Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Matematické hry

Mathematical games

Bakalářská práce

Vypracovala: Hana Boublíková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2021

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc. za skvělé vedení mé bakalářské práce, mnoho cenných rad a ochotu, kterou mi při zpracovávání práce věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Matematické hry jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 9. dubna 2021.

....

Hana Boublíková

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá řešením matematických her určených pro žáky druhého stupně základních škol (včetně slovních a geometrických her a her na odebírání předmětů). Jejím cílem bylo nalezení vítězných strategií hráčů a jejich srozumitelné vysvětlení. Součástí práce jsou i obrázky znázorňující vítězné tahy v jednotlivých hrách.

Abstract

The bachelor thesis is concerned with solutions of mathematical games intended for students of upper primary school (including verbal and geometric games and games focused on withdrawing objects). Its aim was finding winning strategies of players and their understandable explanation. The thesis also contains illustrations of winning moves in particular games.

Obsah

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je představit čtenářům výběr matematických her, se zvláštním důrazem na hry kombinatorické. Mým záměrem je uvést několik skupin her nejrůznějších typů, z nichž u každé jednotlivé uvedu kromě zadání a pravidel i postup k nalezení vítězné strategie a její podrobné rozpracování. Jedná se o matematické hry, které jsou podle mého názoru vhodné pro využití na druhém stupni základních škol nebo gymnázií jako doplněk v hodinách matematiky. Z této práce mohou čerpat inspiraci nejen učitelé matematiky, ale i dospělí čtenáři, kteří se zajímají o logické matematické hry.

První kapitola práce se zabývá obecnou teorií matematických her. Definujeme si, co je to hra, a představíme si její základní funkce. Podíváme se, jak na teorii her z hlediska matematiky nahlížejí různí autoři, vysvětlíme si, jak vypadá kombinatorická hra, a uvedeme některé základní pojmy z teorie her.

Ve druhé kapitole se budeme věnovat dvěma slovním hrám, které nejsou příliš obtížné a nepotřebujeme k nim žádné pomůcky. Trvají poměrně krátce, jsou vhodné pro získání pozornosti dětí (např. na začátku hodiny).

Nejobsáhlejší třetí kapitola obsahuje hry s odebíráním předmětů, mezi něž patří celá řada zajímavých kombinatorických her. Uvedeme si zde hry od jednodušších až po složitější. U všech her detailně rozpracujeme jejich vítězné strategie, které jsou snáze pochopitelné i díky přiloženým obrázkům.

Následující kapitola se věnuje geometrickým hrám. Do této kapitoly jsou zařazeny dvě hry, které se hrají na čtverečkových hracích polích.

V poslední kapitole na čtenáře čeká opět jiná hra, která tematicky nespadá do žádné z předchozích kapitol. Jedná se o nenáročnou hru založenou na přeškrtávání koleček v řadě.

Obrázky do této práce byly vytvořeny v programech CorelDRAW a GeoGebra Classic a celá práce je zpracována v popisovacím jazyce LaTeX v programu TeXmaker.

2 Základní pojmy

Nejprve je potřeba si ujasnit jednotlivé pojmy týkající se teorie her, které se budou v textu dále vyskytovat. Řekneme si, co je to hra a jaké má funkce, jak vypadá kombinatorická hra, a také se dozvíme něco o strategiích hráčů a o metodách hledání těchto strategií.

2.1 Hra a její funkce

Hru lze obecně označit jako „soubor seberealizačních aktivit jedinců nebo skupin, které jsou vázány danými smluvenými pravidly a jejichž primárním zájmem není materiální zájem či užitek“ (Votavová, Valenta 2011, s. 209). Hru je tedy možné chápat jako jakousi formu zábavy mezi několika hráči, kteří dodržují pravidla hry. A jako zábavné mohou sloužit i matematické hry.

Podle Vávrové a kol. (2006, s. 2-3) mají hry čtyři základní funkce - motivační, instrumentální, diagnostickou a existenciální. Motivační funkce se u žáků projevuje obvykle nejprve v podobě vnější motivace (např. radost z rychlejšího řešení, než bylo řešení spoluhráče). Postupně se u žáků může objevit i vnitřní motivace, tj. zájem o nalezení řešení, o nabytí nových dovedností. Instrumentální funkce popisuje získávání zkušeností během hry a jejich následnou fixaci. Ve chvíli, kdy je žák schopen kriticky posoudit, v čem se během hry jeho schopnosti rozvinuly a kde naopak má ještě prostor pro zlepšení, hovoříme o diagnostické funkci hry. Existenciální funkce hry se pak vyznačuje např. rozvojem žákovy osobnosti a tvořivosti nebo přijmutím nových sociálních norem. Uplatnění všech těchto funkcí lze pozorovat i u hráčů hrajících matematické hry uvedené v této práci.

2.2 Teorie her, kombinatorické hry

Teorie her z matematického hlediska je podle Gatiala, Hechta a Hejného (1982, s. 3) „teorií matematických modelů, sloužících k hledání optimálních řešení v závislosti od konfliktních situací.“ Konfliktem se podle nich rozumí „situace, ve které je možné zjistit, kdo a jak se v ní účastní a jaká je možná volba postupu.“

Podobně popisuje teorii her i Chvoj (2013, s. 15), podle něhož ji „lze chápat jako můstek mezi reálnými každodenními problémy, ve kterých je potřeba učinit nějaké rozhodnutí, a teoretickou matematikou.“ Tato rozhodnutí přirovnává např. ke sporu dvou sourozenců, kdo udělá domácí práce. Teorie her se tedy vyskytuje v našem běžném životě denně, v okamžicích, kdy se rozhodujeme pro vhodnou strategii řešení dané situace.

V této práci se budeme věnovat hlavně kombinatorickým hrám. Pro ty platí, že je obvykle hrají dva hráči proti sobě. Zároveň neobsahují žádné náhodné jevy a nejsou v nich možné ani skryté tahy. Hráči se v tazích pravidelně střídají, jejich tahy jednoznačně určují pravidla hry. Hra končí výhrou či prohrou jednoho z hráčů, nebo případně i remízou. Také platí, že kombinatorické hry mají konečný počet tahů.

2.3 Strategie a pozice hráčů

Nyní je ještě důležité si říci něco o strategiích, neboť tento pojem se bude v textu často vyskytovat. Skálová (2014, s. 13) popisuje strategii hráče jako „soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry“. Dodává, že „přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče“.

Hra může dopadnout vítězstvím jednoho hráče a prohrou druhého, či naopak. Také může skončit remízou, tzn. ani jeden z hráčů nebude vítěz nebo prohrávající. Vítězná strategie hráče vede k jeho jednoznačnému vítězství nad protihráčem. Vedle toho existuje ještě pojem neprohrávající strategie hráče, která mu zaručuje, že nad svým soupeřem neprohraje. Hráč s takovouto strategií tedy může pouze remizovat nebo vyhrát.

Pro jednotlivé strategie hráčů se pak definují i jejich pozice v konečné hře. Vyhrávající pozice hráče ho dovede k výhře, naopak hráč v prohrávající pozici hru se svým protihráčem nutně prohraje, nezmění-li se jejich pozice. Také se rozlišují neprohrávající a nevyhrávající pozice. Ty hráčům podle svého názvu zaručují v neprohrávající pozici remízu nebo výhru, v nevyhrávající pozici remízu nebo prohru.

U všech her budeme předpokládat racionálnost obou hráčů, tzn. že si vždy zvolí takovou strategii, která je vědomě nedovede k prohře.

2.4 Hledání vítězných strategií

Při hledání vítězných strategií budeme u většiny her používat zpětný rozbor. Budeme postupovat odzadu, tedy od posledního kola hry, kdy si rozebereme, který hráč v jakých pozicích vyhrává, a postupně budeme zjišťovat, jaké tahy těmto pozicím předcházely, dokud nedojdeme na úplný začátek hry k prvním tahům obou hráčů. Tato metoda je intuitivní. V posledním kole bývají hry jednodušší než na začátku, a můžeme si tak tahy hráčů snadno představit.

Kromě zpětného rozboru využijeme i techniku symetrie. Skálová (2014, s. 19) používá tuto techniku „ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické - umožňují hráči kopírovat soupeřovy tahy". Základní myšlenku této techniky popisuje slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já".

Abychom ve hrách rozlišili začínajícího a druhého hráče, označíme si je - začínajícího hráče A a druhého hráče B. V některých kapitolách bude rovněž potřeba barevné rozlišení hráčů v obrázcích, proto se nyní dohodněme, že pro začínajícího hráče A budeme používat vždy červenou barvu a pro druhého hráče B zelenou barvu.

3 Slovní hry

V této kapitole najdeme několik slovních her, které nejsou příliš náročné na paměť a je možné je hrát bez jakýchkoli pomůcek.

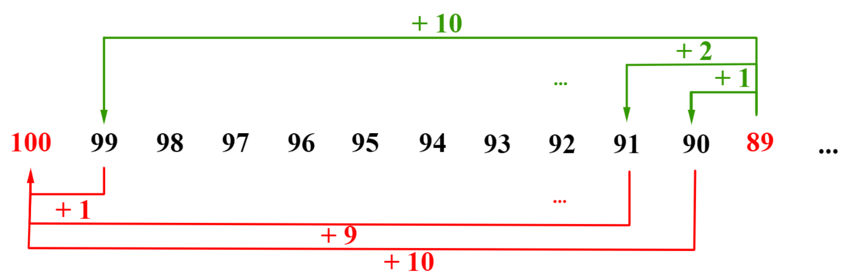
3.1 Kdo dřív řekne 100?

Zadání:

Hráč řekne libovolné přirozené číslo od 1 do 10. Druhý hráč k tomuto oznámenému číslu přičte další libovolné číslo od 1 do 10 a oznámí jejich společný součet. Takto se hráči pravidelně střídají. Vyhrává hráč, který bude mít součet 100.

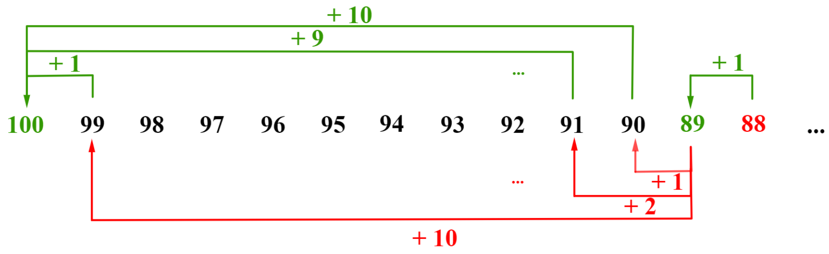
Vítězná strategie:

Při hledání vhodné vítězné strategie požijeme metodu zpětného rozboru, budeme se tedy nejprve zabývat podobou hry v posledním kole. Aby hráč A vyhrál a v posledním kole oznámil dosažený součet 100, musí v předchozím kole mít součet 89. Ať totiž hráč B přičte k číslu 89 jakékoli číslo od 1 do 10, jeho nejvyšší součet bude moci být 99, a tak si hráč A zajistí ještě jedno možné číslo k přičtení a tím pádem i jistotu, že zvítězí. To nám znázorňuje obr. 3.1.



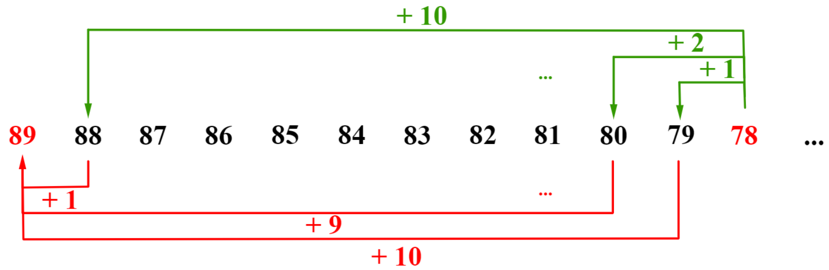
Obrázek 3.1: *Vyhrávající pozice hráče A v posledním kole hry*

Kdyby hráč A neměl součet 89, ale např. jen 88, už by neměl zajištěnou jistou výhru. Hráč B by totiž mohl k číslu 88 přičíst jen 1, dostal by se na součet 89 a sám by se tak ocitl ve vyhrávající pozici. Tuto možnost vidíme znázorněnou na obr. 3.2.



Obrázek 3.2: *Příklad prohrávající pozice hráče A v posledním kole hry*

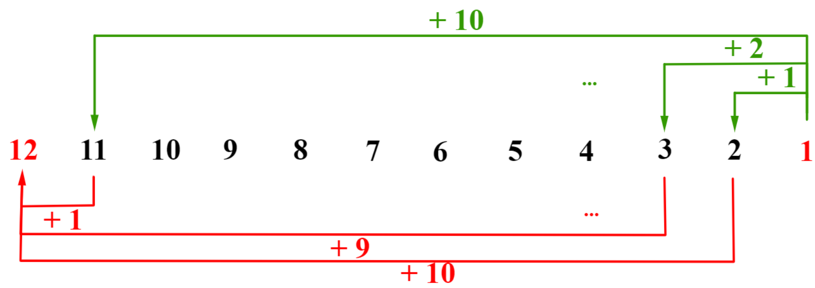
Z toho je patrné, že hráč A musí mít v předposledním kole součet přesně 89, aby měl zajištěné vítězství. Použitím tohoto principu musí mít hráč A v předchozím tahu součet 78, což je znázorněno na obr. 3.3.



Obrázek 3.3: *Vyhrávající pozice hráče A v předposledním kole hry*

Ještě předtím musí mít hráč A součet 67, předtím 56 atd. Všimněme si, že vyhrávající pozice součtů jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí 11, což je o 1 větší, než nejvyšší možné číslo, jaké můžeme k protihráčovu součtu přičíst. Dojdeme-li až úplně na začátek hry, v prvním kole musí hráč A říct číslo 1. Tak si zajistí, že ve svém dalším tahu bude moci mít součet 12, neboť hráč B může oznámit jako svůj součet v prvním kole nejvýše číslo 11. Tuto počáteční vítěznou strategii začínajícího hráče vidíme na obr. 3.4.

Pokud náš protihráč nezná tuto vítěznou strategii, můžeme na ni přistoupit až v některém z pozdějších kol hry, aby nebyla od samého počátku hry tak snadno odhalitelná. Samozřejmě, že pokud hrajeme jako druhý hráč a začínající hráč tuto strategii nezná, můžeme na vítěznou strategii přistoupit my. Hru je možné různě obměňovat.



Obrázek 3.4: *Vyhrávající pozice hráče A v prvním kole hry*

3.2 Odčítání prvočísel a 1

Zadání:

Dva hráči si zvolí nějaké přirozené číslo, od kterého pak střídavě odečítají libovolné prvočíslo menší než jimi zvolené počáteční číslo, nebo mohou odečíst číslo 1. Vyhraje hráč, kterému po odečtení vyjde 0.

Vítězná strategie:

Vyzkoušejme si, jak hra funguje, na několika nejnižších přirozených číslech. Kdyby si hráči zvolili jako počáteční číslo 2, vyhrál by hráč B, protože hráč A by od čísla 2 mohl odečíst jedině číslo 1. Na hráče B by zbyla jediná možnost. Odečetl by 1 od čísla 1, čímž by dosáhl 0, a vyhrál. I kdyby si hráči zvolili jako počáteční číslo 3, nutně by vyhrál hráč B. Ať by totiž hráč A ve svém prvním tahu odečetl od 3 číslo 2 nebo číslo 1, hráč B by mohl od nynějšího čísla odečíst samo sebe, dostat se tak na hodnotu 0 a vyhrát. Rovněž kdyby si hráči zvolili jako počáteční číslo 4, byl by začínající hráč v prohrávající pozici.

Se zvoleným počátečním číslem 5 však do hry konečně přichází i šance na výhru pro začínajícího hráče. Zkusme si nyní všechny první kroky postupu obou hráčů. Když hráč A od počátečního čísla 5 odečte 3, výsledkem bude číslo 2, od kterého může následně druhý hráč odečíst samo sebe, dostat tak 0 a vyhrát. Odečte-li hráč A od 5 číslo 2, zbude číslo 3 a hráč B může takto opět vyhrát. Ale pokud hráč A odečte od 5 číslo 1, na druhého hráče zbude číslo 4, což není prvočíslo a nebude mu tedy stačit jeden krok k výhře jako v předchozích případech. Hráč B bude muset od čísla 4 odečíst některé z čísel 1, 2 nebo 3. Ani v jednom případě už ale nevyhraje, neboť poslední krok provede hráč A. Zkusme si poslední možnou verzi hry při zvoleném počátečním čísle 6. Kdyby hráč A odečetl od 6 čísla 1, 3 nebo 5, hráč B by se vždy ocitl ve vyhrávající pozici. Začínající hráč by vyhrál pouze v případě, odečetl-li by od 6 číslo 2. Tak by totiž na hráče B zbylo číslo 4 a o této pozici už víme, že je prohrávající. Už z těchto několika málo příkladů s malými počátečními čísly je zřejmé, že v této hře má výhodnější pozici druhý hráč. Proto se nyní zaměřme na nalezení vhodné vítězné strategie i pro začínajícího hráče. Pro která zvolená počáteční čísla bude mít šanci na výhru?

Z předchozích případů víme, že hráč A byl ve vyhrávající pozici, když po svém tahu zanechal pro protihráče číslo 4. Kdybychom si vyzkoušeli tahy hráčů u několika dalších různě zvolených počátečních čísel větších než v předchozích námi rozebraných případech, všimli bychom si, že hráč B může vyhrát vždy, když bude počáteční zvolené číslo sudé. U verzí her se zvoleným počátečním číslem lichým bychom mezi mnoha možnostmi, jak by hráč B mohl vyhrát, objevili i několik případů výherních pozic pro hráče A. Hráč A by mohl v hrách s lichým počátečním číslem vyhrát, pokud by ve svém prvním tahu od počátečního čísla odečetl takové prvočíslo, aby na jeho protihráče zbylo číslo 4. Ovšem ne pro všechna lichá čísla taková prvočísla umožňující tento postup existují. Obecně můžeme říci, že hráč A může vyhrát, zvolí-li si hráči na začátku hry takové liché číslo, pro které platí, že číslo o 4 menší než toto zvolené číslo, je prvočíslo.

4 Hry na odebírání předmětů

V této kapitole si uvedeme kombinatorické hry založené na střídavém odebírání předmětů dvěma hráči. Jako odebírané předměty je možné použít např. sirky, kuličky, kameny, fazole či jiné předměty dle libosti.

4.1 Jedenáct sirek

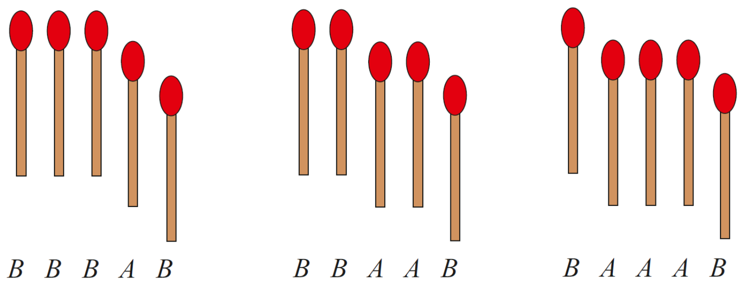
Zadání:

Na stole leží 11 sirek. Dva hráči střídavě při každém tahu odebírají jednu, dvě nebo tři sirky dle svého uvážení. Prohrává hráč, který odebere poslední sirku.

Vítězná strategie:

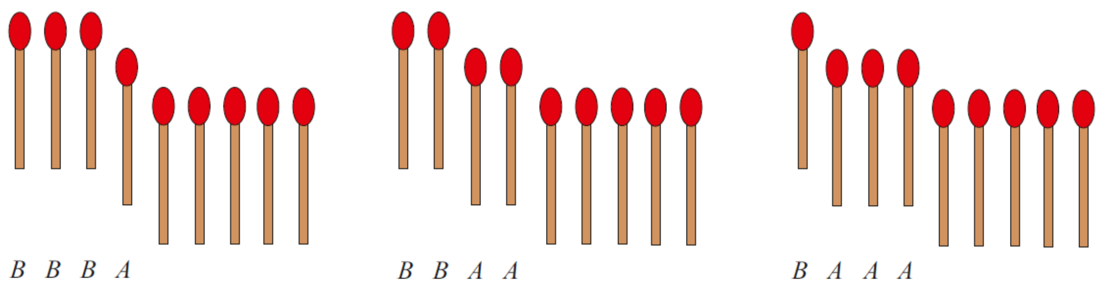
Pro nalezení vítězné strategie bude opět výhodné použít zpětný rozbor. Nejprve se budeme věnovat vhodné strategii pro hráče A. Hráč A zvítězí ve hře tehdy, zbude-li na jeho protivníka jedna sirka. Kdyby zbyly sirky dvě nebo tři, je zřejmé, že by hráč A prohrál, neboť by měl protihráč možnost hráči A jednu sirku na stole po svém tahu nechat. Zbude-li po tahu hráče A jedna sirka, znamená to, že na stole byly před tímto tahem dvě, tři nebo čtyři sirky. To si může hráč A zajistit, zanechá-li ve svém předchozím tahu na stole pro hráče B sirek pět. Tyto možnosti jsou ilustrovány na obr. 4.1. Hráč B má na stole pět sirek. Lze vidět, že odebere-li tři, dvě nebo jednu, hráč A mu poté stejně zanechá na stole jednu sirku, a tak nad hráčem B zvítězí.

Nyní se podíváme, co musí těmto možnostem předcházet, chce-li hráč A po svém tahu nechat na stole pět sirek. To může zařídit, pokud mu hráč B před jeho tahem nechá šest, sedm nebo osm sirek, vezmeme-li v úvahu, že hráč může vždy odebrat nejvýše tři sirky. Aby to bylo možné, musí ještě předtím hráč A nechat po svém tahu pro hráče B sirek devět, jak lze vidět i na obr. 4.2. Bude-li na stole před tahem hráče B devět sirek, hráči A to zajistí vítěznou pozici, ať hráč B odebere z devíti sirek libovolně jednu, dvě nebo tři.



Obrázek 4.1: *Prohrávající pozice hráče B s 5 sirkami*

Začínající hráč tedy musí ve svém prvním tahu odebrat přesně dvě sirky, aby nechal na stole pro druhého hráče devět sirek, a zajistil si tak vítěznou pozici. S touto strategií hráče A by druhý hráč neměl možnost dostat se z prohrávající pozice. Podařilo-li by se mu ale po prvním kole nechat devět sirek pro hráče A (kdyby hráč A neznal vítěznou strategii a odebral z jedenácti sirek jen jednu), hra by se obrátila ve prospěch druhého hráče a ten by byl ve vítězné pozici.



Obrázek 4.2: *Prohrávající pozice hráče B s 9 sirkami*

Jaká je tedy vítězná strategie začínajícího hráče? Povšimneme-li si, jaké počty sirek nechává začínající hráč na stole po svém tahu, tedy devět, pět a poté jednu sirku, snadno zde shledáme pravidelnost. Tato čísla jsou v aritmetické posloupnosti s diferencí 4. Hodnota diference není náhodná. Ze zadání víme, že hráči mají dovoleno odebírat libovolný počet sirek, nejvýše však tři. Diference aritmetické posloupnosti je tedy o jedno větší, než nejvyšší možný odebraný počet sirek při jednom tahu. Že tato hypotéza skutečně platí, si ukážeme na obecné verzi této hry.

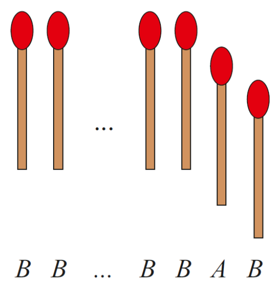
4.1.1 Obecná verze hry

Zadání:

Na stole leží n sirek. Dva hráči střídavě při každém tahu odebírají 1 až p sirek dle svého uvážení. Prohrává hráč, který ze stolu odebere poslední sirku.

Vítězná strategie:

Pro nalezení vítězné strategie začínajícího hráče budeme opět postupovat odzadu, tedy od okamžiku odebrání poslední sirky druhým hráčem. Hráč A zvítězí, zanechá-li po svém posledním tahu na stole jednu sirku. V předchozím kole mohl hráč B odebrat ze stolu 1 až p sirek, poté hráč A odebral takový počet sirek, aby na stole zbyla zmíněná jedna poslední sirka. Počet odebraných sirek hráčem A se odvíjel podle toho, kolik odebral v předchozím tahu hráč B. Aby si hráč A zajistil, že po svém posledním tahu na stole zanechá jednu sirku, muselo po jeho předchozím tahu na stole zbýt pro protihráče $(p + 2)$ sirek. To lze vidět i na obr. 4.3.



Obrázek 4.3: *Prohrávající pozice hráče B s $(p + 2)$ sirkami*

Jaká bude další vítězná pozice začínajícího hráče lze snadno zjistit. Aby zbylo pro hráče B na stole $(p + 2)$ sirek, musí hráč A v předchozím tahu odebrat takový počet sirek, aby dohromady s hráčem B, který měl předchozí tah, odebral $(p + 1)$ sirek. Připočítáme-li tento počet k počtu sirek $(p + 2)$, dostáváme počet $(2p + 3)$ sirky, které musí hráč A nechat po svém tahu na stole, aby si zajistil výhru. Po další takové úvaze je zřejmé, že předchozí výherní pozice hráče A byly $(3p + 4)$ sirky, $(4p + 5)$ sirek atd.

Obecně tedy platí, že první hráč vyhraje, zanechá-li po svém tahu vždy na stole sirky v počtu odpovídajícímu členům aritmetické posloupnosti s diferencí $(p + 1)$ sirka.

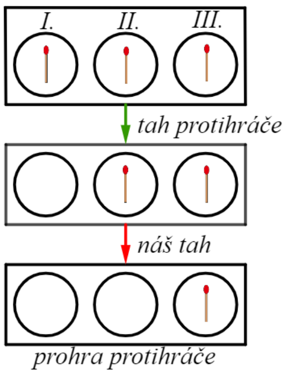
4.2 Hra NIM

Zadání:

Na stole leží tři hromádky sirek. První hromádka obsahuje pět, druhá šest a třetí sedm sirek. Dva hráči střídavě odebírají 1 až 3 sirky, přičemž odebrané sirky mohou být při jednom tahu jen z jedné hromádky. Prohrává hráč, na nějž zbude na stole poslední sirka.

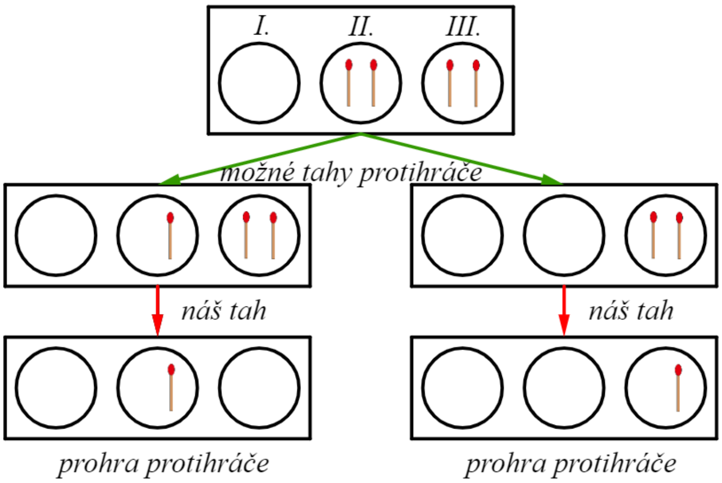
Vítězná strategie:

Bez ohledu na pořadí hráčů se zamysleme, jaké pozice v závěrečných kolech hry jsou pro nás vyhrávající, neboli do jaké pozice chceme dostat svého protihráče, aby prohrál. Potřebujeme po svém kole nechat na stole takové rozložení sirek v hromádkách, aby bylo možné provést po našem tahu jen tři další tahy. Tím hra skončí tahem našeho protihráče a my vyhrajeme. Nejjednodušší možnost odpovídající tomuto plánu je nechat po našem tahu na stole v každé ze tří hromádek právě 1 sirku. Protihráč pak odebere z libovolné hromádky jednu sirku, my poté také jednu a na našeho protihráče zbude poslední tah, takže prohraje. Tato pozice je zobrazena na obr. 4.4.



Obrázek 4.4: *Prohrávající pozice hráče s 1 sirkou v každé hromádce*

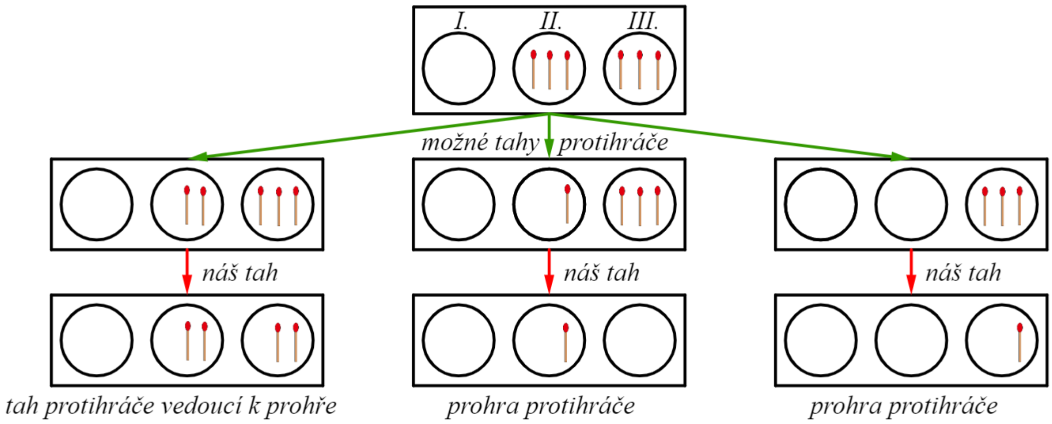
Jako další možnost se nabízí nechat po svém tahu na stole jednu hromádku prázdnou a ve zbylých dvou hromádkách přesně po 2 sirkách. Protihráč může nyní z libovolné ze dvou hromádek odebrat jednu nebo dvě sirky. My na jeho tah správně zareagujeme a opět vyhrajeme. Když náš protihráč odebere z jedné z hromádek jednu sirku, my z druhé hromádky odebereme dvě sirky. Na stole tak zbude jen jedna sirka v jedné hromádce, kterou odebere náš protihráč, a prohraje. Kdyby však odebral ve svém tahu dvě sirky z jedné hromádky, my zareagujeme odebráním jedné sirky ve druhé hromádce. Tím našemu protihráči opět necháme jednu sirku pro jeho poslední tah a vyhrajeme, jak můžeme vidět na obr. 4.5.



Obrázek 4.5: *Prohrávající pozice hráče s dvěma hromádkami po 2 sirkách*

To ale nejsou všechny možnosti, jak si zajistit výhru. Zanecháme-li po svém tahu opět jednu hromádku úplně prázdnou a ve zbylých dvou hromádkách tentokrát po 3 sirkách, také vyhrajeme. Soupeř může odebrat z jedné z hromádek 1 sirku. My pak můžeme odebrat z druhé hromádky také 1 sirku. Pak na stole zbudou dvě hromádky po 2 sirkách, což už víme z předchozího rozboru, že je pro našeho protihráče jistá prohra. Kdyby náš soupeř odebral z jedné hromádky 2 sirky, my bychom mohli z druhé hromádky odebrat všechny 3 sirky, a tak by na našeho soupeře zase zbyla jen jedna sirka a prohrál by. Náš soupeř může odebrat z jedné hromádky i 3 sirky, v takovém případě zareagujeme odebráním 2 sirek z druhé hromádky, pro soupeře necháme na stole jednu poslední sirku a vyhrajeme. Tato pozice je rozebrána na obr. 4.6.

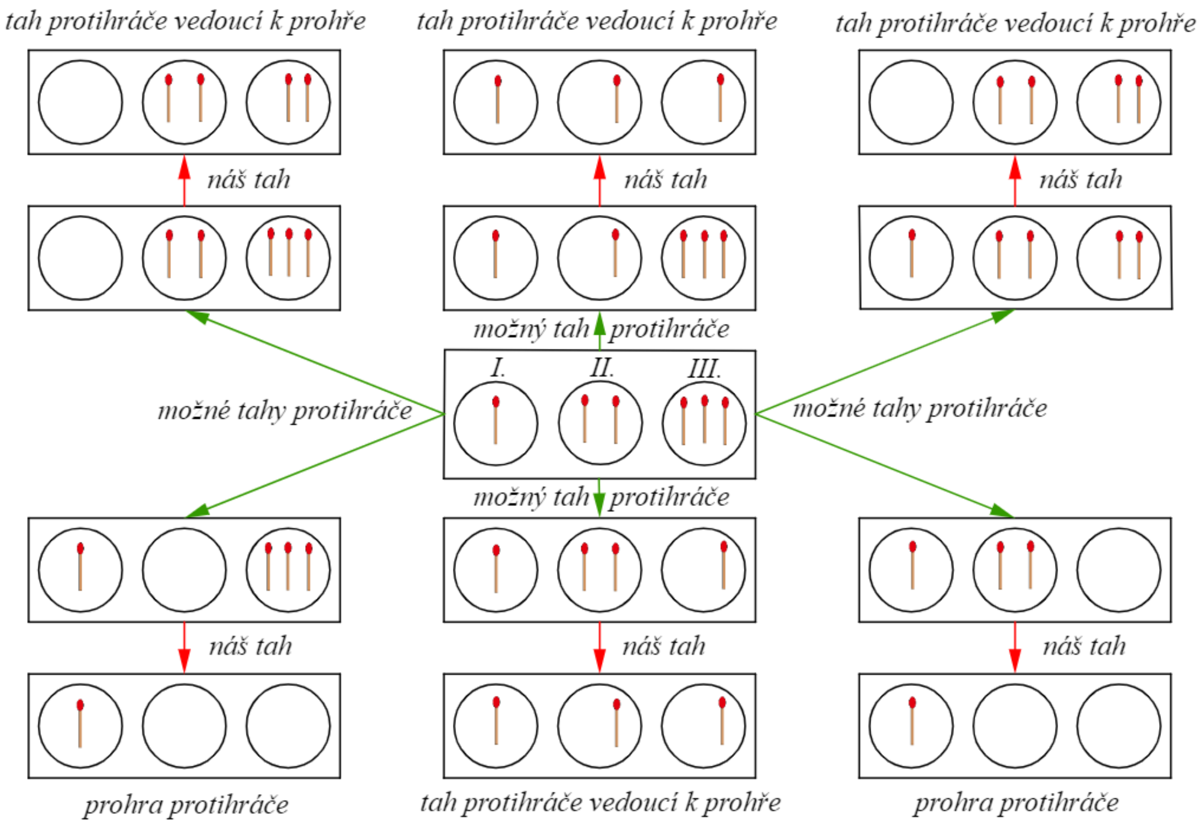
Můžeme si ale výhru zajistit ještě jednou strategií, zanecháme-li na stole po svém tahu v jedné hromádce 1 sirku, ve druhé hromádce 2 sirky a ve třetí hromádce 3 sirky. Nyní existuje více možností, ale všechny z nich mohou být nakonec pro našeho soupeře prohrávající, podaří-li se nám na jeho tahy správně zareagovat. Budeme se snažit reagovat tak, abychom soupeře dostali do některé z výše rozebraných pozic.



Obrázek 4.6: *Prohrávající pozice hráče s dvěma hromádkami po 3 sirkách*

Soupeř může odebrat 1 sirku z první hromádky. My v takovém případě máme možnost odebrat 1 ze tří sirek ve třetí hromádce, čímž na stole pro soupeře zanecháme právě dvě hromádky po 2 sirkách, což jak už víme, je pro nás jistá výhra. Kdyby soupeř odebral 1 ze dvou sirek ve druhé hromádce, můžeme odebrat 2 ze tří sirek ve třetí hromádce a tím nechat na stole v každé ze tří hromádek právě 1 sirku, soupeř tak opět prohraje. Náš soupeř se ale může rozhodnout odebrat 1 ze tří sirek ve třetí hromádce. My pak můžeme odebrat 1 sirku v první hromádce, nechat na stole dvě hromádky po 2 sirkách a zajistit si tak výhru. Náš protihráč může ale odebrat i více než 1 sirku. Třeba 2 sirky z druhé hromádky. My můžeme odebrat všechny 3 sirky ze třetí hromádky a našemu protihráči nechat na stole poslední sirku v první hromádce. Kdyby protihráč odebral 2 sirky ze tří ve třetí hromádce, mohli bychom vzít 1 sirku z druhé hromádky a nechat na stole v každé ze tří hromádek právě 1 sirku. Nakonec ještě existuje možnost, že náš soupeř odebere ve svém tahu ze třetí hromádky všechny 3 sirky. My pak můžeme z druhé hromádky odebrat obě 2 sirky a svému soupeři opět nechat na stole poslední sirku v první hromádce. Všechny tyto možnosti můžeme vidět na obr. 4.7.

Hra NIM se 3 hromádkami je vlastně jen rozšířením hry „Jedenáct sirek“. Obě tyto hry mají stejný princip, v každém tahu lze odebrat předem určený počet sirek a obě hry vyhrává hráč, který nechá svému soupeři na stole poslední sirku. Je jen na nás, kolik hromádek si na stole ze sirek vytvoříme a jaký nejvyšší možný počet odebraných sirek si pro naši hru zavedeme.



Obrázek 4.7: *Prohrávající pozice hráče s 1 sirkou v I., 2 sirkami ve II. a 3 sirkami ve III. hromádce*

4.3 Sudá vyhrává

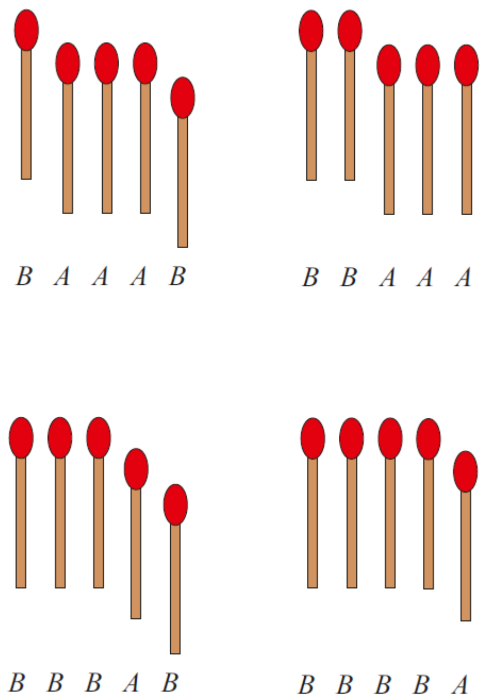
Zadání:

Na stole leží 27 sirek. Dva hráči střídavě odebírají jednu až čtyři sirky dle libosti a odkládají si je na hromádky. Vyhrává hráč, který má po skončení hry ve své hromádce odebraný sudý počet sirek.

Vítězná strategie:

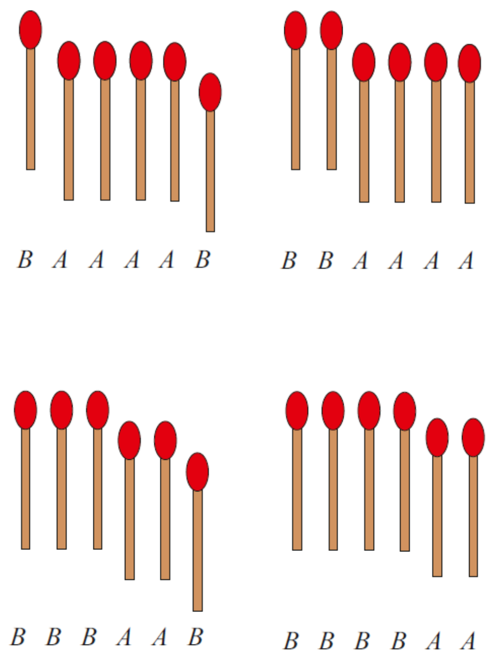
Pro nalezení vítězné strategie začínajícího hráče použijeme opět metodu zpětného rozboru. Při jednom tahu je dovoleno odebrat nejvýše čtyři sirky. Rozebereme si nyní situace, kdy na stole zůstane pět, šest a sedm sirek.

Na stole nyní zůstalo pět sirek. Hráči již dvacet dva sirek rozebrali. Nechť je hráč B právě na tahu. Vzhledem k rozebranému počtu sirek jsou dvě možnosti, kdy mají hráči buď oba lichý počet sirek, nebo oba sudý počet sirek. Kdyby měli oba hráči lichý počet sirek a hráč B byl tedy na tahu, zajistil by si hráč A jisté vítězství, neboť by vždy docílil toho, že na jeho soupeře by zbyla jedna sirka. Tím by sám u sebe zachoval sudý počet sirek, hráč B by však skončil hru s lichým počtem sirek, a tak by prohrál. Tuto situaci lze vidět znázorněnou na obr. 4.8. Pokud by měli oba hráči sudý počet zápalek, měl by hráč B možnost z pěti sirek na stole odebrat čtyři, a tím si tak zajistit vítězství, neboť na hráče A by zbyla jedna sirka a dohromady by pak měl sudý počet sirek. Hráč A by tedy v tomto případě prohrál.



Obrázek 4.8: *Prohrávající pozice hráče B s lichým počtem sirek a 5 sirkami na stole*

Kdyby na stole zůstalo šest sirek a dvacet jedna sirek už by si hráči rozebrali, opět by bylo možné rozdělit tento případ na dvě možnosti. U první možnosti by měl hráč A sudý počet sirek a hráč B lichý počet sirek. Nechť je na řadě hráč B. Ať odebere jednu, dvě, tři nebo čtyři sirky, stejně bude v prohrávající pozici a hráč A vyhraje, protože se mu podaří si zajistit konečný sudý počet sirek. Tyto možnosti, kdy hráč A vyhrává se šesti sirkami na stole, zatímco je na řadě hráč B, jsou znázorněné na obr. 4.9. Ale kdyby měl hráč A lichý a hráč B suchý počet sirek, hráč B by mohl odebrat ze stolu jednu sirku a svého protihráče tím dostat do prohrávající pozice s pěti sirkami, která již byla znázorněna na obr. 4.8.



Obrázek 4.9: *Prohrávající pozice hráče B s lichým počtem sirek a 6 sirkami na stole*

Nyní máme situaci, kdy na stole zůstalo sedm sirek, hráči si již dvacet sirek rozebrali. Opět to rozdělíme na dvě situace, kdy mají oba hráči sudý a následně oba hráči lichý počet sirek. Kdyby měli oba sudý počet sirek a hráč B by byl na řadě, pro hráče A by se jednalo o vítěznou pozici. Ať by totiž hráč B vzal ze stolu jakýkoli počet sirek, hráč A by si dokázal zajistit vítězství. Vezme-li hráč B ze stolu jednu sirku, hráč A může také odebrat jednu, a tak po svém tahu zanechat na stole pět sirek a tím dostat hráče do prohrávající pozice, kterou už jsme si popsali výše. Kdyby hráč B odebral ze stolu dvě sirky, hráč A by si pak mohl vzít čtyři, docílit konečného sudého počtu a tím vyhrát. Stejně tak by tomu mohlo být, kdyby hráč B vzal tři sirky. U čtyřech odebraných sirek hráčem B by byla situace podobná, hráč A by si mohl vzít dvě a tím opět docílit sudého počtu sirek, neboť pro jeho protihráče by ještě jedna sirka zbyla. V případě, že by měli oba hráči lichý počet sirek, by si naopak zajistil vítěznou pozici hráč B.

Další situace si může každý čtenář zkusit rozebrat sám. Brzy bychom zjistili, že se výherní strategie opakují. Už z těchto několika rozebraných případů vyplývá, že hráč A vyhrává vždy, má-li jeho protihráč lichý počet sirek. Kdybychom pokračovali ve vypisování jednotlivých případů dále, došli bychom k závěru, že hráč A si zajistí výhru, zanechá-li svému soupeři na stole počet sirek o jednu menší než některý z násobků šesti. Když má soupeř sudý počet sirek, hráči A se nabízí možnost odebrat tolik sirek, aby na druhého hráče zbyl počet o jednu větší než některý z násobků šesti. Nebyla-li by v daném tahu možná ani jedna z těchto možností, hráč A by měl odebrat alespoň takový počet sirek, aby na hráče B zbyl počet sirek dělitelný šesti.

A jaký by měl být první tah začínajícího hráče, aby ho dovedl k vítězství? Zjistíme to s využitím výše vypsaných strategií. Pro hráče A by bylo nevýhodné odebrat z dvaceti sedmi sirek jen jednu, neboť hráč B by pak mohl odebrat dvě, na hráče A by zbylo dvacet čtyři sirek a už by se nemohl dostat na počet devatenáct, který by byl vítězný. Stejně tak by pro něho bylo nežádoucí odebrat tři nebo čtyři sirky, neboť i těmito způsoby by se dostal do prohrávající pozice. Jedinou vhodnou strategií by pro začínajícího hráče bylo v prvním tahu odebrat dvě sirky. Na jeho protihráče by zbylo dvacet pět sirek, což je násobek šesti zvětšený o jedno, a to odpovídá výherní strategii.

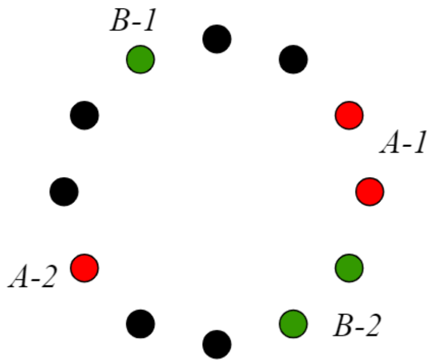
4.4 Kruh

Zadání:

Dva hráči uspořádají libovolný počet stejných předmětů (např. kamenů) do kruhu. Z kruhu pak střídavě odebírají jeden nebo dva kameny. V případě dvou kamenů je možné odebrat pouze kameny ležící vedle sebe, tzn. takové, mezi kterými není žádný jiný další kámen ani mezera. Hru vyhrává hráč, který odebere poslední kámen.

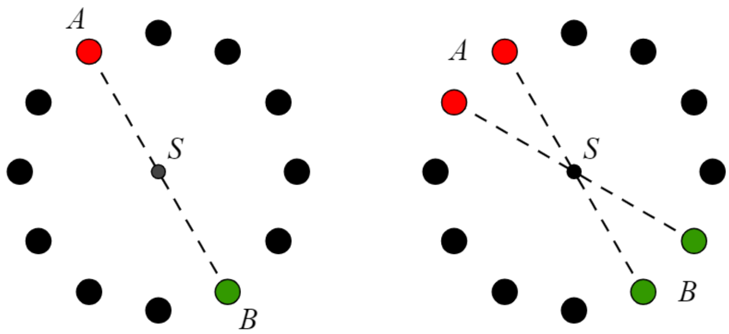
Vítězná strategie:

Mějme například 12 stejných kamenů, které jsou uspořádány do kruhu. Představme si, jak hra v tomto případě může vypadat na následujícím příkladu. Hráč A se může rozhodnout ve svém prvním tahu odebrat dva kameny, které leží vedle sebe, což je znázorněno na obr. 4.10 jako *A-1*. Hráč B odebere řekněme jen jeden kámen, což vidíme na obr. 4.10 znázorněné jako *B-1*. Hráč A pak odebere třeba jeden kámen (*A-2*), hráč B dva kameny (*B-2*) atd., dokud nezbude poslední jeden nebo dva vedle sebe ležící kameny na hráče A, který hru vyhraje. Jak by si mohl zajistit vítězství druhý hráč?



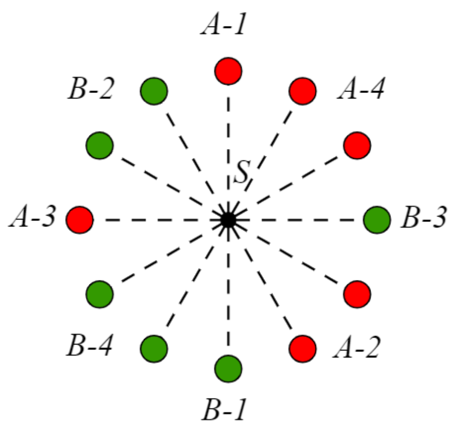
Obrázek 4.10: *Příklad hry s 12 kameny*

Hráč B může své tahy přizpůsobit tomu, jaké tahy provedl hráč A. V prvním kole bude pro hráče B výhodné využít poznatky ze středové souměrnosti. Kameny jsou uspořádány v hracím poli do tvaru kruhu, uprostřed něhož si můžeme představit střed a ten využít jako střed středové souměrnosti. Odebere-li hráč A ve svém prvním tahu z kruhu jeden kámen, hráč B odebere také jeden kámen, ležící ve středové souměrnosti se vzniklou mezerou po tahu prvního hráče, jak vidíme na obr. 4.11 vlevo. Kdyby hráč A odebral ve svém prvním tahu dva kameny, hráč B by odebral také dva kameny, které leží opět ve středové souměrnosti se vzniklými mezerami po tahu začínajícího hráče. Tuto možnost vidíme na obr. 4.11 vpravo.



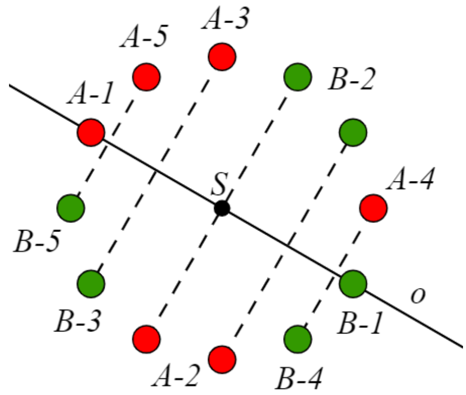
Obrázek 4.11: *Využití středové souměrnosti v prvním kole hry*

Prohlédneme-li si levou i pravou stranu obr. 4.11 pečlivě, možná si všimneme, že použitím středové souměrnosti ve svém tahu hráč B rozdělil hrací pole na dvě stejné hromádky. A to je přesně ten postup, jakým si hráč B zajistí výhru. Poté už jen stačí vždy správně zareagovat na tah začínajícího hráče, který když z jedné hromádky kamenů na hracím poli jeden nebo dva odebere, druhý hráč udělá totéž s odpovídajícími kameny ve druhé hromádce, aby zachoval v kruhu středovou souměrnost. V takové hře hráč B vždy vyhraje, aniž by mu mohl hráč A nějak vítězství překazit. Příklad takové hry, kdy hráč B využije své poznatky středové souměrnosti a vyhraje, je zobrazen na obr. 4.12. U jednotlivých kamenů je opět barevně vyznačeno, který hráč kameny odebral, a napsáno, ve kterém kole hry k tomuto odebrání došlo.



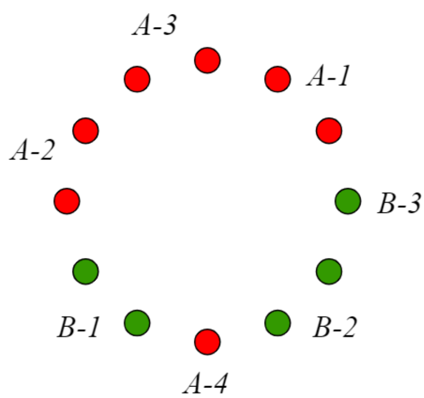
Obrázek 4.12: *Vítězná strategie hráče B s využitím středové souměrnosti*

Aby začínající hráč tak snadno strategii s využitím středové souměrnosti neodhalil, můžeme ve hře využít i poznatky z osové souměrnosti a ve svých jednotlivých tazích obě souměrnosti střídat. V prvním kole musíme vždy použít středovou souměrnost. Tím rozdělíme kameny v kruhu na dvě hromádky a osu souměrnosti si představíme procházet skrz vzniklá prázdná místa po odebraných kamenech. Nyní už může hráč B využívat osovou souměrnost. Odebere-li začínající hráč ve svém tahu např. dva kameny z jedné hromádky, druhý hráč odebere z druhé hromádky dva kameny ležící s nimi v osové souměrnosti. Příklad takové hry, kdy druhý hráč nejprve v prvním tahu využije středovou souměrnost a v následujících tazích pak osovou souměrnost, je zobrazen na obr. 4.13. Využití kombinace poznatků osové a středové souměrnosti funguje jen tehdy, když druhý hráč po každém svém tahu opravdu nechává dvě hromádky kamenů v kruhu, které vznikly po prvním kole, stejné. Jakmile



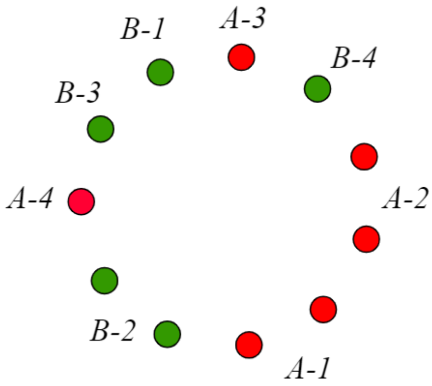
Obrázek 4.13: *Vítězná strategie hráče B s využitím středové a osové souměrnosti*

by se mu stalo, že v jedné hromádce by bylo méně nebo více kamenů, než ve druhé hromádce, už by nevyhrál, nebo by pro něj bylo velmi obtížné v příštích tazích svou chybu napravit. Stejně tak kdyby po tahu druhého hráče na stole v jedné hromádce zbyl sice stejný počet kamenů jako ve druhé, ale jinak uspořádaných, prohrál by. Příklad hry, kdy sice druhý hráč svůj první tah provede správně, ale ve svém druhém tahu už udělá chybu, vidíme na obr. 4.14. Po druhém kole vznikly v hracím poli dvě různé hromádky. Začínající hráč využil ve svém dalším tahu možnosti odebrat dva sousedící kameny a nechat pro svého protihráče dva kameny daleko od sebe, čímž si pojistil, že na něj jeden z těchto kamenů na hracím poli zbude a jeho protihráč B tak prohraje.



Obrázek 4.14: *Příklad chybného tahu druhého hráče B a jeho následné prohry*

Počet kamenů na hracím poli může být i lichý. V takovém případě může druhý hráč také uplatnit předchozí vítězné strategie, bude-li se opět řídit pravidlem rozdělení kamenů v kruhu na dvě stejné hromádky. Když začínající hráč odebere ve svém prvním tahu z kruhu jeden kámen, druhý hráč může zareagovat odebráním dvou kamenů tak, aby svým tahem zbylé kameny rozdělil na dvě stejné hromádky. Odebere-li začínající hráč ve svém prvním tahu dva kameny, druhý hráč odebere jen jeden kámen podle stejného pravidla. Příklad hry s 11 kameny, která skončí vítězstvím hráče B, můžeme vidět na obr. 4.15.



Obrázek 4.15: *Vítězná strategie hráče B ve hře s 11 kameny*

Tato hra může ve škole posloužit i jako motivace při výuce osové a středové souměrnosti, na níž je založená vítězná strategie.

5 Geometrické hry

V této kapitole se seznámíme s geometrickými hrami, které se hrají na čtverečkových hracích polích.

5.1 Obtahování čtverců

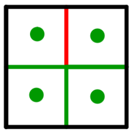
Zadání:

Hrací plochou této hry je pravoúhlý obrazec libovolného tvaru, složený ze čtvercových políček. Dva hráči střídavě obtahují tužkou strany vnitřních políček. Každým tahem mohou obtáhnout jednu stranu. Okrajové strany hrací plochy se považují za již obtažené. Když hráč obtáhne poslední zbývající stranu čtverečku, považuje ho za svůj, libovolně si ho označí a pokračuje ještě jedním tahem. Hru vyhrává hráč, který zabral více čtverečků než jeho protihráč.

Vítězná strategie:

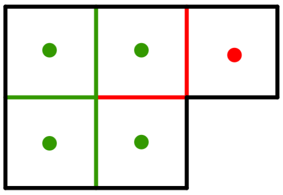
Tato hra je tím složitější, čím větší je zvolená hrací plocha. Proto si nejprve ukažme nejjednodušší případy.

Mějme jako hrací plochu čtverec složený ze 4 čtvercových políček. První tah provede hráč A obtažením libovolné vnitřní strany jednoho ze čtverečků. Tím na hrací ploše vzniknou dva čtverečky se 3 stranami již obtaženými, neboť vnější okraje považujeme za obtažené od samého počátku hry. Hráči B tak stačí obtáhnout čtvrtou stranu jednoho z těchto čtverečků. Ten je nyní kompletně obtažený, hráč B si ho označí jako svůj a může pokračovat dalším tahem. Nyní má v hracím poli opět dva čtverečky, u nichž mu stačí obtáhnout tužkou zbývající čtvrtou stranu. Nově vzniklý obtažený čtvereček si zase označí a opět pokračuje dalším tahem. Při tom obtáhne zbývající stranu mezi dvěma čtverečky, čímž získá dva celé obtažené čtverečky jedním tahem. Nyní už jsou v hracím poli všechny strany obtažené a hráč B vyhrál, protože má označené všechny 4 čtverečky. V tomto případě, kdy je hrací pole ve tvaru čtverce o 4 čtverečcích, vždy vyhraje druhý hráč. Tato situace je zobrazena na obr. 5.1.



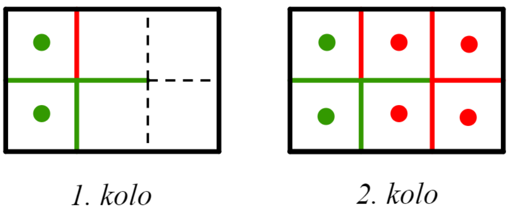
Obrázek 5.1: *Příklad hry na hracím poli se 4 políčky*

Nyní navýšíme počet čtverečků v hracím poli na 5. Tato situace je opět rozebrána na obr. 5.2. Hráč A pravděpodobně ve svém prvním kroku obtáhne zbývající čtvrtou stranu přečnívajícího čtverečku. Označí si vzniklý čtvereček za svůj a provede ještě jeden tah. V tu chvíli se opakuje předchozí situace s hracím polem se 4 čtverečky. Hráč B obsadí všechny zbývající 4 čtverečky a vyhraje. I pokud by hráč A ve svém prvním tahu obtáhl jinou stranu, hráč B by vyhrál. Začínající hráč tedy na tomto hracím poli s 5 čtverečky vždy prohraje.



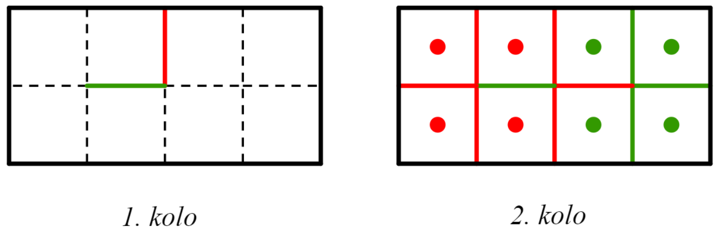
Obrázek 5.2: *Příklad hry na hracím poli s 5 políčky*

Na hracím poli se 6 políčky ve tvaru obdélníku se situace mění. Hráč A totiž hru vždy vyhraje bez ohledu na svůj počáteční tah. Hráč B sice může obsadit 2 políčka, jenže ve zbylém čtverci o 4 políčkách nastává nám už známá situace, ze které tentokrát hráč A vychází jako vítěz. Tento případ je opět zobrazený na obr. 5.3.



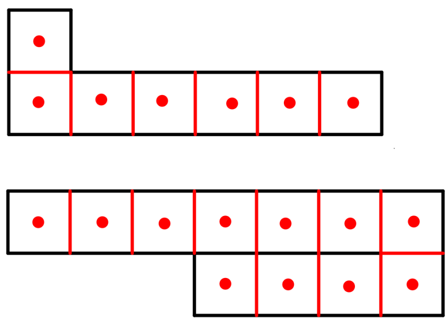
Obrázek 5.3: *Příklad hry na hracím poli se 6 políčky ve tvaru obdélníka*

Budeme-li mít hrací pole ve tvaru obdélníka o 8 čtverečcích, začínající hráč nevyhraje. Může ale remizovat, a to když ve svém prvním tahu obtáhne jednu ze dvou prostředních stran, které rozdělují obdélník na dva shodné čtverce se 4 políčky. Druhý hráč může poté obtáhnout libovolnou další stranu, hra ale vždy skončí remízou. Hráč B obsadí 4 políčka ve tvaru čtverce na jedné straně a hráč A zbývající čtyři políčka na druhé straně hrací plochy. Tento postup si můžeme prohlédnout na obr. 5.4. Kdyby však hráč A ve svém prvním tahu obtáhl jinou stranu v obdélníku, skončila by hra ve prospěch druhého hráče.



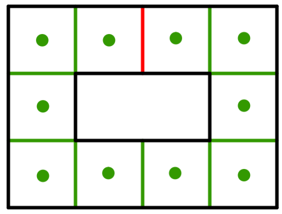
Obrázek 5.4: *Příklad hry na hracím poli s 8 políčky ve tvaru obdélníka*

Hrací pole však může mít různé tvary. Jedním z nich je tzv. kanál, jehož dva příklady jsou zobrazeny na obr. 5.5, včetně toho, jak by hra s takovým hracím polem mohla vypadat. Kanál může mít různou podobu, vždy však skončí výhrou začínajícího hráče, neboť na druhého se tah vůbec nemusí dostat. Aby hráč A vyhrál, musí svým prvním tahem uzavřít jedno z krajních políček a pokračovat vedlejšími, dokud neobsadí všechna pole.



Obrázek 5.5: *Příklad hry na hracím poli ve tvaru kanálu*

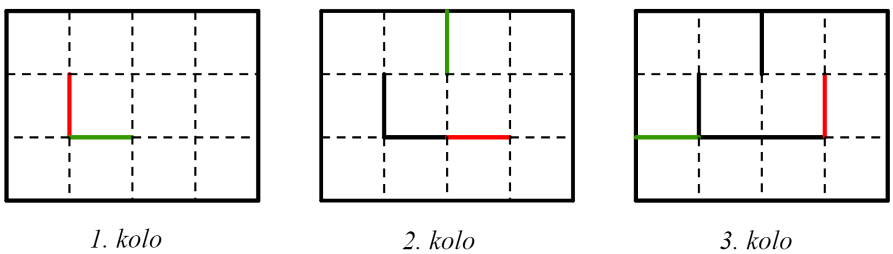
Kanál však může být i propojený. V takovém případě vyhrává vždy druhý hráč. Začínající hráč totiž svým prvním tahem druhému hráči umožní obsadit všechna políčka na hracím poli. Ukázku propojeného kanálu vidíme na obr. 5.6.



Obrázek 5.6: *Příklad hry na hracím poli ve tvaru propojeného kanálu*

Nyní jsme si představili základní jednoduché tvary hrací plochy. Postupy, které jsme využívali k dosažení vítězství, je pak možné aplikovat i na složitějších hracích plochách. Mohli bychom totiž promyšlenými tahy rozdělit hrací pole na některý ze základních obrazců. Podaří-li se nám, abychom vstoupili do tohoto jednoduššího tvaru s vyhrávající strategií, máme výhru jistou.

Uveďme si příklad hry na hracím poli ve tvaru obdélníka o 12 čtverečcích, který vidíme na obr. 5.7. Hrajme jako začínající hráč (na obrázku červené tahy). Pokusíme se svými tahy, s využitím protihráčových tahů (zeleně) hrací plochu přetvořit na kanál, do kterého vstoupíme jako vítězové. Hráč B, nebude-li znát žádnou výherní strategii, bude pravděpodobně postupovat tak, aby nám svým tahem neumožnil získat žádný čtvereček. Proto si bude ve svých tazích nejspíše vybírat takové strany, jako na obrázku. Tím nám umožní z hrací plochy ve třetím kole utvořit propojený kanál, v němž jakmile hráč B udělá libovolný tah, my v dalším kole obsadíme všechny čtverečky.



Obrázek 5.7: *Ukázka vítězné strategie hráče A*

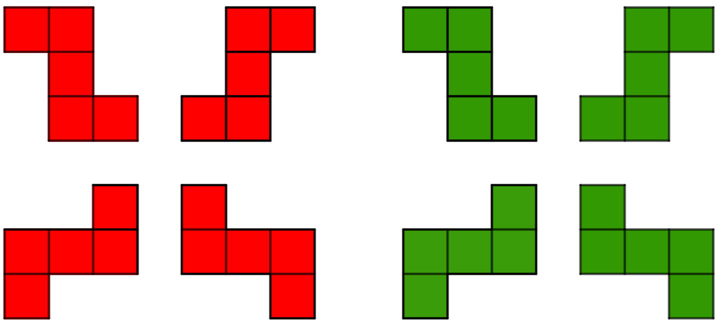
5.2 Zetka

Zadání:

Dva hráči hrají na čtvercové síti o 9 řádcích a 11 sloupcích. Každý hráč má k dispozici ve své barvě dostatečné množství zetek, tj. útvarů složených z 5 čtverečků ve tvaru písmene Z. Tato zetka hráči střídavě po jednom umísťují na volná místa hrací plochy. Zetka lze umístit pouze na neobsazené čtverečky, a to tak, aby do sítě svými hranami přesně pasovala. Hráči se snaží svými zetky ohraničit v hrací síti nějakou volnou plochu, do které se už žádné zetko nevejde. V takto ohraničené ploše si pak označí svým symbolem všechny čtverečky. Hra končí v okamžiku, kdy už není možné na hrací plochu vložit žádné další zetko. Vyhrává hráč, který má v hrací ploše nejvíce svých symbolů.

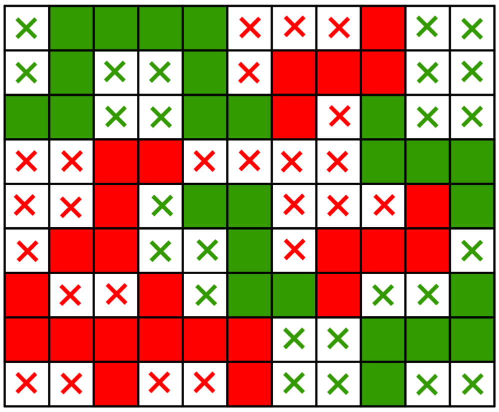
Strategie:

Na obr. 5.8 vidíme zobrazená barevně rozlišená zetka obou hráčů a všechny jejich možné polohy umístění do hrací plochy. Hrajme jako hráč A s červenou barvou.



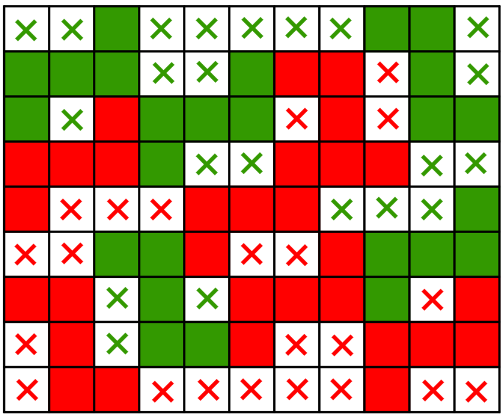
Obrázek 5.8: *Zetka obou hráčů a jejich možné polohy umístění do hrací plochy*

Když si hru zkusíme zahrát, aniž budeme používat nějakou promyšlenou strategii, ale vždy se budeme rozhodovat jen pro nejvhodnější tah v daném kole, prohrajeme. Hráč B, používající zetka zelené barvy, obsadí svými symboly více uzavřených ploch. Příklad takové hry vidíme na obr. 5.9. Jako začínající hráč hru nikdy nevyhrajeme. Můžeme však použít remizující strategii, čímž zajistíme, že ani druhý hráč hru nevyhraje a Zetka skončí remízou. Taková strategie je založená na dodržování středové



Obrázek 5.9: *Příklad hry s výhrou hráče B*

souměrnosti. Využijeme toho, že hrací plocha má střed, neboť se skládá z lichého počtu řádků i sloupců. V našem prvním kroku vložíme libovolnou polohu zetka doprostřed hrací plochy tak, aby byl střed hrací plochy zakrytý a tvar byl středově souměrný, přičemž středem středové souměrnosti je prostřední políčko hrací plochy. Druhý hráč pak umístí někam na hrací plochu své zetko. My musíme zareagovat položením zetka ve středové souměrnosti se středem hrací plochy. Takto středově souměrně s protihráčovým provedeme každý následující tah. Poslední tah bude náležet nám. Hra dopadne remízou, neboť my i náš protihráč budeme mít stejný počet obsazených čtverečků. Takovou variantu hry, která skončí remízou, máme rozebranou na obr. 5.10.



Obrázek 5.10: *Příklad hry s remízou*

6 Ostatní hry

V této kapitole je uvedena matematická hra, která tematicky nespadá do žádné z předchozích kategorií.

6.1 Tři v řadě

Zadání:

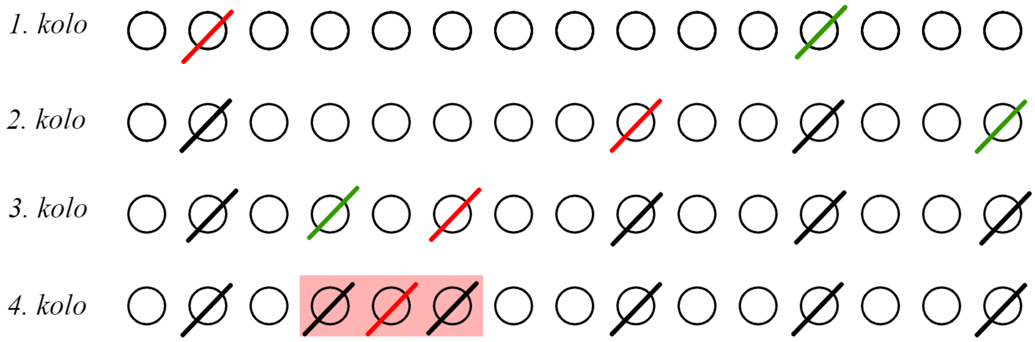
Hru hrají dva hráči, kteří si na papír nakreslí řadu 15 koleček. Střídavě pak přeškrtávají vždy jedno kolečko. Vyhrává hráč, který jako první vytvoří 3 sousedící přeškrtnutá kolečka, bez ohledu na to, kdo přeškrtl dvě předešlá.

Vítězná strategie:

Nejprve se zamysleme nad tím, jaké tahy jsou pro nás nežádoucí. Přeškrtneme-li kolečko, které leží vedle již přeškrtnutého kolečka, prohrajeme, neboť protihráč bude moci ve svém tahu přeškrtnout sousedící kolečko a tím vzniknou tři sousedí přeškrtnutá kolečka. Podobně tomu bude, přeškrtneme-li kolečko ob jedno vzdálené od již přeškrtnutého kolečka. Protihráč bude moci přeškrtnout prostřední kolečko a opět vyhraje. Tyto prohrávající tahy jsou zobrazeny na obr. 6.1.

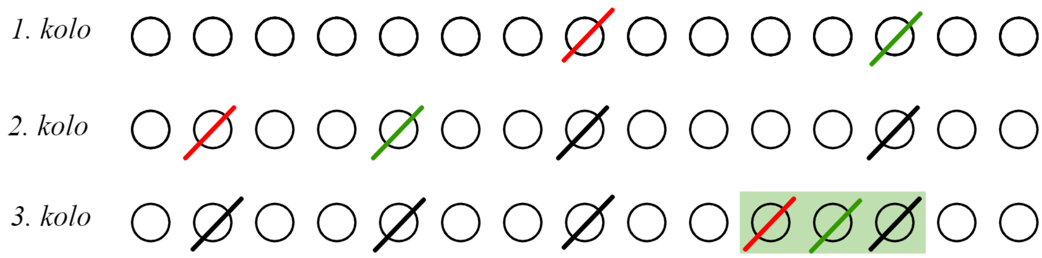
Obrázek 6.1: *Prohrávající tahy*

Pro nás je tedy žádoucí dostat do prohrávající pozice protihráče. Hrajeme-li jako hráč A, bude to snadné, nepromyslí-li si dostatečně druhý hráč svůj první tah. My můžeme svůj první tah udělat libovolný. Označí-li náš protihráč ve svém prvním tahu např. kolečko, které je zobrazeno na obrázku, můžeme v našem dalším tahu označit kolečko ležící o tři místa v řadě vedle něho. Hráč B pak bude také nucen označit kolečko ležící o tři místa vedle některého z již označených koleček, aby nebyl jeho tah prohrávající. Pro nás v dalším kroku existuje ještě jedno takové kolečko, které můžeme přeškrtnout, aby jeho vzdálenost od ostatních již přeškrtnutých koleček byla nejméně tři místa. Na našeho protihráče už však takové volné kolečko nezbude. Dostal se do prohrávající pozice a ať nyní přeškrtne jakékoli kolečko, vyhrajeme my. Příklad takové hry je zobrazen na obr. 6.2.



Obrázek 6.2: *Vyhrávající strategie hráče A*

Představme-si nyní, že hrajeme jako druhý hráč. Budeme-li od začátku následovat promyšlenou strategii, dovede nás k výhře. Ať začínající hráč ve svém prvním tahu přeškrtne jakékoli kolečko, pro nás je výhodné přeškrtnout kolečko nacházející se v řadě o 5 míst dále, než kolečko přeškrtnuté začínajícím hráčem. Mezi těmito dvěma přeškrtnutými kolečky tak vznikne mezera o 4 volných kolečkách. Tuto situaci máme v obr. 6.3 znázorněnou v *1. kole*. V té je pro začínajícího hráče i pro nás



Obrázek 6.3: *Vyhrávající strategie hráče B*

nevýhodné provést nějaký škrt, tím by se totiž takový hráč ocitl v prohrávající pozici. Začínající hráč ve svém dalším tahu přeškrtne libovolné kolečko, samozřejmě tak, aby hned následně neprohrál, a my můžeme zareagovat přeškrtnutím kolečka nacházejícího se o 3 místa vedle, jako je zobrazeno na obrázku. Začínajícímu hráči na začátku 3. kola nezbude nic jiného, než přeškrtnout nějaké kolečko nacházející se ob jedno od již přeškrtnutého, nebo kolečko ležící přímo vedle již přeškrtnutého. My pak můžeme doplnit chybějící škrt do tří v řadě a hru vyhrajeme.

7 Seznam použité literatury a zdrojů

ČVUT (2018): Kombinatorické hry.

www.cw.fel.cvut.cz/old/courses/a4b36acm/kombinatoricke_hry.

EASTAWAY, R. (2016): Matematika na cesty. Dobrovský, Knihy Omega, Praha.

GARDNER,M. (2018): Zábavné matematické hádanky. Dokořán, Praha.

GATIAL, J., HECHT, T., HEJNÝ, M. (1982): Hry takmer matematické. Mladá Fronta, Praha.

CHVOJ, M. (2013): Pokročilá teorie her ve světě kolem nás. Grada, České Budějovice.

KORDĚMSKIJ, B. (1966): Matematické prostocviky. Mladá Fronta, Praha.

SKÁLOVÁ, A. (2014): Teorie her pro nadané žáky středních škol. Diplomová práce. MFF UK, Praha.

VALIŠOVÁ, A., VALENTA, J. (2011): Metody vyučování a jejich modernizace. In: VALIŠOVÁ, A. a kol.: Pedagogika pro učitele. Grada, Praha, 191-212.

VANKÚŠ, P. (2008): Matematické hry a analýza ich stratégie na úrovni stredoškolskej matematiky. In: 2. zborník príspevkov štipendistov z projektu JPD 3 BA 2005/1-043. Centrum projektovej podpory FMFI UK. Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 110-114.

VÁVROVÁ, A. a kol. (2006): Hry ve vyučování matematice jako významná strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáků. Projekt Podíl učitele matematiky na ZŠ na tvorbě ŠVP. JČMF, Praha.