí pracují například i zdravotnické obory, jako je například zubní laborant, který prostorovou představivost využívá u modelace zubu.

Technické obory, jako je například stavebnictví, strojírenství, architektura a další, prostorovou představivost využívají nejvíce, protože je důležité vidět, jak bude daný produkt, ať už stavba či strojírenský výrobek, vypadat. Na takovýchto oborech se vyučuje kromě geometrie obecné také deskriptivní geometrie, která je zaměřena na zobrazování trojrozměrných útvarů na dvojrozměrnou nákresnu.

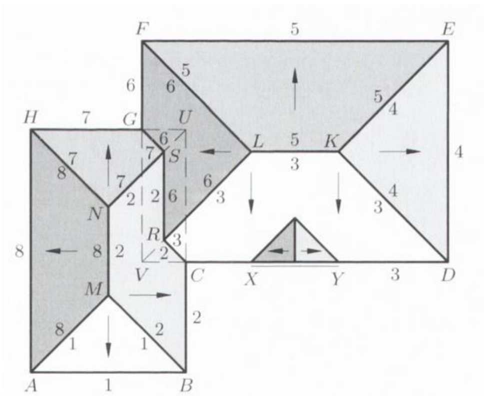
5.1. Deskriptivní geometrie

Název deskriptivní geometrie je odvozen z latinského slova describo, což znamená „popisuji, zobrazuji“. Toto odvětví geometrie se zabývá zobrazováním útvarů na danou plochu, především tedy na rovinu. Popisuje konstruktivní způsoby, jak zobrazit prostorové útvary pomocí rovinných útvarů. Tyto způsoby nazýváme zobrazovací metody. (Pomykalová, 2010)

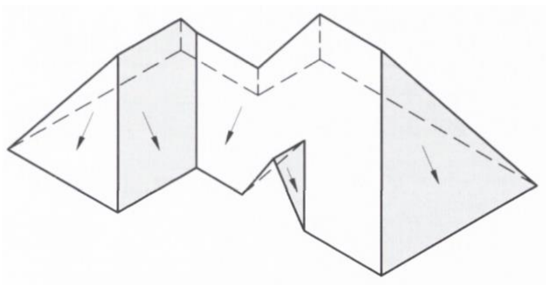
Deskripce oficiálně vznikla v roce 1795, ale roku 1765 ji už Gaspard Monge poprvé použil. Gaspard Monge, zakladatel této deskriptivní geometrie, zatajoval své poznatky, avšak se světem se o ně dělil pouze ústně, a to na škole v Méziers. (Slavík, 1996)

Deskriptivní geometrie je spíše technickou geometrií, jelikož se nejvíce využívá ve stavebnictví, strojírenství, zkrátka technických oborech. Umožňuje technikům správně vyčíst všechny informace z výkresů zobrazených objektů. Důležitá ale je i proto, aby si čtenář daného výkresu dokázal projekt představit. Zobrazovací metody jsou základní stavební jednotkou pro deskriptivní geometrii. Rozlišujeme kótované promítání, Mongeovo promítání, axonometrii, kosoúhlé promítání a perspektivu. (Pomykalová, 2010)

Příkladem kótovaného promítání ve stavebnictví je například teoretické řešení odvodnění střech, které spočívá v tom, že střecha musí být navrhnuta tak, aby se na ni nezdržovala voda a odtékala z konstrukce střechy. Okapové hrany, což jsou nejnižší vodorovné okraje střechy, tvoří okapový obrazec, který je zároveň půdorysem střechy. Pokud bychom měli vyřešit zastřešení objektu, musíme pak zobrazit všechny průsečnice, společné body střešní roviny a směry odtékání vody ze střechy. Na *obrázku 41* je zobrazeno provedení odvodnění střechy, ze kterého vznikla, jak je vidět na *obrázku 42*, valbová střecha. (Pomykalová, 2010)



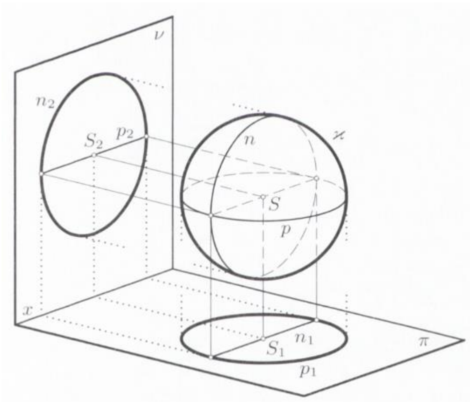
Obrázek 41 – Provedení odvodnění střechy



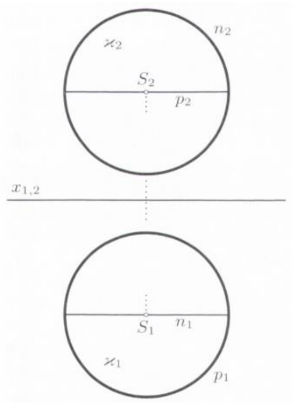
Obrázek 42 – Řešení odvodnění střechy ve 3D

Dostupné z: POMYKALOVÁ, Eva, 2010. Deskriptivní geometrie pro střední školy. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-400-1.

Mongeovo promítání se liší od kótovaného tím, že zobrazuje objekty nejen do půdorysny, ale i do nárysny. Půdorys bychom mohli nazvat jako pohled shora a nárys jako pohled zepředu. Na *obrázku 43* jsou vidět průměty koule se středem v S do půdorysny π a do nárysny ν. *Obrázek 44* znázorňuje, jak vypadá výsledný obraz v Mongeově promítání. (Pomykalová, 2010)



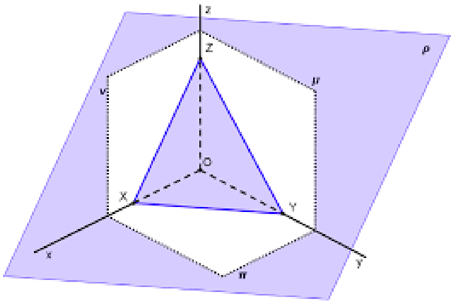
Obrázek 43 – Princip Mongeova promítání



Obrázek 44 – Mongeovo promítání

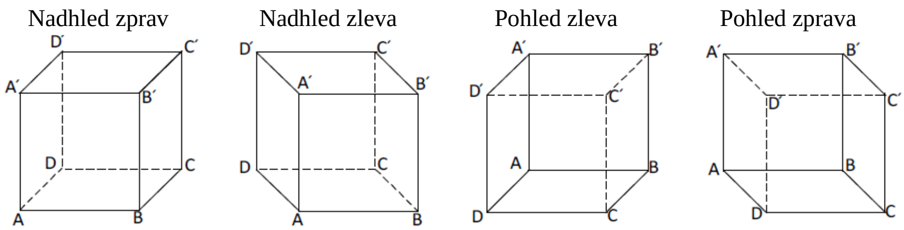
Dostupné z: POMYKALOVÁ, Eva, 2010. Deskriptivní geometrie pro střední školy. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-400-1.

Pomykalová (2010) o axonometrii mluví jako o jednoduchém způsobu promítání prostorových objektů do 3D. Promítáme tedy do roviny, která je určena třemi osami x, y, z. Axonometrii můžeme zadat axonometrickým osovým křížem a axonometrickými jednotkami. Většinou ji však zadáváme prostřednictvím axonometrického trojúhelníku XYZ, který je vždy ostroúhlý a souřadnicové osy se promítají do jeho výšek.



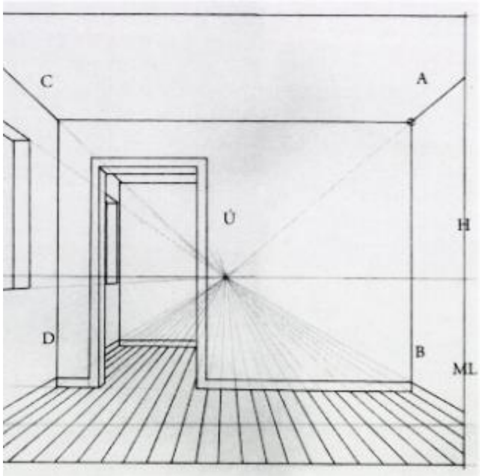
Obrázek 45 - Axonometrický trojúhelník
Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/DG1/P3_Promitaci_metody.pdf

Kosoúhlé promítání má několik druhů. Může je jednat o kavalírní perspektivu, vojenská perspektivu, volné rovnoběžné promítání, se kterým se můžeme setkat i na základní škole, když rýsujeme základní tělesa, jako je například krychle a kvádr. Také zde rozlišujeme čtyři typy směrů, které nám určují, odkud se na těleso či objekt díváme – nadhled zprava, nadhled zleva, pohled zleva, pohled zprava. (Pomykalová, 2010)

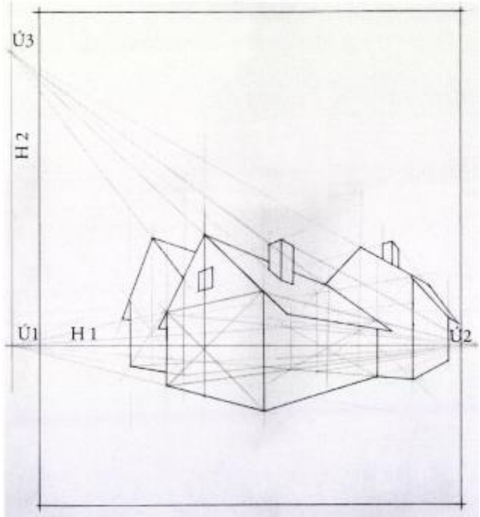


Obrázek 46 - Pohledové směry kosoúhlého promítání

Perspektiva je středové promítání, které odpovídá našemu zrakovému vnímání. Stejně jako kótované promítání se hojně využívá ve stavebnictví. U perspektivy je důležité zmínit pojmy úběžnice a úběžník. Úběžnice bychom mohli přirovnat k dlouhým přímkám železničních kolejí, které se s čím dál větší vzdáleností od pozorovatele přibližují k sobě do jednoho bodu. Bod, ve kterém se pak kolejnice setkají, je právě již zmiňovaný úběžník. Úběžnice jsou tedy veškeré linie, které jsou vedeny kolmo k horizontu a na horizontu se sbíhají do úběžníku. Existují různé druhy perspektivy. Můžeme využít jednoúběžníkovou perspektivu, dvouúběžníkovou perspektivu, ptačí perspektivu, což je perspektiva, která nabízí pohled ze vzduchu, anebo existuje také žabí perspektiva. (Morscheck, 2005)



Obrázek 47 - Jednoúběžníková perspektiva



Obrázek 48 – Žabí perspektiva

Dostupné z: POMYKALOVÁ, Eva, 2010. Deskriptivní geometrie pro střední školy. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-400-1.

6. Vybrané úlohy z přijímacích a maturitních zkoušek

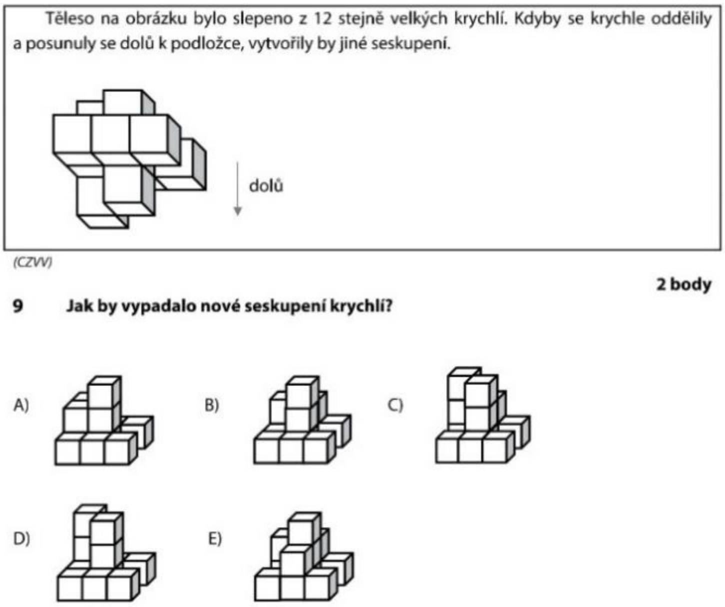
Vzhledem k tomu, že úlohy zabývající se prostorovou představivostí jsou obsaženy jak v učivu základní školy i středních škol, je logické, že jsou součástí jednotných přijímacích a maturitních zkoušek. Ke každé zkoušce jsou sepsány centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání specifikace požadavků pro jednotnou zkoušku, ať se jedná o přijímací zkoušky, tak i na maturitní zkoušku.

6.1. Přijímací zkouška z matematiky na osmiletá gymnázia

Přijímací zkouška z matematiky na osmiletá gymnázia zahrnuje učivo 1. stupně. V kapitole 3 je zmíněno, co je obsahem učiva 1. - 5. třídy základní školy. Zkouška je formou didaktického testu s časovým limitem 70 minut. Žáci mohou mít u sebe v době vykonávání zkoušky pouze psací a rýsovací potřeby. Test obsahuje celkem 14 úloh a většinou je jedna úloha zaměřena přímo na prostorovou představivost. Ve specifikacích požadavků je vyjmenované učivo, které je v přijímací zkoušce obsaženo. (CERMAT, 2019)

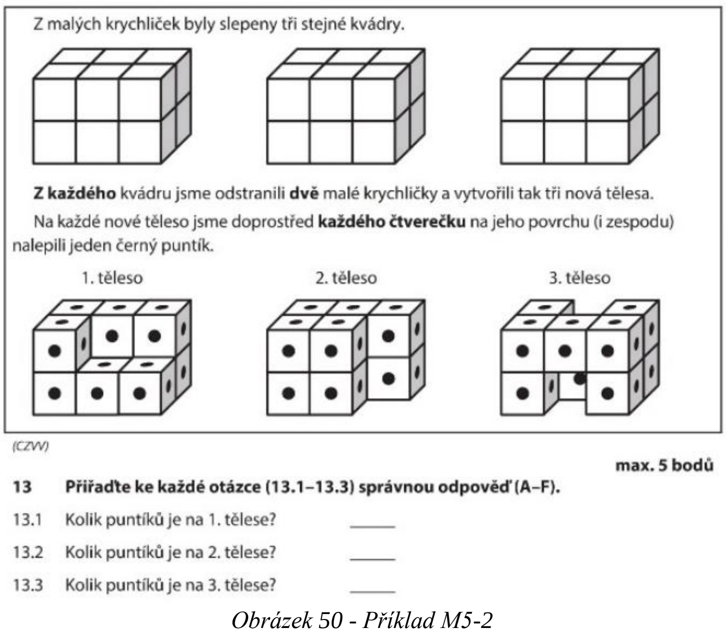
Následující příklady jsou obsaženy v přijímacích zkouškách z let od roku 2017 až do roku 2020.

První příklad, *obrázek 49,* je z přijímací zkoušky z roku 2017 konkrétně z didaktického testu M5PCD17C0T03. V zadání je zobrazen objekt z krychlí. Za úkol je zjistit, jaké seskupení krychlí vznikne, pokud by se všech 12 krychlí sesunulo dolů. Pro správný výsledek musíme zanalyzovat jednotlivé sloupce krychle. Zjistíme, že v první řadě je v každém sloupci po jedné krychli, ve druhá řadě je nalevo pouze jedna krychle, uprostřed 3 krychle a napravo žádná krychle není. Poslední řada, tedy ta, co je z pohledu nejdále, obsahuje v prvním sloupci 3 krychle, uprostřed jednu a vpravo také jednu. Pokud si tedy tyto vlastnosti seskupíme, dojdeme ke správnému řešení, které je možnost D).



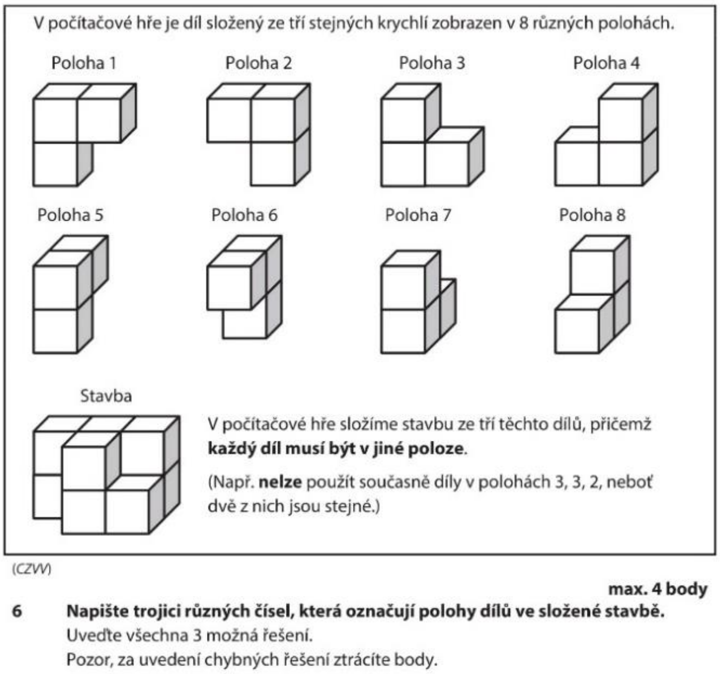
Obrázek 49 - Příklad M5-1
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2016/08/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2017-1-nahradni-termin-osmilete-obory.pdf

Druhý příklad, *obrázek 50*, je z didaktického testu M5PAD19C0T01 z roku 2019. V zadání jsou zobrazeny tři stejné kvádry složené z krychlí. Z obrazců se odstranili vždy dvě krychle různými způsoby. Na každé jednotlivé krychli kvádru jsou zobrazeny černé puntíky, které jsou umístěny na všech stěnách krychle uprostřed. Úkolem je zjistit, kolik černých puntíku zůstane na kvádru po odebrání dvou krychlí. Na prvním tělese bude vidět 32, na druhém 30 a na třetím 36.



Obrázek 50 - Příklad M5-2
Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/jednotna-prijmaci-zkouska/2019/MAT-8GYM-didakticky-test-1term.pdf

Posledním názorným příkladem, *Obrázek 51*, prostorové představivosti v přijímacích zkouškách na osmiletá gymnázia z roku 2020 je z didaktického testu M5PCD20C0T03. Řešením úlohy je najít všechny možné varianty složení stavby zobrazené v zadání tak, aby se žádný díl neopakoval ve stejné poloze. Příklad můžeme řešit například tak, že si ze stavby odebereme díl v poloze 1 a budeme hledat dvojici dílů, které tvoří zbytek stavby. Zbytek však musí být tedy sestavené z dvou různých poloh a zároveň už nemůže obsahovat polohu 1. Proto tedy existují pouze dvě možné varianty, a to dílky v polohách 3 a 4 nebo 7 a 8. Vzniknou nám tak trojice 1, 3, 4 a 1, 7, 8. Budeme pokračovat stejným způsobem. Pokud bychom odebrali díl, který je v poloze dva, zůstali by nám dva díly ve stejné poloze, které však podle zadání být nesmí. Proto tuto variantu můžeme vynechat. Díl polohy 3 můžeme odebrat ze dvou míst. Pokud ho odebereme zepředu stavby dostaneme opět kombinaci dílů 1, 3, 4. Pokud bychom však odebrali díl s polohou 3 ze zadní části, pak zbylou část lze sestavit z dílů v pozicích 5 a 8. Řešením jsou tedy trojice: 1, 3, 4 a 1, 7, 8 a 3, 5, 8.

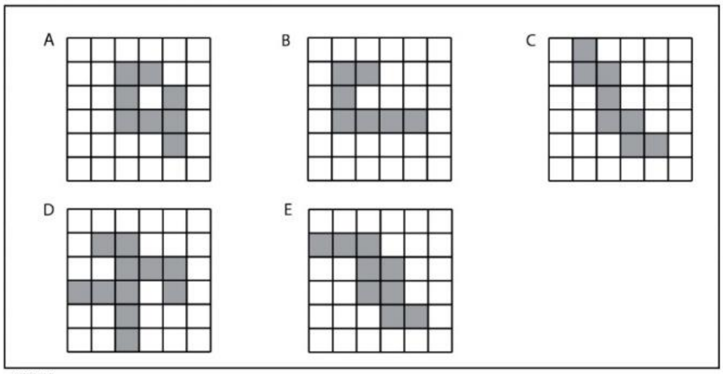


Obrázek 51 - Příklad M5-3
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2020/06/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2020-osmilete-obory-nahradni.pdf

6.2. Přijímací zkouška z matematiky na šestiletá gymnázia

Na šestiletá gymnázia jdou žáci po ukončení 7. ročníku základní školy. K tomu, aby byli přijati, musí absolvovat jednotnou přijímací zkoušku z matematiky. Obsahem didaktického testu je učivo 1. až 7. třídy. Celkem obsahuje 16 úloh s maximálním možným hodnocením 50 bodů. Řešitelé mohou mít k vypracování pouze psací a rýsovací potřeby. (CERMAT, 2019)

Třináctá úloha, *obrázek 52,* z didaktického testu M7PCD17C0T03 je založena na osové souměrnosti. Úkolem je zjistit k jakému obrazci lze přidat pouze jeden tmavý čtvereček tak, aby vznikl osově souměrný obrazec. Správný výsledek je obrazec A, protože k němu jedinému je možné přidat jeden tmavý čtvereček, který umístíme na druhý řádek shora na pozici druhou zleva. Vznikne nám tak obrazec, který bude mít osu souměrnosti, která povede z levého dolního rohu čtverce do protilehlého bodu, tedy vpravo nahoře.



(CZVV)

2 body

13 V jednom z pěti obrázků je možné doplnit jediný tmavý čtvereček tak, aby byl tmavý útvar souměrný podle osy souměrnosti (šikmé, svislé nebo vodorovné).

Ve kterém obrázku je to možné?

A) v obrázku A

B) v obrázku B

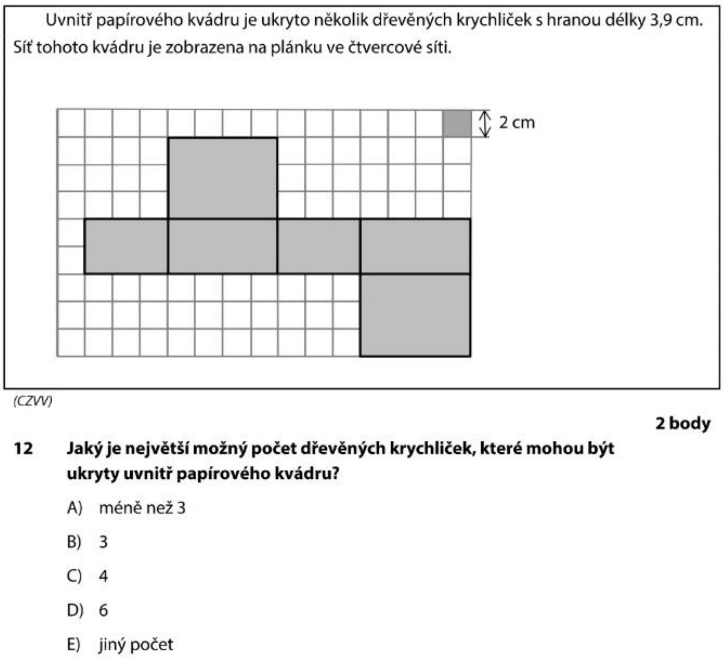
C) v obrázku C

D) v obrázku D

E) v obrázku E

Obrázek 52 - Příklad M7-1
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2016/08/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2017-1-nahradni-termin-sestilete-obory.pdf

Následující úloha, *obrázek 53,* je z didaktického testu přijímací zkoušky z roku 2018 testu M7PCD18C0T03. Zaměřuje se na těleso, kvádr, které obsahuje několik dřevěných krychliček s danou délkou. Síť kvádru je znázorněna na čtvercové síti s určitou velikostí strany jednoho čtverce a to 2 cm. Délka jedné hrany krychle, která je umístěna uvnitř kvádru, je 3,9 cm. Ze sítě tedy musíme zjistit rozměry kvádru. Ze sítě vyčteme, že podstava kvádru může být například 6 cm a 4 cm, pak jeho výška bude 8 cm. Pokud zvážíme, že hrana krychle, umístěné vně kvádru je dlouhá 3,9 cm, pak do výšky kvádru by se vešly pouze dvě dřevěné krychličky. I kdyby byly k sobě dvě krychličky natěsno přilepené, jejich výška by byla 7,8 cm. Nejdelší strana kvádru je 8 cm, proto se už do kvádru nevejde další krychlička. Následně se musíme zohlednit také podstavu kvádru, která má rozměry 6 cm a 4 cm. Do délky 6 cm se vejde také pouze jedna krychlička o velikosti hrany 3,9 a obdobně do šířky podstavy také nedostaneme více jak jednu krychličku. Pokud bychom si tedy všechny informace dohromady, došli bychom k závěru, že správné řešení je možnost A), jelikož se nám do zadaného kvádru vejdou pouze dvě dřevěné krychličky.


Uvnitř papírového kvádru je ukryto několik dřevěných krychliček s hranou délky 3,9 cm.
Síť tohoto kvádru je zobrazena na plánku ve čtvercové síti.

(CZVV)

2 body

12 Jaký je největší možný počet dřevěných krychliček, které mohou být ukryty uvnitř papírového kvádru?

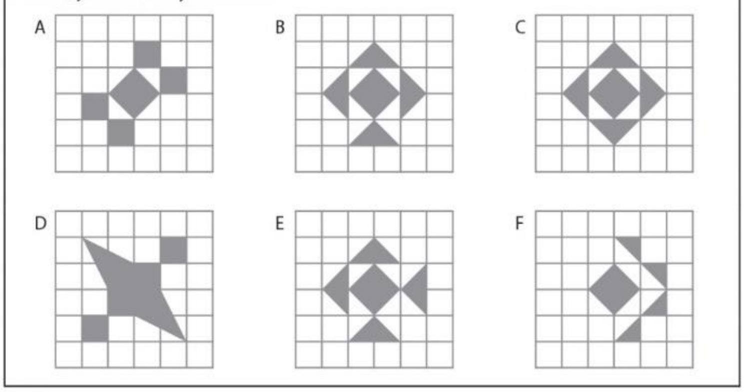
A) méně než 3
B) 3
C) 4
D) 6
E) jiný počet

Obrázek 53 - Příklad M7-2
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2017/08/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2018-1-nahradni-termin-sestilete-obory.pdf

6.3. Přijímací zkouška z matematiky na čtyřleté obory a nástavbová studia

Tato přijímací zkouška je zaměřena na přijímací zkoušku z matematiky, která je zadávána v rámci přijímacího řízení na střední školy zakončené maturitní zkouškou. Obsah zkoušky koreluje s učivem 1. a 2. stupně základní školy. Prostorová představivost se objevuje v úlohách zaměřené na geometrii, osovou souměrnost či stavby z krychlí. Test má celkem 16 úloh s časovým limitem 70 minut. (CERMAT, 2019)

V následujícím příkladu z přijímacího testu M9PDD19C0T04, *obrázek 54,* jsou znázorněny na čtvercových sítích různé obrazce. Úkolem je rozhodnout o osách souměrnosti jednotlivých obrazců a následně pak zodpovědět podúlohy. Máme zodpovědět, zda jsou tvrzení v podúlohách pravdivé, či ne. První z nich říká, že právě 4 osy souměrnosti má pouze jeden obrazec. Pokud bychom zanalyzovali obrazce, došli bychom k závěru, že tvrzení je pravdivé. Jediný obrazec, který má právě 4 osy souměrnosti, je obrazec C. Druhé tvrzení není pravdivé z toho důvodu, že 1 osu souměrnosti nemají jen obrazce B a F, ale také obrazec E. Poslední rozhodnutí, zda je věta pravdivá či ne, se týká obrazců se dvěma osami souměrnosti, které mají pouze 2 obrazce. Tvrzení je pravdivé, jelikož obrazce jsou opravdu touze dva, a to přesně obrazec A a D.


Šest obrazců A–F ve čtvercové síti se skládá ze čtverců a trojúhelníků. Všechny vrcholy obrazců jsou v mřížových bodech.

(CZVV)

max. 4 body

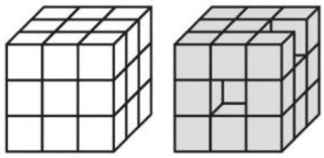
11 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (11.1–11.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
11.1	Právě 4 osy souměrnosti má pouze jeden obrazec.	☐	☐
11.2	Právě 1 osu souměrnosti mají pouze 2 obrazce, a to B a F.	☐	☐
11.3	Právě 2 osy souměrnosti mají pouze 2 obrazce.	☐	☐

Obrázek 54 - Příklad M9-1
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2018/09/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2019-2-nahradni-termin-ctyrlete-obory.pdf

Didaktický test M9PAD19C0T01 obsahuje úlohu, *obr. 55,* která se zaměřuje na obsah šedých ploch, povrch, nového tělesa, které vzniklo odstraněním dvou krychliček. K výsledku se dostaneme následovně. Původní těleso se skládá ze 6 stěn a každá stěna je složena z 9 čtverců. Celkový povrch původního tělesa je pak 6×9 čtverců, tedy 54 čtverců. Pokud dvě krychličky odebereme, několik čtverců se k povrchu přidá. Krychlička odebraná zepředu přidá k celkovému povrchu 4 čtverce. Druhá odebraná krychle přidá 2 další čtverce. Pokud tedy sečteme povrch původního tělesa, tedy počet všech čtverců, 54 a počet nově vzniklých čtverců, dostaneme celkový povrch nově vzniklého tělesa 60 čtverců. Abychom vypočítali celkový obsah šedých ploch nového tělesa, vynásobíme počet čtverců, ze kterých se skládá povrch nového tělesa, obsahem jednoho čtverce, který je o velikosti $4\,cm^2$. Povrch nového tělesa je tedy 60×4, tedy $240\ cm^2$, možnost C).

Krychle byla slepena z 27 malých bílých krychliček o hraně délky 2 cm.
Dvě malé krychličky jsme odstranili, a vzniklo tak nové těleso. Všechny dostupné plochy nového tělesa jsme obarvili na šedo (i zespodu).



(CZVV)

2 body

14 Jaký je celkový obsah šedých ploch nového tělesa?

A) menší než 236 cm^2
B) 236 cm^2
C) 240 cm^2
D) 244 cm^2
E) větší než 244 cm^2

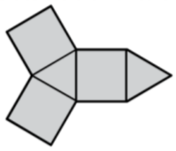
Obrázek 55 - Příklad M9-2
Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/wp-content/uploads/2017/08/statni-prijimacky-matematika-test-zadani-2019-1-radny-termin-ctyrlete-obory.pdf

6.4. Maturitní zkouška z matematiky

V povinné maturitní zkoušce z matematiky se konkrétní příklady zaměřené na prostorovou představivost narozdíl od přijímacích zkoušek na gymnázia a střední školy moc neobjevují. Používáme ji však k řešení různých geometrických úloh, ať už se jedná o planimetrii, stereometrii nebo analytickou geometrii. Běžný časový limit pro vykonání zkoušky je 120 minut, přičemž pomůcky, které jsou povoleny, jsou psací a rýsovací potřeby, matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. (CERMAT, 2019)

Kromě povinné maturitní zkoušky z matematiky mohou studenti absolvovat nově od školního roku 2020/2021 nepovinnou zkoušku společné části maturitní zkoušky Matematika rozšiřující, která navazuje na nepovinnou výběrovou zkoušku z matematiky Matematika+. Tato zkouška má vyšší obtížnost než povinná maturitní zkouška z matematiky. Výsledky zkoušky Matematika+ byly hojně zohledňovány vysokými školami při přijímacím řízení na vysoké školy, kdy například Pedagogická fakulta Jihočeské univerzita v Českých Budějovicích při přijímacím řízení do programu Matematika se zaměřením na vzdělávání za vykonání zkoušky s výsledkem 1 až 3 připočítá uchazeči bodovou bonifikaci. Čas pro vykonání testu je oproti povinné maturitě z matematiky o 30 minut delší, tedy 150 minut. Pomůcky jsou dovoleny stejné jako u povinné maturitní zkoušky z matematiky. (CERMAT, 2019)

V didaktickém testu z roku 2015 MAMZD15C0T01 byla úloha, *obrázek 56*, ve které je v zadání zobrazena síť tělesa. Úkolem je zjistit, kolik hran má těleso této sítě. Pokud bychom si tedy ze sítě dali dohromady těleso, vznikl by nám trojboký hranol. Z čehož je patrné, že těleso má 9 hran.


Síť tělesa tvoří tři čtverce a dva rovnostranné trojúhelníky.

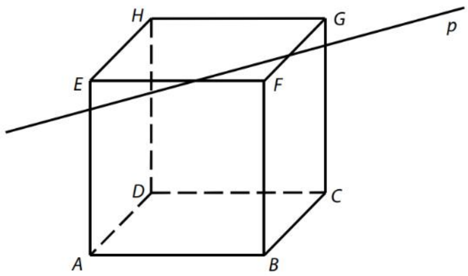
(CZVV)

1 bod

13 Určete počet hran složeného tělesa.

Obrázek 56 – MA-1
Dostupné z: https://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-jaro.pdf

Příklad, *obrázek 57*, který se vyskytuje v nepovinné maturitní zkoušce matematika+, konkrétně MXMVD15C0T01. Řešením úlohy je sestrojit řez krychle, který je zadán rovinou. Rovina je určena přímkou a bodem krychle. Řešení je znázorněno na obrázku 58.

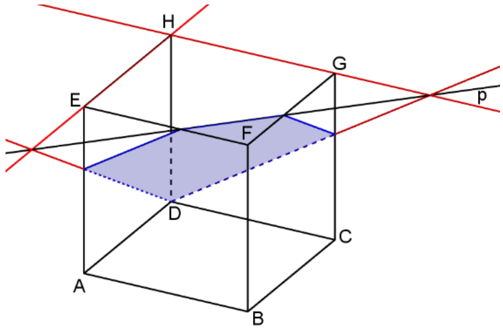

Přímka p leží v rovině EFG horní stěny krychle $ABCDEFGH$. Rovina σ je určena přímkou p a vrcholem D.

(CZVV)

max. 2 body

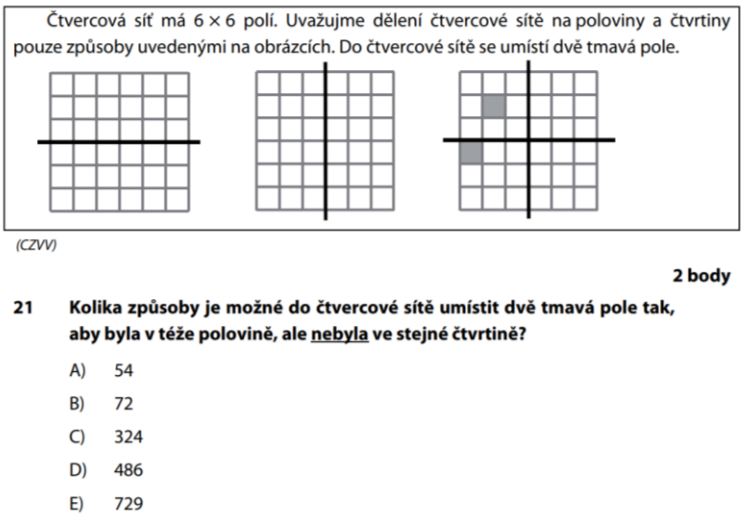
7 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ **rovinou** σ**.**

Obrázek 57 – Příklad MA-2
Dostupné z: https://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-plus-test-zadani-maturita-2015-jaro.pdf



Obrázek 58 – Řešení příkladu MA-2

V dalším didaktickém testu Matematiky+ z roku 2016, MXMVD16C0T01, je obsažen příklad na *obrázku 59*. Tento příklad, kde je znázorněna čtvercová síť, lze spočítat pomocí kombinatoriky. Nejdříve tedy musíme zjistit kolik je možných čtverečků ve čtvrtině, což je 9. Pokud tedy musíme umístit vždy dvě tmavá pole tak, aby nebyla ve stejné čtvrtině, možností pro jednu polovinu je 9×9, tedy 81. Jelikož si v příkladu sami určíme, o jaké poloviny se jedná, jestli o horní a dolní polovinu, nebo o pravou a levou polovinu, musíme pak 81 možností vynásobit 4, abychom zahrnuli všechny možné varianty. Výsledkem pak bude varianta C), jelikož $81 \times 4 = 324$.



Čtvercová síť má 6 × 6 polí. Uvažujme dělení čtvercové sítě na poloviny a čtvrtiny pouze způsoby uvedenými na obrázcích. Do čtvercové sítě se umístí dvě tmavá pole.

(CZVV)

2 body

21 Kolika způsoby je možné do čtvercové sítě umístit dvě tmavá pole tak, aby byla v téže polovině, ale <u>nebyla</u> ve stejné čtvrtině?

A) 54
B) 72
C) 324
D) 486
E) 729

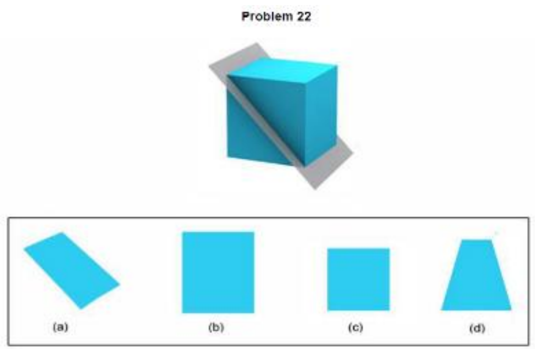
Obrázek 59 - Příklad MA-3
Dostupné z: https://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-plus-test-zadani-maturita-2016-jaro.pdf

7. Testy pro zjišťování prostorových schopností

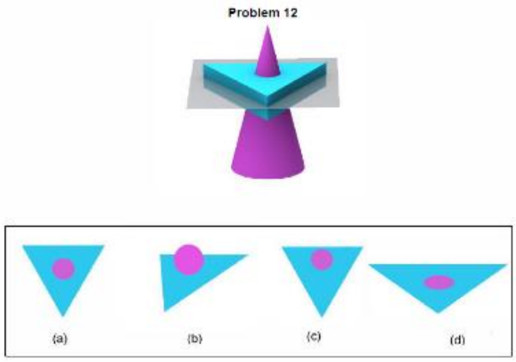
Pro rozvoj prostorové představivosti existují i různé testy, které napomáhání rozvíjení této schopnosti.

7.1. Santa Barbara Solids test

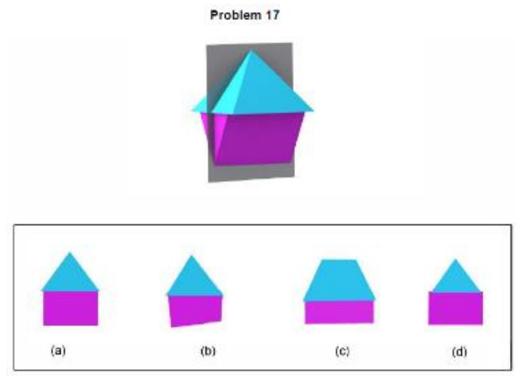
Test Santa Barbara Solids test, *příloha 1*, se skládá z celkem 30 úloh s možností výběru odpovědi ze 4 variant. Test se dělí na tři úrovně obtížnosti. Třetina úloh je zaměřena pouze na řez rovinou jednoho tělesa. U druhé třetiny jsou spojená dvě tělesa k sobě tak, jako kdyby byli přilepené k sobě lepidlem. Objekt je pak také proložen rovinou a úkolem je opět přijít na výsledný 2D průřez objektem. Poslední třetina příkladů jsou tělesa, kdy jedno těleso je vloženo do druhého. Pokud se v úloze vyskytují dvě tělesa, jsou vždy barevně odlišeny, přičemž výsledný průřez je pak také barevně odlišený. V testu se objevují dva typy řezných rovin. Jedním z nich je rovina, která je ortogonální, anebo rovina šikmá. Úlohy i možnosti řešení byli vytvořeny v softwaru 3D Studio Max, Photoshop a Illustrator. (Cohen, 2007)



Obrázek 60 – Úlohy zaměřené řez jedním tělesem



Obrázek 61 – Řez tělesem, do kterého je vložené jiné těleso



Obrázek 62 – Úlohy zaměřené na řez dvěma tělesy

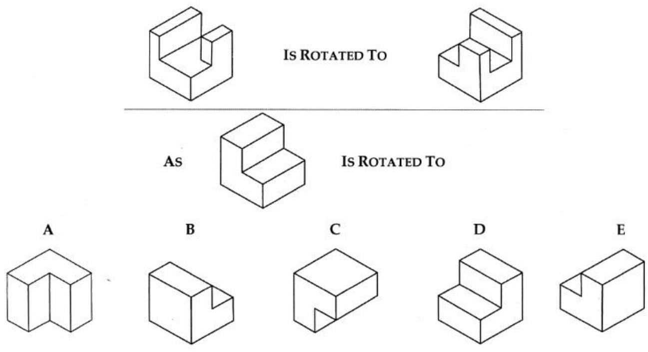
Dostupné z: https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.northwestern.edu/dist/3/2489/files/2019/05/Santa_Barbara_Solids_Test_Version_4_0318-1.pdf

Na začátku testu , viz příloha 1, je testujícím vysvětleno, co to vlastně je průřez na příkladu ze života, krájení jablka. Seznamuje je také s typy řezných rovin. Upozorňuje, že všechny tělesa jsou plné, nikoli duté a že objekty jsou přibližně 6 – 8 palců vysoké a tudíž si je můžeme představit před námi například na stole. Také jsou zde shromážděny instrukce pro správě řešení testu. Úkolem je tedy vybrat možnost správného řešení průřezu, kdy řezná rovina protne objekt. Odpověď bychom však neměli vybírat podle velikosti jednotlivých částí průřezu, ale měli bychom se soustředit na tvary. Test není časově omezený, tudíž můžeme jakékoliv vyhovující tempo řešení.

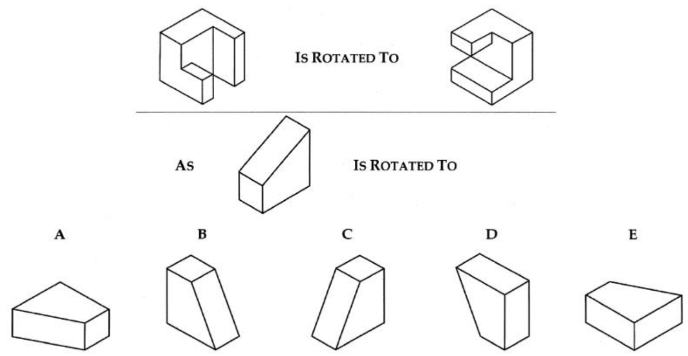
Obdobné úlohy zaměřující se na řez tělesem, se objevují v nepovinné maturitní zkoušce Matematika+. Narozdíl od problémů ze Santa Barbara Solids testu, jsou příklady zaměřené přímo na sestrojení řezu tělesa viz *obrázek 57* na straně 40.

7.2. Purdue Visualization of Rotations Test

Tento test prostorové představivosti byl původně vyvinut jako součást přijímací zkoušky na vysoké školy kolem roku 1970. Je zaměřen na schopnost testujících vnímat vliv rotací na geometrické obrazce. Test byl původně sestaven z 30 úloh. Následně byla ale sestavena kratší verze s 20 úlohami. Úkolem testujícího je, aby přišel na rotaci objektu, který je vždy znázorněn v horní části úlohy, ve své hlavě si pak otočení dokázal představit a následně ji aplikovat na daný objekt. Výsledek je pak výběrem z pěti nákresů ve spodním řádku. Test je časově omezený. Při zkrácené verzi s 20 úlohami je na vypracování 10 minut a při verzi plné s 30 úlohami je časový úsek 20 minut. (Bodner, 1997)



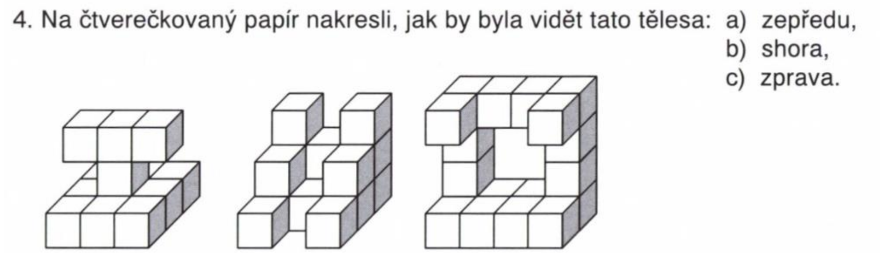
Obrázek 63 – Příklad PVRT 1
Dostupné z: Yoon, S. Y. (2011). Revised Purdue Spatial Visualization Test: Visualization of Rotations (Revised PSVT:R) [Psychometric Instrument].



Obrázek 64 - Příklad PVRT 2
Dostupné z: Dostupné z: Yoon, S. Y. (2011). Revised Purdue Spatial Visualization Test: Visualization of Rotations (Revised PSVT:R) [Psychometric Instrument].

Příklady zaměřené na rotaci tělesa se spíše v přijímacích testech či maturitách neobjevují. Avšak úlohy související s tímto problémem, samozřejmě s nižší obtížností, se objevují v přijímacích testech. Řešením úloh je většinou najít půdorys, nárys a bokorys daného objektu.

Tento případ simuluje úloha viz *obrázek 65*, která je vyjmuta z učebnice pro 5. ročník základní školy od Jaroslavy Justové. (Justová, 2008)

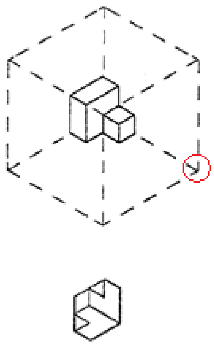


Obrázek 65 – Příklad Justová
Dostupné z: JUSTOVÁ, Jaroslava, 2008. Matematika pro 5. ročník základních škol: Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-136-4.

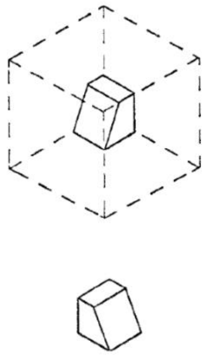
7.3. Visualization of Viewpoints

Visualization of viewpoints, viz *příloha 2,* je test, který se skládá z 24 úloh, jejichž cílem je zjistit, z jaké pozice se na objekt díváme. Tedy z které pozice krychle byl výsledný 3D obraz tělesa pořízen. Pro lepší pochopení je dobré si představit, že v rukách držíme skleněnou krabici, uvnitř které je uprostřed umístěn objekt. Krabice má celkem osm bodů, ze kterých se na daný objekt můžeme podívat. Naším úkolem je tedy zjistit, z jakého bodu je pořízen daný pohled trojrozměrného objektu. Každá úloha má pouze jedno správné řešení a na test je pouze 8 minut s tím, že není přesně daný cíl, ale jedná se pouze o to, aby za 8 minut stihl vypracovat co nejvíce úloh.

Následující příklady jsou vyjmuty přímo z testu. Na *obrázku 66* je zobrazena sedmá úloha z testu, která je již vyřešena. *Obrázek 67* znázorňuje přímo zadání předposlední úlohy z testu.



Obrázek 66 – Vyřešená úloha 7



Obrázek 67– Úloha 23

Dostupné z: https://northwestern.app.box.com/s/qdztp94igzerv7cucy7vm5oevt9a8hqk

Obdobné úlohy se nevyskytují v přijímacích či maturitních didaktických testech. Tento test by však měl zvládnout i žák na střední škole či gymnáziu, kdy dokáže zanalyzovat různá tělesa a různé pohledy na objekty.

7.4. Loeweho pyramida

Loeweho pyramida je test, který vypovídá nejen o prostorové představivosti a zrakovém vnímání, ale také o úrovni praktické inteligence, která nám umožňuje využívat vědomosti a zkušenosti, které jsme získali v minulosti k adaptaci a formování našeho prostředí. Úkolem tohoto testu je ze sedmi různých částí složit pyramidu se čtvercovou základnou. K vykonávání testu je poskytnuto tedy sedm různých dílků a schéma, na kterém je zobrazena finální pyramida, kterou má testovaný sestavit. Časový limit pro splnění je 12 minut. Pokud však vykonavatel testu prokáže, že na princip složení pyramidy přišel, je možné navíc přidat k časovému limitu 1 minuta. Tento test zvládne dokončit člověk od 15 let a výše. Dítě po dokončení základního vzdělávání by tedy test mělo zvládnout. Loeweho pyramida se neobjevuje v didaktických testech, ale můžeme test využít například pro volbu povolání či v jiných oblastech výchovného poradenství. (Svoboda, 2013)

7.5. Soeweho kostka

Tento test je obdobný jako Loeweho pyramida. Spočívá tedy ve složení šesti destiček, které nám dají dohromady krychli. Jednotlivé destičky jsou ozvláštněny různými výřezy, výstupky, drážkami či pery. Všechny stěny tedy do sebe musí s naprostou přesností zapadat. Složení kostky by mělo proběhnout do 12 až 13 minut. Tento test nám může přinést informace jako o úrovni prostorové představivosti, tak nám ale může odhalit i poruchy vnímání, pozornosti, nebo motoriky. (Svoboda, 2013)

Obrázek 68 - Soeweho kostka

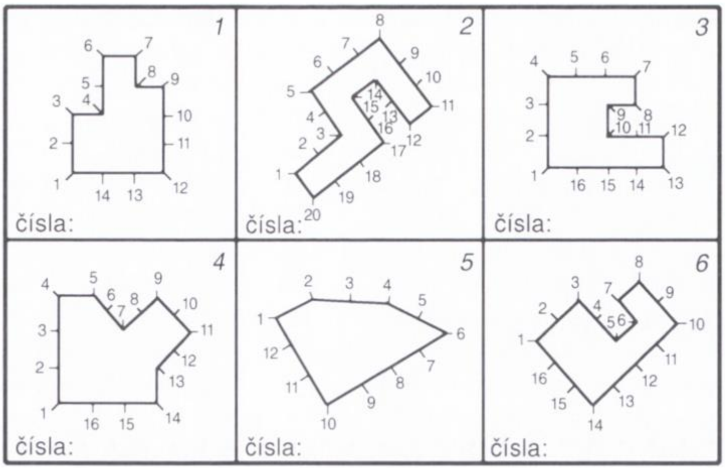
Obrázek 69 – Rozložená Soeweho kostka

Dostupné z: https://docplayer.cz/23780728-Tradice-a-soucasnost-psychodiagnostiky-ve-skupine-vitkovice-heavy-machinery-group.html

7.6. Test čtverců

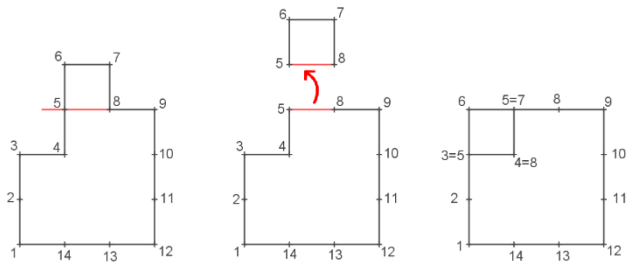
Základem testu čtverců jsou Rybakovy figury, které jsou podle Molnára (2009) zkonstruovány následovně: „Vytvořením spojení dvou bodů na jejich obvodu úsečkou a připojením těchto dvou nově vytvořených částí k sobě může vzniknout čtverec.“ Tento proces však probíhá pouze v hlavě řešitele testu. Výsledky testu čtverců neovlivňují pouze schopnosti prostorové představivosti, ale velkou roli zde hraje i úroveň všeobecné inteligence. (Molnár, 2009)

Test se skládá z celkem 48 úloh, přičemž 3 z nich jsou tzv. tréninkové. Časový úsek pro vypracování testu je 20 minut. Úkolem testovaného je, aby dokázal planimetrický obrazec, jehož body jsou označeny čísly, rozdělit tak, aby bylo možné vytvořit čtverec. Do záznamového archu pak řešitel zakreslí u dané úlohy dělící čáru, a začátek a konec úsečky pak označí příslušnými čísly. Test se využívá například v poradenství pro volbu povolání či při posuzování psychické pracovní způsobilosti. (Svoboda, 2013)



Obrázek 70 – Úlohy z testu čtverců
Dostupné z: SVOBODA, Mojmír a Pavel HUMPOLÍČEK, 2013. Psychodiagnostika dospělých. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0363-6.

Pokud bychom se tedy podívali na řešení úloh z testu čtverců, *obrázek 70*, tak úlohu číslo 1, v levém horním rohu, bychom vyřešili tak, že čáru, která by rozdělila obrazec na dvě části bychom nakreslili od bodu 5 do bodu 8. Pak by vznikly dva obrazce, které by nám dohromady daly čtverec, jak je vidět na *obrázku 71*. Následující úlohy budou řešeny obdobně.



Obrázek 71 - Řešení úlohy 1 z testu čtverců

Tyto úlohy z testu čtverců by měly zvládnout už děti na prvním stupni, kdy rozeznají základní rovinné útvary, jako je právě čtverec.

7.7. Tvarový skládací test

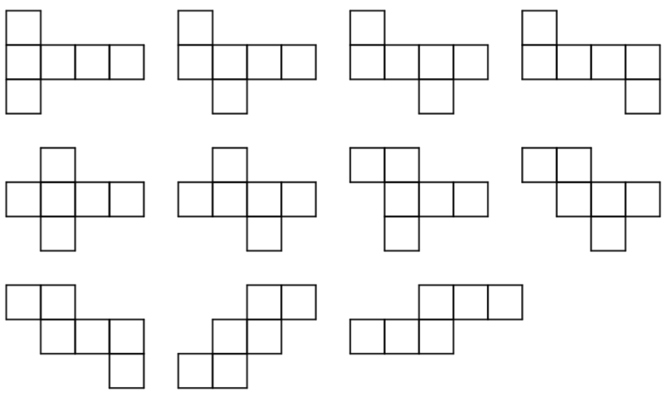
Tvarový skládací test vytvořil G. A. Lienert. Přesný název je Form-Lege-test, nebo je test známý také jako Marburgská hra skládání tvarů. Test tvoří záznamový arch s 25 úkoly. Původně jich bylo pouze 20. Na Slovensku se pak našel upravovatel testu, který dodal dalších 5 úloh, celkem jich tedy je 25. Kromě záznamového archu jsou k řešení poskytnuty čtyři plastikové destičky, která má každá jiný tvar. Z těch se skládají obrazce podle dané předlohy. Čas je limitovaný 25 minutami, tedy na každou úlohu je průměrně 1 minuta k řešení. Stejně tak tomu bylo i u původní verze, kdy úloh bylo 20. Tedy 20 minut na každou úlohu. Tento test je vhodný ke zjišťování praktického nadání ale také i na posouzení prostorového myšlení a představivosti. Metoda je však vhodná například i u žáků končících základní školu a mladistvých, kteří potřebují profesionální poradenství. (Svoboda, 2013)

8. Sada úloh

Sada úloh obsahuje celkem 20 úloh, které jsou zaměřené na rozvoj prostorové představivosti. Povolené pomůcky k řešení úloh jsou dřevěné krychličky, čtverečkovaný papír, rýsovací pomůcky, soma kostka a tangram.

1. Na čtverečkovaný papír načrtněte všechny možné sítě krychle, které se i po přetočení či překlopení nekryjí s ostatními sítěmi. Je jich právě 11.

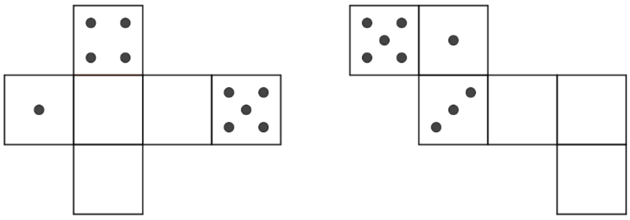
Abychom přišli na všechny sítě, mohli bychom si pomoci dřevěnou krychlí, kterou máme k dispozici. Budeme ji tak dlouho otáčet různými způsoby a zároveň zakreslovat sítě do té doby, než nepřijdeme na všechny možné varianty sítí. Na *obrázku 72* jsou vidět všechny možné sítě krychle.



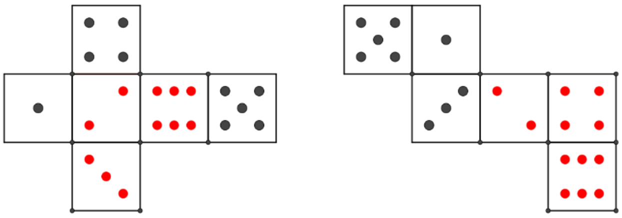
Obrázek 72 – Sítě krychle

2. Je zadána síť hrací kostky, doplňte „puntíky“ hrací kostky tak, aby protilehlé strany kostky dávaly dohromady součet sedm.

a. **b.**

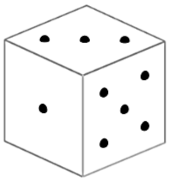


Pokud na všech protilehlých stěnách kostky musí být vždy součet sedm, musíme si představit, jak kostka vypadá složená a pak k zadanému počtu na stěně doplnit správný počet puntíků. Pokud bychom řešili zadání a., protilehlá stěna ke stěně se čtyřmi puntíky bude úplně dole a aby dal součet puntíků sedm, doplníme na tuto stěnu tři puntíky. Obdobným způsobem bychom vyřešili zbývající stěny krychle i druhé zadání b.. Viz *obrázek 73*.

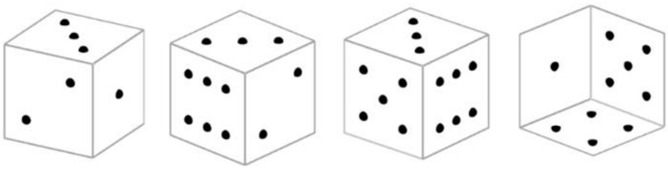


Obrázek 73 - Řešení úlohy 2

3. Pokud víme, že na hrací kostce musí být vždy součet protilehlých stran sedm. Doplňte strany, které z našeho pohledu nevidíme.



Kostka má 6 stěn. Na obrázku v zadání vidíme pouze 3, takže zbylé musíme doplnit. Protilehlé stěny musí dávat dohromady sedm černých „puntíků“. Protilehlá stěna ke stěně s pěti puntíky musí tedy obsahovat dva puntíky. Naproti stěně s jedním puntíkem musí pak být šest puntíků, a na spodní stěně pak musí být čtyři puntíky. Výsledné řešení je znázorněno na *obrázku 74*.



Obrázek 74 - Řešení úlohy 3

4. Krychlí povedeme libovolné řezy. Je možné, aby řezem byl:

a. Čtverec?

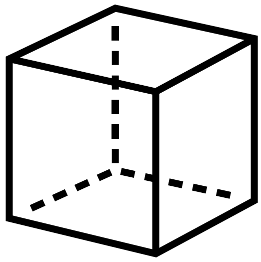
b. Obdélník?

c. Obecný trojúhelník?

d. Rovnostranný trojúhelník?

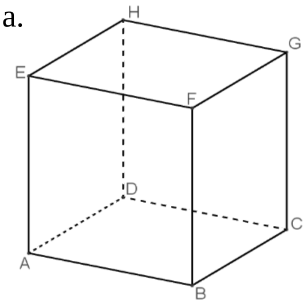
e. Kosočtverec?

f. Jaké všechny tvary mohou být řezem?

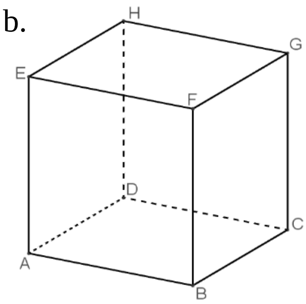


Znázorněte na jednotlivých krychlích řezy.

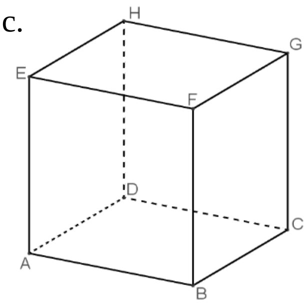
a.



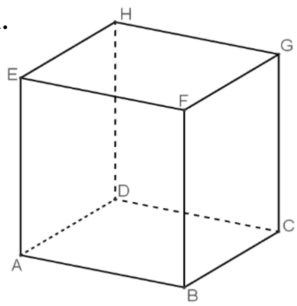
b.



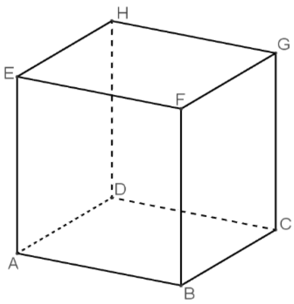
c.



d.

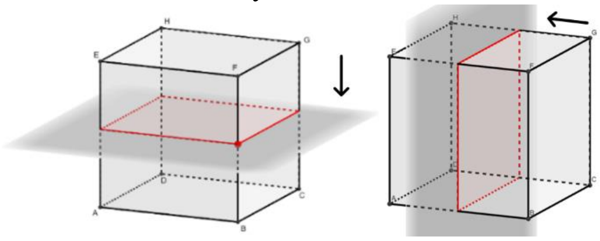


e.



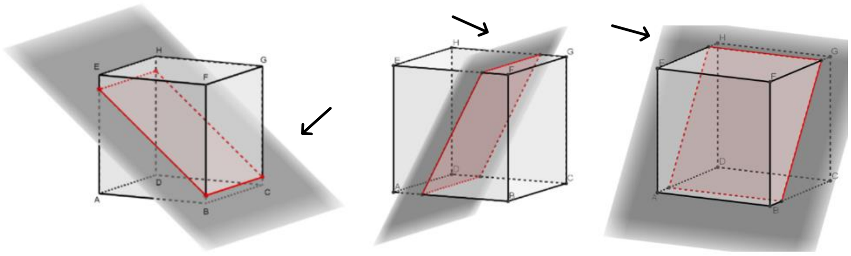
Řešení jednotlivých podúloh musíme samozřejmě řešit zvlášť.

a. Aby řezem krychle byl čtverec, musíme si zvolit body tak, aby byli na čtyřech vzájemně rovnoběžných přímkách. Sousední přímky však od sebe musí být vždy ve stejné vzdálenosti. Proto si body zvolíme na hranách krychle, které jsou vzájemně rovnoběžné a body jsou umístěny vždy na stejném místě úsečky, jako na všech ostatních hranách. Jsou dvě varianty řešení.



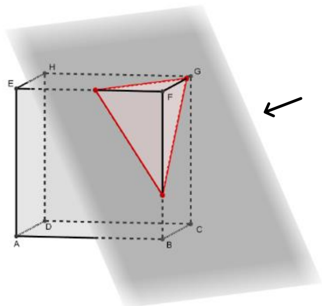
Obrázek 75 - Řešení Úlohy 4a

b. Obdélník, tvar řezu krychle, vznikne obdobným způsobem jako čtverec, akorát dvojice bodů nemohou být umístěny ve stejné rovině rovnoběžné například s podstavami nebo bočními stěnami. Existují tři varianty řešení.



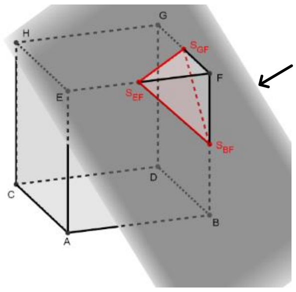
Obrázek 76 - Řešení úlohy 4b

c. Obecný trojúhelník vznikne, když krychlí povedeme řeznou rovinu třemi body, které jsou umístěny jakkoli na třech hranách krychle, které mají společný vrchol. Opět existuje víc než jedno řešení. Jedno z nich e znázorněno na obrázku č., kdy jsme zvolili přímky $BF, GF, EF,$ Které mají společný vrchol F.



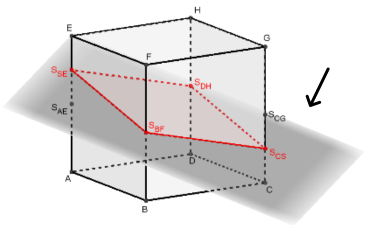
Obrázek 77 - Řešení úlohy 4c

d. Tvar rovnostranného trojúhelníku vznikne obdobně jako u trojúhelníku obecného, akorát body si už nemůžeme zvolit libovolně, ale musí být vždy ve stejné vzdálenosti od společného vrcholu hran krychle. Na *obrázku 78* je znázorněno řešení, ne kterém jsou body umístěny přímo ve středech jednotlivých hran krychle.



Obrázek 78 - Řešení úlohy 4d

e. Aby byl kosočtverec řezem krychle, musíme zvolit takové čtyři body krychle, které budou umístěny na hranách tak, aby měly vždy dva sousední body od sebe stejnou vzdálenost. Kdybychom zvolili čtyři body v jedné rovině rovnoběžné s jakoukoli stěnou, řezem by byl čtverec. Proto musíme zvolit body tak, aby byli ve třech různých rovinách rovnoběžné například s podstavou.

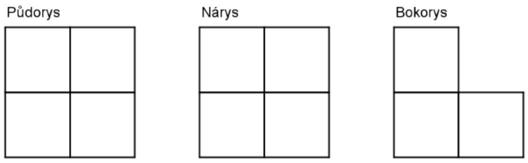


Obrázek 79 - Řešení úlohy 4e

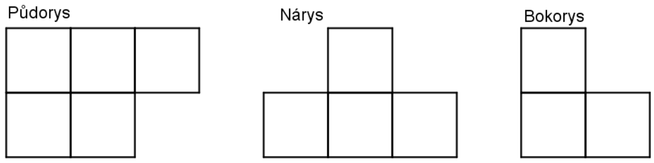
f. Kdybychom se měli zaměřit na všechny možné varianty řezů, které by mohly vzniknout průnikem roviny a krychle, tvarů je mnoho. Výsledným tvarem průřezu krychle a řezné roviny může být trojúhelník, čtverec, obdélník, pravidelný šestiúhelník, mnohoúhelník se čtyřmi, pěti nebo šesti vrcholy, nebo například rovnostranný lichoběžník.

5.	**Určete 3D model tělesa, pokud známe jeho půdorys, nárys a bokorys. Najděte všechna možná řešení.**

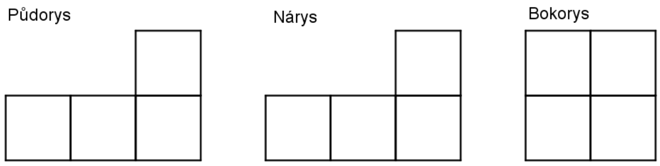
a.



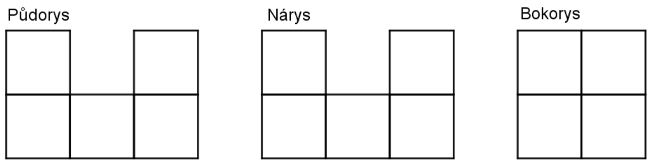
b.



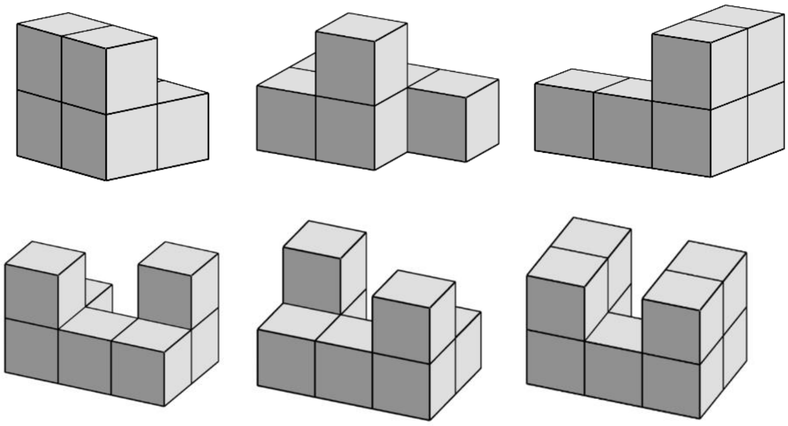
c.



d.



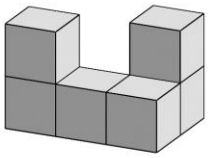
V zadání 5.úlohy máme 4 podúlohy, u kterých máme zadán půdorys, nárys a bokorys jednotlivých těles. Musíme tak zanalyzovat pohledy a těleso poté sestavit. Řešení jednotlivých podúloh je znázorněno na obrázcích viz níže.



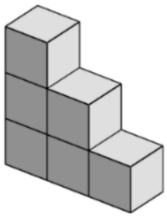
Obrázek 80 - Řešení úlohy 5

6. Na čtverečkovaný papír nakreslete půdorys, nárys a bokorys těles.

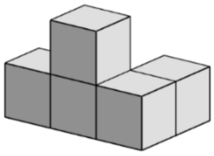
a.



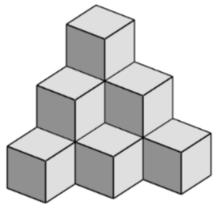
b.



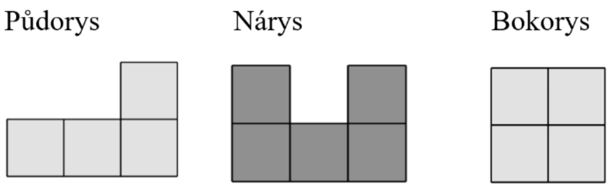
c.



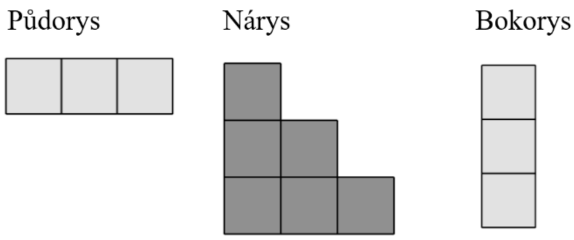
d.



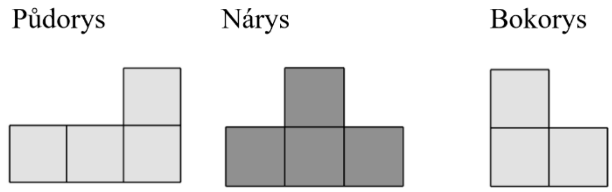
Pokud bychom využily dřevěné krychle, mohli bychom si model postavit z nich a následně se na těleso podívat z požadovaného pohledu. Tedy shora, abychom získali půdorys, zepředu, odkud je vidět nárys, a poslední pohled by byl z boku, odkud zjistíme bokorys. Bez dřevěných krychlí bychom si museli jednotlivé pohledy představit. Řešení jednotlivých podúloh je znázorněno na obrázcích níže.



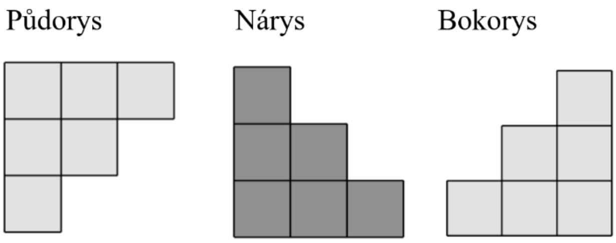
Obrázek 81 - Řešení úlohy 6a



Obrázek 82 - Řešení úlohy 6b



Obrázek 83 - Řešení úlohy 6c



Obrázek 84 - Řešení úlohy 6d

7. Jsou zadané kótované půdorysy těles z krychlí. Sestrojte ke každému z nich těleso, které odpovídá kótovanému půdorysu.

a.

3	2
1	1

b.

4	2
3	1

c.

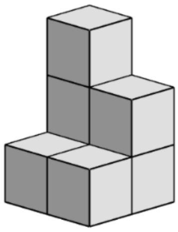
2	3	2
1	2	1

d.

3	2	1
1	0	1

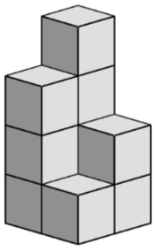
Kótovaný půdorys nám udává, kolik krychlí je na dané pozici postaveno na sobě. Jednotlivé varianty vyřešíme opět jednotlivě.

a. Těleso týkající se první varianty zadání má čtvercovou podstavu. Ve přední řadě bude pouze po jedné krychli v každém sloupci, přičemž v zadní řadě vpravo budou ve sloupci na sobě dvě krychle a vlevo tři krychle. *Obrázek 85* znázorňuje toto těleso.



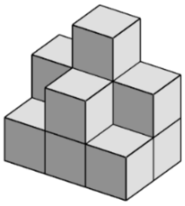
Obrázek 85 - Řešení úlohy 7a

b. Podle kótovaného půdorysu bude těleso vypadat stejně jako na *obrázku 86*.



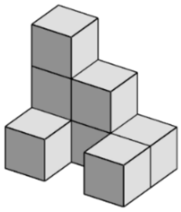
Obrázek 86 - Řešení úlohy 7b

c. Třetí podúlohu ilustruje těleso na *obrázku 87*.



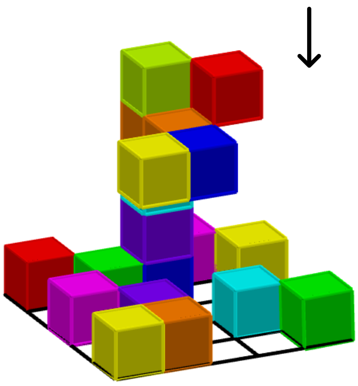
Obrázek 87 - Řešení úlohy 7c

d. Poslední kótovaný půdorys má v jedné pozici 0. To neznamená nic jiného, než že na dané pozici nebude ani jedna krychle, viz *obrázek 88*.

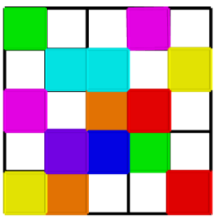


Obrázek 88 - Řešení úlohy 7d

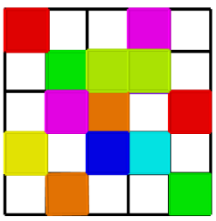
8. Jaký je správný pohled shora na objekt?



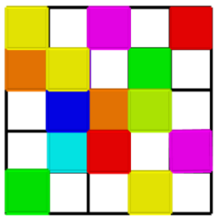
a.



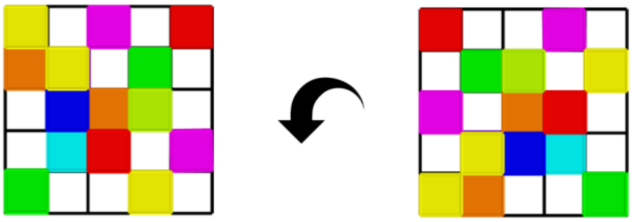
b.



c.



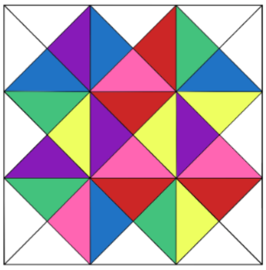
Abychom došli ke správné možnosti řešení, musíme nejdříve zanalyzovat objekt. Je možné, že se nám některé z barevných kostek budou při pohledu shora překrývat. Varianta a. to být nemůže už jek kvůli rozmístění barevných krychlí v prvním sloupci půdorysu, jelikož barvy nekorelují s barvami krychlí v objektu. Varianta b. to také být nemůže, protože ve dvou krajních řadách jsou znázorněny tři barevné krychle, v možnosti jsou ale znázorněny na všech stranách pouze dvě. Správné řešení je tak varianta c, u které je půdorys pouze přetočený o 90° doprava, jak je vidět na *obrázku 89*.



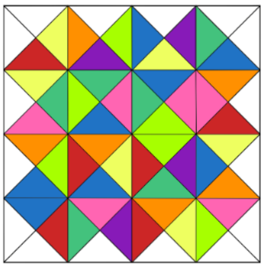
Obrázek 89 - Řešení úlohy 8

9. Vaším úkolem je, abyste poskládali dlaždice ve tvaru čtverce, který je rozdělen na čtyři stejné trojúhelníky, tak, aby výsledný obrazec měl bílé části dlaždic na okrajích finálního obrazce a stejné barvy na sebe navazovali.

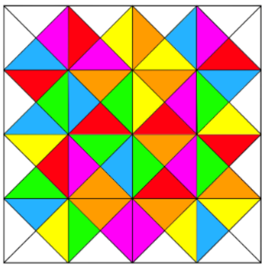
a.



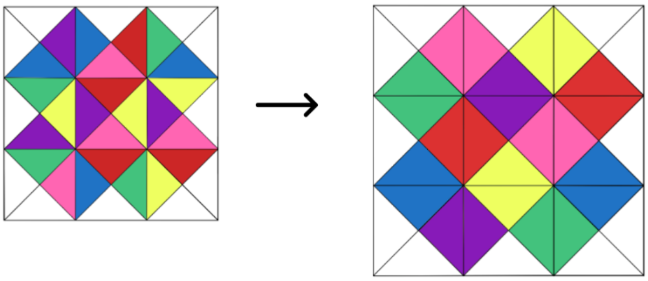
b.



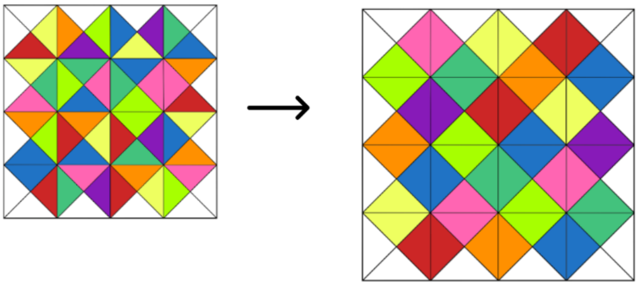
c.



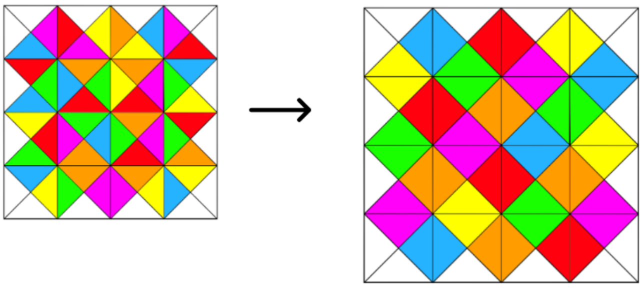
Řešení jednotlivých podúloh jsou znázorněna na obrázcích níže.



Obrázek 90 - Řešení úlohy 9a



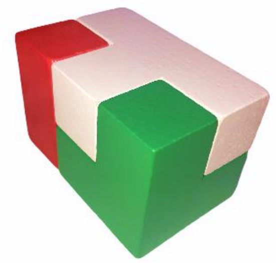
Obrázek 91 - Řešení úlohy 9b



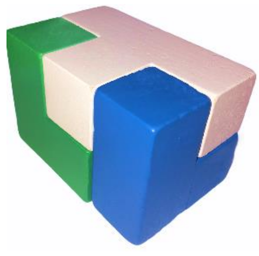
Obrázek 92 -Řešení úlohy 9c

10. Máte k dispozici dílky soma kostky. Vytvořte kvádr tak, abyste použili co nejméně dílků znázorněných na obrázku a každý jste použili pouze jednou.

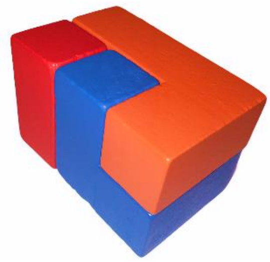
Abychom vytvořili z dílků soma kostky kvádr a zároveň použili co nejméně kostek, musíme si nejdříve uvědomit, jak kvádr bude vypadat. Aby byl co nejmenší, připadá v úvahu kvádr o rozměrech 3x2x1. avšak takovýto nelze kvůli dílkům složit. Proto musíme zvolit kvádr o rozměrech 3x2x2. Dílky se skládají z jednotlivých krychliček. Obsah našeho kvádru tak můžeme spočítat. Bude obsahovat 12 krychliček celkem. Proto tedy připadají tyto varianty možností. Kvádr bychom mohli sestavit ze 2 dílků, které by oba měly 6 krychliček, nebo 3 dílky, které by byli sestavené ze 4 krychliček, nebo 4 dílky obsahující oba 3 krychličky. Vzhledem k dílkům soma kostky je možná pouze varianta se 3 dílky skládající se každý ze 4 krychliček. Varianty řešení jsou znázorněné na obrázcích níže.



Obrázek 93 – Řešení 10a



Obrázek 94 - Řešení 10b



Obrázek 95 – Řešení 10c

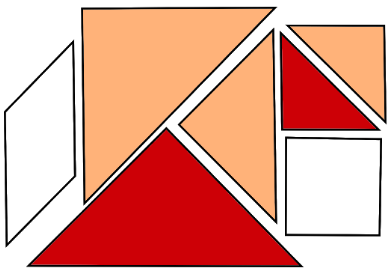
Obrázek 96 - Řešení 10d

11. Z daných dílků postavte útvar tak, aby vám žádný dílek nezbyl.

a. čtverec,

b. obdélník,

c. trojúhelník.



Možnosti řešení jsou znázorněny na obrázcích níže.

a. Čtverec

Obrázek 97 - Řešení úlohy 11a1

Obrázek 98 - Řešení úlohy 11a2

b. Obdélník

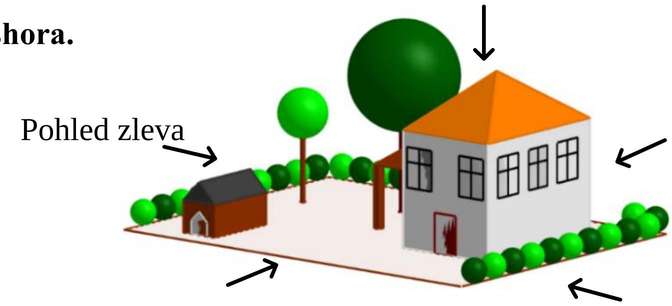
Obrázek 99 – Řešení úlohy 11b

c. Trojúhelník

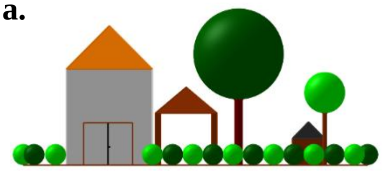
Obrázek 100 – Řešení úlohy 11c1

Obrázek 101 – Řešení úlohy 11c2

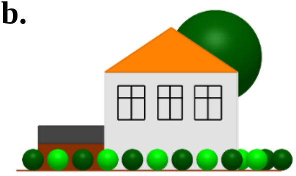
12. Nakreslený 3D obrázek, označit, odkud se na obrázek díváme – zprava, zleva, zepředu, zezadu, shora.



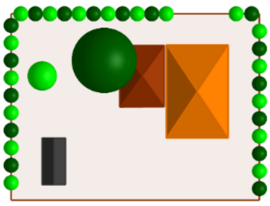
a.



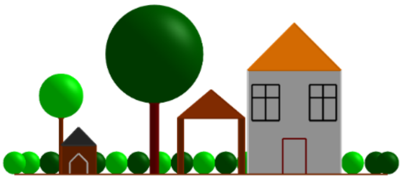
b.



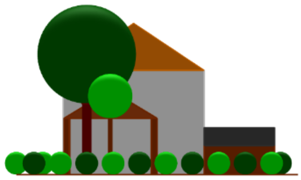
c.



d.



e.

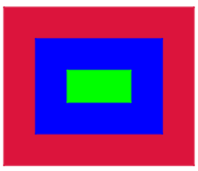


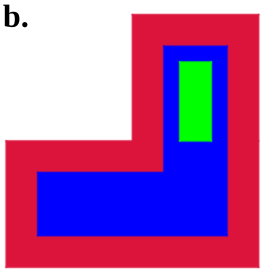
Pro správné řešení je dobré si jako první zanalyzovat obrázek. Pokud šipka vlevo znázorňuje pohled zleva, na pohledu zepředu bude vidět vchod do domu i do boudy, tudíž k pohledu zepředu přiřadíme možnost d. Pohled zprava nám znázorní bok domu s se třemi okny, tedy možnost b. Možnost a nám ukazuje pohled zezadu. Varianta c zobrazuje půdorys obrázku, tedy pohled shora a zbývá nám pohled zleva, tedy možnost e.

13. Upravte bloky v nárysu tak, aby odpovídaly půdorysu.

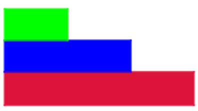
a. **b.**

Půdorys:

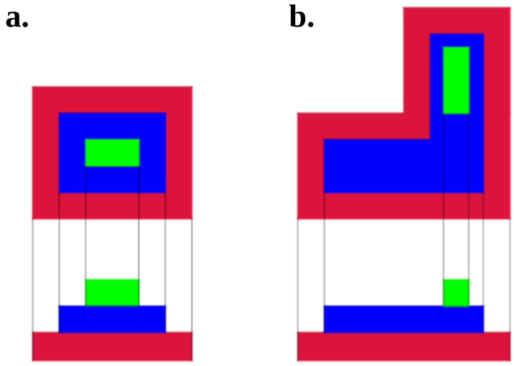




Nárys:



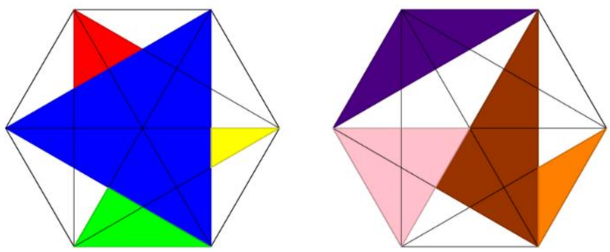
Aby nárys odpovídal půdorysu, musí zelené, modré a červené části být ve stejné pozici. Toho docílíme tak, že z bočních stran jednotlivých obrazců v půdorysu, sestrojíme přímky, kterých se musí dotýkat bočních stěn stejného obrazce v nárysu. Řešení demonstruje *obrázek 102*.



Obrázek 102 - Řešení úlohy 13

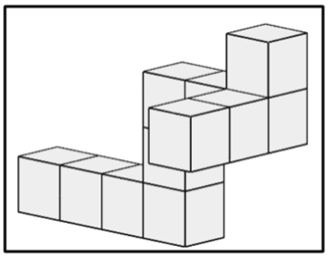
14. Pokud do pravidelného šestiúhelníku narýsujeme všechny uhlopříčky, kolik vznikne trojúhelníků? Uhlopříček je právě 9.

Pokud bychom si narýsovali pravidelný šestiúhelník se všema uhlopříčkami, vzniklo by nám několik různých tvarů trojúhelníků, kterých je 8 viz *obrázek 103*. Jednotlivé trojúhelníky se do šestiúhelníku vejdou hned několikrát. Najdeme zde rovnostranné, pravoúhlé a rovnoramenné trojúhelníky. Mezi rovnostranné patří trojúhelník červený, kterých je celkem 6, modrý je 2x v šestiúhelníku a růžový, který najdeme dohromady 6x. Pravoúhlé trojúhelníky jsou zde zastoupeny také ve třech velikostech. Zelený se do šestiúhelníku vejde celkem 24krát, žlutý 12x a hnědý nalezneme 4x. Zbývají nám tak spočítat rovnoramenné trojúhelníky, které mají velikost fialového a oranžového trojúhelníka. Fialových je tedy 12 a oranžových 6. Pokud bychom tedy všechny trojúhelníky sečetly, dostali bychom součet 72 trojúhelníků.

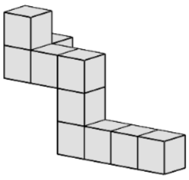


Obrázek 103 - Řešení úlohy 14

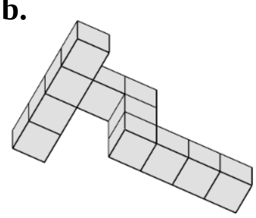
15. Vyberte jednu z následujících možností, na které je zobrazeno stejné těleso, jako na obrázku.



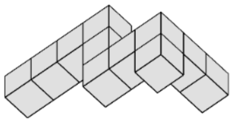
a.



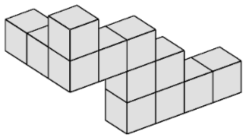
b.



c.



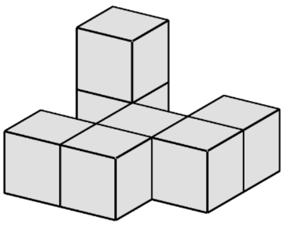
d.



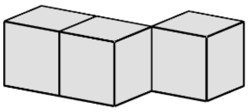
Abychom vybrali správnou možnost, musíme si nejdříve velmi dobře prohlédnout zadané těleso. Můžeme si spočítat, z kolika krychlí se těleso skládá, což je z 11 krychlí, a porovnávat s možnostmi, jestli je počet krychlí stejný či ne. Pokud ano, pak se zaměříme na daný tvar tělesa. Možnost a je složena pouze z 10 krychlí, tedy tuto variantu můžeme vyloučit. Těleso b. se skládá z 11 krychlí, proto se zaměříme na tvar tělesa. Pokud bychom si těleso v zadání natočili stejně, jako je v možnosti b., zjistili bychom, že horní kostička není na správném místě. Proto možnost b. můžeme také vyloučit. U varianty c. je také 11 krychlí. Zadané těleso si tedy otočíme do stejné polohy a zjistíme, že se těleso otočilo pouze vzhůru nohama a nic se nezměnilo, proto možnost c. je správné řešení. Pro kontrolu zanalyzujeme variantu řešení d.. U této možnosti však máme 12 krychlí a z toho důvodu to nemůže být stejné těleso, jako je v zadání.

16. Určete nejmenší možný počet chybějících krychliček stavby tak, aby vznikla krychle a kvádr.

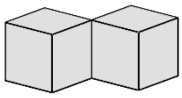
a.



b.

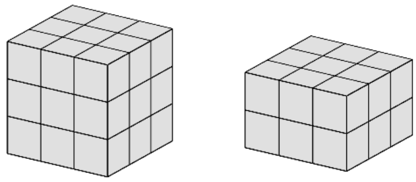


c.



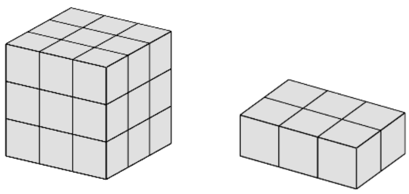
Za úkol máme přijít na to, kolik krychliček doplnit, aby nám z dosavadní stavby vznikla krychle, nebo kvádr, je důležité si uvědomit zásadní vlastnosti těchto těles. Krychle má všechny strany stejně dlouhé, tedy musí mít ve své délce, šířce a výšce stejný počet krychlí. U kvádru musí být různé alespoň dva rozměry. Proto tedy alespoň délka a šířka, případně délka a výška, či šířka a výška, musí být rozdílná.

a. V první podúloze zadání je ve stavbě obsaženo 7 krychlí. Abychom dostavili stavbu tak, aby vznikla krychle, musíme nejdříve zjistit, jaké bude mít rozměry. Krychličky jsou rozmístěny tak, že nejmenší možný rozměr krychle bude 3 krychle. Pokud tedy bude krychle o rozměrech 3x3x3, počet krychliček bude 27. Jelikož už máme 7 krychliček postavených, budeme jich potřebovat dalších 20. Nejmenší možný kvádr by vznikl, pokud by měl rozměry 3x3x2. Obsah kvádr bude 18 krychlí. Ve stavbě jich už máme 7, proto musíme doplnit 11 krychlí, jak je na *obrázku 104*.



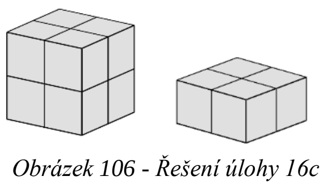
Obrázek 104 - Řešení úlohy 16a

b. U tohoto zadání by krychle vznikla obdobným způsobem jako u zadání a.. Jedinou změnou je to, že ve stavbě máme pouze 3 krychličky. Proto musíme doplnit dalších 24 krychlí, viz obrázek. Kvádr však může vzniknout pouze ze 6 krychliček, jelikož můžeme doplnit pouze 3 krychličky, jak je vidět na *obr. 105*.



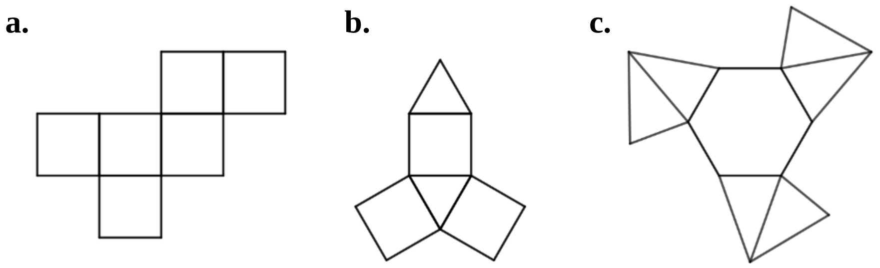
Obrázek 105 - Řešení úlohy 16b

c. Pokud jsou zadané pouze dvě krychli takovýmto způsobem, krychle může vzniknout pouze z 8 krychliček. Doplníme tak 6 krychlí. Kvádr vytvoříme přiložením 2 krychliček. Vznikne kvádr o rozměrech 2x2x1 krychle.



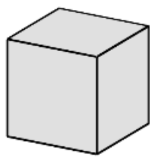
Obrázek 106 - Řešení úlohy 16c

17. Určete, kterého tělesa je znázorněná síť:



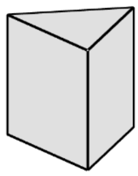
Abychom přišli na to, k jakým tělesům patří znázorněné sítě, musíme vědět, co nám taková síť vlastně znázorňuje. Síť se skládá z podstavy, případně podstav, a pláště tělesa.

a. U prvního zadání máme těleso, které má 6 stěn o stejné velikosti. Už tato informace nám může říct, že těleso, o které se jedná, je krychle.



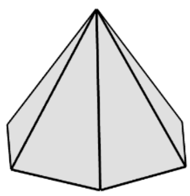
Obrázek 107 - Řešení úlohy 17a

b. Druhé těleso má 5 stěn, přičemž dvě z nich jsou rovnostranné trojúhelníky. Pokud bychom si těleso složili, dostali bychom pravidelný trojboký hranol.



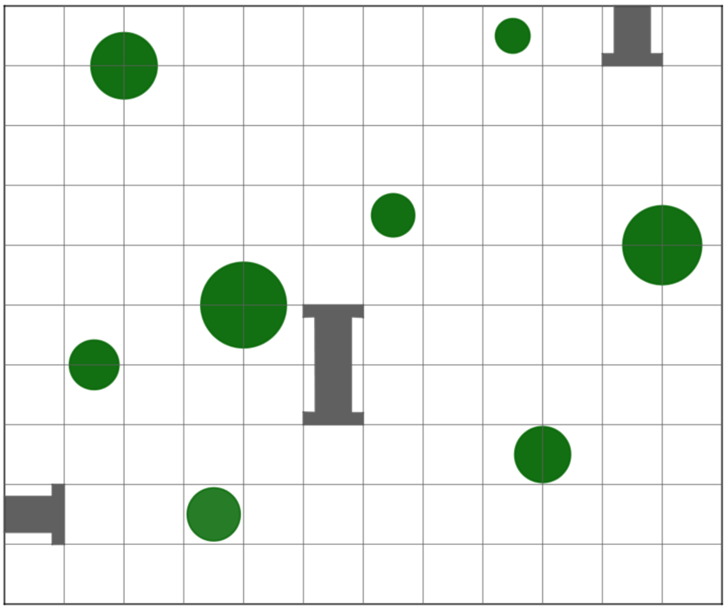
Obrázek 108 - Řešení úlohy 17b

c. U posledního zadání máme znázorněný pravidelný šestiúhelník a 6 rovnoramenných trojúhelníků. Kdybychom si těleso opět sestavili, dostali bychom pravidelný šestiboký jehlan.



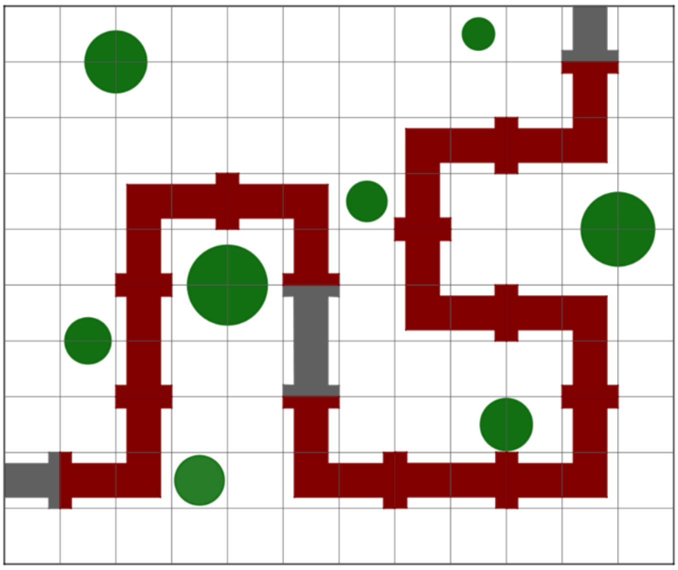
Obrázek 109 - Řešení úlohy 17c

18. Vodovodní potrubí se rozbilo, zbyl pouze začátek, konec a jeden jediný díl potrubí. Sestavte potrubí z daných dílů, kterých je neomezený počet, tak, abyste se vyhnuli zeleným keřům, použili nejmenší možný počet kusů a napojili se na potrubí, které zůstalo nepoškozené.



Díly potrubí:

Pokud nové potrubí musíme napojit na díly, které zůstaly nepoškozené, a zároveň použít co nejmenší možný počet dílů, existuje pouze jedna varianta řešení, která je znázorněna na *obrázku 110*.



Obrázek 110 - Řešení úlohy 18

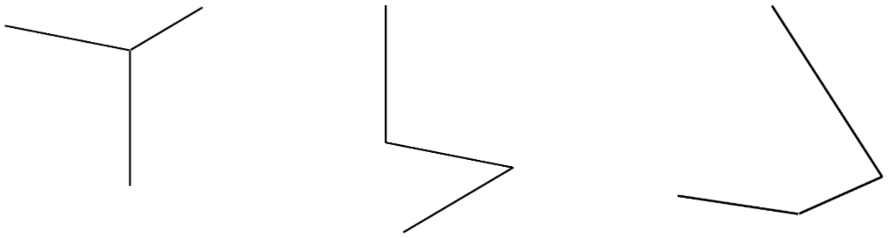
19. Určete, o jaké těleso se jedná, pokud víte, že: **a. Těleso má 5 stěn, 6 vrcholů a 9 hran.** **b. Těleso, které má každé dvě protilehlé stěny stejně velké** **c. Těleso, které má síť složenou z pravidelného pětiúhelníku a z několika rovnostranných trojúhelníků.**

K řešení této úlohy je dobré znát různé vlastnosti těles.

a. Existuje pouze jedno těleso, které má 5 stěn, 6 vrcholů a 9 hran. Tyto vlastnosti má trojboký hranol.
b. Těleso, které má každé dvě protilehlé strany stejně velké, není žádné jiné než krychle.
c. Pokud bychom si nakreslili síť tělesa, došli bychom k závěru, že se jedná o pravidelný pětiboký jehlan.

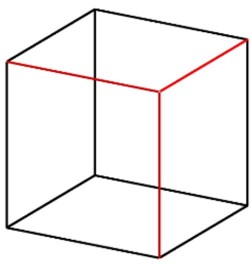
20. Doplňte hrany:

a. Krychle **b. Kvádru** **c. Pětibokého jehlanu**



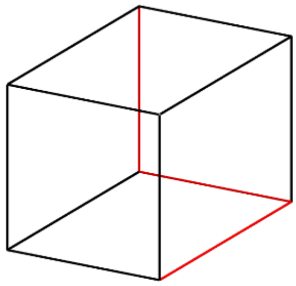
Abychom správně doplnili hrany těles, musíme si nejdříve říct, kolik hran vlastně musíme dokreslit.

a. Krychle má celkem 12 hran. V zadání jsou pouze tři, tudíž jich musíme dokreslit 9. Jelikož jsou každé dvě hrany krychle vzájemně rovnoběžné nebo kolmé. Stačí pracovat s těmito pravidly a krychli tak dokreslíme.



Obrázek 111 - Řešení úlohy 20a

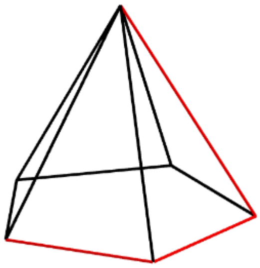
b. U kvádru je stejný postup jako u krychle. Jediné, co bude jiné, jsou rozměry,



Obrázek 112 - Řešení úlohy 20b

jelikož kvádr nemůže mít samozřejmě všechny stejné.

c. Pětiboký jehlan má 10 hran, musíme tedy dokreslit zbývajících 7. U tohoto dokreslen hran je dobré si představit sít pětibokého jehlanu. Ta se skládá z podstavy, pětiúhelníku, a z pěti rovnoramenných trojúhelníků. Pokud na toto budeme myslet, doplněný bude mnohem jednodušší.



Obrázek 113 - Řešení úlohy 20c

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo provedení jednak rešerše učiva matematiky základních a středních škol, dostupné literatury a dalších zdrojů, které pojednávají o rozvoji prostorové představivosti, ale také rešerše testů prostorové představivosti. Bakalářská práce byla také určena k vytvoření sady úloh s příklady zabývajících se prostorovou představivostí pro použití ve výuce.

Na začátku práce jsou uvedeny některé pojmy, které vedou k lepšímu pochopení, co to vlastně prostorová představivost je. Jedná se například o vnímání prostoru, představivost, nebo samotný vývoj prostorové představivosti. Následně jsou v práci uvedené i některé pomůcky, které k rozvoji prostorové představivosti přispívají. Uvádím třeba různé aplikace, tangram, soma kostku či stolní hry. Dále je v práci provedena rešerše učiva základní školy, která je rozdělena na 1. a 2. stupeň základní školy, učiva gymnázií, středních škol, ale také obsahu přijímacích a maturitních zkoušek. Předposlední kapitola se zabývá testy pro zjišťování prostorových schopností. V práci uvádím například Santa Barbara Solids test, Purdue Visualization of Rotations Test nebo i Visualization of Viewpoints.

Závěrečnou částí mé bakalářské práce je sada úloh, která obsahuje celkem 20 příkladů, které jsou zaměřené na rozvoj prostorové představivosti. K řešení je povoleno pouze několik pomůcek. Příklady jsem se snažila vyřešit tak, aby jim řešitel dokázal porozumět. K řešení příkladů jsem převážně přikládala i obrázky, jelikož lépe znázorňují řešení. Byly vytvořeny pomocí programu GeoGebra, který jsem v práci také stručně popsala.

Doufám, že tato sada úloh najde své uplatnění ať už ve školním prostředí nebo mimo něj a stane se tak pomocníkem k rozvoji prostorové představivosti.

Zdroje

1. Anaglyph 3D, 2021. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Anaglyph_3D
2. BLAŽKOVÁ, Jana, 2008. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-108-4.
3. BODNER, George & GUAY, ROLAND. (1997). *The Purdue Visualization of Rotations Test. The Chemical Educator*. 2. 1-17. 10.1007/s00897970138a.
4. BOTERMANS, Jack, 2004. *Hlavolamy: jak je vyrábět a řešit*. Praha: Olympia. ISBN 80-7033-828-8.
5. BOUŠKOVÁ, Jitka, 2007. *Matematika 6: pro základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-365-1.
6. BUŠEK, Ivan, 2010. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník ZŠ*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-395-0.
7. CERMAT, 2019. *Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání* [online]. Dostupné také z: https://cermat.cz/
8. COHEN, Cheryl A. a Mary HEGARTY, 2007. Sources of Difficulty in Imagining Cross Sections of 3D Objects. *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual Conference of the Cognitive Science Society*.
9. ČECHOVÁ, Věra, 1996. *Obecná psychologie*. Brno: Institut pro další vzdělávání pracovníků ve zdravotnictví. ISBN 80-7013-231-0.
10. GARDNER, Howard, 1999. *Dimenze myšlení: Teorie rozmanitých inteligencí*. Praha: Portál. ISBN 80-7178-279-3.
11. GeoGebra, 2020. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 16.1.2020. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/GeoGebra
12. GREBENÍČEK, František, 2012. *Origami* [online]. Dostupné z: https://new.origami.cz/index.php/Origami
13. HARTL, Pavel, 2009. *Psychologický slovník.* 2. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-569-1.
14. CHRONICLES, Friedel, 2019. *Piet Hein a Soma Cube* [online]. Dostupné z: https://frederic-38110.medium.com/piet-hein-and-the-soma-cube-28680c036268
15. JANČAŘÍK, Antonín, 2007. *Hry v matematice*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-339-9.
16. JANOŠ, Jiří, 1986. *99 zajímavostí z Japonska*. Praha: Albatros.
17. JUSTOVÁ, Jaroslava, 2008. *Matematika pro 5. ročník základních škol: Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-136-4.
18. KLETEČKA, Jaroslav a Petr FOŘT, 2007. *Technické kreslení.* Brno: Computer Press. ISBN 978-80-251-1887-0.

19. KOTLÁN, Igor, 2009. *Testy obecných studijních předpokladů a základy logiky*. Brno: Institut vzdělávání Sokrates. ISBN 978-80-86572-68-0.
20. KUŘINA, F.: *Geometrická představivost a vyučování stereometrii*. MFvŠ 18. 1987
21. LEINVEBER, Jan a Josef ŠVERCL, 1999. *Technické kreslení a základy deskriptivní geometrie*. Praha: Scientia. ISBN 80-7183-162-X.
22. LOYD, Sam a Peter. VAN NOTE, 2007. *Sam Loyd's book of tangrams*. Mineola, N.Y.: Dover. ISBN 0-486-45424-X.
23. MOLNÁR, J., PERNÝ, J., STOPENOVÁ, A. Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji. In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. 64. s. ISBN 80-7015-085-8.
24. MOLNÁR, Josef, 2009. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 2. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-2254-1.
25. MORSCHECK, Karl-Heinz, 2005. *Perspektiva*. Ostrava: Anagram. ISBN 80-7342-061-9.
26. MŠMT, 2013. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Výzkumný ústav pedagogický v Praze. ISBN 978-80-87000-11-3.
27. MŠMT, 2021. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.
28. OPAVA, Zdeněk, 1989. *Matematika kolem nás: Pro čtenáře od 13 let*. Praha: Albatros.
29. PERENČAJ, J., REPÁŠ, V.: *Diagnostika rozvoja stereometrických predstáv študentov vysokých škol technických*. MFvŠ 16. 1985, 4. s. 277-280.
30. PLECEROVÁ, Veronika a Yvetta PUŽEJOVÁ, 2016. *Psychologie*. ISBN 978-80-88058-88-5.
31. PLHÁKOVÁ, Alena, 2004. *Učebnice obecné psychologie*. Praha: Sazba Cadis. ISBN 978-80-200-1499-3.
32. POMYKALOVÁ, Eva, 2000. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-178-7.
33. POMYKALOVÁ, Eva, 2010. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-400-1.
34. ŘÍČAN, Pavel, 2010. *Psychologie osobnosti: obor v pohybu*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-3133-9.
35. SILLAMY, Norbert, 2001. *Psychologický slovník*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 80-244-0249-1.
36. SLAVÍK, Antonín, 1996. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. ISSN 0032-2423.
37. SMITH, Soonboke, 2007. *Origami pro radost*. Praha: Ikar. ISBN 978-80-249-0827-4.
38. SVOBODA, Mojmír a Pavel HUMPOLÍČEK, 2013. *Psychodiagnostika dospělých*. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0363-6.

39. ŠTĚPÁNKOVÁ, Jaroslava, 2012. *Osobnost 5. - výkonové vlastnosti: Vlohy, schopnosti, inteligence*. Metodický portál RVP.cz [online]. Národní pedagogický institut České republiky, 17.12.2009. Dostupné z: https://wiki.rvp.cz/Kabinet/Ucebni_texty/Psychologie_pro_st%C5%99edn%C3%AD_%C5%A1koly/Osobnost_5._-_v%C3%BDkonov%C3%A9_vlastnosti%2C_inteligence
40. ULUÇAY, Irena, 2017. *Minecraft: Education Edition ve školním prostředí: příručka nejen pro učitele*.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha 1. – Santa Barbara Solids Test

Date:________________ID:___________

Santa Barbara Solids Test

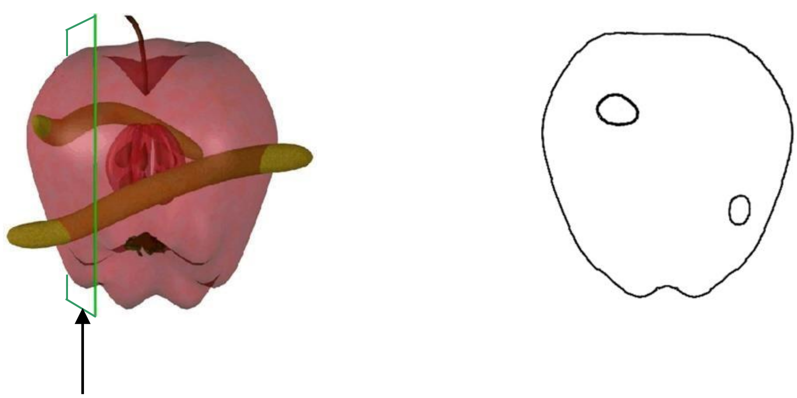
Version 4

(revised 03/30/18)

This is a test about **cross-sections**. A cross-section is the 2D shape that results when a cutting plane intersects an object.

You’ve seen many examples of cross-sections in everyday life. For example, when you slice an apple from top to bottom, the resulting cut surface is a cross-section of the apple.

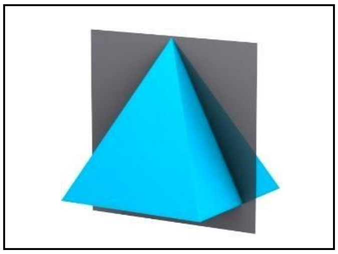
The picture below shows an apple with some worms inside. Note that the cross section on the right shows both the apple and the shapes and locations of the sliced worms inside the apple.



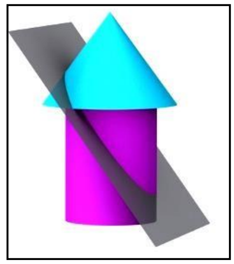
Cutting Plane **Resulting cross-section of apple**

For assistance with revisions, thanks to:
Rabih Younes, Duke University
Uri Alon, University of Haifa
The Center for Safety, Simulation & Advanced Learning Technologies, University of Florida

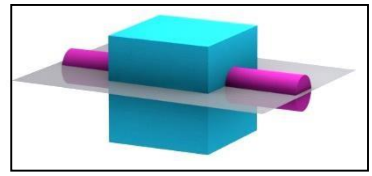
In this multiple choice test, you will be asked to identify the cross sections of three types of figures:



Single object



Attached objects

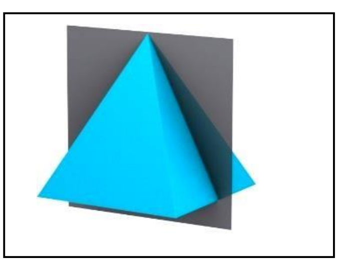


Nested objects
(one object is inside another)

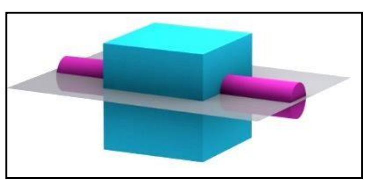
Here are some important things to remember:

- All figures are solid (not hollow) objects.
- The objects are about 6-8 inches tall. Imagine that they are on the table in front of you.
- Attached figures are “glued together” at their edges.
- Nested objects consist of one object inside another. In the nested object above, the cylinder extends all the way through the cube. If you sliced this figure, you would see the cylinder inside the cube.

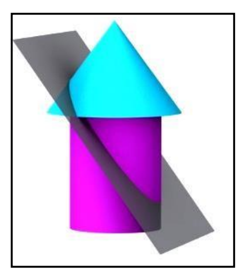
The cutting planes, shown in grey, will have different orientations.



Vertical Plane



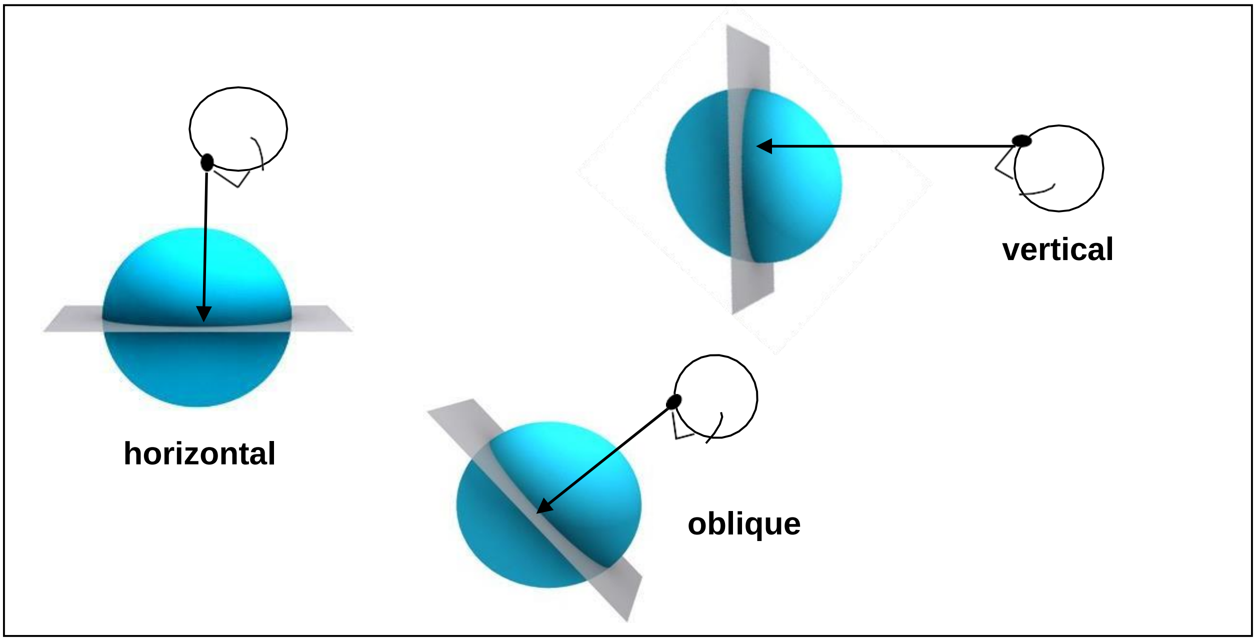
Horizontal Plane



Oblique Plane

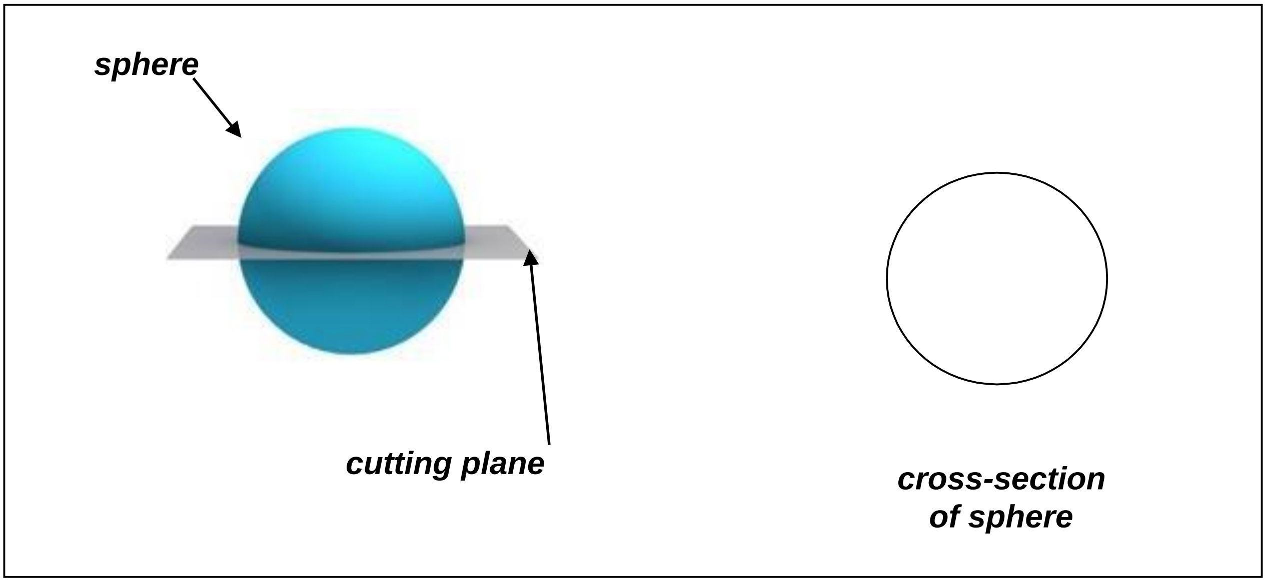
You will see three types of cutting planes: horizontal, vertical, and oblique.

For each type of cutting plane, try to imagine the cross section that would result if you faced the cutting plane head-on, as if you were looking at your reflection in a mirror.
.

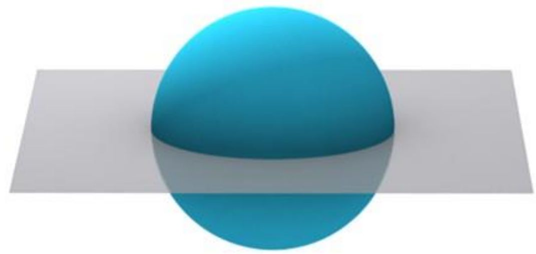


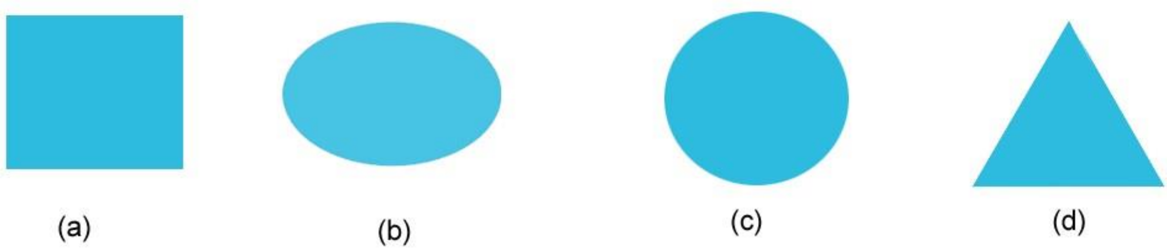
You should also assume that the objects are 6-8 inches tall, and that they are sitting on the desk in front of you.

In the example below, the cutting plane would produce the cross section on the right.



Sample Problem



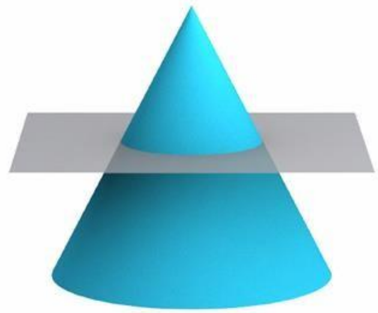


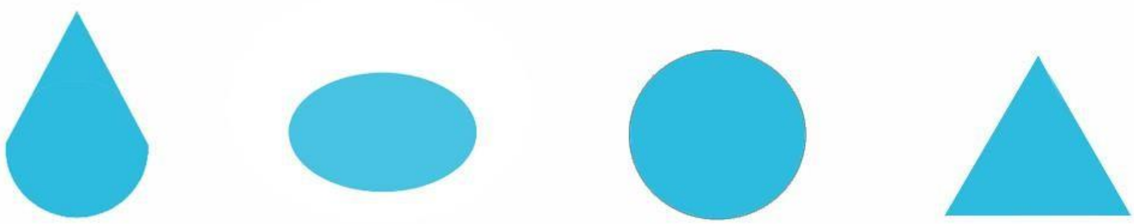
Instructions:

Circle the cross-section you would see when the grey cutting plane slices the object. Imagine that you are facing the cutting plane head-on, as if you were looking in a mirror. Make your choice based on the shapes of the possible answers, not their sizes.

This is an untimed test. Work at your own pace.
You can ask the experimenter a question at any time.

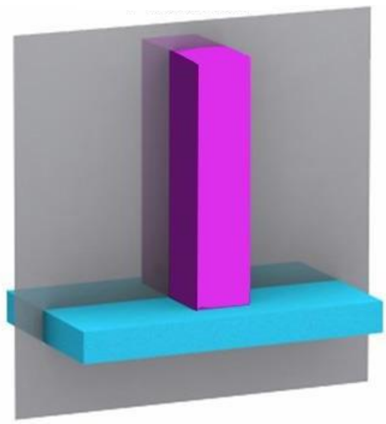
Problem 1

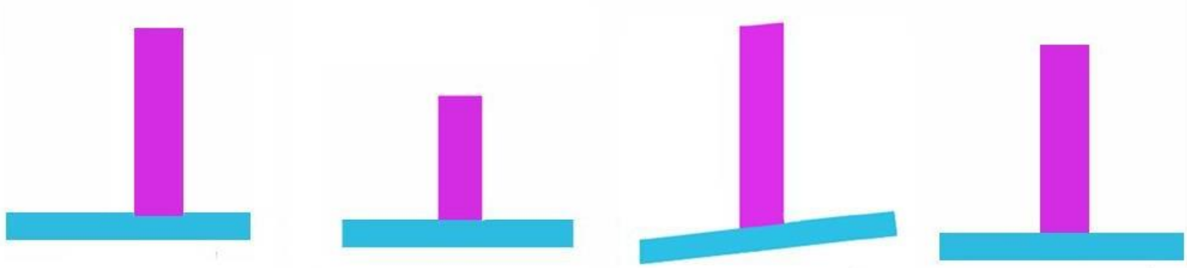




(a) (b) (c) (d)

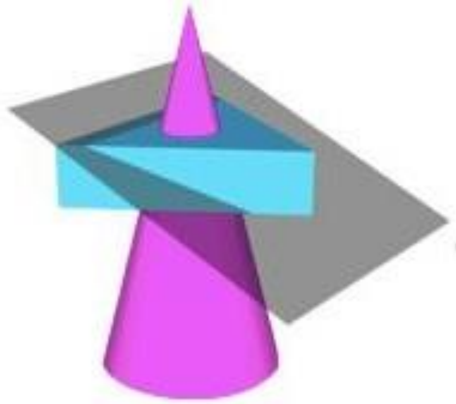
Problem 2

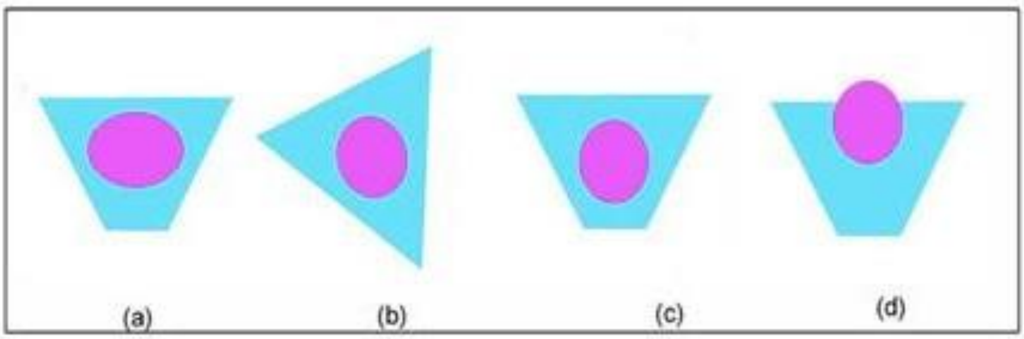




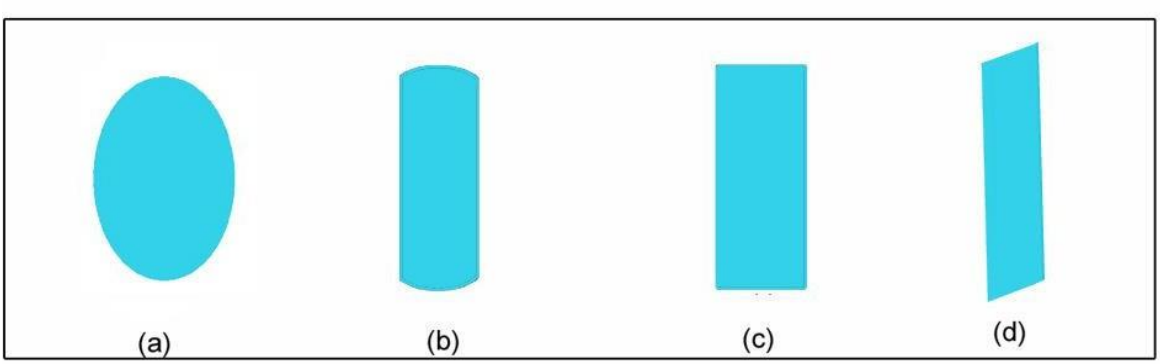
(a) (b) (c) (d)

Problem 3

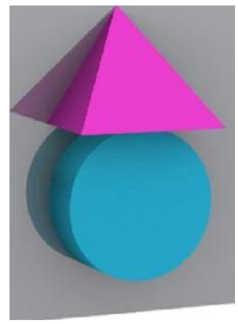


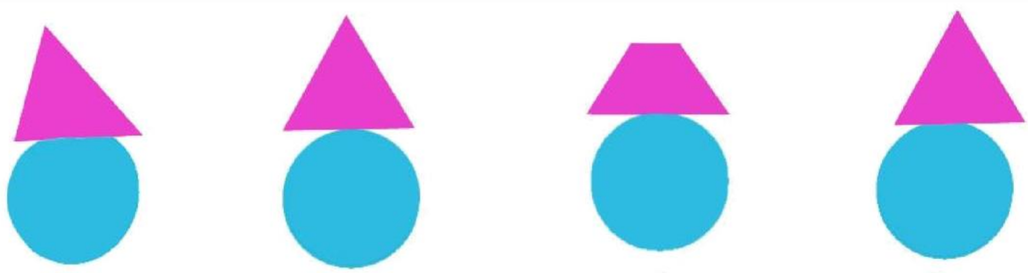


Problem 4



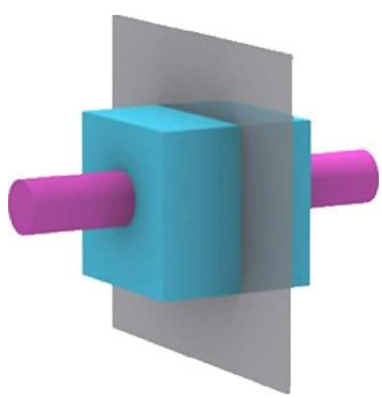
Problem 5

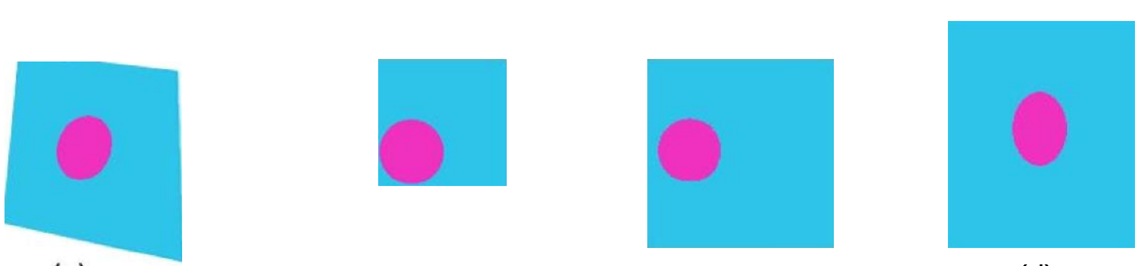




(a) (b) (c) (d)

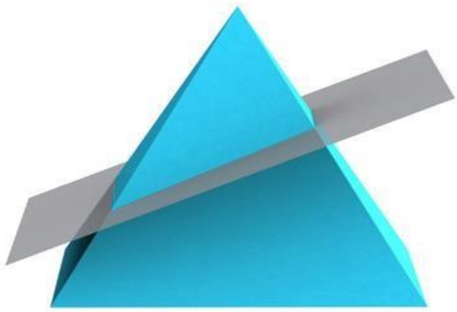
Problem 6

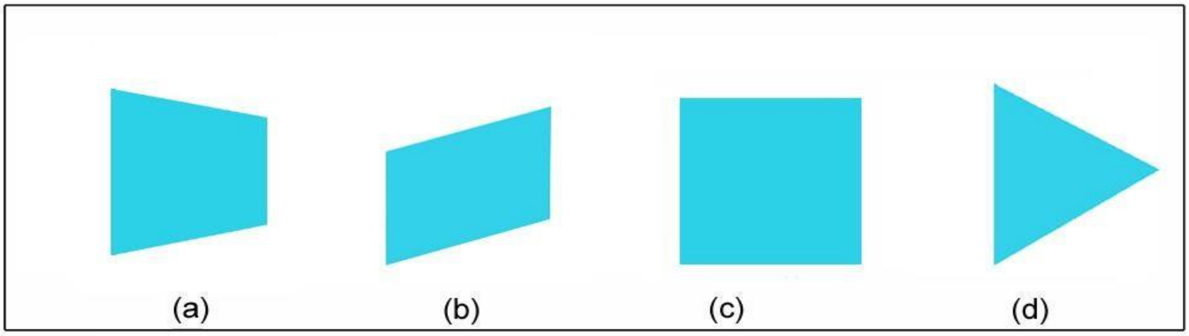




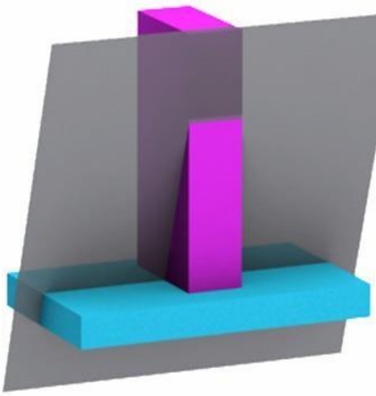
(a) (b) (c) (d)

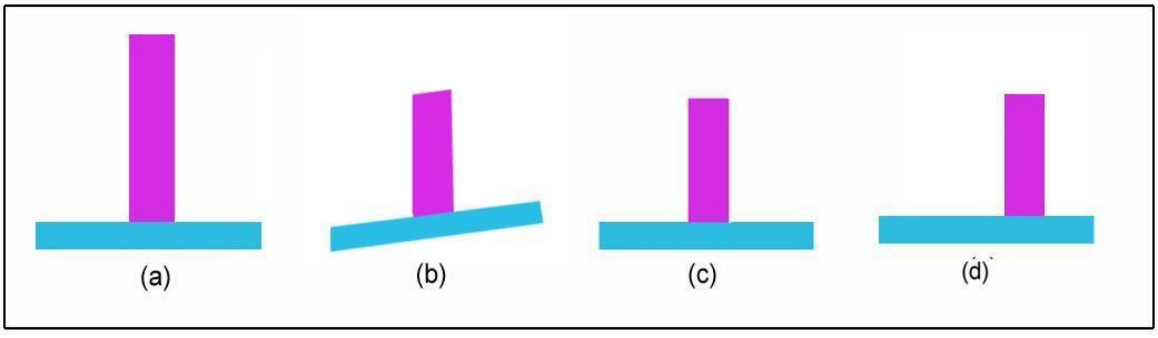
Problem 7



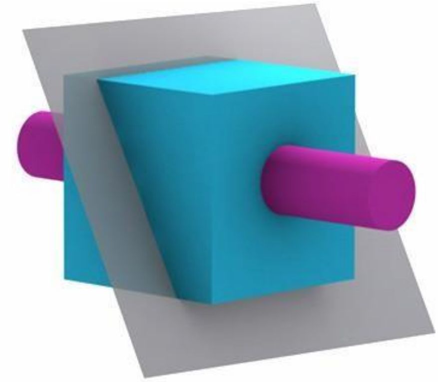


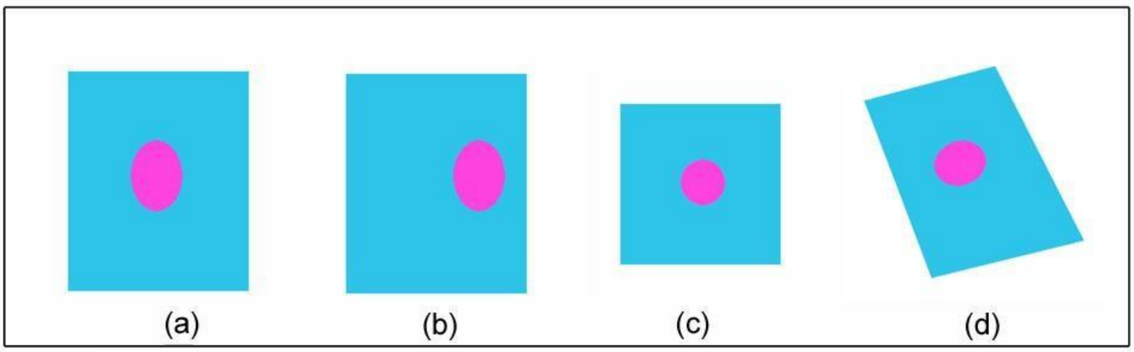
Problem 8

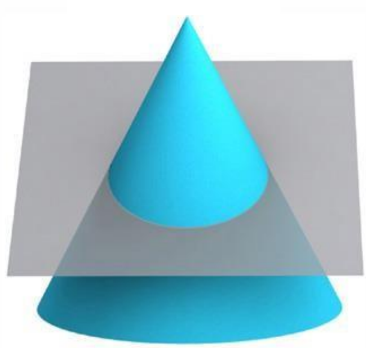


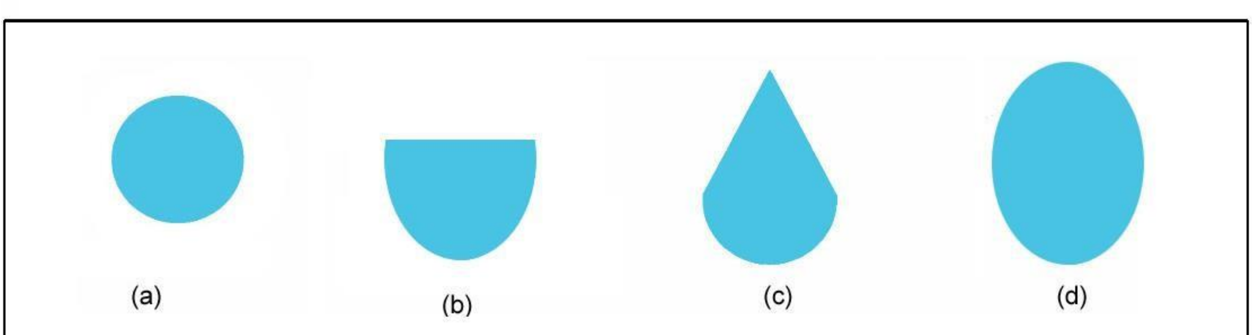


Problem 9

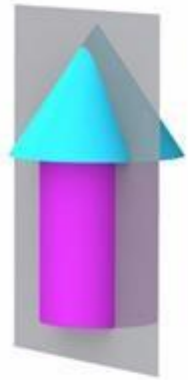


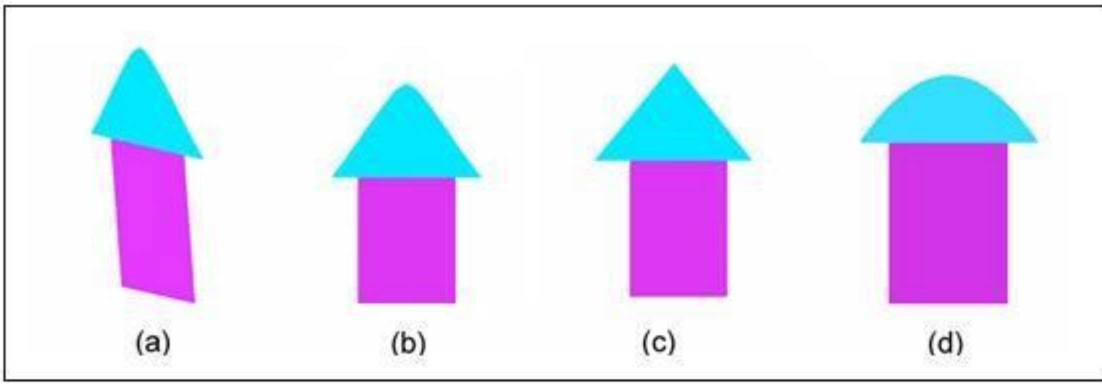




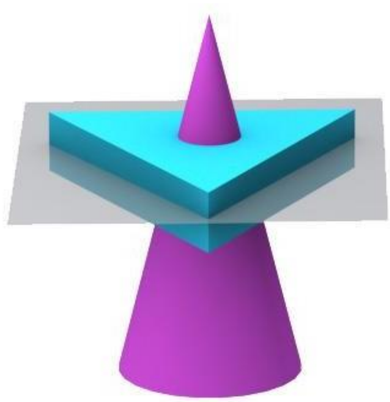


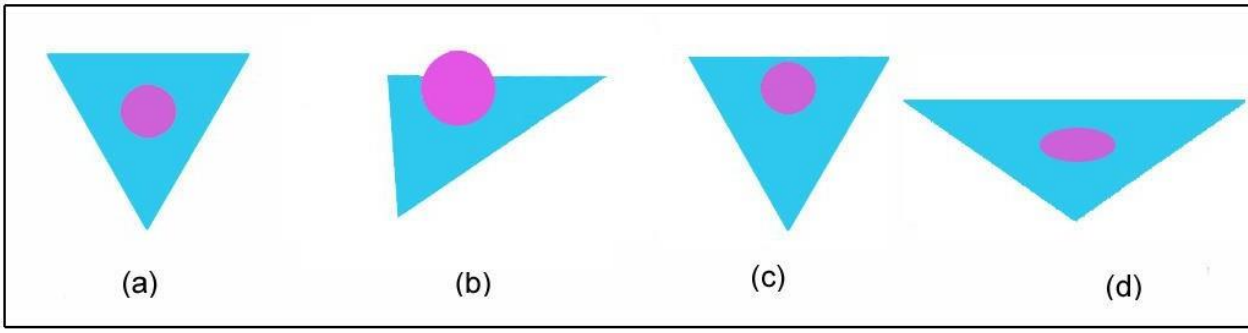
Problem 11



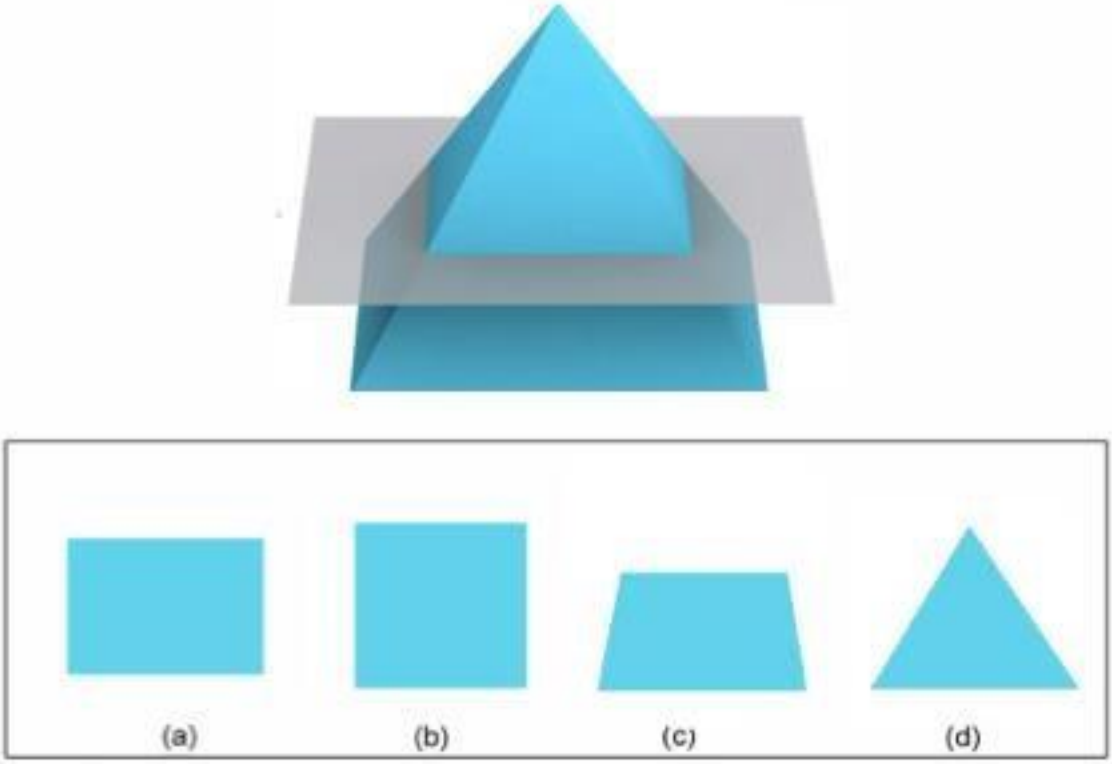


Problem 12

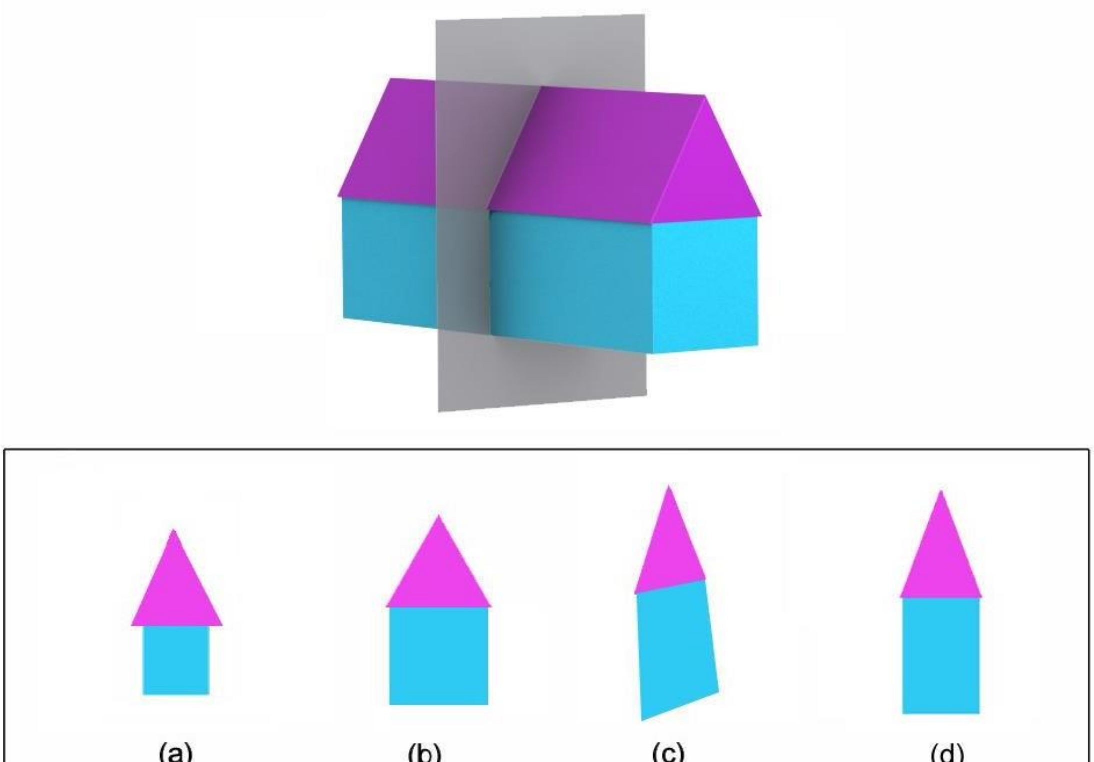




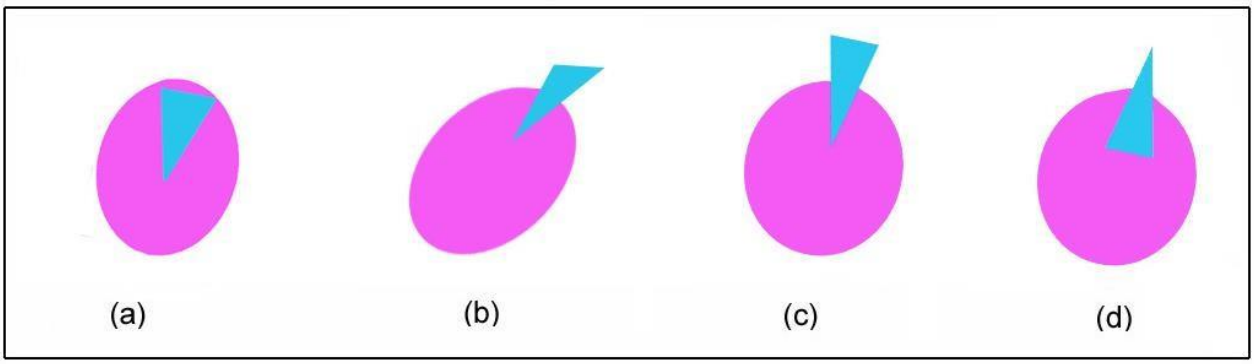
Problem 13



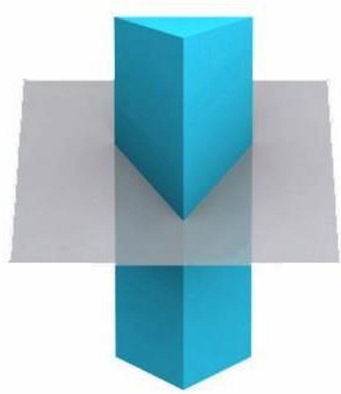
Problem 14

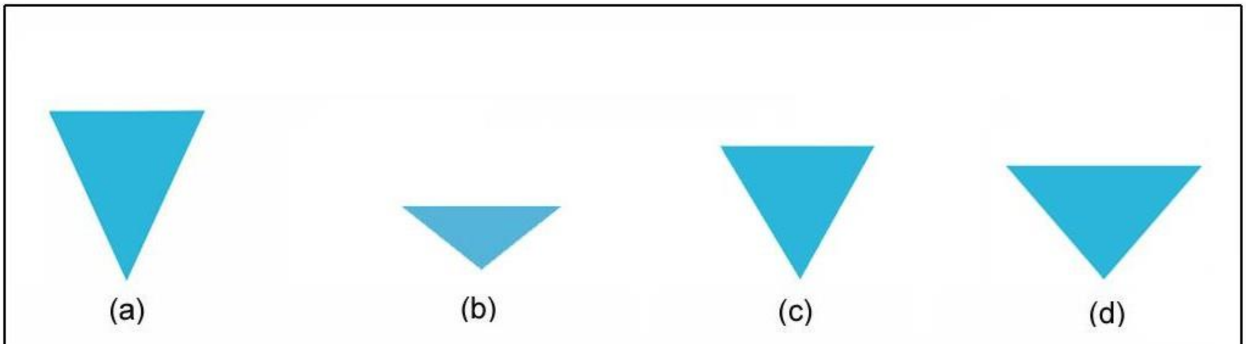


Problem 15



Problem 16

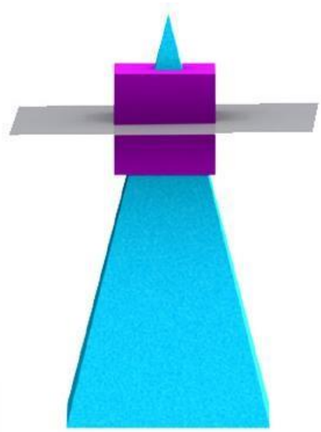


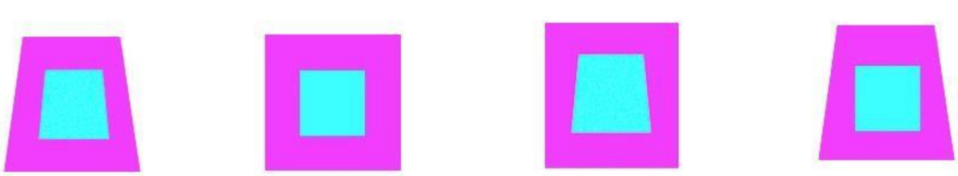


Problem 17

(a) (b) (c) (d)

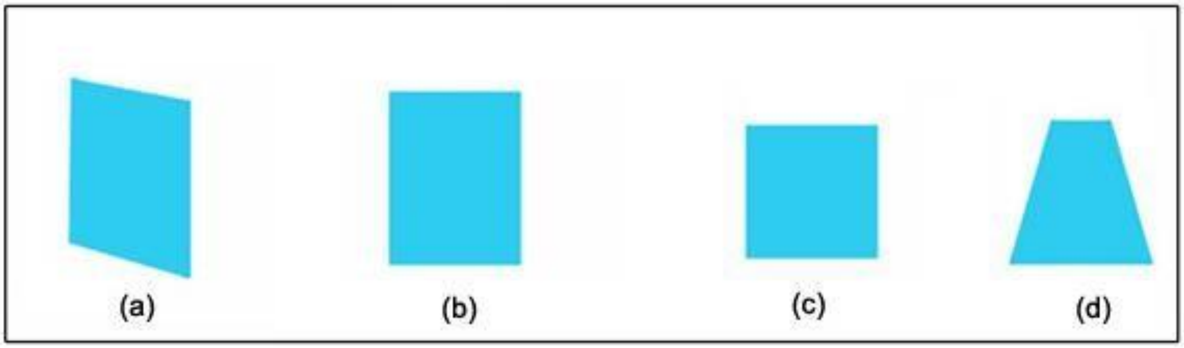
Problem 18



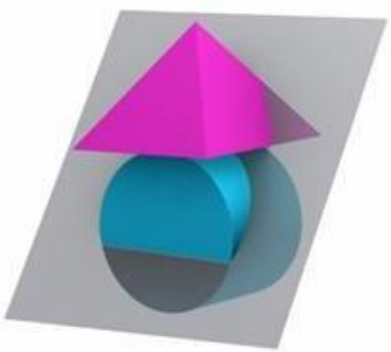


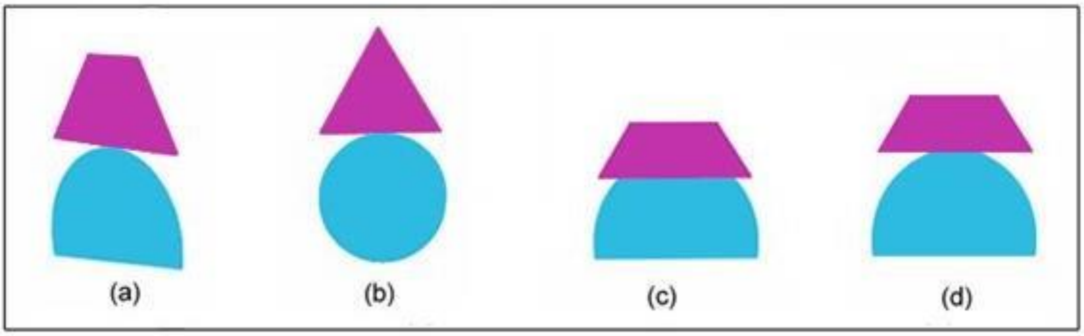
(a) (b) (c) (d)

Problem 19

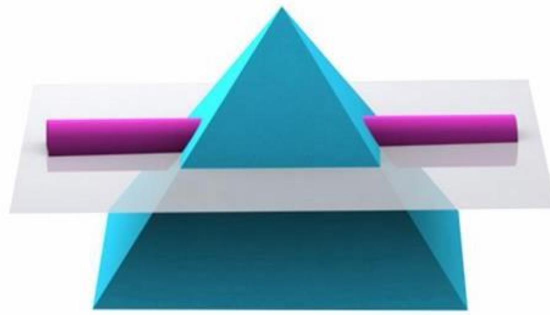


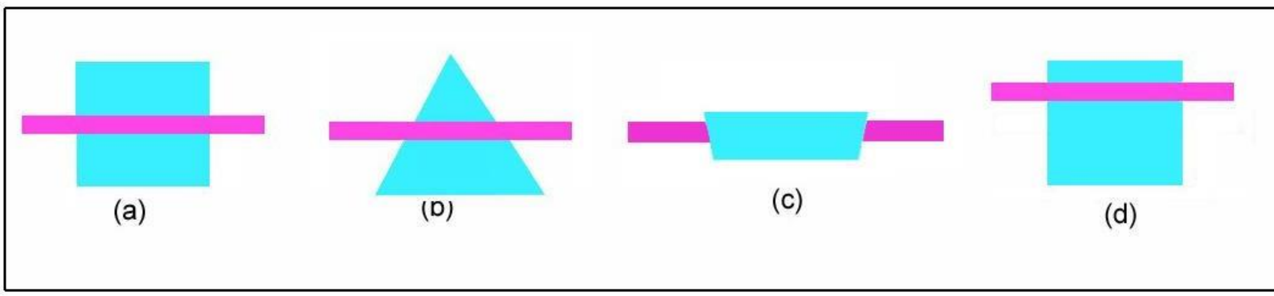
Problem 20



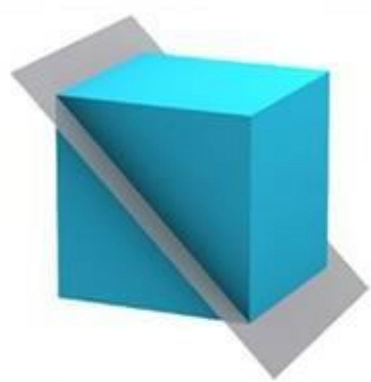


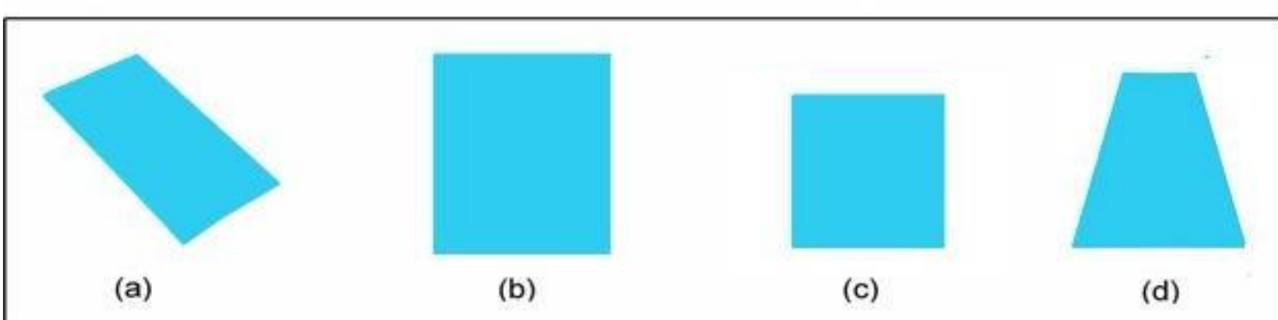
Problem 21



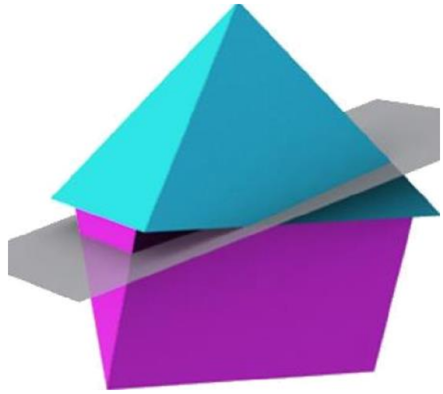


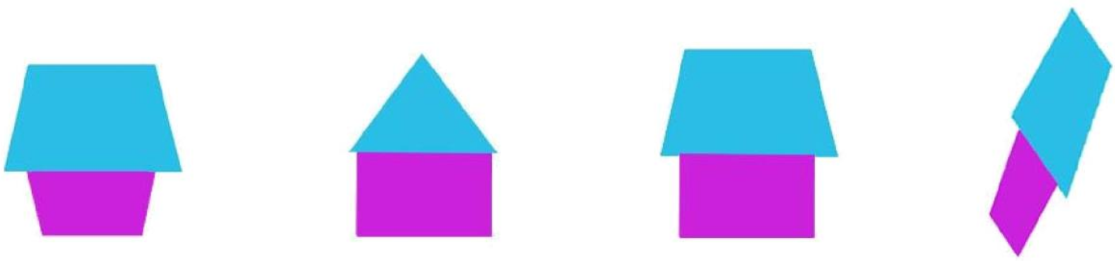
Problem 22





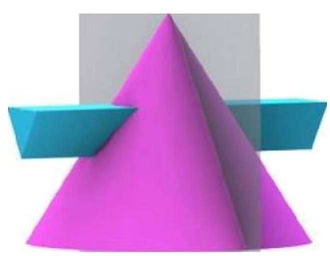
Problem 23

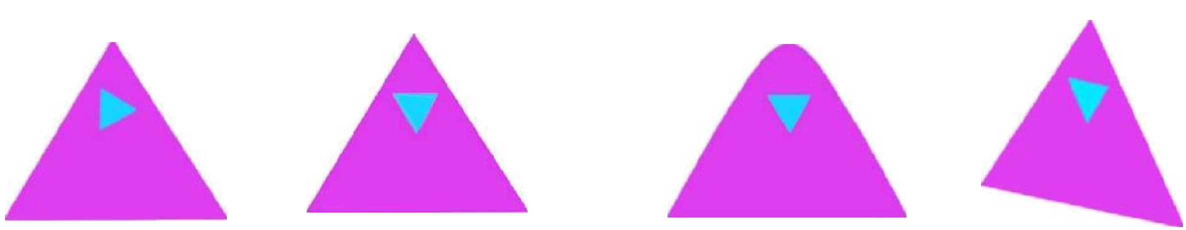




(a) (b) (c) (d)

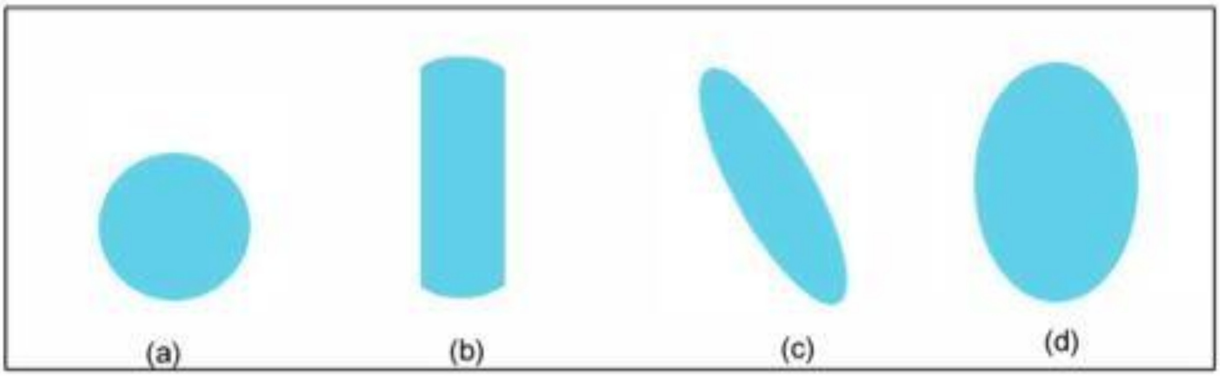
Problem 24



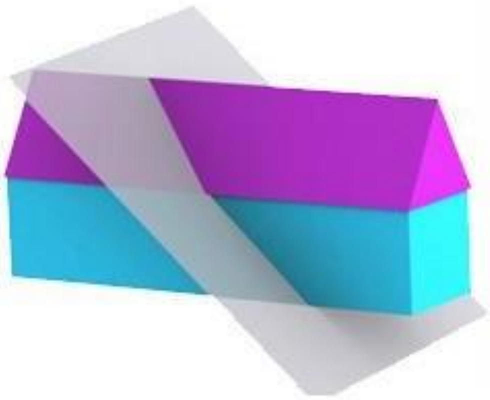


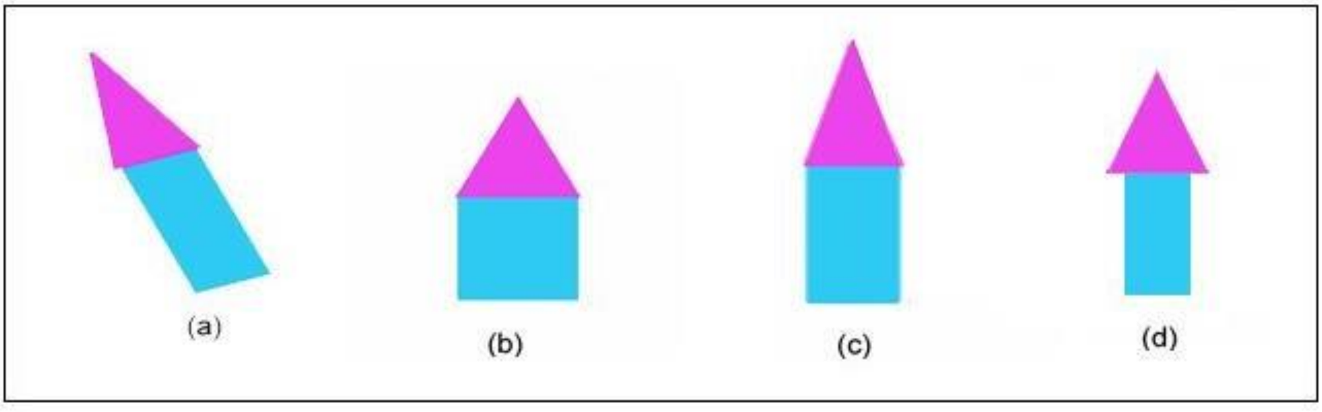
(a) {b) (c) (d)

Problem 25

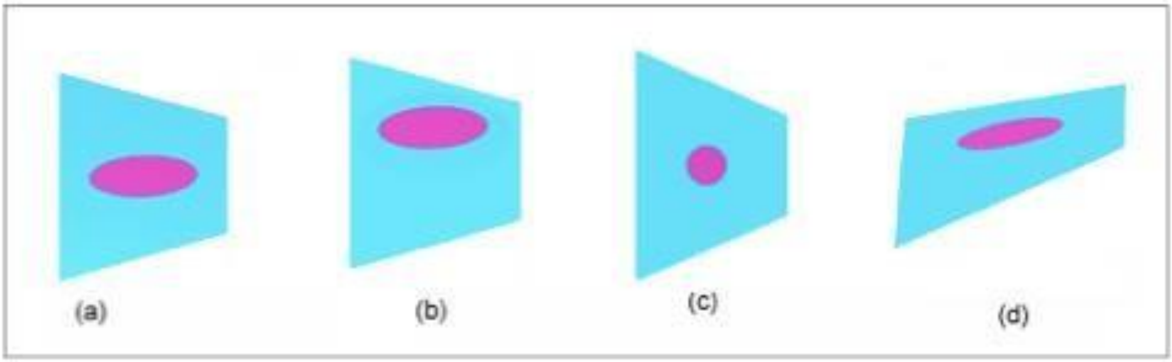


Problem 26

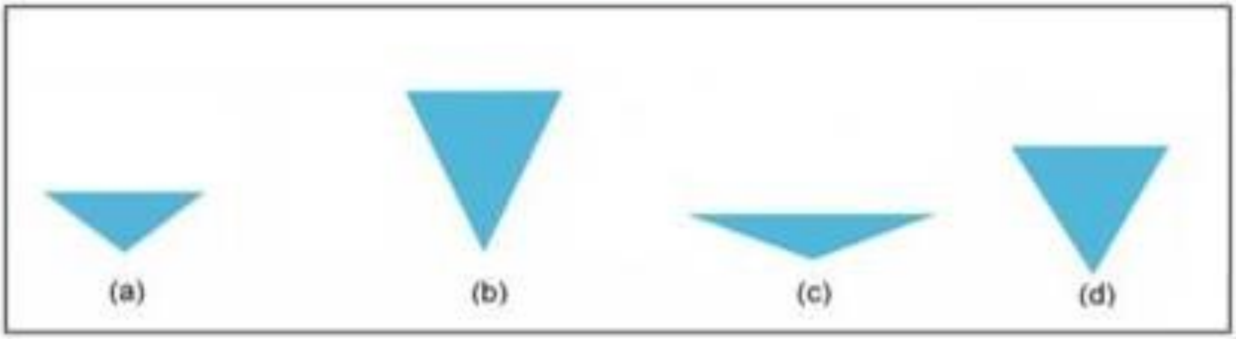




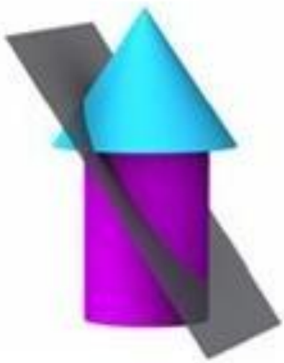
Problem 27

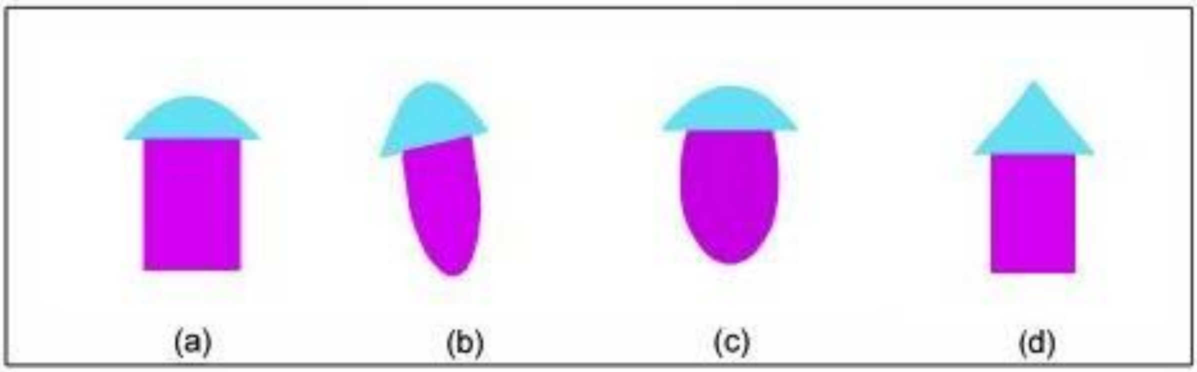


Problem 28

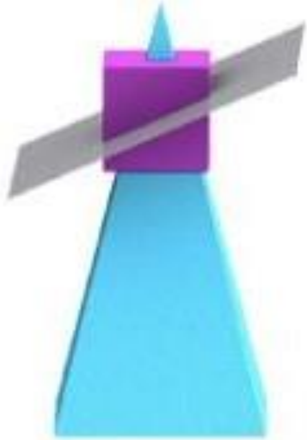


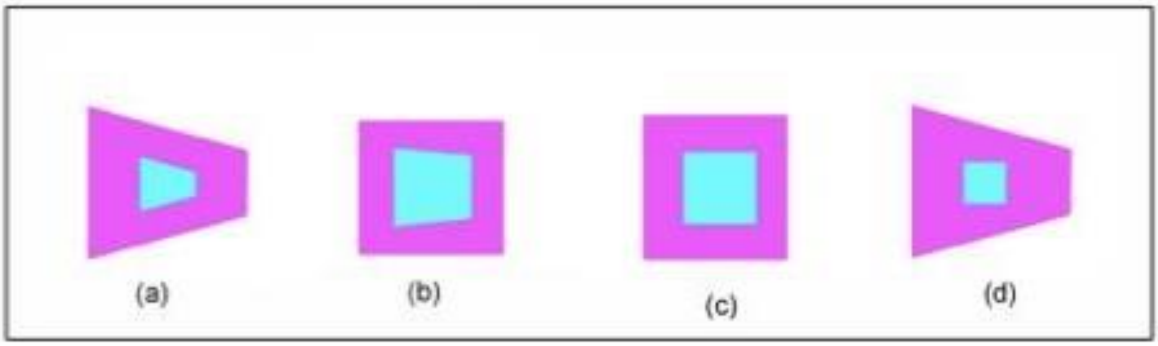
Problem 29





Problem 30



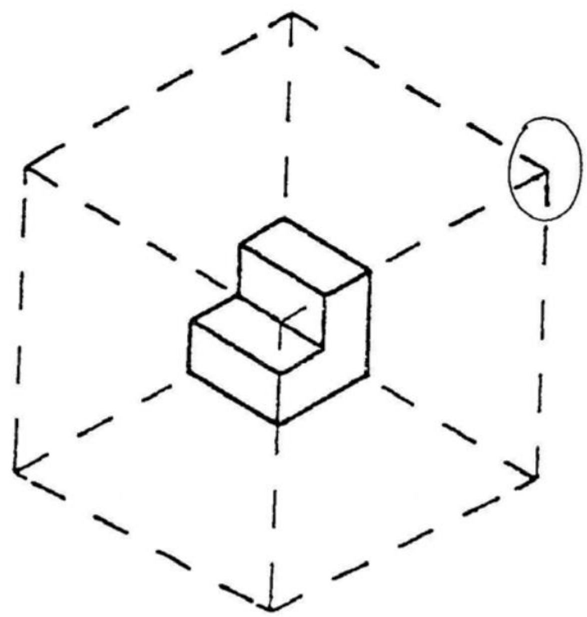


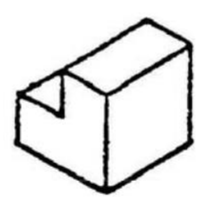
End of test

Příloha 2. – Visualization of viewpoints

Instruction for **Guay's visualization of viewpoints**

This test consists of 24 questions designed to see how well you can tell which viewing position a picture of a three-dimensional object was taken from. Shown below is an example of the type of question included in this test.





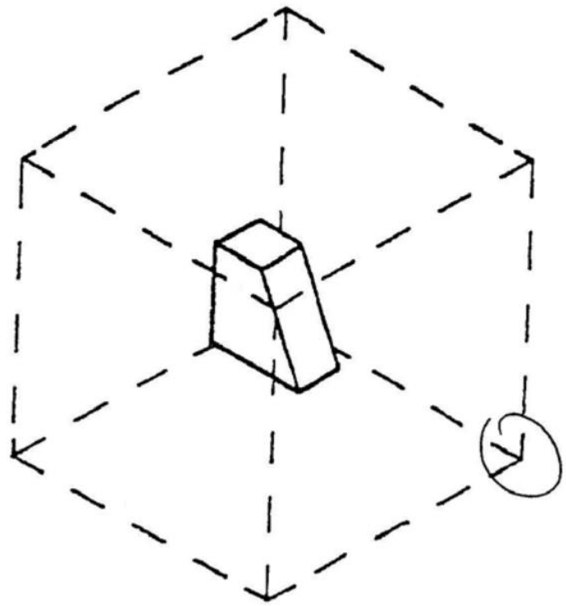
The example shows an object HOVERING IN THE MIDDLE of a "glass box." Below it there is a picture of the same object from a new viewing position. You are to

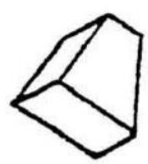
1. look at the picture of the object taken from the new viewing position;
2. imagine yourself moving around the "glass box" to find the corner from which this picture was taken
3. circle that corner

What is the correct answer to the example?

The correct answer is the upper right corner. Only from there you would have the view that is depicted. Remember that each question has only one correct answer.

Now look at the next example shown below and try to select the corner of the "glass box" from which the picture was taken. Remember that the object is located in the middle of the "glass box" and you are imagining yourself looking from different corners at the object.





The correct answer is the lower right corner.

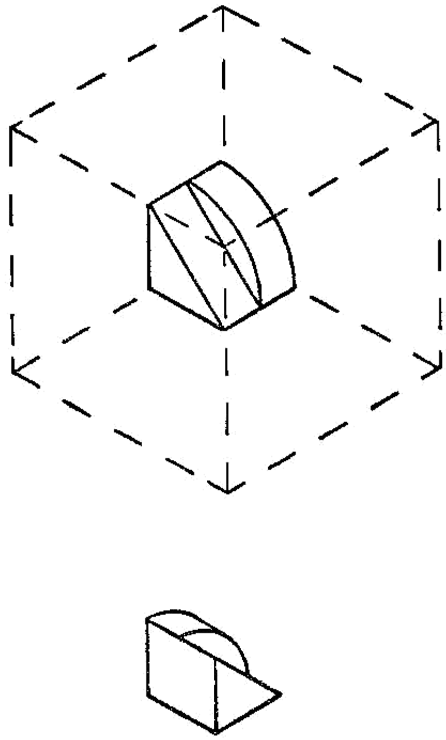
Show your answers by clearly circling **one** of the corners of the "glass box".

Note: if you think that the picture was taken from the corner that is covered by the object, place your mark in the middle of the cube, to indicate the corner that is **behind** the object.

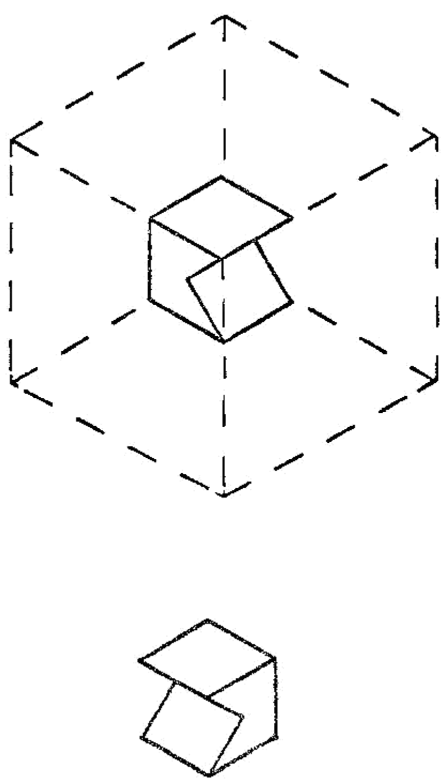
You will have 8 minutes to attempt as many items as possible.

Are you ready?

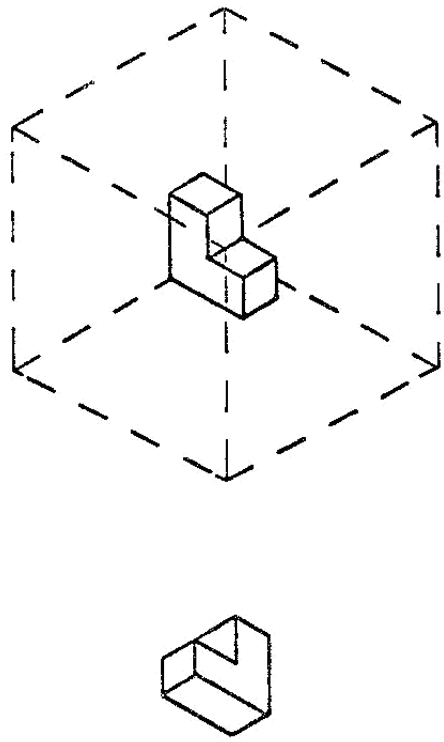
1



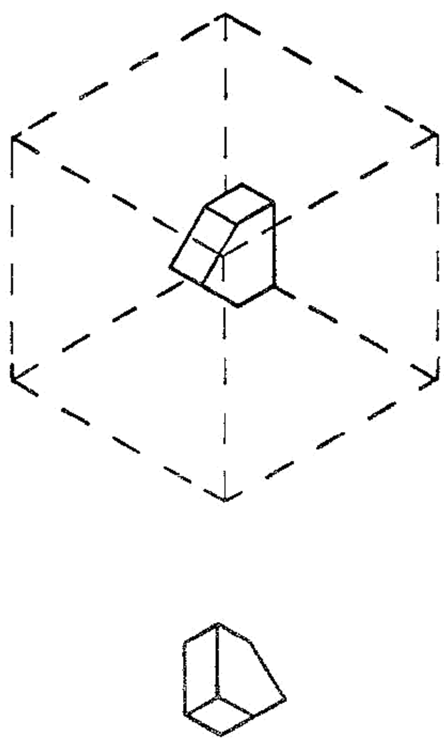
2



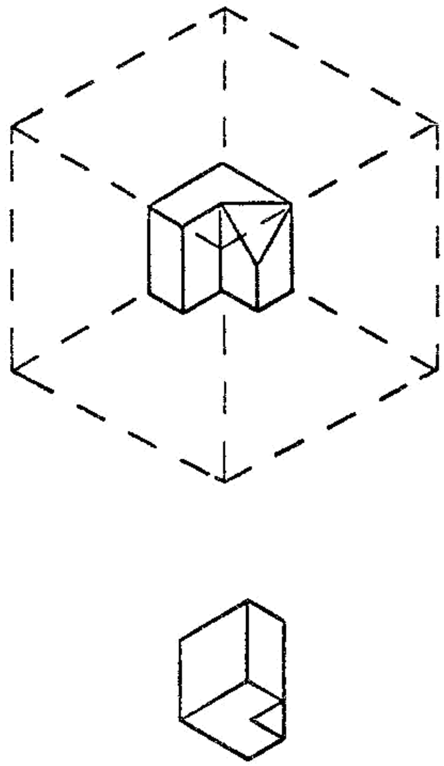
3



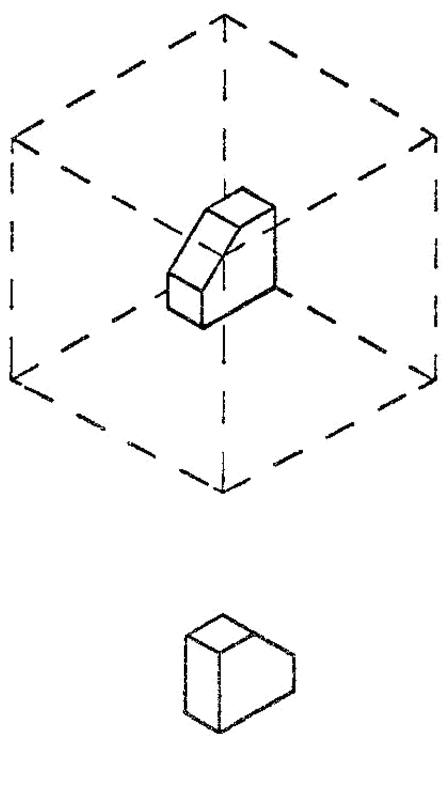
4



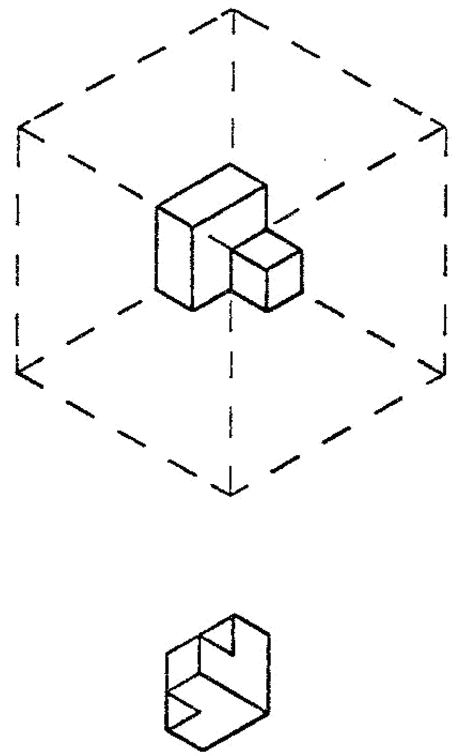
5



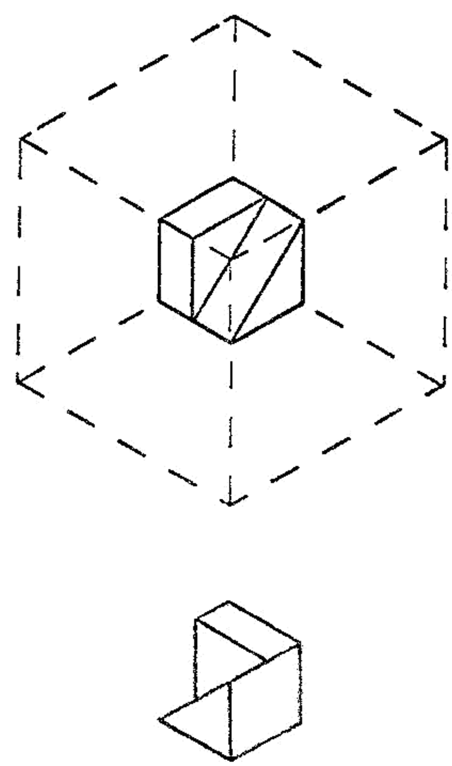
6



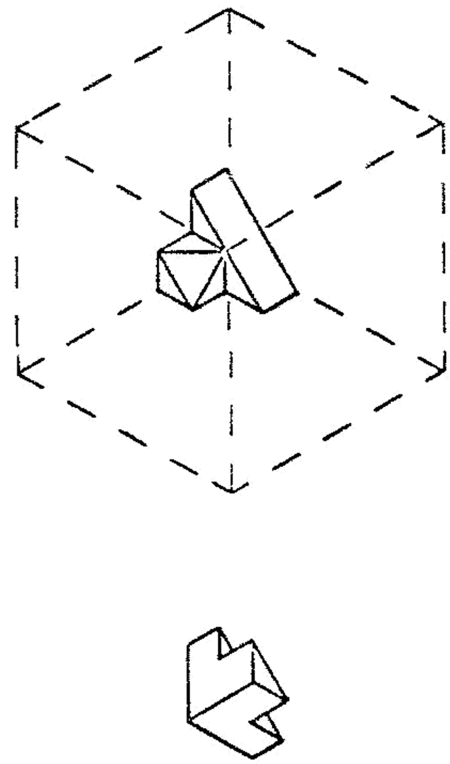
7



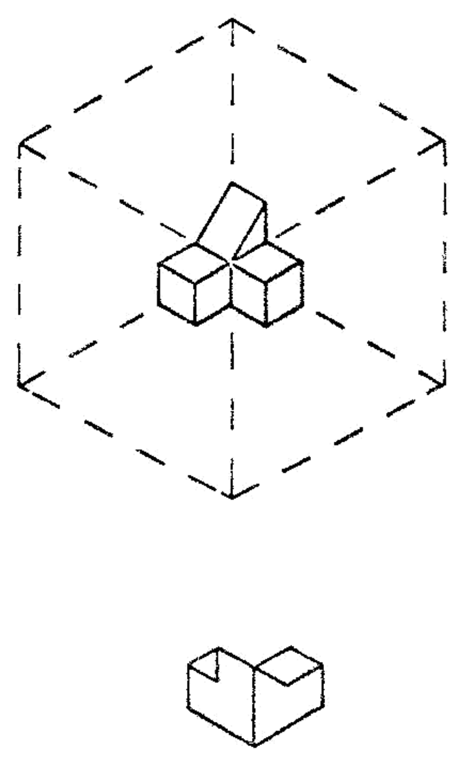
8



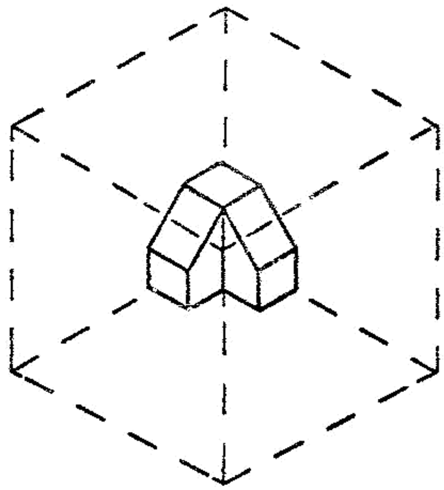
9

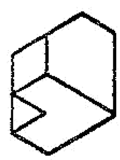


10

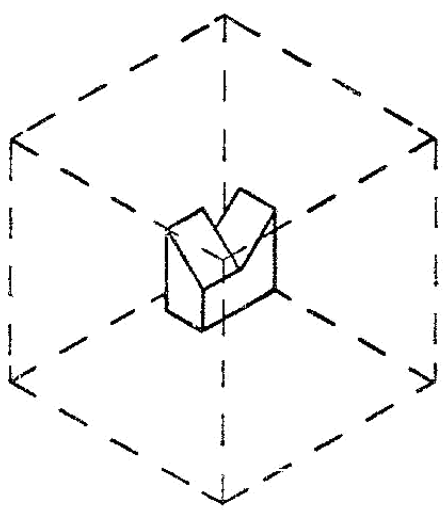


11

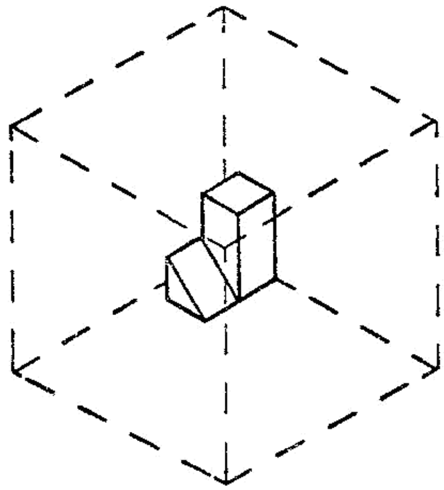


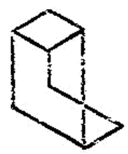


12

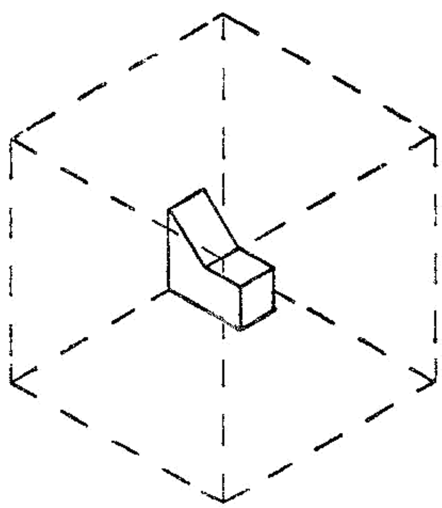


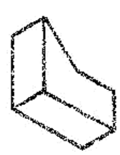
13



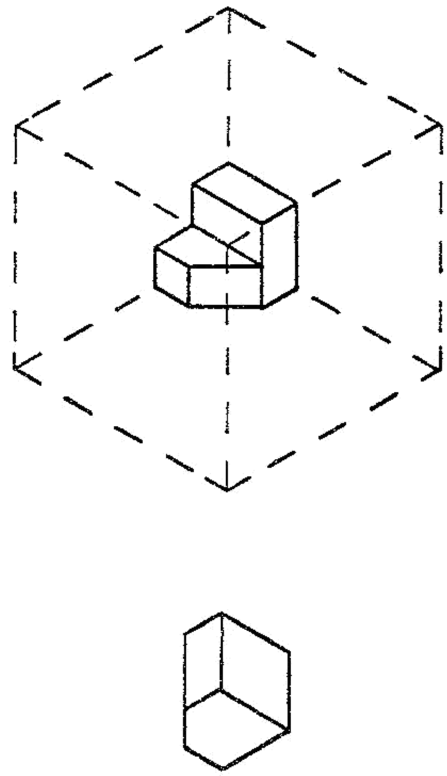


14

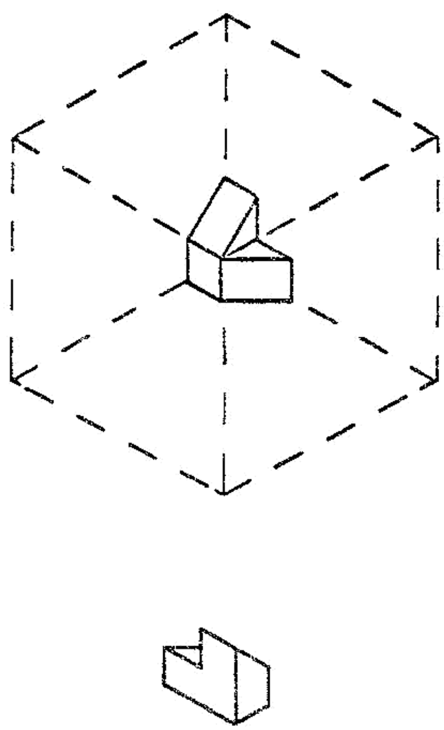




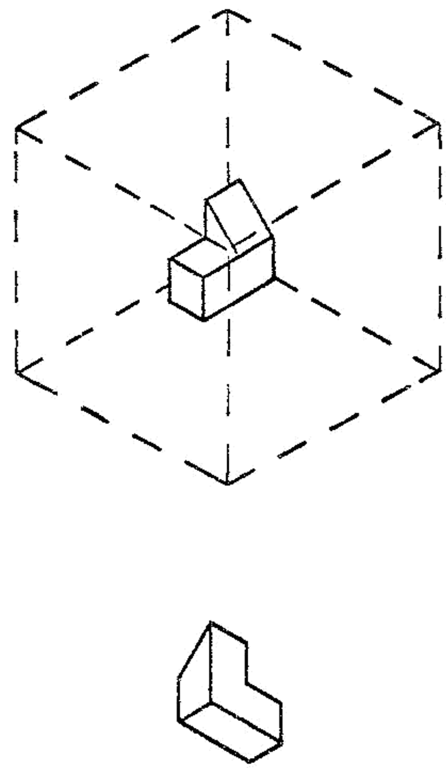
15



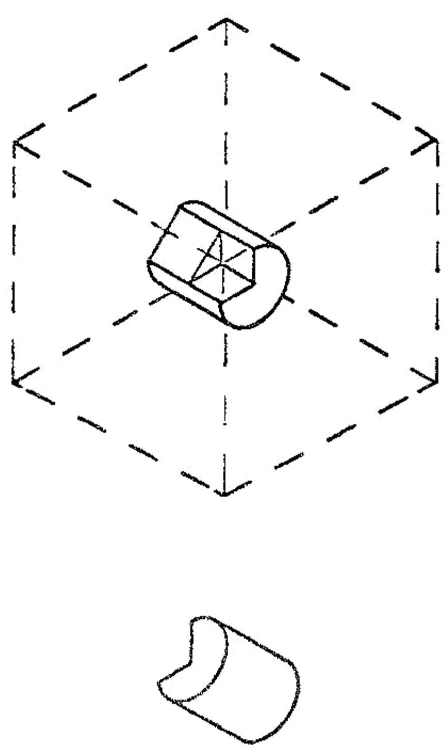
16



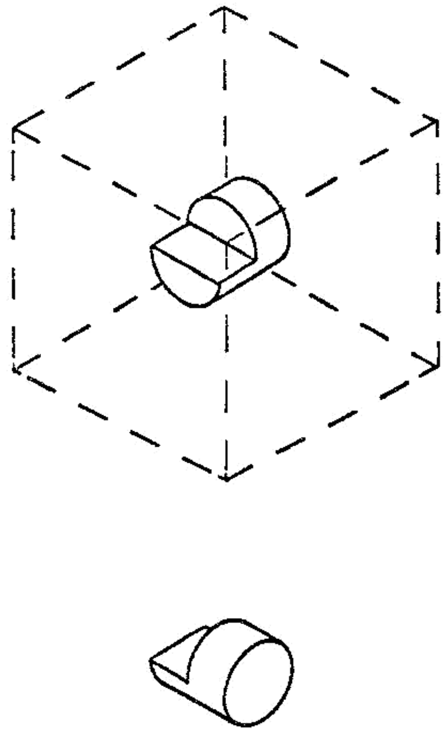
17



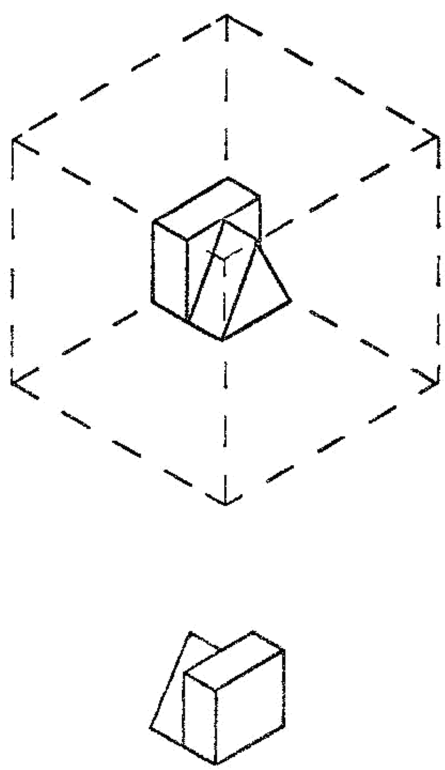
18



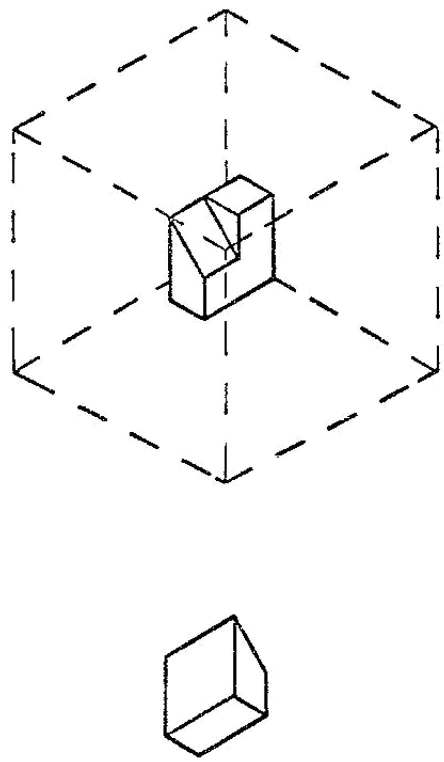
19



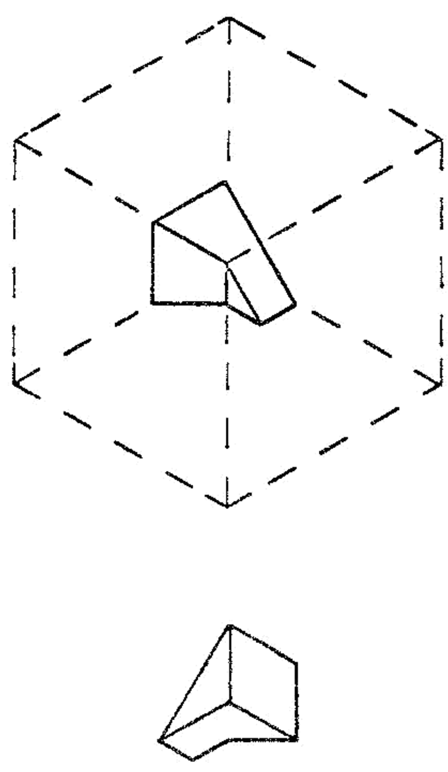
20



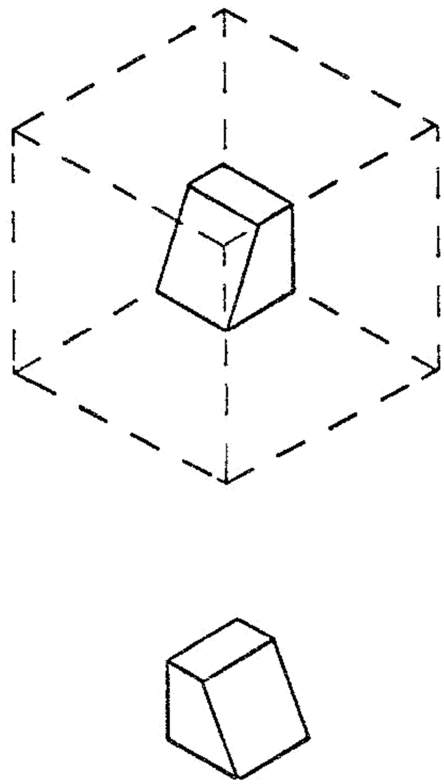
21



22



23



24